PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **11** (1983/1984)
Številka 2
Strani 67–72

Ivan Pucelj:

KROG IN KOCKA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/11/647-Pucelj.pdf

MATEMATIKA

KROG IN KOCKA

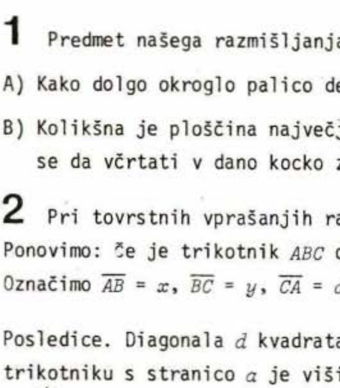
1 Predmet našega razmišljanja sta nalogi:

A) Kako dolgo okroglo palico debeline d lahko še spravimo v kocko z robom a?

B) Kolikšna je ploščina največjega kvadrata (kroga, šestkotnika, romba), ki se da včrtati v dano kocko z robom a?

2 Pri tovrstnih vprašanjih rabimo Pitagorov izrek in njegove posledice. Ponovimo: Če je trikotnik ABC ob oglišču B pravokoten, je $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$. Označimo $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CA} = d$, pa imamo $x^2 + y^2 = d^2$.

Posledice. Diagonala d kvadrata s stranico a je $d = \sqrt{2}a$. V enakostraničnem trikotniku s stranico a je višina $v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$, polmer očrtanega kroga $r_o = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a$, polmer včrtanega kroga $r_v = r_o/2$, ploščina $p = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$.



Slika 1

Postavimo skozi oglišče C na ravnino trikotnika ABC pravokotnico $\overline{CD} = z$. Potem je $x^2 + y^2 + z^2 = \overline{AD}^2$.

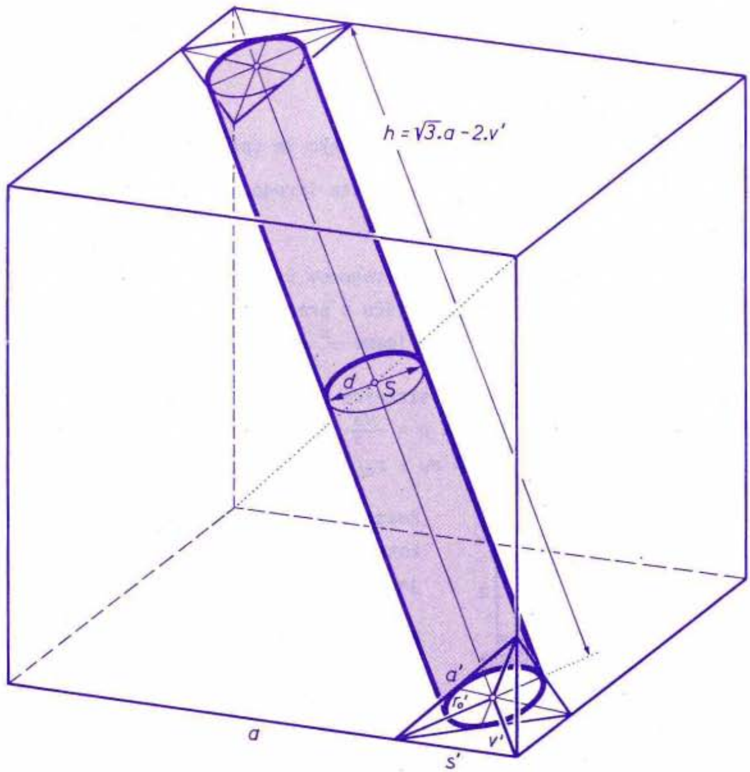
Posledice. Telesna diagonala d kvadra z robovi a, b, c ustreza enakosti $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (Slika 1).

Telesna diagonala kocke z robom a pa je $d = \sqrt{3}a$.

3 Zdaj se lotimo naloge A) pri pogoju, da je palica tanka! Palico debeline d spravimo v kocko v smeri telesne diagonale, saj domnevamo, da je lahko v tem primeru dolžina h palice najdaljša! Iz slike 2 preberemo zveze: $\frac{1}{2}\,d = \frac{\sqrt{3}}{6}\,a'$, oziroma $a' = \sqrt{3}d$; $a' \le \sqrt{2}a$, $r_o' = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a'$, $a' = \sqrt{2}s'$ in

$r_0' = d$, $s' = \sqrt{3}d/\sqrt{2} = \sqrt{6}d/2$; končno $v'^2 = s'^2 - r_0'^2 = 2d^2/4$, $v' = \sqrt{2}d/2$. Od tod dobimo za dolžino h palice $h = \sqrt{3}a - 2v'$, ali $h = \sqrt{3}a - \sqrt{2}d$. To velja pri pogoju, da je $a' \leq \sqrt{2}a$, torej $\sqrt{3}d \leq \sqrt{2}a$, ali $d \leq \frac{\sqrt{6}}{3}\,a \doteq 0{,}817a$.

4 Diskusija. Pri $a' = \sqrt{2}a$ dobimo, da je $\frac{1}{2}\,d = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a$ in $d = \frac{\sqrt{6}}{3}\,a$. Torej je $h = \sqrt{3}a - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{6}}{3}\,a = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a$. V tem primeru je dolžina h enaka tretjini telesne diagonale kocke.



Slika 2

4.1 Poglejmo, kolikšna je lahko debelina palice, če je največja dolžina h v mejah $a \leq h \leq \sqrt{3}a$ in smo palico spravili v kocko "diagonalno". Imamo $a \leq \sqrt{3}a - \sqrt{2}d \leq \sqrt{3}a$, oziroma $0 \leq \sqrt{2}d \leq (\sqrt{3} - 1)a$. Sledi

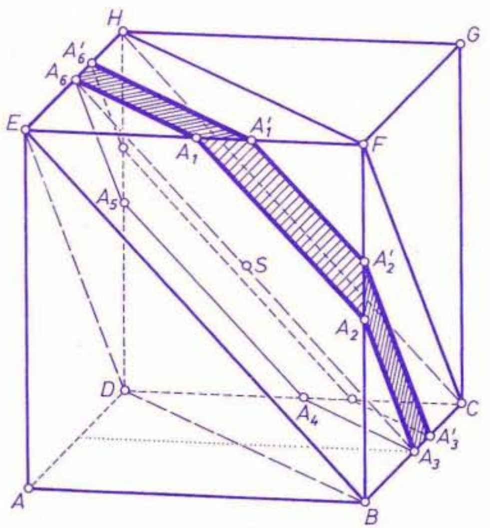
$$0 \leq d \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} a = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} a = \frac{\sqrt{6} - 2}{2} a \doteq 0{,}518a$$

Debelina d je v teh primerih v mejah med 0 in $\sqrt{2}a\sqrt{3}/3 = \sqrt{6}a/3 \doteq 0{,}817a$.

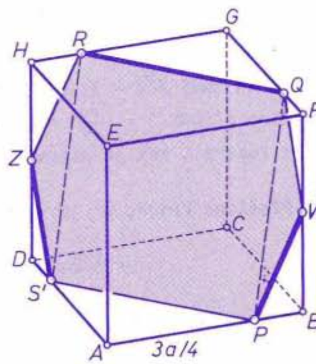
4.2 Lotimo se možnosti $\sqrt{3}a/3 < h < a$. Potem je zaradi omejitve $d \leq \sqrt{6}a/3$ in zaradi $\sqrt{2}d = \sqrt{3}a - h$, $d = \frac{\sqrt{3}a - h}{\sqrt{2}}$ debelina d v mejah $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} a < d < \frac{\sqrt{6}}{3} a$, ali $0{,}518a < d < 0{,}817a$. V teh primerih lahko spravimo palico kar "naravnost" (to pomeni pravokotno na stransko ploskev kocke) v kocko!

5 Pa denimo, da je zdaj debelina d palice večja od $\frac{\sqrt{6}}{3} a$. Kako določimo največjo dolžino h v teh primerih? Proučimo možnost, da je palica "vložena" v smeri telesne diagonale (tako, da je središčnica palice v telesni diagonali; središčnica je daljica, ki veže središči mejnih krogov palice)!

Označimo v kocki $ABCDEFGH$ njeno središče S in poglejmo ravninski presek skozi S, vzporedno z ravninama trikotnikov BED in CFH (slika 3). Opazimo, da je ta presek šestkotnik z oglišči A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Ta šestkotnik ima vse stranice enake $\sqrt{2}a/2$, to pa je polovica diagonale kvadrata največjega



Slika 3



Slika 4

kvadrata na površju kocke. Tudi vse diagonale tega šestkotnika so si med seboj enake, namreč po Pitagori dobimo za vsako izraz $\sqrt{2}a$. Sledi, da je ta šestkotnik pravilen! Polmer včrtanega kroga je v tem šestkotniku zato enak $\sqrt{6}a/4$, premer pa je potem $\sqrt{6}a/2 \doteq 1{,}225a$. Torej je mogoča večja debelina d palice od vrednosti $\sqrt{6}a/3 \doteq 0{,}817a$, namreč vrednost $\sqrt{6}a/2 \doteq 1{,}225a$. Kolikšna pa je v tem primeru največja dolžina h? Premislimo: če ravnino šestkotnika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ malo vzporedno premaknemo v lego $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$, se vidi, da se diagonale šestkotnika po dolžinah prav nič ne spremene, vse so še vedno enake $\sqrt{2}a$, spremenijo se pa dolžine stranic šestkotnika, saj očitno velja npr. $\overline{A_1'A_2'} < \overline{A_1A_2}$, $\overline{A_4A_5} < \overline{A_4'A_5'}$. Od tod z nazornostjo lahko domnevamo, da ima med vsemi ravninskimi preseki z ravninami, ki so vzporedne trikotnikovima ravninama BED, CFH in leže med njima, največjo ploščino ravno včrtani krog v šestkotniku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Če je debelina d v mejah $\frac{\sqrt{6}}{3}\,a < d < \frac{\sqrt{6}}{2}\,a$, ali približno v mejah $0{,}817a < d < 1{,}225a$, je dolžina najdaljše "diagonalne" palice v mejah $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{3}\,a$, ali $0 < h < 0{,}577a$.

Vaja. Dani debelini d določite pri zgornji omejitvi ustrezno najdaljšo dolžino h!

6 Ogledali si bomo še nekaj včrtanih krogov kocke.

Poglejmo na sliki 4 v kocki $ABCDEFGH$ štirikotnik $PQRS'$, pri čemer so točke P, Q, R, S' po vrsti na robovih AB, FG, GH, DA, tako da je $\overline{PB} = \overline{QF} = \overline{RH} = \overline{S'D} = a/4$.

Po Pitagori dobimo, da je potem $\overline{S'P} = 3\sqrt{2}a/4$, $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}a/4$. Nadalje je $\overline{PR} = 3a/2$ in tudi $\overline{S'Q} = 3a/2$. Od tod sledi, da je štirikotnik $PQRS'$ kvadrat s ploščino $p(PQRS') = \frac{18}{16}\,a^2 = 1{,}125a^2$, kar pomeni, da se da v kocko včrtati večji kvadrat, kot je osnovna ploskev kocke!

6.1 Ploščina kroga, ki je včrtan v ta kvadrat, je enaka

$$\pi(3\sqrt{2}a/8)^2 = \frac{18}{64}\,\pi a^2 \doteq 0{,}884a^2$$

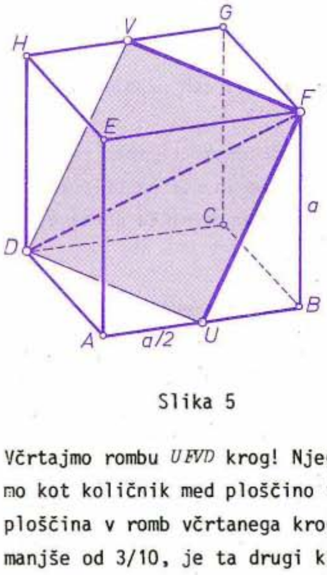
Ploščina v šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ včrtanega kroga pa je enaka

$$\pi(\sqrt{6}a/4)^2 = \frac{3\pi}{8}\,a^2 \doteq 1{,}178a^2$$

torej znatno večja kot prejšnja!

Še vedno pa je odprto vprašanje, ali se da v kocko včrtati še večji kvadrat, kot smo našli v 6 , in ali se da v kocko včrtati še večji krog, kot smo ga našli v omenjenem šestkotniku.

6.2 Videli bomo, da se da v kocko včrtati romb, ki ima večjo ploščino, kot jo ima kvadrat iz 6 :



Slika 5

Oglejmo si namreč tale ravninski presek, ki poteka skozi telesno diagonalo DF kocke $ABCDEFGH$ in seče robova AB, GH v središčih U, V: (prim. sliko 5). Zaradi skladnosti pravokotnih trikotnikov UAD, VGH, VHD, UBF sklepamo, da je $\overline{UD} = \overline{VF} = \overline{UF} = \overline{VD}$. Po Pitagori je $\overline{VD}^2 = (a/2)^2 + a^2 = 5a^2/4$, torej $\overline{VD} = \sqrt{5}a/2$. To pomeni, da je štirikotnik $UFVD$ romb, njegovi diagonali sta DF, UV. Ker je $\overline{DF} = \sqrt{3}a$ in $\overline{UV} = \sqrt{2}a$, je ploščina tega romba enaka $\frac{1}{2}\,\overline{DF}.\overline{UV} = \frac{1}{2}\sqrt{3}a.\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 \doteq 1{,}225a^2$, to je pa res malo večje od ploščine kvadrata $PQRS'$, saj je ta enaka $1{,}125a^2$, kot smo dognali zgoraj.

Včrtajmo rombu $UFVD$ krog! Njegov premer je enak višini romba; to pa določimo kot količnik med ploščino in stranico. Račun da $\sqrt{30}a/5$. Potemtakem je ploščina v romb včrtanega kroga enaka $\pi(\sqrt{30}a/10)^2 = 3\pi a^2/10$. Ker je 9/32 manjše od 3/10, je ta drugi krog večji od kroga, ki smo ga konstruirali v 6.1 . Toda je manjši od kroga, ki je včrtan v šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, saj je 3/10 manjše od 3/8.

6.3 V prejšnjih odstavkih smo v 5 in v 6 opazili tudi dva šestkotnika, ki sta včrtana v kocko:

- v 5 je šestkotnik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ pravilen,
- v 6 pa označimo presek med ravnino kvadrata $PQRS'$ in robom BF z W, presečišče med tem kvadratom in robom DH pa z Z; tako dobimo tudi šestkotnik $PWQEZS'$ (ta seveda ni pravilen).

Kateri od njiju ima večjo ploščino? Ploščina prvega je enaka $3\sqrt{3}a^2/4 \doteq 1{,}299a^2$. Ploščino šestkotnika $PWQRZS'$ pa dobimo tako, da ploščini kvadrata $PQRS'$ prištejemo ploščini trikotnikov PWQ in $S'RZ$. Najprej dobimo $\overline{PW}^2 = (a/4)^2 + (a/2)^2 = 5a^2/16$, potem višino v iz W na stranico PQ, $v^2 = \overline{PW}^2 - (\overline{PQ}/2)^2 = 2a^2/64$, $v = \sqrt{2}a/8$. Končno dobimo za ploščino $p(PWQRZS') = \overline{PQ}^2 + \overline{PQ}.v = 21a^2/16 = 1{,}3125a^2$. Torej je šestkotnik $PWQRZS'$ ploščinkso večji od pravilnega šestkotnika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, medtem ko je včrtani krog v prvem primeru manjši kot v drugem primeru!

Povzetek. Nalog A), B) smo se lotili s kar se da preprostimi matematičnimi pripomočki. Rešili smo ju pa delno. Dodajmo tema nalogama še:

C) Kolikšen je v dani kocki ravninski prerez z največjo ploščino?

Morda bodo zgornje vrstice spodbuda, da se boste lotili teh problemov.

Opomba. Analogne probleme lahko postavimo pri drugih geometrijskih telesih (pri kvadru, pravilnem četvercu, pri pravilnih poliedrih ali pa pri okroglih geometrijskih telesih). Zanimiva bi bila tudi računalniška obravnava problema C).

7 S poznavanjem osnovnih geometrijskih zakonitosti iz srednješolskega tečaja se da pokazati, da je drugi od krogov v 6.1 v kocki z robom a največji (taki krogi so pa štirje). Eden od dokazov je opisan v dvanajstem zvezku zbirke matematičnega krožka Univerze v Moskvi: *Šklarskij, Čencov, Jaglom: Geometričeskie neravenstva i zadači na maksimum i minimum, str. 77-80.* To delo je tudi v angleškem prevodu. Dokaz pa teče tako: Najprej pokažemo, da prihajajo v poštev za "maksimalne" kroge le krogi s središčem S (središče kocke); potem konstruiramo oblo s središčem S in polmerom $r = \sqrt{6}a/4$; ta izseče iz šestih mejnih kvadratov kocke šest krožnic; če povežemo središče S s točkami teh krožnic, dobimo šest plaščev stožcev; potem pokažemo, da bi morala imeti ravnina kroga $K(S,R)$, ki ima polmer R večji od r, s temi šestimi plašči samo skupno točko S (z vsemi!); končno pokažemo, da taka ravnina ni mogoča!

Ivan Pucelj