Dielo známe iba vo
vydaní z r. 1802.

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krains, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberst-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen über die Mathematik.

Vierter Band,

die Grundlehren der Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, und der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel enthaltend.

Zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, und zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Zweyte verbesserte Auflage.

Mit IX. Kupfertafeln.

Wien, 1819.

Bey Franz Tendler, Buchhändler am Graben im Trattnerhofe.

Anleitung

zur

Hydrodynamik.

Von

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstand des Herzogthums Krain, Ritter des milit. M. Th. Ordens, Oberst-Lieutenant des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitglied der gelehrten Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag.

Zweyte verbesserte Auflage.

Mit IX Kupfertafeln.

Wien, 1819.

Bey Franz Tendler, Buchhändler am Graben im Trattnerhofe.

I n h a l t.

Erstes Hauptstück

Grundlehre der Hydrostatik.

I. Abschnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey flüssigen Körpern.

§. 1. Gewöhnliche Erklärung einer flüssigen Masse. Zwey gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen gegen zwey Elementar-Theilchen einer flüssigen nicht eingeschlossenen Masse angebracht können einander nicht im Gleichgewichte erhalten, weil die Theilchen selbst durch die geringste Kraft an einander beweglich sind. §. 2. Von elastischen und unelastischen flüssigen Massen. §. 3. Erklärungen der Worte, Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, Pneumatik, Hydrodynamik. Bemerkungen über die gewöhnliche Erklärung der flüssigen Körper. Kants und Schönbergers Erklärungen der flüssigen Masse, und daraus abgeleitete Folgen. §. 4. Bey der Bestimmung des Gleichgewichtes werden die flüssigen Massen anfangs ohne Schwere betrachtet. §. 5. Eine Haupteigenschaft einer jeden flüssigen Masse ist, daß ein angebrachter Druck gegen irgend einen Theil einer in einem unbeweglichen Gefäße gänzlich eingeschlossenen Flüssigkeit wegen der Beweglichkeit ihrer Elementar-Theilchen an einander sich nach allen Richtungen in seiner ganzen Stärke fortpflanzet. Erläuterung dieser Haupteigenschaft. §. 6. Der unmittelbare Druck ist von dem fortgepflanzten unterschieden. §. 7. Es verhält sich der fortgepflanzte Druck gegen eine ebene Fläche zum unmittelbaren Drucke gegen eine andere Fläche, wie die erste Fläche zur zweyten. Daraus abgeleitete Folgen und Bemerkungen.

II. Abschnitt.

Allgemeine Grundlehren des Gleichgewichtes des schweren Wassers in Gefäßen.

§. 8. Der unmittelbare Druck eines jeden Elementar = Theilchens des schweren Wassers gegen das zu nächst unter ihm liegende ist seinem Gewichte gleich. §. 9. Im Stande des Gleichgewichtes leidet jedes Elementar = Theilchen von allen Seiten her einen gleich großen fortgepflanzten Druck. §. 10. Schweres Wasser kann nur dann ruhen, wenn die Oberfläche desselben horizontal ist. Ausnahmen hiervon werden durch andere Kräfte bewirket. Bey ausgebreiteten Gewässern ist die Oberfläche keine ebene, sondern eine krumme Fläche. Bey dem Weltmeere ist sie wegen der Umdrehungsbewegung der Erde ellipsoidisch. §. 11. Der Druck gegen die horizontale Bodenfläche eines mit Wasser angefüllten senkrechten prismatischen Gefäßes ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers gleich. §. 12. Das Gewicht einer Wassersäule wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe und mit dem eigenthümlichen Gewichte des Wassers multipliciret. Wie groß das eigenthümliche Gewicht des Wassers sey? d. i. wie viel ein Kubikfuß oder Kubikzoll wiege? §. 13. Die Höhe des Druckes ist dem Quotienten gleich, welcher entsteht, wenn man den Druck durch das Product aus der Fläche des Druckes in das eigenthümliche Gewicht des Wassers dividiret. §. 14. In einem Gefäße von einem ebenen horizontalen Boden ist die Höhe des gegen die Bodenfläche fortgepflanzten Druckes so groß, als der Abstand der obersten Fläche des Wassers von der horizontalen Bodenfläche. Jedes Elementar = Theilchen des Gefäßes leidet einen Druck, der dem Gewichte eines Wassersäulchens gleich ist, welches dasselbe Elementar = Theilchen zur Grundfläche, und die Höhe des darüber stehenden Wassers zur Höhe hat. Wirkung des anatomischen Hebers. Vorsicht beym Baue der Schleusen. §. 15. Der Druck des Wassers gegen eine ebene Fläche des Umfanges des Gefäßes ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche diese Fläche zur Grundfläche, und den Abstand ihres Schwerpunctes von der Oberfläche des Wassers zur Höhe hat. §. 16. Den fortgepflanzten Druck des Wassers gegen eine nicht horizontale ebene Fläche eines Gefäßes kann man sich in dem Schwingungspuncte eben dieser Fläche, in Hinsicht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Oberfläche des Wassers mit der Ebene der gedrückten Fläche, vereiniget denken. Bestimmung dieses Punctes, wenn die gedrückte Fläche ein Rechteck, eine Kreisfläche, ein rechtwinkeliges Dreyeck ist; u. s. w. §. 17. In vereinigten Röhren ist die höchste Wasserfläche in beyden Röhren in einer und derselben horizontalen Ebene. Hydrostatische Nivellier = Wage. §. 18. In vereinigten Röhren verhalten sich die Erhöhungen der obersten Flächen verschiedener Flüssigkeiten über eine horizontale Gleichgewichts = Ebene (unter welcher das Flüssige für sich allein im Gleichgewichte ist) umgekehrt wie ihre eigenthümlichen Gewichte. §. 19. Hülfssätze um die Pressungen einer flüssigen Masse gegen verschiedentlich geneigte Ebenen nach jeder gegebenen Richtung zu vereinigen.

1.) Der senkrechte Querschnitt eines schief abgeschnittenen Prisma ist gleich dem schiefen Schnitte desselben multipliciret mit dem Cosinus des Neigungswinkels beyder Schnitte. 2. Aus der senkrechten Pressung des Wassers gegen einen schiefen Schnitt eines Prisma entsteht nach der Richtung der Achse des Prisma ein Druck, der so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule, welche den senkrechten Querschnitt des Prisma zur Grundfläche, und die Höhe des senkrechten Druckes gegen den schiefen Schnitt zu ihrer Höhe hat. §. 20. Aus allen senkrechten Pressungen gegen die Theile des festen Umfanges des Gefäßes entsteht ein vertikaler Druck nach unten, der dem Gewichte des sämmtlichen im Gefäße enthaltenen Wassers gleich ist. Alle Pressungen aber nach horizontalen Richtungen heben einander auf.

III. Abschnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes des schweren Wassers mit hineingetauchten festen Körpern.

§. 21. Ein in ein ruhende flüssige Masse ganz, oder auch nur zum Theile eingetauchter fester Körper leidet einen Druck von unten nach oben (einen Auftrieb), der dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist. Die verticale Richtungslinie dieses Druckes geht durch den Schwerpunct des geometrischen Raumes des eingetauchten festen Körpers oder der verdrängten Flüssigkeit, und die horizontalen Pressungen gegen den Umfang des eingetauchten Körpers sind im Gleichgewichte. §. 22. Der Auftrieb wird größer oder kleiner, je nachdem ein größerer oder kleinerer Theil des festen Körpers eingetauchet wird. Bey dem Eintauchen des ganzen Körpers aber bleibt er in jeder Tiefe unverändert, wenn nur die flüssige Masse gleichförmig dicht ist. §. 23. Ein in eine flüssige Masse ganz eingetauchter fester Körper bleibt in jeder Tiefe im Gleichgewichte, wenn das Gewicht der Flüssigkeit von eben demselben Kubikinhalte dem Gewichte des Körpers gleich ist. Ist es aber größer oder kleiner, so muß der eingetauchte feste Körper im ersten Falle in die Höhe steigen, und im zweyten Falle sinken. §. 24. Ist ein ganz eingetauchter fester Körper von gleichförmiger Dichtigkeit; so ist der Schwerpunct desselben auch zugleich der Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit. Ist aber der feste Körper ungleichförmig dicht, so nimmt er eine solche Lage ein, daß der Schwerpunct desselben unter dem Schwerpuncte der verdrängten Flüssigkeit sich befindet. §. 25. Ein fester Körper schwimmet, wenn er im Stande des Gleichgewichtes aus der flüssigen Masse hervorraget. Verschiedene Arten schwimmender Körper. §. 26. Untersuchung, ob ein fester Körper schwimmen werde oder nicht. §. 27. Das Gewicht eines beladenen Schiffes ist dem Producte aus dem Kubikinhalte des verdrängten Wassers in das eigenthümliche Gewicht des Wassers gleich. Benutzung des Auftriebes. §. 28. Zum Gleichgewichte eines schwimmenden Körpers wird erfordert, daß die Schwerpuncte der verdrängten Flüssigkeit und des schwimmenden Körpers in einer und derselben Vertical-Linie sich be-

befinden. §. 29. Untersuchung, ob das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers standhaft, unstandhaft (wankend), oder gleichgültig sey. Begriff von Metacentrum. §. 30. Bestimmung der Standhaftigkeit des Gleichgewichtes bey einem schwimmenden Körper. §. 31. Berechnung der Lage des Metacentrums. Damit ein Schiff eine große Standhaftigkeit des Gleichgewichtes auf dem Wasser habe, muß die Figur desselben so beschaffen, und die Ladung dergestalt vertheilet seyn, daß für jede Schwankungsachse das Metacentrum so hoch als möglich über den Schwerpunct des verdrängten Wassers zu liegen kommt. §. 32. Wenn ein specifisch schwererer Körper im Wasser mit einer Kraft gehalten wird, welche der Differenz der Gewichte des eingetauchten Körpers und des Wassers gleich ist; so wird das Sinken desselben verhindert. Gewichtsverlust eines eingetauchten festen Körpers. §. 33. Noch einige Wirkungen des Auftriebes.

IV. Abschnitt.

Hydrostatische Abwägung und Ausmessung der Körper.

§. 34. Bestimmung des eigenthümlichen Gewichtes eines gleichförmig dichten Körpers aus seinem kubischen Inhalte und Gewichte. §. 35. Was die specifische Schwere eines Körpers sey. §. 36. Aus der specifischen Schwere eines Körpers sein eigenthümliches Gewicht zu finden. §. 37. Einfluß der Temperatur auf die Bestimmung der specifischen Schwere der Körper. §. 38. Das eigenthümliche Gewicht des Wassers wird mittelst der Eintauchung und Abwägung durch folgende Proportion gefunden: Der bekannte kubische Inhalt des eingetauchten festen Körpers verhält sich zu I Kubikfuß oder Kubikzoll, wie das gefundene Gewicht des Wassers unter demselben Kubikinhalte (der Auftrieb) zu dem gesuchten Gewichte eines Kubikfußes oder Kubikzolles. Ein Wiener Kubik-Fuß Regenwasser wiegt 56$\frac{5}{8}$ Pfund Wien. Hand. Gew. §. 39. u. 40. Bestimmung des Kubikinhaltes eines festen Körpers mittelst der Eintauchung und Abwägung im Wasser. §. 41. Wie man den Gewichtsverlust, Auftrieb, eines festen Körpers in einer Flüssigkeit bequem finden könne. §. 42. Bestimmung des kubischen Inhaltes bey einem Wasser haltenden Gefäße durch das bekannte eigenthümliche Gewicht des Wassers. §. 43. Einrichtung der Wagen zum hydrostatischen Gebrauche um die specifischen Schweren verschiedener Körper zu finden. §. 44. bis 47. Gebrauch der Senkwagen zur Bestimmung der specifischen Schweren verschiedener Flüssigkeiten. §. 48. Einrichtung einer Senkwage, um sowohl das absolute Gewicht, als auch die specifische Schwere eines festen Körpers zu finden. §. 49. Erklärung der Salz- oder Sohlwagen. §. 50. Auflösung der Archimedischen Aufgabe.

Zwey-

Zweytes Hauptstück.

Grundlehre der Aerostatik.

I. Abschnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey elastischen flüssigen Massen.

§. 51. Was eine vollkommen elastische Flüssigkeit sey. §. 52. bis 55. Wesentliche Eigenschaften der elastischen flüssigen Massen ohne Schwere. Von der Druckhöhe der Elasticität. §. 56. Das Verhältniß der Dichtigkeiten bey verschiedentlich zusammengedrückten elastischen Flüssigkeiten muß durch Versuche bestimmet werden. §. 57 bis 59. Wesentliche Eigenschaften der schweren elastischen Flüssigkeiten. §. 60. Erfahrungssätze über die uns umgebende atmosphärische Luft; 1) über ihr Daseyn; 2) Elasticität; 3) Schwere derselben; 4) Aenderung der Elasticität durch Druck und Wärme u. m. d. gl. §. 61. Die auf Wasserdruck reducirte Elasticitäts = Höhe der atmosphärischen Luft an der Erdfläche ist beyläufig 32 Fuß. §. 62 bis 66. Vom Torricellischen Versuche, wodurch verschiedene Eigenschaften der Luft erwiesen werden. §. 67. Die Dichtigkeit und Elasticität der Luft bey einerley Wärme und Trockenheit ist der zusammendrückenden Kraft proportional. Versuch, wodurch dieser Satz erwiesen wird. Man nennt diesen Satz das Mariottische Gesetz der Luft = Elasticität. §. 68. Dieses Gesetz findet auch bey der Verdünnung der Luft statt. §. 69. Bestimmung des Höhenunterschiedes zweyer Oerter durch Barometer = Beobachtungen. Wenn die Erhöhungen in einer arithmetischen Progression wachsen, so nehmen bey einerley Temperatur die Barometer = Höhen in einer geometrischen Progression ab. Die mittlere Barometer = Höhe am Meeres = Horizonte ist beyläufig 345 Wien. Duod. Lin. und in einer Erhöhung von 25¼ Wien. Klaft. ist sie um 2 Lin. niedriger. Daraus abgeleitete Regeln und Formeln zur Bestimmung des Höhenunterschiedes der Oerter aus den dazu gehörigen mittleren Barometer = Höhen; wie auch zur Berechnung der Dichtigkeit der Luft für jede gegebene Erhöhung.

II. Abschnitt.

Von der Luftpumpe, und von einigen andern aerometrischen Werkzeugen.

§. 70. Kurze Beschreibung und Einrichtung der Luftpumpe. Ihre wesentliche Theile sind der Stiefel und Kolben, die Verbindungsröhre, der Teller, der Recipient, der Hahn oder Wirbel. §. 71. bis 74. Gebrauch der Luftpumpe, um die Luft zu verdünnen und zu verdich=

dichten. §. 75. Aus der Zahl der Auspumpungen läßt sich bestimmen, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdünnet sey. §. 76. Der Recipient wird nie gänzlich luftleer. §. 77. Aus der Zahl de Compressionen läßt sich auch bestimmen, wie stark die Luft im Recipienten verdichtet sey. §. 78. u. 79. Erwähnung einiger Werkzeuge um den Grad der Verdünnung oder Verdichtung der Luft im Recipienten der Luftpumpe zu messen. §. 80. Aufzählung der merkwürdigern Versuche die mit der Luftpumpe gemacht werden. §. 81. Die Luftpumpe ist vorzüglich geeignet, die Schwere der Luft zu erweisen. Man fand dadurch daß die atmosphärische Luft nahe an der Meeresfläche 850 bis 900 mahl leichter sey als Regenwasser; oder daß 1 Wien. Kub. Fuß der atmosphärischen Luft 1 Unze des Wien. Hand. Gew. wiege. §. 82. Gewichtsverlust der Körper in der Luft. §. 83. Die brennbare Luft hat bey einerley Elasticität eine 10 bis 12 Mahl geringere Dichtigkeit, oder specifische Schwere, als die atmosphärische. Ein Luftballon mit derselben angefüllet steigt in die Höhe, wenn sein ganzes Gewicht geringer ist, als das Gewicht der verdrängten atmosphärischen Luft. §. 84. Beschreibung und Gebrauch des Manometers, eines Instruments, welches die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft anzeiget. §. 85. Aenderung des Gewichtes eines und desselben Körpers an der gewöhnlichen Wage bey geänderter Dichtigkeit der atmosphärischen Luft. §. 86. Von den gebräuchlichsten Thermometern; 1) von dem Reaumürschen, 2) von dem Fahrenheitischen, 3) von dem Deslislischen, 4) von dem schwedischen, jetzt auch in Frankreich angenommenen, Quecksilber-Thermometer. Beschreibung eines Thermometers, der seit der letzten Beobachtung in Merkmahl des stärksten Grades der Wärme und Kälte zurückläßt.

Drittes Hauptstück.

Grundlehre der Hydraulik.

I. Abschnitt.

Ausfluß des Wassers aus Oeffnungen im Boden, oder in der Wand eines Gefäßes.

A. Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers.

§. 87. u. 88. Bedeutung der Worte Hydraulik; Boden und Wand eines Gefäßes; Druckhöhe, Wasserstand, Geschwindigkeit, Geschwindigkeitshöhe, Wassermenge. §. 89. Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes ausfließet, hat die Druckhöhe der Oeffnung zu ihrer Geschwindigkeitshöhe. Versuch diese

Grund-

Grundwahrheit der Hydraulik aus den allgemeinen Gründen der Mechanik abzuleiten. Verschiedene aus dieser Grundwahrheit fließende Folgerungen. §. 90. Warum die Höhe des Wasserstrahls bey Springbrunnen kleiner ist, als die Druckhöhe. §. 91. Die Regeln zur Bestimmung der Weite der Springöffnung und der Leitröhre für die möglich größte Höhe des Strahles eines Springbrunnes müssen aus Erfahrungen abgeleitet werden. Einige hierzu dienliche Erfahrungssätze. §. 92. Bestimmung der Geschwindigkeit, wenn das Wasser nebst der Schwere noch durch eine andere Kraft gepresset wird. §. 93. Von der Ersetzung des ausströmenden Wassers durch einen Seitenzufluß, damit die Druckhöhe ungeändert verbleibet. §. 94. Die Bernoulische Grundformel der Hydraulik ist unbrauchbar. Auch die vom Hr. Baader angegebene Grundformel der Hydraulik läßt sich mit der Erfahrung nicht in Uebereinstimmung bringen.

B. Wassermenge in einer bestimmten Zeit bey ungeänderter Druckhöhe.

§. 95. Formel zur Berechnung der Wassermenge. Man muß den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles in Erwägung ziehen. §. 96. Durch Versuche hat man gefunden, daß der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles zur Oeffnung sich verhalte für eine Ausflußöffnung in einer dünnen Metallplatte wie 64 zu 100, bey einer kurzen Ansatzröhre aber wie 81 zu 100. §. 97. Die Wassermengen in einerley Zeit aus gleichen Ausflußöffnungen bey verschiedenen Druckhöhen verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, oder wie die Quadrat-Wurzeln der Druckhöhen. §. 98. Die wirkliche Wassermenge dividiret durch die hypothetische giebt die Verhältnißzahl, mit welcher man die Oeffnungsfläche multipliciren soll um den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles zu erhalten. §. 99. Auflösung einiger practischen Aufgaben.

C. Ausleerung lothrecht stehender prismatischer Gefäße durch kleine Oeffnungen im Boden oder in der Seitenwand der Gefäße.

§. 100. Bestimmung der Zeit, in welcher der Wasserspiegel um eine gegebene Tiefe sinket; wie auch der Zeit der ganzen Ausleerung eines prismatischen Gefäßes. §. 101 u. 102. Anwendung dieser Lehre auf die Berechnung der Zeit des Anfüllens und Ausleerens der Schleusenkammern. §. 103. Bestimmung der Wassermenge in einer gegebenen Zeit aus einer rechtwinkeligen Oeffnung von beträchtlicher Größe in einer lothrechten Wand, wo die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen verschieden sind. §. 104. Langsdorfs Formel für die Wassermenge bey einer kreisförmigen Ausfluß-Oeffnung. Bedeutung des Wortes, Wasserzoll. §. 105 u. 106. Ausfluß aus oben offenen rechtwinkeligen Oeffnungen. Von der mittleren Geschwindigkeit in solchen Oeffnungen. §. 107. Anwendung der vorgetragenen Lehren auf andere unelastische Flüssigkeiten. §. 108. Von der Geschwindigkeit, mit welcher die atmosphärische Luft in einen luftleeren Raum einströmet. Diese Geschwindigkeit ist unveränderderlich, wenn der luftleere Raum unbegrenzt groß ist; es möge die Luft wie immer verdichtet oder verdünnet seyn. Die Geschwindigkeitshöhe einer solchen Ausströmungsgeschwindigkeit ist gleich der auf den Wasserdruck reducirten Elasticitäts-Höhe der Luft multipliciret mit der Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit.

II. Abschnitt.

Von dem Stoße des fließenden Wassers gegen die Oberflächen der eingetauchten festen Körper.

§. 109. Der senkrechte Stoß des fließenden Wassers gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feste Ebene ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die gestoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit des fließenden Wassers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat. Versuch diesen Hauptsatz der Hydraulik aus den allgemeinen Gründen der Mechanik zu erweisen. §. 110. Von dem senkrechten Wasserstoße gegen feste Flächen von beträchtlicher Ausdehnung, wenn auch der Querschnitt des fließenden Wassers in Erwägung gezogen werden soll. §. 111. Einige Folgerungen aus der Grundformel des Wasserstoßes. Anwendung eben derselben auf den Windstoß. §. 112. Der schiefe Wasserstoß gegen eine feste Ebene nach einer darauf senkrechten Richtung ist gleich dem senkrechten Stoße gegen eine eben so große Fläche bey eben derselben Geschwindigkeit multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die angestoßene Fläche; nach der Richtung des Stromes aber ist derselbe gleich dem senkrechten Stoße gegen eine eben so große Fläche multipliciret mit dem kubirten Sinus des Neigungswinkels. Nach der auf den Strom senkrechten Richtung endlich ist der schiefe Wasserstoß gleich dem senkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus und mit dem einfachen Cosinus des Neigungswinkels der gestoßenen Fläche gegen die Richtung des Stromes. §. 113. Bestimmung der Lage der Stoßfläche, bey welcher der Stoß nach der auf den Strom senkrechten Richtung ein Größtes wird. Anwendung davon auf die fliegenden Brücken, und auf die Flügel der Windmühl-Räder. §. 114. Der schiefe Stoß nach der auf die Stoßfläche senkrechten Richtung ist gleich dem senkrechten Wasserstoße gegen eine dem Querschnitte des anstoßenden Wasserstrahls gleiche Fläche multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche. Nach der Richtung des Stromes aber ist der Stoß gegen eine schief gestellte Ebene gleich dem senkrechten Stoße gegen eine dem Querschnitte des anstoßenden Wasserstrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche. §. 115. Vergleichung des Wasserstoßes gegen ein senkrechtes Parallelepipedum mit dem Stoße gegen ein anderes, welches an der Stoßseite keilförmig zugeschnitten ist. §. 116. Bestimmung

mung des Wasserstoßes gegen die Oberfläche eines abgekürzten Kegels nach der Richtung der Achse. §. 117. Der Wasserstoß gegen eine Kugel nach der Richtung des Stromes ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die größte Kreißfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe des Stromes zu ihrer Länge hat. §. 118. Vergleichung des Wasserstoßes gegen die Grundfläche eines geraden Cylinders mit dem Stoße, wenn der Cylinder an seinem Ende, wo er dem Stoße ausgesetzet ist, kegelförmig ausläuft. §. 119. Wenn die Stoßfläche beträchtlich größer ist, als der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles; so wird wegen Ausbreitung des letzten der Stoß sehr merklich vermehret. Erfahrungssatz zur Bestimmung desselben. §. 120. Vom absoluten und relativen Wasserstoße; von der absoluten und relativen Geschwindigkeit. Bestimmung des relativen Wasserstoßes. §. 121. Ein schwimmender Körper leidet in einem fließenden Strome nur so lange einen Stoß, bis seine Geschwindigkeit der Geschwindigkeit des Stromes gleich geworden ist. §. 122. Ein Wasserrad wird in Bewegung gesetzet, wenn der Wasserstoß größer ist, als der sämmtliche reducirte Widerstand. Seine Umlaufsgeschwindigkeit wächst so lange, bis der relative Stoß dem sämmtlichen reducirten Wiederstande das Gleichgewicht hält; sodann läuft es mit gleichförmiger Bewegung um. §. 123. Woraus der Effect einer Maschine geschätzet werde. §. 124. Bey der vortheilhaftesten Einrichtung einer Maschine mit einem unterschlächtigen Wasserrade soll die Geschwindigkeit der Radschaufeln $\frac{1}{3}$ der absoluten Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers seyn. Sodann ist die relative Geschwindigkeit $=\frac{2}{3}$ der absoluten, und der relative Wasserstoß $=\frac{4}{9}$ des absoluten. §. 125. Bey der Bestimmung des Wasserstoßes gegen ein unterschlächtiges Rad sind nebst der senkrecht getroffenen auch die schief gestellten Radschaufeln in Erwägung zu ziehen. §. 126. Der Wasserstoß gegen ein unterschlächtiges Rad in einem geschlossenen Mühlgerinne ist doppelt so groß, als in einem offenen Strome. §. 127. Die Richtigkeit der Formeln für den relativen Waßerstoß $p = \frac{fq}{4g}(C-c)^2$ oder $p = \frac{fq}{2g}(C-c)^2$, wenn der absolute Stoß durch $p = \frac{fqC^2}{4g}$ oder $p = \frac{fqC^2}{2g}$ richtig ausgedrucket ist, wird erläutert. §. 128. H. Gerlach, Gerstner, Langsdorf haben die angeführte Art den relativen Wasserstoß auszudrucken verworfen: der erste setzet dafür $p = \frac{fq}{4g}(C^2-c^2)$, und die zwey andern $p = \frac{fq}{2g}(C^2-Cc)$. Warum man diese neuen Bestimmungen des relativen Wasserstoßes nicht für richtig annehmen könne. §. 129. Von der Ausmessung der Geschwindigkeit in einem Strome; 1) mittelst einer schwimmenden Kugel, 2) mittelst des Pitotischen Strom-Geschwindigkeitsmessers, 3) mittelst des Strom-Quadranten. Die Geschwindigkeit ist in verschiedenen Tiefen verschieden. §. 130. Wie die Wassermenge zu bestimmen sey, welche ein Strom in einer gegebenen Zeit fortleitet. §. 131. Bestimmung der

Geschwindigkeit und Wassermenge in einem regelmäßigen Fluße oder Canale, wie auch in einer geradlinigen Röhrenleitung. Auflösung einiger dahin gehörigen practischen Aufgaben.

III. Abschnitt.

Von einigen der gebräuchlichsten Maschinen zur Hebung des Wassers.

§. 132. Was man Wasserkünste nenne? was hydraulische Maschinen? Eintheilung derselben. §. 133 bis 137. Beschreibung und Gebrauch verschiedener Heber, als des gemeinen Hebers, des Berghebers, Stechhebers, Vexierbechers. Erklärung der intermittirenden Brunnen mittelst der Lehre des Hebers. §. 138 u. 139. Beschreibung des Herons-Balles, und Herons-Brunnens. §. 140. Die Wasserpumpe ist eine cylindrische oder prismatische Röhre, worin das Wasser mittelst eines auf und niedergehenden Kolbens, und einiger Ventile in die Höhe getrieben wird. Die Ventile sind entweder Klappen-Ventile oder Muschel-Ventile. Beschreibung des gewöhnlichen Kolben-Ventils. §. 141. Die Wasserpumpen werden abgetheilet, in Hebewerke, Saugwerke, Druckwerke, und in vereinigte Saug- und Druckwerke. Die wesentlichen Theile eines Hebewerkes. §. 142. Wesentliche Theile eines Saugwerkes. Wie das Wasser darin in die Höhe gebracht wird. §. 143. u. 144. Bestimmung des Widerstandes und der Wassermenge bey einem Saugwerke. §. 145. Wesentliche Theile eines Druckwerkes. §. 146. Bestimmung des Widerstandes und der Wassermenge bey einem Druckwerke. §. 147 u. 148. Widerstand in vereinigten Saug- und Druckwerken. Von doppelten und zusammengesetzten Pumpwerken. §. 149. Begriff einer Feuer-Löschspritze. §. 150. Kurze Beschreibung der in England so vielfältig gebrauchten Dampf- oder Feuermaschinen. §. 151. Erwähnung der Archimedischen Wasserschraube; und Bemerkungen über zusammengesetzte Maschinen.

Viertes Hauptstück.

Von der Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel.

I. Abschnitt.

Geradlinige Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit Beseitigung der Schwerkraft.

§. 152. Wenn ein fester Körper in einer flüssigen Masse sich fortbeweget, so wird seine Geschwindigkeit immer vermindert. §. 153. Wenn eine

eine feste Fläche in einer flüssigen Masse sich fortbeweget, so leidet sie einen eben so großen Stoß oder Druck, als wenn sie selbst unbeweglich gehalten würde, die flüssige Masse aber mit eben derselben Geschwindigkeit gegen sie sich bewegete. §. 154 u. 155. Ausdruck des Widerstandes gegen verschiedene feste Körper, insbesondere gegen eine Kugel, nebst einigen daraus abgeleiteten Folgerungen. Der Widerstand, welchen eine Kugel bey ihrer Bewegung in einer flüssigen Masse zu leiden hat, wird gleich gesetz dem Gewichte eines Cylinders von derselben Flüssigkeit, der einen größten Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge oder Höhe hat. §. 156. Wenn der feste Körper in einer flüssigen Masse sich so schnell beweget, daß hinter demselben ein leerer Raum entsteht; so hat die vordere Oberfläche des festen Körpers nebst dem hydraulischen Widerstande auch noch einen hydrostatischen Druck zu leiden. §. 157. Bestimmung und analytische Ausführung der Bewegung einer festen Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel, wenn die Schwerkraft und alle Hindernisse der Bewegung, außer dem Widerstande der flüssigen Masse vernachlässiget werden. §. 158. Systematische Zusammenstellung der analytischen Formeln zur Uebersicht der erwähnten Bewegung. §. 159. Wie man bey dieser Bewegung auch den hydrostatischen Druck in Erwägung ziehen könne, wenn hinter dem bewegten festen Körper ein leerer Raum entsteht. §. 160. Gebrauch der vorigen Formeln, wenn der den Widerstand vorstellende Cylinder nicht die halbe, sondern die Kfache Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge hat.

II. Abschnitt.

Lothrechte Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel.

§. 161. Bey der lothrechten Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel sind drey Kräfte in Erwägung zu ziehen, nämlich die Schwere, der Auftrieb, und der Widerstand der flüssigen Masse. §. 162. Bestimmung des lothrechten Sinkens oder Fallens einer festen Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel. §. 163. Systematische Zusammenstellung der analytischen Formeln zur Uebersicht der erwähnten Bewegung. §. 164. Vergleichung und Uebereinstimmung dieser Lehre mit der Erfahrung. §. 165. Bestimmung der Bewegung einer lothrecht aufwärts geschossenen Kugel. §. 166. Systematische Zusammenstellung der Formeln zur Uebersicht dieser Bewegung. §. 167. Fernere daraus fließende Folgen. §. 168 u. 169. Vergleichung des Steigens und Fallens durch einerley lothrechte Höhe.

III. Abschnitt.

Krummlinige Bewegung geworfener oder geschossener Körper in der widerstehenden Luft.

§. 170. Bestimmung der Gleichung für die Bahn, welche eine mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Elevations-Winkel abgeschossene Kanon-Kugel in der widerstehenden Luft beschreibet. §. 171. Berechnung der größten Höhe der Bahn und der dazugehörigen Abscisse oder Schußweite des aufsteigenden Astes. §. 172. Formeln zur Berechnung der ganzen horizontalen Schußweite, der anfänglichen Geschwindigkeit, und des Elevations-Winkels. §. 173. Eine andere Gleichung für die Bahn, durch eine etwas genauere Annäherung mit den daraus fließenden Formeln für die ganze horizontale Schußweite, für die anfängliche Geschwindigkeit, und für den Elevations-Winkel. §. 174. Formel zur Bestimmung der Länge des Bogens, welchen die Kugel vom Anfange ihrer Bewegung bis zu einem beliebigen Puncte ihrer Bahn beschreibet. Dadurch kann man für jeden Elevations-Winkel die horizontale Schußweite und die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes berechnen. §. 175. Anweisung, wie eine solche Rechnung zu führen ist. §. 176 u. 177. Analytischer Ausdruck der Tangential-Geschwindigkeit und der Zeit für jeden Punct der Bahn. §. 178. Was für einen Gebrauch man von diesem balystischen Probleme in der ausübenden Artillerie machen könne. §. 179. Gleichung für die Bahn der geworfenen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel, welche aus der Verbindung der horizontalen und verticalen Bewegung in eben demselben Mittel abgeleitet wird. §. 180 bis 183. Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit der geschossenen Kugeln aus der gegebenen Länge des Geschützrohres, aus der Ladung, und aus dem Durchmesser der Kugel. §. 184. Die Behauptung des Hrn. John Muller über die möglich größte Geschwindigkeit der geschossenen Kugeln in der widerstehenden Luft ist unrichtig. Der Grund des Irrthums wird aufgedecket. §. 185. Gebrauch der beygefügten balistischen Tafel zur Berechnung der Schußweiten in der widerstehenden Luft.

Erstes Hauptstück.

Grundlehre der Hydrostatik.

I. Abschnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey flüssigen Körpern.

§. 1.

Welche Körper flüssig genannt werden, ist leichter zu begreifen als zu erklären. Gewöhnlich pflegt man diejenigen Körper flüssig zu nennen, bey denen sich gar keine Theilchen angeben lassen, die unter sich so wie Theilchen fester Körper zusammen hängen. Fig.

Wenn daher auch zwey gleiche Kräfte nach gerade entgegen gesetzten Richtungen gegen zwey verschiedene Elementar-Theilchen einer flüssigen Masse wirken, so können sie einander nicht im Gleichgewichte erhalten; denn die übrigen zwischenliegenden Theilchen, da sie keinen Zusammenhang haben, müssen dem angebrachten Drucke ausweichen, und dadurch auch die anliegenden Theilchen aus ihren Stellen verdrängen, wenn solches nicht auf irgend eine Art, etwa durch eine feste Röhre verhindert wird.

Auch ist es leicht einzusehen, daß die Elementar-Theilchen einer vollkommen flüssigen Masse, weil sie gar nicht

Fig. zusammen hängen, von der geringsten Kraft an und neben einander beweget werden können, und daß in einer flüssigen Masse, wenn solche in einem Gefäße vom festen Umfange sich eingeschlossen befindet, unter den Elementar-Theilchen eine innere Bewegung statt finden könne, ohne daß dadurch die ganze Masse sammt dem Gefäße mit in Bewegung kommt.

§. 2.

Eine flüssige Masse wird unelastisch genannt, wenn sie sich durch einen äußern Druck nicht in einen engern Raum zusammen pressen läßt, obgleich ihre Theilchen wegen der Flüssigkeit dem Drucke nach allen Seiten auszuweichen streben. Elastisch aber heißt eine flüssige Masse, wenn sie zwar durch einen äußern Druck in einen engern Raum zusammen gepresset werden kann; aber dabey auch desto stärker entgegen drücket, und zugleich nach allen Seiten desto heftiger sich auszubreiten strebet, je kleiner der Raum ist, worin sie schon zusammen gepresset worden ist. Dieses Bestreben sich nach allen Seiten auszubreiten nennt man die Federkraft oder Elasticität der flüssigen Masse.

§. 3.

Die Wissenschaft von den Gesetzen des Gleichgewichtes solcher Kräfte, die auf unelastische flüssige Massen wirken, heißt die Hydrostatik von dem griechischen Worte ὕδωρ Wasser, ὑδρος naß, weil man das Wasser wegen seiner unmerklichen Elasticität, und wegen des äußerst geringen Zusammenhanges der Elementar-Theilchen für eine gänzlich unelastische flüssige Masse ansehen kann; wo sodann alles, was vom Gleichgewichte der Kräfte beym Wasser erwiesen wird, auch auf die übrigen unelastischen flüssigen Massen sich anwenden läßt. Die Wissenschaft aber von den Gesetzen des Gleichgewichtes solcher Kräfte, welche auf elastische flüssige Massen wirken, führet den Nahmen Aerostatik oder auch Aerometrie von Aer Luft; weil die Luft ein elastisches flüssiges Wesen ist, und alles, was vom Gleichgewichte der Kräfte bey der Luft erwiesen wird, auch auf andere elastische flüssige Massen angewendet werden kann.

Die Wissenschaft von der Bewegung des Wassers heißt Hydraulik, und von der Bewegung der Luft, Pneumatik. Auch pflegt man denjenigen Theil der Mechanik, welcher von dem Gleichgewichte und von der Bewegung flüssiger Massen überhaupt handelt, die Hydrodynamik zu nennen. Die unelastischen flüssigen Massen pflegt man auch tropfbare Flüssigkeiten, und die elastischen flüssigen Massen luftförmige Flüssigkeiten zu nennen. Fig.

1. Anmerkung. Die (§. 1.) angeführte Erklärung erstrecket sich zwar richtig auf alle Gattungen der flüssigen Körper, sowohl auf die unelastischen z. B. Wasser, Oehl, Weingeist, Quecksilber, in Fluß gebrachte Metalle; als auch auf die elastischen flüssigen Massen z. B. auf die verschiedenen aus der Naturlehre bekannten Luftgattungen, Gase, auf die Dämpfe des kochenden Wassers, u. s. w. Auch unterscheidet diese Erklärung den feinsten Sand oder einen anderen Staub hinlänglich vom Wasser, weil auch bey dem feinsten Staube die einzelnen Stäubchen für feste Körper anzusehen, und dergleichen Massen daher nicht zu den flüssigen sondern zu den so genannten körnigen zu zählen sind. Nur ist diese Erklärung äußerst unfruchtbar, weil die übrigen Eigenschaften der flüssigen Körper sich nicht füglich daraus ableiten lassen. In der That sagt auch die angeführte Erklärung nichts anders als, ein Körper heißt flüssig, der nicht fest ist. Der berühmte Metaphysiker Hr. Kant sagt in seinen metaphysischen Anfangsgründen der Dynamik: „Ein Körper heißt flüssig, dessen Theilchen, „bey einem noch so großen Zusammenhange dennoch „sehr leicht an einander beweglich sind;" da man doch sonst zu sagen pflegte, ein Körper heißt flüssig, dessen Theile gar nicht zusammen hängen, und eben deßwegen sehr leicht an einander beweglich sind. Die brauchbareste Erklärung eines flüssigen Körper wäre diejenige, welche eine solche wesentliche Eigenschaft enthielte, daß sich alle übrige daraus ableiten ließen.

2. Anmerkung. Eine befriedigende Erklärung eines flüssigen Körpers zu geben, ist aus der Ursache äußerst

Fig. schwer, weil uns die Elemente der Materie gänzlich unbekannt sind. Indessen lassen sich alle diejenigen Erscheinungen, die man bey flüssigen Körpern einer mathematischen Berechnung unterwirft, aus der Vorstellung ableiten, daß jede flüssige Masse aus äußerst glatten unendlich kleinen elastischen Kügelchen (Elementar-Kügelchen) bestehe. Ist nun die Elasticität dieser Elementar-Kügelchen so beschaffen, daß diese bey einer noch so sehr vermehrten Zusammendrückung dennoch ihre Ausdehnung nicht merklich vermindern; so erscheint eine solche flüssige Masse beynahe unelastisch, z. B. Wasser, Quecksilber. Ist aber die Elasticität dieser Elementar-Kügelchen von der Eigenschaft, daß solche im Verhältniß der vermehrten Zusammendrückung ihre Ausdehnung vermindern, und so auch ihre Ausdehnung im nähmlichen Verhältnisse vermehren, wie die Zusammendrückung geringer wird; so erscheint eine solche flüssige Masse als elastisch, z. B. die gewöhnliche Luft. Die Elementar-Kügelchen der flüssigen Massen könnten auch beynahe vollkommen hart, aber dabey mit den Abstoßungskräften nach dem bekannten Boskovichischen Systeme (3. Thl. §. 59.) dergestalt versehen seyn, daß daraus entweder eine oder die andere angeführte Beschaffenheit der Elasticität entstände. Wenn man sich nun eine flüssige Masse aus dergleichen elastischen Elementar-Kügelchen zusammengesetzet vorstellet; so wird das Bestreben der Elementar-Theilchen bey einer angebrachten Kraft nach allen Seiten auszuweichen, und die leichte Beweglichkeit derselben an einander ganz begreiflich.

In H. A. Schönbergers Grundriß einer Naturwissenschaft 1797. Seite 97. heißt es:

„Flüssige Materie ist eine solche, deren einerleyartigen Bestandtheile in einer unbestimmten Lage in Berührung unter sich, aber nicht in Verbindung (wechselseitigem Eingreifen) stehen.

„Daraus folgt:

1) „Da die Bestandtheile der flüssigen Materie selbst „in keiner Verbindung sind; so kann einer gewissen Menge „solcher nicht anderst ein bestimmter Ort im Raume ange-

„wie-

„wiesen werden, als daß man dieselbe an solchem Orte Fig.
„durch feste Materie einschließt, und so die Theile in ein „Ganzes zusammen hält: wie bey Flüssen und Seen das „Wasser von deren Ufer, und wie die flüssige Materie über„haupt durch Gefäße an willkürlichen Orten im Raume zu„sammen gehalten wird.

2) „Noch weniger widerstehen sie, aus der nähmli„chen Ursache, einer von außen auf sie gerichteten Tren„nung.

3) „Und eben folglich suchen die Theile der flüssigen „Materie, indem eine andere Materie in ihren Raum ein„zubringen bestrebet ist, nach allen Richtungen Auswege, „und widerstehen im Ganzen nur mit ihrer Schwerkraft.

4) „Da derselben Bestandtheile keine bestimmte Lage „unter sich haben: so verändern sie, bey dem Eindringen „oder der Berührung einer andern Materie, nur ihre un„gebundene Lage, und erzeugen keine Reibung; die aber „nothwendig bey der festen (spröden) Materie und eben „aus der Ursache erzeugt wird, da ihre Bestandtheile eine „bestimmte gebundene Lage unter sich haben, und eben da„mit widerstehen."

"Die Erklärung der flüssigen Materie von J. Kant in „seinen Methaphisischen Anfangsgründen der Naturwissen„schaft, Seite 47 Original-Auflage. — Ein Körper heißt „flüssig, dessen Theile bey einem noch so große Zusammen„hange dennoch sehr leicht an einander beweglich sind — „ist so unrichtig als jede andere; da erstens Zusammen„hang auch Verbindung heißen kann; und zweytens, da „sie keine innere Karakteristik der flüssigen Materie, son„dern nur ein äußeres Merkmal der Beweglichkeit ihrer „Theile angiebt."

§. 4.

Um die Gesetze des Gleichgewichtes bey flüssigen Körpern eben so aus ihren ersten Quellen herzuleiten, wie solches bey festen geschehen ist, muß man sich anfangs die flüssigen Körper, mit Beseitigung der Schwerkraft vorstellen. Alle Theilchen einer schweren flüssigen Masse sind

der

Fig. der Wirkung mechanischer Kräfte schon ausgesetzet. Wenn man daher wissen will, was die Wirkung der Schwere für einen Erfolg hat; so muß man sich zuerst vorstellen, was mit flüssigen Körpern vorgehen würde, wenn sie von der Schwerkraft frey wären, sonst aber eine oder mehrere bewegende Kräfte nach angenommenen Gesetzen auf dieselben wirketen.

§. 5.

1 Die Haupteigenschaft der flüssigen Körper, wodurch sich solche von festen unterscheiden, besteht darin, daß ein angebrachter Druck gegen irgend einen Theil einer in einem unbeweglichen Gefäße gänzlich eingeschlossenen flüssigen Masse nach allen Richtungen in seiner ganzen Stärke fortgepflanzet wird. Wenn man sich z. B. vorstellet, daß ein Gefäß vom festen Umfange, wovon ABEGH Fig. 1. ein Durchschnitt seyn mag, mit einer unschweren flüssigen Masse angefüllet sey, und daß gegen eine Seitenfläche AB eine Kraft = *P* (etwa mittelst eines genau passenden und frey beweglichen Stämpels) nach einer darauf senkrechten Richtung drucke; so leidet der Theil AB der Oberfläche der eingeschlossenen Flüssigkeit einen unmittelbaren Druck = *P*. Dieser Druck pflanzet sich nun vermöge der vollkommenen Beweglichkeit der Elementar-Theilchen des Flüssigen durch die ganze eingeschlossene flüssige Masse nach allen Richtungen in seiner ganzen Stärke dergestalt fort, daß 1) jeder dem AB gleich großer ebener Theil der Wände des Gefäßes nach einer darauf senkrechten Richtung von innen nach außen den nähmlichen Druck = *P* leidet, 2) auch jeder dem AB gleich großer Theil der Oberfläche eines in dem eingeschlossenen Flüssigen schwebenden festen Körpers nach einer darauf senkrechten Richtung eben so stark gedrücket wird, und endlich 3) daß auch jede der Stämpelfläche AB gleich große, und inner dem eingeschlossenen Flüssigen in was immer für einer Lage schwebende Ebene beyderseits nach senkrechten Richtungen den nähmlichen Druck = *P* leidet; oder welches einerley ist, daß bey dem unmittelbaren Drucke *P* gegen AB auch die auf zwey dergleichen ebenen Flächen vertheilten und

nach

nach der ganzen Ausdehnung der Flächen zusammen grän- Fig. 1
zenden Elementar - Theilchen des eingeschlossenen Flüssigen mit der nähmlichen Kraft = *P* gegen einander drücken.

Um diese angeführte Haupteigenschaft leichter einzusehen kann folgende Erläuterung dienen. Bey dem Drucke *P* auf die Fläche AB gedenke man in einer Seitenfläche des Gefäßes z. B. in EF ein Stück pq eben so groß als AB, nach seinem Umfange von den übrigen ringsherum anliegenden Theilen der nähmlichen Seitenfläche getrennet; so würde wegen des angebrachten Druckes *P* gegen AB die eingeschlossene flüssige Masse den losgetrennten Theil pq hinausdrücken, und sodann durch die Oeffnung auszuströmen anfangen, wofern nicht eine Kraft *R*, die etwa mittelst eines Stämpels senkrecht auf pq drücket, solches verhinderte; und es ist offenbar, daß in einem solchen Falle, um den Theil pq an seiner Stelle unverrückt zu erhalten, *R* = *P* seyn müsse, vorausgesetzt, daß die eingeschlossene Masse vollkommen flüssig ist; so daß nun bey diesen Umständen pq durch den fortgepflanzten Druck von *P* hinauswärts so stark, als von *R* hineinwärts gedrückt wird, auf eben die Art, als wenn die Kraft *P* unmittelbar den Theil pq hinausdrückte. Stellet man sich ferner vor, daß der Theil pq wieder mit der Seitenfläche EF hinlänglich fest vereiniget werde; so vertritt die Festigkeit von pq die Stelle der äußeren Kraft *R*, und der innere fortgepflanzte Druck gegen pq verbleibet, wie ehevor = *P*. Dieser Schluß gilt von jedem eben so großen Theile einer ebenen Fläche bey dem eingeschlossenen Flüssigen, wo man eine solche Fläche auch annehmen mag. Wenn man nähmlich sich auch einen mitten im eingeschlossenen Flüssigen schwebenden festen Körper vorstellet, z. B. ein Parallelepipedum, wo jede der zwey entgegengesetzten Seitenflächen ab, dc der Stämpelfläche AB gleich ist; so entsteht aus dem unmittelbaren Drucke *P* auf AB auch gegen jede der zwey Seitenflächen ab, dc nach darauf senkrechten Richtungen ein eben so großer fortgepflanzter Druck; und sowohl ab als dc würde bey einem hohlen Parallelepipedum wirklich hineingedrücket und der innere leere Raum

Fig. 1 von dem hineinströmenden Flüssigen angefüllet werden, wenn solches die Festigkeit von ab, dc nicht verhinderte. Der auf ab und dc fortgepflanzte Druck verbleibet immer der nähmliche, es möge der Abstand ad oder bc der zwey Flächen ab, dc noch so klein seyn, oder auch gänzlich verschwinden; wo sodann die zwey Flächen ab, dc auf einander fallen, und eine einzige ebene Fläche vorstellen. Der auf eine Fläche AB unmittelbar angebrachte Druck *P* pflanzet sich daher durch die ganze im Gefäße eingeschlossene flüssige Masse allenthalben gegen jede eben so große Fläche, wenn man solche wo immer auch mitten in der flüssigen Masse annehmen mag, nach einer darauf senkrechten Richtung mit gleicher Stärke fort.

§. 6.

In allen Fällen, wenn eine flüssige Masse in einem festen Gefäße von was immer für einer Gestalt eingeschlossen ist, und wenn alsdann von außenher an einer Stelle, wo das Gefäß eine Oeffnung hat, gegen die anliegende Fläche des Flüssigen ein darüber gleichförmig vertheilter Druck presset, muß man diesen unmittelbaren Druck, welchen die anliegende Fläche leidet, von dem nach allen Seiten durch die ganze flüssige Masse fortgepflanzten Drucke unterscheiden. Die ebene Fläche, auf welche der unmittelbare Druck presset, heißt die Fläche des unmittelbaren Druckes; und jede ebene Fläche, welche einen fortgepflanzten Druck leidet, wird die Fläche des fortgepflanzten Druckes genannt. Wie es eigentlich zugehe, daß bey eingeschlossenen flüssigen Massen aus einem unmittelbaren Drucke ein fortgepflanzter Druck nach allen Richtungen entstehe, sollte die Naturlehre bestimmen. Der Grund davon ist in der Elementar-Kraft der Materie (3. Th. §. 59.) zu suchen; man kann sich nähmlich vorstellen, daß durch den unmittelbaren Druck die Abstoßungskraft der Elementar-Theilchen der flüssigen Masse in Wirksamkeit gesetzet werde. Es wird übrigens hier und im folgenden alle Mahl vorausgesetzet, daß die Gefäße festgehalten werden, damit sie

we-

wegen der verschiedenen von außen auf ihre festen Oberflächen wirkenden Kräfte nicht weichen können. Fig. 1

§. 7.

Bey flüssigen in Gefäßen eingeschlossenen Massen ohne Schwere verhält sich der fortgepflanzte Druck gegen was immer für eine darin angenommene ebene Fläche zum unmittelbaren Drucke gegen irgend eine andere Fläche, wie die Fläche des fortgepflanzten zur Fläche des unmittelbaren Druckes. Z. B. der gegen GH fortgepflanzte Druck, oder eine demselben das Gleichgewicht haltende Kraft Q verhält sich zu P, wie GH zu AB.

Um diese Wahrheit einzusehen, sey erstlich die Fläche GH $n$mahl so groß als die Fläche AB des unmittelbaren Druckes, nähmlich GH $= n.$ AB; so leidet jeder der Fläche AB gleich große Theil von GH (vermöge §. 5.) einen dem unmittelbaren Drucke gleich großen fortgepflanzten Druck $= P$; nun aber besteht vermöge der Voraussetzung GH aus n dergleichen Theilen AB; folglich ist der sämmtliche von P auf die ganze Fläche GH fortgepflanzte Druck, oder eine mit demselben im Gleichgewichte stehende Kraft Q auch $n$mahl so groß als P, nähmlich $Q = n. P$ und $n = \frac{Q}{P}$; da nun auch GH $= n.$ AB und $n = \frac{\text{GH}}{\text{AB}}$; so ist auch $\frac{Q}{P} = \frac{\text{GH}}{\text{AB}}$; und folglich $Q : P =$ GH : AB. Zweytens sey das Verhältniß irgend einer ebenen Fläche des fortgepflanzten Druckes z. B. ad zu AB wie immer beschaffen; so gedenke man diese Fläche ad dergestalt erweitert, bis solche $k$mahl so groß wird, als die Fläche AB des unmittelbaren Druckes: so wird der darauf wirkende fortgepflanzte Druck, vermöge des Vorhergehenden, $= kP$ seyn. Da dieser fortgepflanzte Druck kP über die erweiterte Fläche gleichförmig vertheilet ist; so leidet der Theil ad dieser erweiterten Fläche nur einen solchen Theil $= p$ des gesammten darauf wirkenden fortgepflanzten Druckes $k. P$, das p zu

$k. P$,

Fig 1 $k. P$, sich verhalte, wie die Fläche ad zur ganzen erweiterten Fläche $k.$ AB, nähmlich $p : k.P =$ ad : $k.$ AB; folglich ist auch in diesem Falle $p : P =$ ad : AB. Der fortgepflanzte Druck verhält sich demnach gegen u. s. w.

Hieraus folget:

1) Aus dem gegebenen unmittelbaren Drucke und aus dessen Fläche läßt sich der fortgepflanzte Druck gegen jede gegebene feste Fläche berechnen; z. B. gegen GH ist der fortgepflanzte Druck $= \frac{GH}{AB} . P$, und gegen EF ist solcher $= \frac{EF}{AB} . P$. Auf diese Art läßt sich auch der fortgepflanzte Druck gegen jeden so kleinen Theil einer krummen Oberfläche, welchen man ohne merklichen Fehler als eine ebene Fläche ansehen kann, berechnen.

2) Wäre GH eine offene Stelle des Gefäßes, so würde ein unmittelbarer Druck P gegen AB ohne Zweifel die flüssige Masse zur Oeffnung GH hinaustreiben. Um dieses zu hindern, müßte auch gegen GH von außenher ein Druck Q pressen, so daß $Q = \frac{GH}{AB} . P$ wäre. Q würde alsdann mit P im Gleichgewichte seyn. In einem solchen Falle, wo gegen AB der Druck P, und gegen GH der Druck $Q = \frac{GH}{AB} . P$ zugleich von außen darauf presset, könnte vielleicht jemand vermuthen, daß sodann jede andere Seitenfläche des Gefäßes einen zweyfachen fortgepflanzten Druck zu leiden habe, so daß z. B. der gegen DE fortgepflanzte Druck $= \frac{DE}{AB} . P + \frac{DE}{GH} . Q = \frac{DE}{AB} . P + \frac{DE}{GH} \cdot \frac{GH}{AB} . P = \frac{DE}{AB} . 2 P$ wäre: nähmlich $\frac{DE}{AB} . P$ wegen des unmittelbaren Druckes P gegen AB, und $\frac{DE}{GH} . Q$ wegen Q gegen GH. Allein das wäre eine irrige Vermuthung; denn

denn wenn man P für den unmittelbaren Druck annimmt, Fig. 1
so hat Q nichts anders zu thun als die Stelle der festen Seitenfläche GH des Gefäßes zu vertreten, nähmlich den gegen GH forgepflanzten Druck aufzuhalten; und so stellt auch P an AB nichts anders vor. Nur alsdann, wenn Q gegen GH einen größeren Druck als $\frac{GH}{AB}. P$, oder wenn P gegen AB einen größern Druck als $\frac{AB}{GH}. Q$ ausübet, leidet DE auch einen größern fortgepflanzten Druck; in welchem ersten Falle aber, um das Gleichgewicht zu erhalten, auch P dergestalt vergrößert werden muß, daß $P = \frac{AB}{GH}. Q$; und im zweyten Q so vergrößert werden muß, daß $Q = \frac{GH}{AB}. P$ bleibt: wo nun wieder im Stande des Gleichgewichtes der gegen DE fortgepflanzte Druck, oder eine demselben das Gleichgewicht haltende Kraft $= \frac{DE}{AB}. P$ oder $= \frac{DE}{GH}. Q$ seyn müßte für die Ausdrücke P und Q in ihren erhöheten Werthen genommen.

3) Der fortgepflanzte Druck verbleibet unverändert, wenn man den unmittelbaren Druck P und im nähmlichen Verhältnisse die Fläche AB (gegen welche jener presset) vermehret, oder vermindert; wenn nähmlich mP aus P und zugleich m. AB aus AB wird, so ist sodann gegen GH der fortgepflanzte Druck $= \frac{GH}{m.AB}. mP = \frac{GH}{AB}. P$ eben so groß als bey dem unmittelbaren Drucke P gegen AB.

Anmerkung. Das bisher angeführte gilt sowohl von elastischen als auch von unelastischen flüssigen Massen ohne die Schwere in Betracht zu ziehen, mit dem einzigen Unterschiede, daß eine elastische flüssige Masse, wenn solche in einem Gefäße eingeschlossen, und einem unmittelbaren Drucke P ausgesetzet ist, dadurch in einen so kleinen Raum

Fig. 1 zusammen gepresset wird, bis der von der Elasticität der Elementar-Theilchen herrührende innere Druck gegen die Fläche AB dem äußeren Drucke P gleich ist. Wird nun der äußere Druck P gegen die nähmliche Fläche AB vermindert; so wird vermöge des überwiegenden inneren Elasticitätsdruckes die Stämpelfläche AB herausgeschoben, die eingeschlossene flüssige Masse in einen größeren Raum ausgebreitet, und dadurch auch der fortgepflanzte Druck gegen jede Seitenfläche vermindert. Ist hingegen die eingeschlossene flüssige Masse gänzlich unelastisch; so nimmt solche immer einen und denselben Raum ein, es möge der auf AB angebrachte Druck wie immer beschaffen seyn. Auch folget die unelastische flüssige Masse dem Stämpel nicht nach, wenn er zurückgezogen wird, und der fortgepflanzte Druck höret sodann gänzlich auf. Der Erfolg bey elastischen flüssigen Massen ist nähmlich eben so beschaffen, als wenn jedes Elementar-Theilchen der Materie einer solchen Masse mit einer nach allen Richtungen ausströmenden Abstoßungskraft versehen wäre, welche bey jeden zwey angränzenden Elementar-Theilchen mit deren Entfernungen im umgekehrten Verhältnisse steht. Dadurch kann eine elastische flüssige Masse mittelst eines vermehrten äußeren Druckes in einen engern Raum gebracht werden, und muß bey vermindertem Drucke sich gleich wieder in einen größern Raum ausbreiten. Auch bey unelastischen flüssigen Massen kann man den fortgepflanzten Druck durch eine Abstoßungskraft der Elementar-Theilchen rechtfertigen, welche aber von der Beschaffenheit seyn müßte, daß sie bey dem gewöhnlichen Abstande der Elementar-Theilchen noch gänzlich unthätig wäre, bey der geringsten Verminderung der Entfernungen hingegen außerordentlich stark wirkete. Auf diese Art könnte eine solche unelastische flüssige Masse durch einen äußern Druck nicht leicht in einen engern Raum gebracht werden. Nur dann, wenn solche durch einen außerordentlich großen Druck zusammen gepresset würde, könnte man eine sehr geringe Verminderung des Raumes wahrnehmen. Das Wasser hat eine solche Beschaffenheit. Man hielt solches immer für gänzlich unelastisch, bis man endlich

lich in den neuern Zeiten durch einige Versuche dargethan hat, daß es sich durch einen äußerst großen Druck dennoch in einen um etwas sehr weniges kleinern Raum bringen lasse, und nach aufgehobener Zusammendrückung wieder den vorigen Raum einnehme. Ob aber die wahrgenommene Elasticität des Wassers bey einer außerordentlichen Zusammendrückung nicht von der im Wasser immer befindlichen Luft herrühre, und also in Rücksicht auf das Wasser selbst nicht bloß scheinbar sey, ist dann doch eine noch nicht klar ausgemachte Sache. Fig.

II. Abschnitt.

Allgemeine Grundlehre des Gleichgewichtes des schweren Wassers in Gefässen.

§. 8.

Wenn schweres Wasser (worunter man auch jede andere unelastische flüssige Masse von gleichförmiger Dichtigkeit verstehen kann) in einem unbeweglichen Gefäße eingeschlossen ist; so verursachet vermöge der Schwerkraft jedes Elementar-Theilchen gegen das zunächst unten gelegene nach der lothrechten Richtung einen unmittelbaren Druck, der dem Gewichte eines solchen Elementar-Theilchens gleich ist. Dieser unmittelbare Druck eines jeden Elementar-Theilchens gegen das zu nächst unten gelegene pflanzet sich nicht nur allein nach der fortgesetzten, sondern (vermöge §. 5.) auch seitwärts nach jeder anderen Richtung fort. Die Richtungen der Schwere in nicht gar zu großen Entfernungen sind (vermöge 3 Th. §. 6.) für parallel anzusehen; es können daher auch

Fig. auch um so mehr in nicht gar zu weiten Gefäßen die Richtungen des von der Schwerkraft entstehenden unmittelbaren Druckes der Elementar = Theilchen des Wassers gegen die zu nächst unten gelegenen für parallel angenommen werden.

§. 9.

Diejenige Menge der Elementar = Theilchen des Wassers in einem Gefäße, welche man über eine horizontale Durchschnittsebene desselben neben einander verbreitet gedenket, kann man eine horizontale Wasserschichte nennen. Da nun in einem Gefäße jedes Elementar = Theilchen des Wassers gegen das zu nächst unten gelegene einen unmittelbaren Druck ausübet, der dem Gewichte desselben gleich ist (§. 8.); so ist es offenbar, daß auch jede horizontale Wasserschichte gegen die zunächst unten gelegene einen unmittelbaren Druck nach einer lothrechten Richtung ausübet, der dem Gewichte einer solchen Wasserschichte gleich ist; und daß dieser unmittelbare Druck sich nicht nur allein nach der fortgesetzten, sondern auch seitwärts nach jeder anderen Richtung fortpflanzet. Daher ist jede horizontale Schichte außer dem unmittelbaren Drucke der zu nächst darauf liegenden Schichte auch noch einem fortgepflanzten Drucke aller übrigen darüber liegenden Wasserschichten ausgesetzet; und zwar so, daß der fortgepflanzte Druck eine solche horizontale Wasserschichte (vermöge §. 5.) von beyden Seiten gleich stark presset, nähmlich eben so stark von oben nach unten als von unten nach oben. Auch jede andere in was immer für einer Lage angenommene Wasserschichte wird von dem fortgepflanzten Drucke von beyden Seiten nach senkrechten Richtungen gepresset. Wie groß der fortgepflanzte Druck gegen verschiedene Wasserschichten in verschiedenen wie immer schiefgeneigten Lagen sey, wird weiter unten gezeigt werden. So viel kann man indessen doch einsehen, daß im Stande des Gleichgewichtes eines im Gefäße eingeschlossenen schweren Wassers was immer für ein Elementar = Theilchen desselben von allen Seiten her einen gleich großen fortgepflanzten Druck zu leiden habe; wie groß hingegen dieser fortge-

pflan-

pflanzte Druck gegen ein Elementar-Theilchen des Wassers in verschiedenen Stellen des Gefäßes sey, wird ebenfalls weiter unten zu ersehen seyn. Fig.

§. 10.

Wenn ein unbewegliches oberwärts offenes Gefäß bis zu einer horizontalen Ebene mit schwerem Wasser angefüllet wird; so wird letzteres in dieser Lage ruhig und im Gleichgewichte seyn, vorausgesetzt, daß außer der Schwere sonst keine Kraft darauf wirke. Ist hingegen bey einem oberwärts offenen oder auch geschlossenen, aber nicht ganz angefüllten Gefäße die oberste uneingeschlossene Fläche des Wassers nicht horizontal; so kann solches in dieser Lage nicht ruhig seyn.

Es sey das Gefäß APQB Fig. 2. bis zur horizontalen Ebene AB mit schwerem Wasser angefüllet, und man gedenke die ganze Wassermasse von AB angefangen bis zur untersten Stelle des Gefäßes in lauter horizontale Wasserschichten zertheilet; so ist die unterste Schichte PQ gewiß im Gleichgewichte, weil der fortgepflanzte Druck, dem sie wegen aller darüber liegenden Wasserschichten ausgesetzet ist, von unten hinauf von dem Boden, und seitwärts von den Wänden des Gefäßes aufgehalten wird. Aber auch jede andere höher liegende horizontale Wasserschichte EF ist im Gleichgewichte, weil solche von dem fortgepflanzten Drucke aller darüber liegenden Wasserschichten eben so stark hinauf als hinunter gepresset wird, und wegen der festen Wände des Gefäßes auch seitwärts nicht zerfließen kann. Endlich muß auch die oberste horizontale Wasserschichte AB im Gleichgewichte seyn; weil sie von oben herab weiter keinen Druck zu leiden hat, und der unmittelbare Druck eines jeden Elementar-Theilchens derselben gegen das zu nächst unten gelegene Elementar-Theilchen einen eben so großen fortgepflanzten Druck auch nach der entgegen gesetzten Richtung von unten hinauf verursachet, wodurch das Sinken gänzlich verhindert, und das Ausweichen nach der Seite, wenn es wirklich eine Ursache dazu vorhanden wäre, durch die Wände des Gefäßes aufgehalten wird. Bey dem angeführten

Fig. ten Umstande ist daher die ganze schwere Wassermasse im
2 Gleichgewichte.

Ist hingegen die Oberfläche CGD nicht horizontal, sondern in G über die horizontale Ebene CD erhöhet; so ist jede oberhalb CD angenommene horizontale Wasserschichte MN einem fortgepflanzten Drucke aller übrigen darüber liegenden Wasserschichten ausgesetzet, welcher (nach §. 5.) die Theilchen M und N auch seitwärts heraustreibet. Auch treibet der fortgepflanzte Druck MGN die Theilchen an MC gegen A, und an ND gegen B heraus. Daher kann die erhöhte Wassermasse, da sie seitwärts nicht gestützet ist, in dieser Lage nicht in Ruhe verbleiben, sondern muß zerfließen, wenn man auch zugibt, daß das übrige unterhalb CD befindliche Wasser im Gleichgewichte sey. Auch ist es schon aus der Lehre der Bewegung schwerer Körper auf der schiefen Ebene ersichtlich, daß die auf den Abhängen einer erhöheten Oberfläche des schweren Wassers befindlichen Elementar-Theilchen M und N nicht ruhen können.

1. **Anmerkung**. Der angeführte Satz wird auch durch die Erfahrung bestättiget; man findet nähmlich allenthalben die Oberfläche des stillstehenden Wassers horizontal, wenn außer der Schwere keine andere Kraft darauf wirket. Jedoch leidet dieselbe zuweilen auch eine geringe Ausnahme; es kann sich nähmlich fügen, daß die Elementar-Theilchen der flüssigen Masse von den Wänden des Gefäßes entweder angezogen, oder auch abgestoßen werden, wodurch sich an der Oberfläche der ruhenden flüssigen Masse vorzüglich in Gefäßen von geringer Weite im ersten Falle eine merkliche Vertiefung, und im zweyten eine Erhöhung gegen die Mitte zeiget. Allein dergleichen Kräfte werden hier außer Acht gelassen.

2. **Anmerkung**. Auf dem großen Weltmeere, und überhaupt bey allen schon so weit ausgebreiteten Gewässern, daß man die Richtungen der Schwere nicht mehr durchaus für parallel ansehen kann, ist im Stande des Gleichgewichtes die Oberfläche des Wassers nicht mehr eine ebene Fläche; sondern solche müßte vielmehr eine Strecke

von

von einer Kugelfläche seyn, wenn die Richtungen der Fig.
Schwere allenthalben genau im Mittelpuncte der Erdkugel zusammenträfen. Es ist nähmlich leicht einzusehen, daß eine flüssige Masse, deren Theilchen alle gegen einen und denselben Mittelpunct schwer sind, nur damahls im Gleichgewichte seyn kann, wenn deren äußerste Oberfläche um den nähmlichen Mittelpunct eine Kugelgestalt annimmt. In einem solchen Falle leiden die Theilchen der flüssigen Masse an der äußersten Oberfläche gar keinen Druck; an jeder anderen in der flüssigen Masse nach belieben angenommenen concentrischen Kugelfläche hingegen leidet jedes Theilchen des Flüssigen von allen Seiten her einen gleich großen fortgepflanzten Druck; und daher ist in einem solchen Falle alles im Gleichgewichte. Würde aber an irgend einer Stelle ein Theil der flüssigen Masse über die Kugelfläche hervorragen; so müßte dieser Theil so wie MGN in Fig. 2. ringsherum zerfließen, und das Gleichgewicht könn- 2
te nicht bestehen. Die Umdrehung der Erde um ihre Achse verursachet, daß die Oberfläche des Weltmeeres auch keine vollkommene Kugelfläche seyn kann; sondern solche ist die Oberfläche eines abgeplatteten Ellipsoides, wo der Durchmesser des Aequators größer ist, als die Achse von einem Pole zum andern; und zwar nach den neuern Bestimmungen beyläufig in dem Verhältnisse von 334 zu 333. Wenn nähmlich der feste Kern der Erdkugel auch wirklich eine vollkommene Kugelgestalt von gleichförmiger Dichtigkeit hätte; so könnte bey deren täglichen Umdrehung um ihre Achse dennoch die Richtung der Schwerkraft nicht allenthalben gegen den Mittelpunct gerichtet seyn (3. Th. §. 200.). Da nun schweres Wasser im Stande des Gleichgewichtes jederzeit eine solche Oberfläche annimmt, daß die Richtung der Schwerkraft allenthalben darauf senkrecht ist; so ist es offenbar, daß bey der Umdrehung einer solchen Erdkugel wenn man dieselbe mit Wasser übergossen in Erwägung zieht, die Oberfläche des ruhenden Wassers gar nicht kugelförmig seyn kann. Da über dieses bey der Umdrehung einer solchen festen Kugel die

Fig. Schwerkraft von beyden Polen gegen den Aequator abnimmt; so muß ein darüber verbreitetes Wasser von gleichförmiger Dichtigkeit im Stande des Gleichgewichtes eine solche Lage annehmen, daß die Wasserhöhe unter dem Aequator größer ist, als unter den Polen. Wenn der angenommene genau kugelförmige Kern der Erde nicht hinlänglich fest, sondern anfänglich etwas weich wäre; so müßte auch dieser Kern wegen der täglichen Umdrehung allmählich die Gestalt eines abgeplatteten Ellipsoides annehmen. Wenn man die Erde als eine durchaus flüssige Masse von gleichförmiger Dichtigkeit ansieht; dabey das in 3. Th. 4. Aufl. §. 58. am Ende I. Seite 64. berührte Gesetz der Schwerkraft inner der Erdkugel für bekannt annimmt, und ferner die Verminderung der Schwerkraft wegen der so genannten Fliehkraft (nach 3. Th. §. 200.) gehörig in Erwägung zieht: so läßt sich das Verhältniß zwischen der Halbachse und dem Halbmesser des Aequators berechnen: und zwar so, daß man zwey Wassersäulen in einer vereinigten Röhre vom Polle bis zum Mittelpuncte und von da bis zum Umkreise des Aequators in Erwägung zieht, und die Länge einer jeden Wassersäule so zu bestimmen sucht, daß solche bey der Umdrehung einander im Gleichgewichte erhalten; oder daß sodann eine im Mittelpuncte angenommene Wasserschichte von beyden Seiten einem gleich großen fortgepflanzten Drucke ausgesetzt sey. Diese Rechnung auszuführen würde uns zu weit von unserem Ziele ableiten; indessen können die fähigern Leser ihre eigenen Kräfte daran versuchen. Auch wäre noch zu bestimmen, ob bey der Umdrehung eines solchen flüssigen Ellipsoides im Stande des Gleichgewichtes die Schwerkraft vom Pole gegen den Aequator noch abnehme; ob nicht vielleicht sodann die Schwerkraft auf der Oberfläche eines solchen Ellipsoides allenthalben gleich groß seyn könnte? daß man daher aus der beobachteten Abnahme der Schwere von den Polen gegen den Aequator keineswegs eine ellipsoidische, sondern vielmehr eine kugelförmige Gestalt, und zugleich die Umdrehung der Erde folgern dürfte. Aber sodann wäre bey der Beobach-

tung

tung der Polhöhen, und in anderen Fällen die Ablenkung der Schwerkraft vom Mittelpuncte der Erde bey deren kugelförmiger Gestalt gehörig in Erwägung zu ziehen. Die weitere Ausführung hiervon gehört zur vollständigen Naturlehre. Man vergleiche hiermit meine mathematische Betrachtung über eine sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehende feste Kugel. Erfurt bey Beyer 1798. Man findet in dieser Abhandlung Seite 155. die Bemerkung, daß eine feste schwere Kugel von der beyläufigen Größe und Dichtigkeit unsers Erdkörpers bey einer solchen Umdrehungsbewegung, die bey unserer Erde statt findet, uns bey Messungen der Meridiangrade in verschiedenen geographischen Breiten als ein abgeplattetes Elliptoid von dem Abplattungsverhältniß 414 zu 415 erscheinen müßte, wenn sie schon eine vollkommene Kugelgestalt hätte. Man vergleiche auch Bode astron. Jahrb. für 1802 Seite 251. Fig.

§. 11.

Die horizontale Bodenfläche eines senkrechten prismatischen oder cylindrischen mit schwerem Wasser angefüllten Gefäßes leidet im Stande des Gleichgewichtes einen Druck, der dem Gewichte der ganzen darüberstehenden Wassermasse gleich ist.

Denn die Bodenfläche wird in einem solchen Falle eben so gedrücket, als wenn das Gefäß mit einer festen Masse angefüllet wäre, die mit dem Wasser einerley specifisches Gewicht hat, und an den Seiten des Gefäßes allenthalben genau anschließt, aber doch in demselben ohne Reibung frey beweglich ist; mit dem einzigen Unterschiede, daß im letzten Falle bey der festen Masse die Seitenflächen des Gefäßes gar keinen Druck zu leiden haben; im ersten Falle hingegen, wo das Gefäß mit schwerem Wasser angefüllet ist, wirket auch gegen die Seitenflächen des Gefäßes nach darauf senkrechten Richtungen ein fortgepflanzter Druck, der sich in der Folge wird bestimmen lassen.

Den angeführten Satz kann man auch auf folgende Art erweisen.

Fig. 3 Es sey das Lothrecht stehende prismatische Gefäß ABCD Fig. 3. bis zur Höhe AB mit schwerem Wasser angefüllet, so ist (vermöge §. 10.) im Stande des Gleichgewichtes die Oberfläche desselben AB horizontal, und mit der Bodenfläche CD parallel. Man gedenke durch horizontale Durchschnitts-Ebenen die ganze Wassermasse in Wasserschichten zertheilet; so wird jede solche Durchschnitts-Ebene der Bodenfläche DC gleich seyn; und jede Wasserschichte leidet (vermöge §. 9.) von der zu nächst darauf liegenden einen unmittelbaren Druck, der ihrem Gewichte gleich ist. Dieser unmittelbare Druck jeder oberen Schichte gegen die zu nächst unten liegende pflanzet sich (vermöge §. 5.) gegen die Bodenfläche in seiner ganzen Stärke fort; es hat daher die Bodenfläche einen Druck zu leiden, der dem Gewichte aller darüber liegenden Wasserschichten, das ist, der ganzen darüber befindlichen Wassermasse gleich ist.

Anmerkung. Wenn man die Oberfläche AB mit einer festen Fläche zuschließt, ohne solche mit einer Kraft von oben nach unten zu pressen; so ist wohl offenbar, daß eine solche Fläche alsdann auch von unten nach oben keinen Druck zu leiden hat. Es könnte aber doch vielleicht jemand auf den Einfall gerathen aus der Fortpflanzung des Druckes erweisen zu wollen, daß in einem solchen Zustande die Fläche AB einen eben so großen Druck von unten nach oben zu leiden habe als DC von oben nach unten; es könnte nähmlich jemand meinen, daß der Druck, welchen die unter einer horizontalen Ebene EF befindliche Wassermasse gegen die Bodenfläche DC ausübet, sich auch durch die oberhalb EF befindliche Wassermasse gegen den Deckel AB fortpflanze. Allein das kann gar nicht seyn; denn die unterhalb eines beliebigen horizontalen Querschnittes EF befindliche Wassermasse für sich allein betrachtet verursachet gar keinen Druck gegen EF hinaufwärts, sondern ist (vermöge §. 10) im Gleichgewichte. Alsdann, wenn man die schwere Wassermasse AEFB auf EF setzet, wirket zwar gegen EF hinaufwärts ein fortgepflanzter Druck, weil die unter EF befindliche Wassermasse wegen der Abstoßungs-

kraft

kraft der Elementar-Theilchen den darauf wirkenden Druck Fig.
gleichsam wieder zurück gibt; dieser gegen EF hinaufwärts 3
zurückgegebene Druck aber ist immer mit dem Drucke der darauf ruhenden Wassermasse im Gleichgewichte. Weil aber über AB kein Wasser mehr ist, auch sonst keine Kraft von oben darauf presset, so kann diese Fläche AB auch keinen Druck zurück geben; und sie leidet daher von unten hinauf keinen fortgepflanzten Druck. Der Erfolg ist immer so, als wenn EFBA eine feste Masse wäre, die diesen Raum genau ausfüllet, in demselben frey beweglich ist, und mit dem Wasser einerley specifisches Gewicht hat.

§. 12.

Diejenige Menge des schweren Wassers, welche den körperlichen Inhalt eines senkrechten prismatischen Gefäßes ausfüllet, kann man eine Wassersäule nennen.

1) Das Gewicht einer solchen Wassersäule wie ABCD wird leicht gefunden, wenn die Grundfläche DC $= f$ im Quadratinhalte, ihre Höhe AD $= a$ im Längenmaße, und nebst dem auch das eigenthümliche Gewicht des Wassers bekannt ist. Setzet man nähmlich den körperlichen Inhalt der Wassermasse $= v$, das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= q$, und das gesuchte Gewicht der ganzen Wassersäule $= p$; so ist

I. $v = af$; II. $p = qv$; III. $p = afq$.

2) Ein Wiener Kubikfuß Regenwasser wiegt sehr nahe $56\frac{3}{8}$ Wiener-Pfunde; daraus ergibt sich das Gewicht eines Duodecimal-Kubikzolles sehr nahe $= 1\frac{1}{24}$ Loth; es ist daher beym Regenwasser entweder $q = 56{,}375$ Pfd. oder $q = 1\frac{1}{24} = \frac{100}{96}$ Loth, nach dem der körperliche Inhalt in Kubikfußen oder Kubikzollen ausgedruckt ist. Quecksilber ist beynahe 14mahl dichter als Wasser; daher ist beym Quecksilber entweder $q = 789\frac{1}{4}$ Pfd., oder $q = 14\frac{7}{12}$ Loth, nachdem entweder der Kubikfuß oder der Kubikzoll für die Einheit angenommen wird. Ein Pariser-Kubikfuß Regenwasser wiegt sehr nahe 70 Pariser Pfunde, und ein Rheinländischer Kubikfuß sehr nahe 66 Köllner-Pfunde. Beym gewöhnlichen reinen Fluß- und Brunnenwasser kann

Fig. man in der Ausübung das Gewicht eines Wien. Kub. Fußes $56\frac{1}{2}$ Pfunde des Wien. Handelsgewichtes setzen.

§. 13.

Wenn eine ebene Fläche einen gleichförmig darüber vertheilten Druck leidet, dessen Richtung auf der Ebene senkrecht ist; so läßt sich eine Wassersäule angeben, welche eine eben so große horizontale Bodenfläche eines lothrecht stehenden prismatischen Gefäßes eben so stark drücken würde. Die Höhe einer solchen Wassersäule kann man die Höhe des Druckes nennen.

1) Wenn daher eine ebene Fläche f einen darauf senkrechten und gleichförmig vertheilten Druck $= p$ leidet; so kann man $p = afq$ setzen, wo q das eigenthümliche Gewicht des Wassers, und a die Höhe des Druckes bedeutet. Daraus folgt $a = \frac{p}{fq}$; nähmlich die Höhe des Druckes wird gefunden, wenn man den Druck durch das Product aus der Fläche des Druckes in das eigenthümliche Gewicht des Wassers dividiret.

2) Im §. 7. ist der fortgepflanzte Druck so beschaffen, daß die Höhe des Druckes allenthalben gleich groß ist.

4 Denn da $a = \frac{p}{fq}$, so ist gegen AB die Höhe des Druckes $= \frac{P}{AB.\,q}$; und da gegen was immer für eine Fläche DE der fortgepflanzte Druck $= \frac{DE}{AB}.\,P$, so ist die Höhe dieses fortgepflanzten Druckes $= \frac{DE}{AB}.\,P : DE.\,q = \frac{P}{AB.\,q}$ eben so groß als gegen AB; und eben so groß ist die Druckhöhe auch gegen jede andere Fläche z. B. gegen EF.

§. 14.

Wenn ein Gefäß von was immer für einer Gestalt, welches einen ebenen horizontalen Boden hat, mit schwerem Wasser angefüllet, und alles in Ruhe ist;

ist; so leidet der Boden einen fortgepflanzten Druck, der dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die Bodenfläche des Gefäßes zur Grundfläche, und die senkrechte Höhe des darüber befindlichen Wassers zur Höhe hat; das ist: Die Höhe des gegen die Bodenfläche fortgepflanzten Druckes ist so groß, als der Abstand der obersten Fläche des Wassers von der horizontalen Bodenfläche. Fig.

Es sey das Gefäß CABHGD Fig. 4. bis zur horizontalen Ebene CD mit schwerem Wasser angefüllet, und die lothrechte Höhe CP $= a$ in unendlich viele gleiche Theile getheilet, oder eigentlich nur in soviel gleiche Theile, als Elementar-Theilchen des Wassers in der Höhe CP lothrecht über einander liegen können. Jedes dergleichen Theilchen der Höhe sey $= e$; durch alle diese Theilungspuncte gedenke man horizontale Ebenen geführet: so wird dadurch die ganze Wassermasse in ihre horizontale Wasserschichten zertheilet. Die Grundflächen dieser horizontalen Wasserschichten von oben herabgezählet bezeichne man mit A, B, C, D, E. . .; so sind die körperlichen Inhalte der Wasserschichten in der nähmlichen Ordnung $= A.e$, $B.e$, $C.e$... und ihre Gewichte $= Aeq$, Beq, Ceq, Deq,... wenn q das eigenthümliche Gewicht des Wassers bedeutet. Nun verursachet jede Wasserschichte gegen die zunächst unten liegende einen unmittelbaren Druck, der ihrem Gewichte gleich ist; und jeder solche unmittelbare Druck pflanzet sich (vermöge §. 7.) dergestalt gegen die Bodenfläche fort, daß der von jeder Schichte gegen die Bodenfläche AB $= f$ fortgepflanzte Druck $= efq$ ist; weil der fortgepflanzte Druck x zum unmittelbaren sich verhält, wie die Bodenfläche zur Fläche des unmittelbaren Druckes, nähmlich $x : Aeq = f : A$; und eben so auch $x : Beq = f : B$, u. s. w. Es ist daher der von sämmtlichen Wasserschichten gegen die Bodenfläche fortgepflanzte Druck $= efq + efq + efq \ldots = (e + e + e + e + e + \ldots) fq = afq$. 4

Man kann den angeführten Satz auch kurz so erweisen. Ein unbestimmtes Stück CQ der Höhe CP von C ge-

Fig. 4 gezählet sey $= x$, die horizontale Durchschnitts-Ebene des Wassers in dieser Höhe aber sey $= y$; so ist die horizontale Wasserschichte über dieser Ebene $= y\mathrm{d}x$, und ihr Gewicht $= qy\mathrm{d}x$ als ein unmittelbarer Druck dem y ausgesetzet ist, weil man das Differenziale $\mathrm{d}x$ für die Dicke der Wasserschichte ansehen kann. Daraus entsteht (nach §. 7.) ein fortgepflanzter Druck $\mathrm{d}p$ gegen AB$=f$ von der Beschaffenheit, daß $\mathrm{d}p : qy\mathrm{d}x = f : y$ sich verhält; folglich ist $\mathrm{d}p = qf\mathrm{d}x$, und $\int \mathrm{d}p = \int qf\mathrm{d}x$, nähmlich $p = qfx$; wo indessen p nur den Druck bedeutet, welchen die sämmtliche über y befindliche Wassermasse gegen die Bodenfläche f fortpflanzet. Setzet man nun $x =$ CP $= a$; so ist der von der sämmtlichen Wassermasse CABHGD gegen die Bodenfläche AB fortgepflanzte Druck $p = afq$ so groß als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche AB und Höhe CP ist.

Weitere Folgen:

1) Es ist daher auch in jeder andern Tiefe CQ gegen eine horizontale Durchschnitts Ebene EF des Wassers, oder gegen eine horizontale Wasserschichte die Höhe des sämmtlichen Druckes von oben nach unten $=$ CQ; und weil der Druck vermöge der Flüssigkeit des darunter befindlichen Wassers sich nach allen Richtungen fortpflanzet: so ist auch die Höhe des Druckes gegen EF von unten nach oben $=$ CQ. Aus der nähmlichen Ursache ist auch die Höhe des Druckes, welchen ein Elementar-Theilchen des Wassers an einer bestimmten Stelle des Gefäßes von allen Seiten her leidet, eben so groß, als die Vertiefung eines solchen Elementar-Theilchens unter der Oberfläche des Wassers. Eben darum ist auch die Höhe des Druckes gegen ein Elementar-Theilchen des festen Umfanges des Gefäßes nach einer darauf senkrechten Richtung gleich dem Abstande eines solchen Elementar-Theilchens von der horizontalen Ebene, welche über die Oberfläche des Wassers weg streichet; z. B die Höhe des Druckes gegen das Elementar-Theilchen E ist $=$ CQ; und die Höhe des

Dru-

Druckes gegen das Elementar-Theilchen K nach einer auf BH senkrechten Richtung ist CM oder KS: Nähmlich der Druck, welchen ein ebenes Elementar-Theilchen K des Gefäßes nach einer darauf senkrechten Richtung leidet, ist gleich dem Gewichte eines Wassersäulchens von der Grundfläche K und Höhe KS. Fig. 4

2) Ist nun GH eine horizontale Fläche des Gefäßes; so leidet sie daher von der Wassermasse CEFD einen fortgepflanzten Druck von unten nach oben, der dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche GH und Höhe CQ gleich ist. Es ist aus diesem zu ersehen, daß eine geringe Menge Wassers CEFD einen sehr großen Druck verursachen könne; indem es hier nur auf die Fläche des Druckes und auf die Höhe der darüber befindlichen Wassermasse, nicht aber auf ihre Menge ankommt. Daraus läßt sich auch die Wirkung des so genannten anatomischen Hebers ersehen. Wenn nähmlich über GH statt der festen Fläche eine Thierhaut gespannet, und auf solche eine sehr schwere Last gelegt wird; so kann letztere durch eine sehr geringe Menge Wassers in die Höhe gehoben werden, weil die da in die Höhe drückende Kraft gegen die Fläche GH nicht von der Menge des Wassers in der Röhre EFDC sondern bloß allein von der lothrechten Höhe QC und von der Größe der Fläche GH abhänget. Auch ist aus dem Angeführten zu ersehen, warum man beym Baue der Schifffahrtsschleusen so sorgfältig verhindern muß, daß kein Wasser von außen unter den Schleusenboden gelange. Denn wenn das vor der Schleusenkammer in einer beträchtlichen Höhe aufgehaltene Wasser durch irgend eine verborgene noch so kleine Oeffnung unter den Schleusenboden hineindringen, und nirgends weiter abfließen kann; so wird der Schleusenboden im Verhältniß seiner großen Ausdehnung und Vertiefung unter dem höchsten Wasserspiegel mit einer erstaunlichen Gewalt in die Höhe gepresset, und kann dadurch zu Grunde gehen.

Fig. 4

§. 15.

Der Druck eines in einem Gefäße ruhenden Wassers gegen was immer für eine ebene Fläche des Umfanges nach einer darauf senkrechten Richtung ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche diese Fläche zur Grundfläche, und den Abstand ihres Schwerpunctes von der Oberfläche des Wassers zur Höhe hat.

Wenn die Fläche AB oder GH Fig. 4. horizontal ist, so ist der Abstand ihres Schwerpunctes CP bey AB, und und CQ bey GH; und folglich der angeführte Satz vermöge des Vorhergehenden richtig. Ist aber irgend eine ebene Fläche z. B. BH nicht horizontal, so gedenke man eine solche Fläche BH $= f$ in ihre Elementar-Theilchen A, B, C, D, E .... zertheilet (man kann sich vorstellen, daß die Fläche BH durch unendlich nahe neben einander gezogene horizontal Linien in die Elementar-Streife $= A$, B, C D, E.... zertheilet sey); die zugehörigen Abstände dieser Elementar-Theilchen von der horizontalen Ebene CS bezeichne man mit A', B', C', D'.... Der Abstand KS des Schwerpunctes K der Fläche BH von CS sey $= a$, und das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= q$; so ist (vermöge §. 14. n. 1.) der gesammte gegen BH fortgepflanzte Druck

$$p = A.A'.q + B.B'.q + C.C'.q + D.D'.q + \ldots$$
$$= q\,(A.A' + B.B' + C.C' + D.D' + \ldots)$$

und vermög (3. Th. §. 132) ist

$$a = \frac{A.A' + B.B' + C.C' + D.D' + \ldots}{A + B + C + D + \ldots}$$
$$= \frac{A.A' + B.B' + C.C' + \ldots}{f}$$

nähmlich $A.A' + B.B' + C.C' + \ldots = af$

folglich auch $p = q.\ af$.

Fer-

Fernere Folge: Fig. 4

1) Wenn die Fläche GH horizontal ist, so ist der fortgepflanzte Druck auf derselben gleichförmig vertheilet. Man kann daher den sämmtlichen fortgepflanzten Druck, welchen eine solche Fläche leidet, im Schwerpuncte der gedrückten Fläche vereiniget gedenken. Wenn nähmlich die feste Fläche GH an ihrem Umfange von dem Gefäße getrennet, und dafür in ihrem Schwerpuncte von außen herein mit einer Kraft gepresset würde, die dem darauf fortgepflanzten Drucke gleich ist; so wird dieselbe dadurch an ihrer Stelle im Gleichgewichte erhalten. Ist aber eine ebene Fläche BH des Gefäßes nicht horizontal; so ist auch der fortgepflanzte Druck auf derselben nicht gleichförmig vertheilet; die Elementar-Theilchen einer solchen Fläche werden nähmlich desto stärker gedrücket, je tiefer sie unter der Oberfläche des Wassers liegen. Der Punct, in welchem man den fortgepflanzten Druck vereiniget denken kann, oder am welchen, wenn er gestützet wird, die Pressungen gegen die Elementar-Theilchen der festen Fläche einander im Gleichgewichte erhalten (der Mittelpuncte des Druckes), ist daher in einem solchen Falle nicht der Schwerpunct der ebenen Fläche BH; sondern dieser muß auf folgende Art bestimmet werden.

§. 16.

Der Punct, in welchem man den fortgepflanzten Druck des Wassers gegen eine nicht horizontale ebene Fläche eines Gefäßes vereiniget denken kann, ist der Schwingungspunct eben dieser Fläche, in Hinsicht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der nöthigen Falles erweiterten Oberfläche des ruhenden Wassers mit der im erforderlichen Falle ebenfalls erweiterten Ebene der gedrückten Fläche als Schwingungsachse betrachtet: es ist nähmlich der Punct des vereinigten Druckes von der erwähnten Durchschnittslinie, eben so weit entfernet, als der Schwingungspunct der nähmlichen Fläche von eben dieser Durchschnittslinie, wenn diese für eine Schwingungsachse angesehen wird.

Um

Fig. 4 Um diese Wahrheit einzusehen, gedenke man die gedrückte ebene Fläche BH so erweitert, bis sie mit der ebenfalls erweiterten ebenen Oberfläche des Wassers CD in T zusammenstoße: wo der Punct T die vordere Ansicht der erwähnten Durchschnittslinie in der Figur anzeigt, so wie die ebenfalls erwähnten Flächen BH und CD in ihrer vorderen Ansicht als gerade Linien erscheinen. Die Abstände der Elementar-Theilchen A, B, C, D, E, ... der Fläche BH von der Oberfläche des Wassers setze man wie vorher $= A'$, B', C', D', E', ... die Abstände eben dieser Elementar-Theilchen aber von der durch T gehenden Durchschnittslinie $= a, b, c, d, e, \ldots$ und den Winkel STB $= m$, das eigenthümliche Gewicht des Wassers aber $= q$; so ist (vermöge 3. Th. §. 132.) der Abstand des Punctes für den vereinigten Druck von der Durchschnittslinie T gezählet.

$$= \frac{A.A'.q.a + B.B'.q.b + C.C'.q.c + \ldots.}{A.A'.q + B.B'.q + C.C'.q + \ldots}$$

weil der Punct des vereinigten Druckes nichts anders ist als der gemeinschaftliche Schwerpunct der verschiedenen Pressungen gegen die Elementar-Theilchen $A, B, C, D, E, \ldots.$ auf der ebenen Fläche BH. Es ist aber $A' = a.\sin m$, $B' = b.\sin m$, $C' = c.\sin m$, $D' = d.\sin m$; .... folglich ist auch eben dieser Abstand des vereinigten Druckes $= \frac{A.a^2 + B\,b^2 + C.c^2 + \ldots}{A.a + B.b + C.c + \ldots}$.

Nun aber ist (vermöge 3. Th. §. 212.) der Abstand des Schwingungspunctes der Fläche BH in Hinsicht auf die durch T gehende Durchschnittslinie als Schwingungsachse betrachtet auch $= \frac{A.a^2 + B.b^2 + C.c^2 + \ldots}{A.a + B.b + C.c + \ldots}$.

Folglich ist der Abstand des Punctes für den vereinigten Druck von der Durchschnittslinie T eben so groß als der Abstand des Schwingungspunctes der Fläche BH von eben dieser Durchschnittslinie T als Schwingungsachse betrachtet.

Hier-

Hieraus abgeleitete Folgen: Fig.

1) Wenn nun die Gerade BH durch den Schwerpunct 4
K auf die durch T gehende Durchschnittslinie senkrecht gezogen die gedrückte Fläche BH in zwey gleiche und ähnlich liegende Theile theilet; so liegt der Punct des vereinigten Druckes gewiß in dieser Geraden BH; weil in einem solchen Falle die Schwerpuncte der Pressungen des Wassers gegen die horizontal liegenden Elementar-Streife der Fläche BH alle in einer solchen Linie liegen. Trifft aber dieses nicht zu; so muß man den Abstand des vereinigten Druckes noch besonders von dieser Geraden BH, oder von einer Parallelen derselben in der Ebene BH berechnen.

2) Ist daher BH ein Rechteck, dessen Länge BH $= m$, die horizontal liegende Breite aber $= n$, und HT $= l$ ist; so ist der Abstand des Punctes für den vereinigten Druck von T gerechnet $= \frac{\frac{1}{3}m^2 + ml + l^2}{\frac{1}{2}m + l}$, und folglich vom Schwerpuncte K gegen B gezählet $= \frac{\frac{1}{6}m^2}{m + 2l}$; weil (vermöge 3. Th. §. 207.) das Drehungsmoment eines solchen Rechteckes in Hinsicht auf die durch T gehende Durchschnittslinie $= mn\,(\frac{1}{3}m^2 + ml + l^2)$, und das statische Moment in Hinsicht auf eben diese Linie $= mn\,(\frac{1}{2}m + l)$ ist.

3) Wäre BH eine Kreisfläche, deren Halbmesser $= a$, und der Abstand des Mittelpunctes K von T $= b$ ist; so ist das Drehungsmoment einer solchen Kreisfläche in Hinsicht auf einen horizontalen Durchmesser $= a^2\pi.\frac{1}{4}a^2$, und folglich (vermöge 3. Th. §. 207. V.) in Hinsicht auf die durch T gehende Durchschnittslinie $= a^2\pi.(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$; das statische Moment aber in Hinsicht auf eben diese Durchschnittslinie ist $= a^2\pi.b$; folglich ist der Abstand des Punctes für den vereinigten Druck von T gezählet $= \frac{a^2\pi(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}{a^2\pi.b}$ $= b + \frac{\frac{1}{4}a^2}{b}$, und daher vom Mittelpuncte gegen B gezählet

$=$

Fig. $=\frac{\frac{1}{4}a^2}{b}$. Wäre nun in diesem Falle HT $= o$, also $b=a$; so wäre der Abstand des Punctes für den vereinigten Druck vom Mittelpuncte des Kreises gegen den untersten Punct desselben $=\frac{1}{4}a$.

4) Es sey ABCD eine verticale Seitenwand eines
5 Gefäßes Fig. 5, welches bis AB parallel zu CD mit schwerem Wasser angefüllet ist; so läßt sich der Punct G des vereinigten Druckes gegen das rechtwinkelige Dreyeck ECD auf folgende Art bestimmen.

Man setze AE $=c$, EC $=a$, CD $=b$, EP $=x$, Pp $=dx$, so ist das Drehungsmoment von EPM in Hinsicht auf AB $=\int\frac{bx\,dx}{a}.(c+x)^2 = \frac{b}{a}.(\frac{1}{2}c^2x^2+\frac{2}{3}cx^3+\frac{1}{4}x^4)$; und folglich das Drehungsmoment von ECD $=\frac{1}{2}ab.(c^2+\frac{4}{3}ac+\frac{1}{2}a^2)$; das statische Moment aber von ECD, in Hinsicht auf AB, ist $=\frac{1}{2}ab.(c+\frac{2}{3}a)$; daraus folgt der Abstand für den Schwingungspunct, und folglich auch für den Punct G des vereinigten Druckes von AB, nähmlich AF $=\frac{\frac{1}{2}ab.(c^2+\frac{4}{3}ac+\frac{1}{2}a^2)}{\frac{1}{2}ab.(c+\frac{2}{3}a)}=c+\frac{2}{3}a+\frac{a^2}{12a+18c}$.

Um FG zu bestimmen sey nun DR $=x$, rR $=dx$, so ist Rm $=\frac{ax\,dx}{b}$, die Pressung gegen Rm $=\frac{ax\,dx}{b}.$ (RN $-\frac{1}{2}$RM)$.\,q=\frac{ax\,dx}{b}.(a+c-\frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\,q$, und ihr Moment in Hinsicht auf BD $=\frac{ax^2dx}{b}.(a+c-\frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\,q$; daraus folgt das Moment der Pressung gegen DRM in Hinsicht auf die Linie DB $=\int\frac{ax^2dx}{b}(a+c-\frac{\frac{1}{2}ax}{b}).\,q=\frac{aq}{b}.(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{3}cx^3-\frac{\frac{1}{8}ax^4}{b})$, und das Moment der

Pres-

Pressung gegen DCE $= \frac{1}{2}ab^2q.(\frac{5}{12}a + \frac{2}{3}c)$; die Pressung aber gegen DCE ist $= \frac{1}{2}abq.(c + \frac{2}{3}a)$; folglich ist der Schwerpunct der Pressung, nähmlich der Punct G des vereinigten Druckes, von DB entfernet um DH $=$ Fig 5

$$\frac{\frac{1}{2}ab^2q.(\frac{5}{12}a + \frac{2}{3}c)}{\frac{1}{2}abq.(c + \frac{2}{3}a)} = \frac{2}{3}b - \frac{ab}{24a + 36c}$$; und daraus folgt endlich FG $= \frac{1}{3}b + \frac{ab}{24a + 36c}$.

Der Punct G des vereinigten Druckes liegt daher im angeführten Beyspiele um $\frac{a^2}{12a + 18c}$ näher gegen CD als der Schwerpunct des Dreyeckes; von EC aber ist jener um $\frac{ab}{24a + 36c}$ weiter entfernet als dieser.

Aus diesem Beyspiele ist es zu ersehen, wie man in anderen dergleichen Fällen den Punct des vereinigten Druckes zu bestimmen habe.

§. 17.

In offenen Gefäßen, die mit einander so verbunden sind, daß aus dem einen das darin befindliche Wasser ins andere übertreten kann (in vereinigten Röhren) bleibet schweres Wasser nur alsdann ruhig stehen, wenn die höchsten Wasserflächen in einerley horizontalen Ebene liegen.

Es sey die beyderseits aufwärts gebogene Röhre APE Fig. 6 von was immer für einer Gestalt mit schwerem Wasser, dessen eigenthümliches Gewicht $= q$ sey, bis zur horizontalen Ebene AE angefüllet; so leidet eine horizontale Wasserschichte GF wegen des Wassers APF (vermöge §. 14. n. 2.) einen fortgepflanzten Druck von unten nach oben $=$ GF. AL.q, und wegen des Wassers HF einen Druck von oben nach unten $=$ GF. EQ.q, und ist daher wegen EQ $=$ AL im Gleichgewichte. Dieses gilt von einer jeden anderen horizontalen Wasserschichte, sowohl in HP als auch in DP, und auch überhaupt von einem jeden 6

Ele-

Fig. 6 Elementar-Theilchen des Wassers, wenn AD und HE in einer und derselben horizontalen Ebene AE liegen. Es ist demnach unter diesen Umständen das Wasser im Gleichgewichte. Wäre aber die eine Oberfläche AD über eine horizontale Ebene LQ mehr erhöhet als die andere HE, nähmlich AL > EQ; so wäre auch der Druck gegen jede horizontale Schichte GF von unten nach oben größer als der Druck von oben nach unten; gegen jede horizontale Schichte BC aber wäre der Druck von unten nach oben kleiner als von oben nach unten; das Wasser müßte daher in der Röhre FH steigen, und in der Röhre DB sinken, und so das Gleichgewicht wieder herstellen.

Anmerkung. Auf diesen angeführten Satz, welcher auch durch die Erfahrung bestätiget wird, gründet sich der Bau und Gebrauch der bekannten hydrostatischen Nivelier-Wage. Jedoch wenn die eine Röhre in Rücksicht auf die andere sehr eng ist, so wird dieser Satz wegen der gegenseitigen Anziehung oder Abstoßung der Elementar-Theilchen der Röhre und des darin enthaltenen Flüssigen zuweilen eine merkliche Ausnahme leiden. Allein so enge Röhren, wo dieser Erfolg schon merklich wird, werden hier nicht in Erwägung gezogen; oder vielmehr die angeführte gegenseitige Anziehung und Abstoßung wird hier außer Acht gelassen.

§. 18.

Bey unelastischen flüssigen Massen von verschiedener Dichtigkeit, welche in vereinigten Röhren ohne sich zu vermischen vermöge der Schwerkraft gegen einander drücken, verhalten sich, im Stande des Gleichgewichtes, die Erhöhungen ihrer Oberflächen über die gemeinschaftliche Scheidungs-Ebene gegen einander wie umgekehrt ihre eigenthümlichen Gewichte

7 Es sey EF Fig. 7. die gemeinschaftliche horizontale Scheidungs-Ebene; das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse EB sey = q, der Masse FPC aber = Q; so leidet die Schichte EF wegen der schweren flüssigen Masse EPD einen Druck von unten nach oben = EF. DN. Q,

und

und wegen der schweren flüssigen Masse EB einen Druck von oben nach unten $=$ EF. AM. q Ist nun EB mit EPD im Gleichgewichte; so ist gewiß EF. DN. $Q =$ EF. AM. q, und folglich auch DN : AM $= q : Q$. Imgleichen, damit das Gleichgewicht bestehen könne, muß EF. DN. $Q =$ EF. AM. q seyn, und folglich muß auch DN : AM $= q : Q$ statt finden. Und umgekehrt wenn DN : AM $= q : Q$ sich verhält; so ist auch DN. $Q =$ AM. q, und daher auch EF. DN. $Q =$ EF. AM. q: nähmlich der Druck gegen die Schichte EF von unten nach oben ist eben so groß als von oben nach unten, und folglich ist EPD mit EB im Gleichgewichte. Es ist leicht einzusehen, daß bey diesem Umstande auch jede andere horizontale Schichte von beyden Seiten einem gleich großen Drucke ausgesetzet ist. Fig. 7

Der angeführte Satz findet auch noch statt, wenn die flüssige Masse EPH unter der horizontalen Ebene EH von den beyden übrigen flüssigen Massen EB und HC verschieden, aber doch so beschaffen wäre, daß sie sich mit keiner derselben vermischete. So z. B. könnte EPH Quecksilber, EB Weingeist, und HC eine Salzauflösung seyn.

§. 19.

Wie der Druck des schweren Wassers gegen was immer für eine ebene Fläche zu berechnen sey, und in welchem Puncte man solchen vereiniget gedenken könne, ist bereits im 15 und 16. §. gezeiget worden. Es ist aber auch noch erforderlich zu zeigen, wie man die Pressungen einer flüssigen Masse gegen verschiedene gegen einander geneigte ebene Flächen vereinigen könne. Z. B. da alle Theile eines mit schwerem Wasser angefüllten Gefäßes nach darauf senkrechten Richtungen auswärts gepresset werden; so kann man fragen, was denn das Gefäß im ganzen genommen für einen vereinigten Druck zu leiden habe, und wie dessen Richtung beschaffen sey? Um diese Untersuchung gehörig auszuführen, sind folgende Hülfssätze erforderlich.

1) Bey einem jeden schief abgeschnittenen Prisma ist der senkrechte Querschnitt gleich dem schiefen Schnitte multipliciret mit dem Cosinus des Neigungswin-

Fig. 8 kels der Ebene des schiefen gegen die Ebene des senkrechten Querschnittes.

Es sey ABC Fig. 8. der schiefe Schnitt eines dreyseitigen Prisma. Ist nun eine Seite AB dieses schiefen Schnittes senkrecht auf den zwey Seitenlinien AO, BP des Prisma; so führe man den senkrechten Querschnitt ABD des Prisma durch die Gerade AB, und gedenke durch die Gerade DC eine Ebene DEC auf AB senkrecht gelegt. Diese Ebene DEC schneide ABD in DE und ABC in EC; so ist CED der Neigungswinkel der Ebene des schiefen gegen die Ebene des senkrechten Schnittes. Nun verhält sich wegen der gemeinschaftlichen Grundlinie der senkrechte Querschnitt ABD zum schiefen ABC, wie die Höhe ED zur Höhe EC; und im rechtwinkeligen Dreyecke EDC ist $ED : EC = \cos CED : \sin tot (1$; es ist daher auch $ABD : ABC = \cos CED : 1$, nähmlich

$ABD = ABC . \cos CED$.

Ist aber der schiefe Schnitt RSQ eines dreyseitigen Prisma so beschaffen, daß keine Seite desselben auf den Seitenlinien des Prisma senkrecht steht; so lege man durch einen Winkelpunct Q den senkrechten Querschnitt QPO, verlängere RS und OP, bis sie in T zusammenstoßen, und ziehe TQ: so ist TQ die Durchschnittslinie der Ebene des schiefen mit der Ebene des senkrechten Querschnittes. Gedenket man nun durch OR oder durch PS eine senkrechte Ebene auf QT gelegt (z. B. durch PS die auf TQ senkrechte Ebene SPF) und bezeichnet den Neigungswinkel der Ebene RTQ gegen OTQ, nähmlich den Winkel PFS mit φ, so ist

wie vorhin $PQT = SQT . \cos \varphi$,

und auch $OQT = RQT . \cos \varphi$,

folglich auch $OQT - PQT = (RQT - SQT) . \cos \varphi$,

nähmlich $OPQ = RSQ . \cos \varphi$.

Ist endlich das Prisma vielseitig, so gedenke man solches durch Diagonal-Ebenen in lauter dreyseitige Prismen zertheilet: sodann ist bey jedem dieser letzteren der senkrechte Querschnitt gleich dem schiefen Schnitte multipli-

plicieret mit dem Cosinus des Neigungswinkels der zwey Fig.
Ebenen; es ist daher auch die Summe aller senkrechten 8
Querschnitte der dreyseitigen Prismen gleich der Summe
aller schiefen Schnitte multiplicieret mit dem Cosinus des
gemeinschaftlichen Neigungswinkels ihrer Ebenen: Nähmlich der senkrechte Querschnitt eines jeden vielseitigen
Prisma ist gleich dem schiefen Schnitte desselben multiplicieret mit dem Cosinus des Neigungswinkels der
Ebenen beyder Schnitte.

2) Aus dem senkrechten Drucke des Wassers gegen einen schiefen Schnitt eines Prisma entsteht nach
der Richtung der Achse des Prisma ein Druck so groß
als das Gewicht einer Wassersäule, welche den senkrechten Querschnitt des Prisma zur Grundfläche, und die
Höhe des senkrechten Druckes gegen den schiefen Schnitt
zu ihrer Höhe hat.

Es sey BD Fig. 9 der schiefe Schnitt eines Prisma, 9
und EG der senkrechte Querschnitt des nähmlichen Prisma
durch den Winkelpunct A gelegt. Der schiefe Schnitt BD
sey nach einer darauf senkrechten Richtung dem fortgepflanzten Drucke einer flüssigen Masse ausgesetzt. Um nun zu bestimmen, wie stark ein solcher gegen den schiefen Schnitt
senkrechter Druck das Prisma nach seiner Länge, nähmlich
nach der Richtung seiner Achse, presse, muß man diesen
Druck in zwey andere zerlegen, so daß die Richtung des
einen auf dem senkrechten Querschnitte EG senkrecht sey,
die Richtung des anderen aber mit diesem Querschnitte EG
parallel laufe. Dieses wird erhalten, wenn man aus dem
Vereinigungspuncte R des senkrechten Druckes gegen BD eine Senkrechte RS auf die Ebene BD und eine Senkrechte RT auf die Ebene EG gedenket, ferner aus einem beliebigen Puncte S der Geraden RS eine Senkrechte ST auf
RT zieht, und endlich das Rechteck TQ ergänzet. Sodann zerfällt der Druck nach der Richtung SR in zwey andere nach den Richtungen TR und QR, welche beyde mit
dem ersten gleichgeltend sind (3. Th. § 71.), wo nun der
Druck nach der Richtung TR derjenige ist, welchen das

Fig. 9 Prisma wegen der senkrechten Pressung gegen BD nach der Richtung seiner Achse leidet; der andere Druck aber nach der Richtung QR, da er mit EG prallel angebracht ist, verursachet nach der Richtung der Achse des Prisma gar keine Wirkung. Wenn man daher den gegen BD senkrechten Druck nach der Richtung SR mit P, und den daraus entstehenden gegen EG senkrechten Druck nach der Richtung TR mit p bezeichnet; so ist $p = P. \cos TRS$ (vermöge 3. Th. §. 69.), und folglich $\cos TRS = \frac{p}{P}$.

Da nun die Ebene BD auf der Geraden RS, und EG auf RT senkrecht ist; so ist sowohl die Ebene BD als auch EG auf der Ebene des Kräften-Parallelogramms TQ senkrecht; und folglich ist (wegen 2. Th. §. 471.) auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie HI, auf eben dieser Ebene TQ senkrecht. Wenn daher die genugsam erweiterte Ebene TQ von GE in NK und von BD in KM durchschnitten wird; so ist (wegen 2. Th. §. 466.) sowohl NK als auch MK senkrecht auf HI, und folglich MKN der Neigungswinkel des schiefen Schnittes BD gegen den senkrechten Querschnitt EG (2. Th. §. 468.)

Ferner ist im rechtwinkeligen Dreyecke RLK, weil RT durch EG senkrecht gezogen worden ist, und daher auch (wegen 2. Th. §. 466.) von NK in L senkrecht durchschnitten wird, $RKL + KRL = 90°$; auch ist, weil SR auf KM senkrecht steht, $TRS + KRL = 90°$; folglich ist auch $RKL + KRL = TRS + KRL$; und daher auch $TRS = RKL$, nähmlich der Neigungswinkel $MKN = TRS$.

Nun ist wegen des ehevor angeführten Satzes $EG = BD. \cos MKN$; folglich auch $EG = BD. \cos TRS$, und $\cos TRS = \frac{EG}{BD}$. Vorhin aber war $\cos TRS = \frac{p}{P}$; folglich ist auch $\frac{p}{P} = \frac{EG}{BD}$, und $P : p = BD : EG$. Nähmlich der gegen den schiefen Schnitt BD eines Pris-

Prisma senkrechte Druck P verhält sich zu dem dar- Fig.
aus entstehenden senkrechten Drucke p gegen den senk- 9
rechten Querschnitt EG des nähmlichen Prisma wie der schiefe Schnitt BD zum senkrechten Querschnitte EG; und es ist daher $p = \frac{EG}{BD} . P$. Nun aber ist $P = BD . a . q$ bey der Pressung einer flüssigen Masse gegen die Fläche BD, wenn a die Höhe des Druckes (§. 13.), und q das eigenthümliche Gewicht des Flüssigen bedeutet; folglich ist $p = EG . a . q$ das Gewicht einer Säule der nähmlichen flüssigen Masse, welche EG zur Grundfläche, und mit P einerley Höhe a hat.

3) Und nun ist es leicht einzusehen, wie man aus dem gegebenen senkrechten Drucke einer flüssigen Masse gegen eine gegebene ebene Fläche BD den Druck finden könne, welcher daraus nach einer anderen gegebenen Richtung TR entsteht. Man darf nähmlich in einem solchen Falle nur auf der gegebenen Grundfläche BD ein Prisma AFC gedenken, dessen Seitenlinien mit der gegebenen Richtung TR parallel sind, um den senkrechten Querschnitt EG zu erhalten, woraus sich der gesuchte Druck sodann leicht (nach n. 2.) bestimmen läßt.

4) Eben so läßt sich bestimmen, wie groß der vereinigte Druck sey, welcher aus den senkrechten Pressungen einer flüssigen Masse auf mehrere gegen einander geneigte feste ebene Flächen nach einer gegebenen Richtung entsteht, wenn man in der nähmlichen gegebenen Richtung auf jede gegebene Fläche ein Prisma gedenket. Auf diese Art findet man z. B., daß der vereinigte Druck des schweren Wassers gegen die zwey Seitenflächen DP, DO Fig. 8. eines senkrecht stehenden prismatischen Gefäßes nach einer auf AP senkrechten Richtung genau so groß ist, als der Druck gegen AP, nur in der gerade entgegen gesetzten Richtung; weßwegen diese Pressungen auch im Gleichgewichte sind.

§. 20.

Aus allen senkrechten Pressungen des in einem Gefäße enthaltenen schweren Wassers gegen die Theile

Fig. le des festen Umfanges entsteht ein verticaler Druck nach unten, der dem ganzen Gewichte des Wassers gleich ist. Und obgleich die Seitenflächen des Gefäßes auch seitwärts gedrücket werden; so heben doch alle horizontale Pressungen einander auf: nähmlich das Gefäß im ganzen genommen ist in horizontaler Richtung im Gleichgewichte. In Hinsicht auf eine Unterlage, auf welcher ein mit schwerem Wasser angefülltes Gefäß ruhet, ist es nähmlich eben so viel, als wenn das Gefäß mit einer festen Masse angefüllet wäre, die mit dem Wasser einerley eigenthümliches Gewicht hätte.

10 Es sey das Gefäß ACDB Fig. 10. von was immer für einer Gestalt bis an die horizontale Ebene AB mit schwerem Wasser angefüllet, und man gedenke

Erstlich die ganze Wassermasse in so kleine verticale Wassersäulen zertheilet, daß man die Grundflächen derselben, mittelst deren sie mit dem Umfange des Gefäßes zusammengränzen, für ebene Flächen ansehen könne (die Wassersäulchen können so dünne angenommen werden, daß ihre Grundflächen unendlich klein werden) so drücket jede solche Wassersäule das Gefäß in verticaler Richtung von oben nach unten mit einer Kraft, die dem Gewichte einer solchen Wassersäule gleich ist. Denn ist eine solche Wassersäule wie ED oben durch die Oberfläche des ruhenden Wassers und unten durch die Bodenfläche wagrecht abgeschnitten; so leidet (wegen §. 11.) die Grundfläche FD und daher auch das Gefäß wegen seines Umfanges einen Druck in verticaler Richtung von oben nach unten, der dem Gewichte der Wassersäule ED gleich ist. Ist die Wassersäule GI oben, wie die vorige, unten aber schief abgeschnitten; so ist (wegen §. 15.) die Höhe des senkrechten Druckes gegen DI der Abstand des Schwerpunctes der Fläche DI von der Oberfläche des Wassers. Daraus entsteht (wegen §. 19. n. 2.) nach verticaler Richtung von oben nach unten ein Druck so groß als das Gewicht einer Wassersäule, welche den senkrechten Querschnitt der Wassersäu-

le

le DH zu ihrer Grundfläche, und den Abstand des Schwer- Fig. punctes der Fläche DI von der Oberfläche des Wassers zu 10 ihrer Höhe hat; und ist daher genau dem Gewichte dieser Wassersäule GDIH gleich. Aus derselben Ursache ist bey der oben und unten schief abgeschnittenen Wassersäule KLNM der verticale Druck von oben nach unten gegen MN gleich dem Gewichte einer Wassersäule BMNO, und der verticale Druck gegen KL nach der gerade entgegengesetzten Richtung von unten nach oben ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule BKLO (vermöge §. 15. u. 19. n. 2.); und folglich ist bey dieser Wassersäule KLNM der auf das Gefäß in verticaler Richtung von oben nach unten wirkende Druck gleich der Differenz der Wassersäulen BMNO und BKLO; er ist daher gleich dem Gewichte der Wassersäule KMNL. Dieses gilt von einer jeden anderen verticalen Wassersäule, woraus das im Gefäße befindliche Wasser besteht. Folglich leidet das Gefäß im ganzen genommen wegen der senkrechten Pressungen des darin enthaltenen Wassers gegen die verschiedenen Theile des festen Umfanges in verticaler Richtung von oben nach unten einen Druck, der dem Gewichte des sämmtlichen darin befindlichen Wassers gleich ist; eben so als wenn das Gefäß mit einer festen Masse angefüllet wäre, die mit dem Wasser einerley specifisches Gewicht hätte.

Es ist übrigens einleuchtend, daß die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen durch den Schwerpunct des ganzen Wasserkörpers geht, welcher wegen der gleichförmigen Dichtigkeit mit dem Schwerpuncte des geometrischen Raumes, den das Wasser im Gefäße einnimmt, einerley ist.

Zweytens gedenke man die ganze Wassermasse in lauter horizontal liegende Wassersäulchen mit einer beliebigen verticalen Durchschnitts-Ebene des Gefäßes in paralleler Richtung von unendlich kleinen Grundflächen zertheilet, so daß man jede solche Grundfläche als eine ebene Fläche ansehen könne. Es sey eine solche horizontal liegende Wassersäule PKLQ, wovon der senkrechte Querschnitt $= f$, und der Abstand des Schwerpunctes der Fläche PQ sowohl als

auch

Fig. 10 auch der Fläche KL von der Oberfläche des Wassers $= a$ seyn mag; so leidet PQ in horizontaler Richtung parallel zu LQ einen Druck $= f. a. q.$ (wegen §. 15. u. 19. n. 2), und KL in gerade entgegengesetzter horizontalen Richtung einen eben so großen Druck $= f. a. q$ wenn q das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse bedeutet; folglich heben diese zwey Pressungen wegen der Festigkeit des Gefäßes einander auf. Und so liegen in jeder horizontalen Richtung zwey Elemente von dem festen Umfange des Gefäßes einander gegenüber, die nach entgegengesetzten horizontalen Richtungen gleichviel Druck leiden. Mithin heben alle horizontale Pressungen einander auf.

Hieraus fließende Folge:

1) Nun ist es leicht einzusehen, daß man das Gewicht von einer beliebigen Menge einer flüssigen Masse mittelst der Wage eben so bestimmen könne, wie bey einem festen Körper. Wenn man nähmlich von dem sämmtlichen Gewichte eines mit einer flüssigen Masse ganz oder zum Theil angefüllten Gefäßes das Gewicht des leeren Gefäßes abzieht; so ist der Ueberrest das Gewicht der flüssigen Masse. Ist nun dabey auch der Inhalt der flüssigen Masse im Gefäße bekannt; so ergibt sich ferner (nach 3. Th. §. 15.) auch ihr eigenthümliches Gewicht.

III. Abschnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes des schweren Wassers mit hineingetauchten festen Körpern.

§. 21.

11 12 Wenn ein fester Körper AKD Fig. 11 und 12 in eine ruhig stehende flüssige Masse MNPQ entweder ganz

oder

oder auch nur zum Theil eingetauchet ist; so leidet der- Fig.
selbe vermöge des gegen seine Oberfläche fortgepflanz- 11
ten Druckes in verticaler Richtung von unten nach 12
oben einen Druck, der dem Gewichte der verdrängten flüssigen Masse AKD gleich ist. Die verticale Richtunslinie dieses Druckes geht durch den Schwerpunct des geometrischen Raums der verdrängten flüssigen Masse; die Pressungen aber in horizontaler Richtung heben einander auf, oder sind im Gleichgewichte. Es entsteht nähmlich aus den senkrechten Pressungen einer flüssigen Masse gegen die verschiedenen Theile der Oberfläche eines eingetauchten festen Körpers ein vereinigter Druck in verticaler Richtung von unten nach oben, der dem Gewichte der verdrängten flüssigen Masse gleich ist, und dessen Richtung durch den Schwerpunct des geometrischen Raumes dieser verdrängten flüssigen Masse geht; wo der Schwerpunct so zu bestimmen ist, als wenn dieser geometrische Raum durchaus mit einer gleichförmig dichten schweren Masse angefüllet wäre, es möge übrigens die nun darin wirklich befindliche Masse des eingetauchten festen Körpers wie immer ungleichförmig vertheilet seyn.

Um diese Wahrheit einzusehen, gedenke man den eingetauchten Körper AKD (in Fig. 11. nähmlich den ganzen Körper, in Fig. 12. aber nur den Theil desselben unter der horizontalen Ebene des Wassers, wo indessen der feste Körper durch irgend eine Vorrichtung in der angenommenen Lage ruhig erhalten werden mag) in so kleine verticale Prismen zertheilet, daß man ihre Grundflächen für unendlich klein annehmen, und daher für ebene Flächen ansehen könne. Es sey ein solches Prisma ADEB; so leidet die ebene Fläche DE nach einer darauf senkrechten Richtung (wegen §. 15.) einen Druck $=$ DE. FI. q, und die ebene Fläche AB nach einer darauf senkrechten Richtung einen Druck $=$ AB. CI. q, wo MN die horizontale Oberfläche der flüssigen Masse, und q ihr eigenthümliches Gewicht ist. Daraus entsteht (nach §. 19 II.) wegen der

senk-

Fig. 11 12 senkrechten Pressung gegen DE in verticaler Richtung von oben nach unten gegen den festen Körper ein Druck = GH. FI. q, und wegen der senkrechten Pressung gegen AB in verticaler Richtung von unten nach oben ein Druck = GH.CI.q, wo GH dem senkrechten Querschnitte des Prisma DB gleich, und der eine Druck dem anderen gerade entgegen gesetzt ist. Es ist daher der Druck, welchen der feste Körper wegen der senkrechten Pressungen gegen die Grundflächen des Prisma DB in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, = GH. CI. q — GH. FI. q = GH. (CI — FI). q = GH. FC. q = dem Gewichte eines Prisma DB der flüssigen Masse, worin der feste Körper eingetaucht ist; und die Richtung dieses Druckes geht durch den Schwerpunct eines solchen gleichförmig dichten Prisma DB. Eben so ist der Druck, welchen der feste Körper in Fig. 12 wegen der senkrechten Pressung gegen die Grundfläche VT in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, = RS. OL. q = dem Gewichte eines Prisma ST der flüssigen Masse, worin der feste Körper eingetaucht ist. Die Richtung dieses Druckes geht durch den Schwerpunct des Prisma ST, weil man bey einer jeden solchen unendlich kleinen Fläche wie VT, AB, DE den darauf fortgepflanzten senkrechten Druck in ihrem Schwerpuncte vereiniget gedenken kann. Dieses gilt von dem verticalen Drucke bey einem jeden andern Prisma, woraus der Körper AKD besteht. Folglich ist der sämmtliche Druck, welchen der eingetauchte feste Körper AKD wegen des gegen seine Oberfläche fortgepflanzten Druckes in verticaler Richtung von unten nach oben leidet, dem Gewichte der verdrängten flüssigen Masse AKD gleich; und die mittlere Richtung dieses Druckes geht durch den Schwerpunct des geometrischen Raumes AKD der verdrängten flüssigen Masse. Wenn man nähmlich den Abstand desjenigen Punctes, durch welchen die Richtung des vereinigten Druckes geht, von zwey verticalen Ebenen (nach 3. Th. §. 132. n. 3.) mittelst der Momente berechnet; so findet man solchen eben so groß als den Abstand des Schwerpunctes des geometrischen Raumes der

ver-

verdrängten flüssigen Masse, eben so, als wenn dieser Raum Fig.
wirklich mit einer schweren flüssigen Masse von gleichför- 11
miger Dichtigkeit angefüllet wäre, wo inzwischen die schwe- 12
re Masse innerhalb der eingetauchten festen Oberfläche wie immer ungleichförmig vertheilet seyn mag, so daß der Schwerpunct dieser eingetauchten schweren Masse DBK mit dem Schwerpuncte des verdrängten Flüssigen in eben diesem geometrischen Raume DBK nicht einerley Lage hat.

Daß die Pressungen in horizontalen Richtungen allenthalben im Gleichgewichte sind, kann man sich eben so wie im 20. §. überzeugen. Wenn man nähmlich den festen Körper DBK in lauter horizontal liegende Prismen mit einer beliebigen verticalen Ebene in paralleler Richtung zertheilet; so sind bey jedem solchen Prisma die Pressungen gegen seine beyden Grundflächen in der angenommenen horizontalen Richtung im Gleichgewichte.

§. 22.

Der Druck einer schweren flüssigen Masse gegen einen eingetauchten festen Körper in der verticaten Richtung von unten nach oben kann der Auftrieb genannt werden.

In Fig. 11, wo der feste Körper ganz in der flüssigen Masse eingetauchet ist, verbleibet der Auftrieb bey einer flüssigen Massevon gleichförmiger Dichtigkeit gegen einen und denselben festen Körper in jeder Tiefe immer derselbe, weil in einem solchen Falle das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse in jeder Tiefe einerley ist.

In Fig. 12 hingegen, wo der feste Körper nicht ganz eingetauchet ist, wird der Auftrieb größer oder kleiner, je nachdem ein größerer oder kleinerer Theil des festen Körpers eingetauchet wird. Tauchet man endlich den festen Körper ganz ein; so bleibt sodann der Auftrieb, wie im vorigen Falle bey einer flüssigen Masse von gleichförmiger Dichtigkeit, in jeder Tiefe unveränderlich. Der senkrechte Druck gegen jedes Theilchen der Oberfläche eines eingetauchten Körpers wird zwar desto größer, je tiefer solcher versenket wird, der daraus entspringende Auftrieb aber bleibt doch dabey ungeändert. Nur in solchen Fällen, wo die

Flüs-

Fig. 11 12 Flüssigkeit in verschiedenen Tiefen eine verschiedene Dichtigkeit hätte, wäre der Auftrieb in verschiedenen Tiefen auch verschieden.

§. 23.

Im vorigen 21. §. in Fig. 11 und 12 ist angenommen worden, daß der feste Körper durch eine besondere Kraft, oder sonst durch eine Befestigung in der angenommenen Lage unverrückt erhalten werde. Wird nun der Körper von dieser Befestigung gänzlich befreyet; so wird er vermöge seines ganzen Gewichtes zu sinken streben. Aber zugleich presset der Auftrieb der flüssigen Masse denselben in die Höhe; so daß daher zwey Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen zugleich auf den Körper wirken. Setzet man nun in Fig. 11 das Gewicht des festen Körpers $= P$, und das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse, nähmlich das Gewicht der flüssigen Masse bey einem dem festen Körper gleich großen Kubikinhalte $= p$; so ist, wenn $P > p$ ist, die bewegende Kraft, welche den Körper von oben nach unten treibet $= P - p$, wo die Richtung der Kraft P durch den Schwerpunct des festen Körpers, und die Richtung des Auftriebes p durch den Schwerpunct des geometrischen Raumes der verdrängten flüssigen Masse durchgeht. Der feste Körper wird daher in einem solchen Falle mit beschleunigter Bewegung bis zum Boden des Gefäßes hinunter sinken. Eine solche beschleunigte Bewegung läßt sich jetzt noch nicht bestimmen, wenn schon die bewegende Kraft $P - p$ und die bewegte Masse P für bekannt angenommen werden, weil bey der Bewegung eines festen Körpers in einer flüssigen Masse noch ein Widerstand entsteht, der die Bewegung verzögert, wovon weiter unten gehandelt werden soll.

Ist aber in Fig. 11 das Gewicht des festen Körpers eben so groß, als das Gewicht der flüssigen Masse in einem eben so großen Kubikinhalte, nämlich $P = p$; so ist die bewegende Kraft bey einem solchen frey gelassenen Körper in verticaler Richtung $= 0$; der feste Körper wird daher in einem solchen Falle in einer flüssigen Masse von

gleichförmiger Dichtigkeit in jeder Tiefe schwebend erhal- Fig.
ten. 11

Ist endlich in Fig. 11 $P < p$; so wird der feste 12
Körper mit der Kraft $p - P$ in die Höhe getrieben, und so weit in die Höhe steigen, bis nur ein so großer Theil seines körperlichen Inhaltes eingetauchet ist, daß sodann das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse eben so viel beträgt, als das ganze Gewicht des festen Körpers.

Eben so wird in Fig. 12 der freygelassene feste Körper ganz zu Boden sinken, wenn er mehr wiegt, als das Gewicht des flüssigen in einem eben so großen Kubikinhalte; wiegt er aber weniger, so wird er sich nur so tief eintauchen, bis das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse eben so viel beträgt, als das ganze Gewicht des festen Körpers. Sodann ist die Kraft, die ihn hinunter treibet, eben so groß als die Kraft, die ihn hinaufwärts presset; der feste Körper ist daher in einem solchen Falle in Hinsicht auf das Steigen und Fallen im Gleichgewichte.

Was nun der feste Körper in einem jeden dieser besonderen Fälle für eine Lage annehmen werde, muß noch untersuchet werden. Wenn nähmlich der Schwerpunct der verdrängten flüssigen Masse, durch welchen die mittlere Richtung des Auftriebes geht, mit dem Schwerpuncte des festen Körpers nicht in eben derselben Vertical-Linie lieget; so strebet zwar der Auftrieb (wegen 3. Th. §. 142.) den festen Körper in verticaler Richtung eben so zu heben, als wenn seine mittlere Richtung durch den Schwerpunct des festen Körpers ginge: dabey strebet aber auch eben dieser Auftrieb den festen Körper um dessen Schwerpunct mittelst eines Hebels zu drehen, der sich ergibt, wenn man aus diesem Schwerpuncte eine senkrechte auf die mittlere Richtung des Auftriebes gedenket.

§. 24.

Wenn in Fig. 11 der ganz eingetauchte feste Körper von gleichförmiger Dichtigkeit ist; so lieget der Schwerpunct des festen Körpers mit dem Schwerpuncte der verdrängten flüssigen Masse in einem und demselben Puncte beysammen.

Die

Fig. Die Richtung des Gewichtes P des festen Körpers ist da-
11 her in einem solchen Falle bey jeder Lage desselben der
12 Richtung des Auftriebes p in einer und derselben Vertical-Linie gerade entgegengesetzt; und folglich ist einem solchen Körper jede Lage gleichgültig sowohl beym Sinken, wenn $P > p$, als auch beym Steigen, wenn $P < p$, und auch im Stande des Gleichgewichtes oder beym Schweben, wenn $P = p$ ist.

Ist aber der ganz eingetauchte feste Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, oder die Masse desselben in seinem geometrischen Raume ungleichförmig vertheilet (wie z. B. bey einer Kugel, wo der eine Abschnitt von Holz und der andere von Metall wäre, ingleichen bey einer excentrisch ausgehöhlten eisernen Kugel oder Bombe u. s. w.); so wird ein solcher Körper sowohl beym Sinken, als beym Steigen, als auch bey dem Schweben oder im Stande des Gleichgewichtes immer eine solche Lage annehmen, daß der Schwerpunct des festen Körpers gerade unter dem Schwerpuncte der verdrängten flüssigen Masse in einer und derselben Vertical-Linie sich befinde; das ist, daß der schwerere Theil des festen Körpers unten sey. In einer solchen Lage des festen Körpers sind die Richtungen des Gewichtes P, und des Auftriebes p, einander gerade entgegengesetzt; und wenn der feste Körper durch was immer für einen Umstand, etwa durch eine Erschütterung der flüssigen Masse, in eine andere Lage gebracht wird, daß die Richtungen des Gewichtes und des Auftriebes neben einander vorbeystreichen: so wird sodann durch eben diese zwey Kräfte der feste Körper angetrieben werden durch die Drehung um seinen Schwerpunct nach einigen Schwankungen die vorige Lage wieder anzunehmen. Davon kann man sich auf folgende Art überzeugen.

13 Es werde Fig. 13 ein fester Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit in der flüssigen Masse in einer solchen Lage frey gelassen, daß sein Schwerpunct in G, und der Schwerpunct der verdrängten flüssigen Masse in g sich befinde, wo die Vertical-Linie PG neben pg vorbeystreichet.

Man

Man gedenke durch diese zwey Puncte G, g eine unbieg- Fig.
same gerade Linie AB quer durch den festen Körper gezo- 13
gen; so ist wegen der Festigkeit des Körpers der Erfolg eben so, als wenn das Gewicht *P* des festen Körpers auf den Hebel AB nach der Richtung PG hinunterwärts, und der Auftrieb *p* nach der Richtung pg auf den nähmlichen Hebel aufwärts wirkete. Der Hebel und mithin auch der damit verbundene feste Körper muß sich daher nach derjenigen Seite, wo der Schwerpunct G des festen Körpers liegt, (wegen 3. Th. §. 142.) um diesen Schwerpunct G so drehen, daß der Schwerpunct g der verdrängten flüssigen Masse gerade über den Schwerpunct G des festen Körpers bey der gänzlichen Eintauchung zu liegen kommt. Sodann sind die zwey Kräfte *P*, *p* einander gerade entgegengesetzt und können keine fernere Umdrehung bewirken. Auch strebet nun der feste Körper, wenn er durch was immer für einen Umstand aus dieser letzten Lage gebracht wird, sich wieder in dieselbe Lage hineinzudrehen. Nimmt man den Körper AB in einer solchen Lage an, daß der Schwerpunct G sich gerade oberhalb g befindet; so ist zwar auch keine Ursache zum Drehen vorhanden; allein durch den geringsten Umstand könnte da der Schwerpunct G seitwärts zu liegen kommen, und der feste Körper müßte sich sodann weiter drehen, bis G gerade unter g zu liegen kommt.

§. 25.

Wenn ein fester Körper von einer flüssigen Masse in einer solchen Lage im Gleichgewichte erhalten wird, daß er zum Theil aus der flüssigen Masse hervorraget; so sagt man, daß der Körper schwimme, oder daß er ein schwimmender Körper sey.

Zu den schwimmenden Köpern gehören nicht nur allein solche feste Massen von gleichförmiger Dichtigkeit, deren eigenthümliches Gewicht geringer ist, als das Gewicht der flüssigen Masse (die specifisch leichter sind als das Flüssige); sondern es können auch aus solchen festen Massen, die ein weit größeres eigenthümliches Gewicht haben als das Flüssige (die specifisch schwerer sind als das Flüssige) schwim-

Fig. schwimmende Körper verfertiget werden, wenn man eine solche feste Masse nur gegen die äußere Oberfläche eines Raumes dergestalt vertheilet, und im innern des Raumes leere Höhlungen von beträchtlicher Größe, in welche das Flüssige nicht hineindringen kann, so anbringet, daß sodann das ganze Gewicht eines solchen Körpers geringer sey, als das Gewicht einer flüssigen Masse unter dem nähmlichen äußeren Umfange. Daher können hohle metallene Kugeln, so wie verschiedene andere ausgehöhlte Körper mit specifisch schwereren Lasten beladen auf dem Wasser schwimmen; z. B. beladene Schiffe auf den Strömen, und auf dem Meere. Auch ist es leicht einzusehen, daß ein fester Körper auf einer flüssigen Masse schwimmen könne, in einer anderen hingegen ganz zu Boden sinke. So z. B. schwimmet ein Stück Eisen auf dem Quecksilber, im Wasser hingegen sinket es zu Boden; weil Quecksilber in einem dem Stück Eisen gleich großen Kubikinhalte mehr, Wasser hingegen weniger wiegt als dasselbe Stück Eisen. So können auch schwer beladene Schiffe, die auf dem Meere noch schwimmen, beym Einlaufen in einen Strom zu Boden sinken, weil Stromwasser specifisch leichter ist, als Meerwasser.

Wenn nun ein Gefäß zum Theil mit Quecksilber und der Ueberrest mit Wasser angefüllet, sodann aber eine eiserne Kugel in das angefüllte Gefäß hineingelassen wird; so fällt die Kugel durch das Wasser hindurch, und tauchet sich zum Theil ins Quecksilber ein, wo sie sodann in dieser Lage schwebend bleibt. Aus den gegebenen specifischen Gewichten des Wassers, Quecksilbers und Eisens läßt sich der ins Quecksilber eingetauchte Theil der Kugel berechnen, welches aber dem eigenen Fleiße zur Uebung und Anwendung des bereits erlernten überlassen wird.

§. 26.

Um nun zu untersuchen, ob ein gegebener fester Körper auf einer gegebenen flüssigen Masse schwimmen könne oder nicht, kann man auf folgende Art verfahren.

1) Ist der Kubikinhalt des gegebenen Körpers durchaus mit einer festen Materie von gleichförmiger Dichtigkeit

angefüllet; so sehe man nach, ob das eigenthümliche Gewicht der festen Masse größer, kleiner, oder eben so groß sey, als das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse. Im ersten Falle wird der feste Körper zu Boden sinken, im zweyten schwimmen, und im dritten in jeder Tiefe schweben. Denn wenn man den Kubikinhalt des festen Körpers $= K$, sein ganzes Gewicht $= P$, und sein eigenthümliches Gewicht $= Q$, das Gewicht aber der flüssigen Masse unter dem nähmlichen Kubikinhalte $= p$, und ihr eigenthümliches Gewicht $= q$, setzet; so ist $P = K.Q$, und $p = K.q$ (wegen 3. Thl. §. 15.). Es ist daher $P > p$, oder $P = p$, oder endlich $P < p$, nachdem $Q > q$, oder $Q = q$, oder endlich $Q < q$ ist. Fig.

2) Ist der gegebene Körper allenthalben mit einer Oberfläche umgeben, in welche das Flüssige nicht hineindringen kann, wie bey einer hohlen Kugel, bey einer Tonne, wo sich im inneren Raume verschiedene Körper befinden können, ingleichen bey einem aus verschiedenen Materien zusammengefügten festen Körper, und dergleichen; so berechne man bey einem solchen Körper den ganzen Kubikinhalt $= K$, der in der äußersten Oberfläche eingeschlossen ist, und bestimme auch sein ganzes Gewicht $= P$. Dieses Gewicht dividire man durch den Kubikinhalt; so erhält man (nach 3. Th. §. 15) sein mittleres specifisches Gewicht $= Q$. Nachdem nun Q weniger, mehr, oder eben so viel beträgt als das specifische Gewicht des Flüssigen; so wird ein solcher Körper entweder schwimmen, oder zu Boden sinken, oder im Flüssigen schwebend erhalten werden. Dieses findet man auch, wenn man untersuchet, ob das Flüssige unter dem nähmlichen Kubikinhalte K mehr, weniger, oder eben so viel wiege, als der gegebene Körper.

3) Ist der gegebene Körper oben offen, wie ein Schiff; oder sonst ein offenes Gefäß; so stelle man sich eine horizontale Ebene vor, die einen solchen Körper oberwärts bedecket. Sodann berechne man den Kubikinhalt, der unter dieser horizontalen Ebene und zwischen den übrigen Seitenflächen eines solchen Körpers sich befindet; man bestimme

Fig. auch sein ganzes Gewicht sammt der Ladung, wenn eine sich darin befindet; und endlich untersuche man, ob das Gewicht des Flüssigen unter dem nähmlichen Kubikinhalte mehr, weniger, oder eben so viel betrage als das vorige Gewicht. Im ersten Falle wird der Körper schwimmen, im zweyten zu Boden sinken, und im dritten sich genau bis an die gedachte horizontale Ebene einsenken.

Leget man aber ein solches Gefäß so auf das Flüssige, daß dieses gleich über den Rand des Gefäßes hineinstürzet, oder sind Oeffnungen vorhanden, wodurch das Flüssige in die Höhlungen eindringen kann; so wird das Gefäß wie jeder andere feste Körper betrachtet. Es wird schwimmen, oder zu Boden sinken, oder schweben, je nachdem das mittlere specifische Gewicht der Materie, woraus es verfertiget ist, kleiner, größer, oder eben so groß ist, als das specifische Gewicht des Flüssigen.

§. 27.

Da ein schwimmender Körper sich nur so tief in das Flüssige einsenket, bis das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse dem ganzen Gewichte des schwimmenden Körpers gleich wird; so läßt sich bey einem beladenen Schiffe das ganze Gewicht des Schiffes sammt der Ladung dadurch bestimmen, wenn man den Kubikinhalt des verdrängten Wassers berechnet, und solchen mit dem eigenthümlichen Gewichte des Wassers multipliciret. Auch läßt sich auf diese Art das Gewicht der Ladung berechnen, welche ein Schiff zu tragen vermögend ist, wenn es sich dadurch bis zu einem gegebenen horizontalen Querschnitte einsenken soll. Man muß in einem solchen Falle den Kubikinhalt des Schiffes zwischen dem gegebenen oberen Querschnitte und zwischen dem unteren Querschnitte an der Wasserfläche bey dem leeren Stande desselben bestimmen, und mit dem bekannten eigenthümlichen Gewichte des Wassers multipliciren; so erhält man das gesuchte Gewicht der Ladung. Imgleichen läßt sich aus einer gegebenen Last $= P$, die man entweder in ein Schiff hineinleget oder auch herausnimmt, derjenige Kubikinhalt $= K$, berechnen, um welchen das Schiff im ersten Falle sich tiefer einsenket, im zweyten Falle aber aus dem Wasser emporsteiget. Es ist nähmlich der gesuchte Kubikinhalt K gleich dem gegebenen Gewichte P getheilet durch das eigenthümliche Gewicht des Wassers. Daraus läßt sich ferner aus der bekannten Gestalt des Schiffes auch die Tiefe bestimmen, um welche das Schiff im ersten Falle tiefer einsinket, und im zweyten Falle emporsteiget. Fig.

Anmerkung. Der Auftrieb des Wasser (§. 22.) kann in verschiedenen Fällen sehr vortheilhaft benutzet werden um große Lasten etwas in die Höhe zu heben. So z. B. kann ein beladenes Schiff über Untiefen (Strecken wo die Tiefe des Wassers kleiner ist, als die Tiefe des eingetauchten Theiles bey dem schwimmenden Schiffe) gebracht werden, wenn man an solches zwey platte Fahrzeuge, die anfänglich mit Wasser gefüllet sind, zu beyden Seiten gehörig befestiget, und sodann das Wasser ausschöpfet. Dadurch können oft beladene Schiffe von der größten Gattung so viel gehoben werden, daß sie sodann über eine Untiefe fortsegeln können, wo sie ohne dieses Hülfsmittel stranden müßten. Daß man auf diese Art auch versunkene Lasten aus dem Grundbette des Wassers allmählich erheben könne, ist ebenfalls leicht einzusehen.

§. 28.

Damit ein schwimmender Körper im Gleichgewichte sey, ist das allein noch nicht hinreichend, daß das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse eben so groß sey, als das ganze Gewicht des schwimmenden Körpers; sondern es muß dabey auch seine Lage so beschaffen seyn, daß der Schwerpunct des ganzen schwimmenden Körpers und der Schwerpunct der verdrängten flüssigen Masse in einer und derselben Vertical-Linie sich befinden. Denn nur bey einer solchen Lage sind die zwey Kräfte, das ganze Gewicht des schwimmenden Körpers und der Auftrieb, einander gleich und gerade entgegen gesetzt. Wenn ein schwimmender Körper in eine andere Lage versetzet wird, wo die zwey angeführten Schwerpuncte in zwey verschiedenen Vertical-Linien liegen; so wird solcher sodann sich selbst überlassen

Fig. 14 durch die Umdrehung um seinen Schwerpunct eine solche Lage annehmen, daß der Schwerpunct der verdrängten flüssigen Masse mit dem Schwerpuncte des ganzen schwimmenden Körpers in einer und derselben Vertical-Linie sich befindet. Der Körper wird eine zum Gleichgewichte erforderliche Lage annehmen, welches gemeiniglich erst nach einigen Schwankungen geschieht.

Es sey z. B. Fig. 14 ein fester Körper CED etwa eine Halbkugel in einer solchen Lage in eine flüssige Masse eingetauchet, daß zwar das Gewicht p der verdrängten flüssigen Masse AEBA dem Gewichte P des ganzen schwimmenden Körpers CEDC gleich sey, der Schwerpunct g der verdrängten flüssigen Masse aber etwas mehr links liege, als der Schwerpunct G des ganzen Körpers; so wird der freygelassene Körper in dieser Lage nicht ruhen können, sondern wird sich um den Schwerpunct G so drehen, und eine solche Lage aEb annehmen, daß sodann der Schwerpunct q der verdrängten flüssigen Masse aEba mit dem Schwerpuncte G in einer und derselben Vertical-Linie OGq lieget, welche auf dem Wasserschnitte ab bey dieser Lage senkrecht seyn wird.

Die Kraft, welche einen solchen Körper um den Schwerpunct G dergestalt zu drehen strebet, daß er im Stande des Gleichgewichtes von der horizontalen Wasserfläche in ab geschnitten wird, ist nichts anders als der Auftrieb p, weil bey der Lage AEB dessen mittlere Richtung pg nicht durch den Schwerpunct G durchgeht, und daher (wegen 3 Th. §. 142.) den festen Körper um diesen Schwerpunct G dergestalt zu drehen strebet, daß sich C erheben und D erniedrigen muß.

Auch ist es leicht einzusehen, daß zu einem standhaften Gleichgewichte eines schwimmenden Körpers eben nicht unumgänglich nothwendig sey, daß der Schwerpunct G des ganzen Körpers unter dem Schwerpuncte g der verdrängten flüssigen Masse liege, wie im 24. §. bey einem ganz eingetauchten Körper; sondern hier kann auch G oberhalb g lie-

liegen, ja es kann sogar G sich oberhalb der horizontalen Oberfläche des Flüssigen befinden. Fig. 14

Wenn man z. B. eine Halbkugel von der Beschaffenheit annimmt, daß die Zone aCDb specifisch schwerer als der Abschnitt aEb ist, doch aber ihr ganzes Gewicht weniger beträgt, als das Gewicht einer eben so großen Halbkugel von Wasser; und man tauchet sodann eine solche Halbkugel ganz ins Wasser: so wird sie frey gelassen (wegen §. 24.) in einer solchen Lage in die Höhe steigen, daß die Kreisfläche CD unten seyn wird; auf der Oberfläche des Wassers aber wird sie im Stande des Gleichgewichtes eine entgegengesetzte Lage annehmen.

§. 29.

Die Lage eines schwimmenden Körpers im Stande des Gleichgewichtes kann von dreyerley Beschaffenheit seyn.

1) Standhaft, wenn der schwimmende Körper sich wieder in die nähmliche Lage begibt, nachdem solcher um etwas Weniges um seinen Schwerpunct gedrehet worden ist, z. B. eine mit der krummen Oberfläche eingetauchte Halbkugel von gleichförmiger Dichtigkeit.

2) Unstandhaft oder schwankend, wenn der schwimmende Körper sich weiter drehet, und eine andere Lage suchet, nachdem er etwas Weniges um seinen Schwerpunct gedrehet worden ist, z. B. die nähmliche Halbkugel in verkehrter Lage.

3) Die Lage ist gleichgültig, wenn der schwimmende Körper in der geänderten Lage noch immer im Gleichgewichte verbleibet, nachdem er um seinen Schwerpunct etwas gedrehet worden ist, z. B eine schwimmende volle, oder auch concentrisch ausgehöhlte Kugel von gleichförmiger Dichtigkeit.

Um bey einem gegebenen schwimmenden Körper im Stande des Gleichgewichtes die Beschaffenheit der Lage zu untersuchen, ob solche standhaft, unstandhaft oder gleichgültig sey, zieht man eine Vertical-Linie EF Fig. 15 15
durch den Schwerpunct H des schwimmenden Körpers. Diese wird wegen des Gleichgewichtes auch durch den Schwer-

punct

Fig. 15 punct g des verdrängten Wassers durchgehen, und auf dem Wasserschnitte AB senkrecht seyn. Sodann leget man eine Ebene CD durch den festen Körper von der Beschaffenheit, daß der körperliche Inhalt CED = AEB, und daß die Ebene CD gegen AB unter einem beliebigen nicht gar großen Winkel geneigt sey. Darauf bestimmet man den Schwerpunct f des geometrischen Raumes CED als den Schwerpunct des verdrängten Wassers, wenn der feste Körper bis CD eingetauchet ist. Endlich zieht man aus f eine Senkrechte fG auf CD, und verlängert solche, bis sie die vorige Gerade FE in irgend einem Puncte G durchschneidet. Wenn fG mit FE nicht in einer und derselben Ebene wäre; so leget man durch fG eine Ebene parallel zur Achse, um welche die Drehung des schwimmenden Körpers geschiehet, um aus der Lage AEB in CED zu kommen.

Liegt nun der Schwerpunct des schwimmenden Körpers unter diesem Durchschnittspuncte G z. B. in H; so ist die Lage AEB des schwimmenden Körpers standhaft. Denn die Richtung des Auftriebes fG geht in einem solchen Falle bey der geänderten Lage CED dergestalt neben der Richtung MH des Gewichtes des schwimmenden Körpers vorbey, daß dieser Auftrieb den Körper in die vorige Lage AEB zurück zu drehen strebet, daß nähmlich A sinken, und B steigen muß. Liegt aber der Schwerpunct des schwimmenden Körpers ober dem Durchschnittspuncte G z. B. in I, so daß die Richtung FN des Gewichtes desselben auf der Seite der tieferen Einsenkung neben der Richtung fG des Auftriebes vorbey gehe; so strebet der Auftrieb den Körper noch weiter zu drehen, daß B noch tiefer einsinket, und A noch mehr emporsteiget. Die Lage des schwimmenden Körpers ist daher in einem solchen Falle unstandhaft. Ist endlich der Schwerpunct des schwimmenden Körpers in dem Durchschnittspuncte G befindlich; so ist der Körper auch in dieser zweyten Lage noch im Gleichgewichte. Wenn dieses für jeden Winkel fGg oder AIC zutrifft, so ist die Lage des Körpers gleichgültig.

Der Durchschnittspunct G heißt in der Schiffbaukunst

das

das Metacentrum oder der Obermittelpunct, weil dieser Fig. 15
Punct die Gränze ist, unter welcher der Schwerpunct des schwimmenden Körpers liegen muß, damit noch eine Standhaftigkeit des Gleichgewichtes vorhanden sey. Bey einem leeren Segelschiffe könnte es sich fügen, daß der Schwerpunct desselben zu nahe an das Metacentrum, oder gar über dasselbe zu liegen käme. Um dieses zu verhindern werden daher schwere Lasten, als Sand und dergleichen in den untersten Theil des Schiffes unter dem Nahmen Ballast eingeladen.

§. 30.

Die Standhaftigkeit des Gleichgewichtes bey einem schwimmenden Körper RES in der Lage AEB, wo in H dessen Schwerpunct, und in g der Schwerpunct des verdrängten Wassers seyn mag, wird erkannt, wenn man das Moment derjenigen Kraft anzugeben weiß, welche bey einer gegebenen geänderten Lage CED (wo nun CD der horizontale Durchschnitt auf der Oberfläche des Wassers ist) den schwimmenden Körper in die vorige Lage zurück zu drehen strebet.

Diese Kraft ist nichts anders als der Auftrieb des Wassers, der jederzeit dem Gewichte des verdrängten Wassers, und bey einem schwimmenden Körper auch dem ganzen Gewichte dieses Körpers gleich ist. Ist nun f der Schwerpunct des verdrängten Wassers CED; und daher fG senkrecht auf CD gezogen die mittlere Richtung des Auftriebes, und HM parallel zu fG die Richtung des Gewichtes des schwimmenden Körpers bey der geänderten Lage CED; so ist die Senkrechte HK der Arm des Hebels, womit der Auftrieb den schwimmenden Körper in die vorige Lage AEB zurück zu drehen strebet. Folglich ist das Moment des Auftriebes oder die Standhaftigkeit des Gleichgewichtes gleich dem Producte aus dem Gewichte des schwimmenden Körpers oder des verdrängten Wassers multipliciret mit der Senkrechten HK.

Diese Senkrechte HK läßt sich aus der Vertiefung GH des Schwerpunctes H des schwimmenden Körpers unter

Fig. 15 ter dem Metacentrum G, und aus dem Neigungswinkel EGe = AIC bestimmen, um welchen der schwimmende Körper aus seiner zum Gleichgewichte erforderlichen Lage durch was immer für eine Ursache nach der Seite geneigt angenommen wird. Diese Senkrechte HK, und daher auch die Standhaftigkeit eines und desselben schwimmenden Körpers bey einem und demselben Neigungswinkel ist desto größer, je tiefer der Schwerpunct H des ganzen schwimmenden Körpers unter dem Metacentrum G sich befindet.

Wäre der schwimmende Körper eine Halbkugel, oder auch ein halber ausgehöhlter Cylinder an beyden Enden conoidisch zugespitzet in Gestalt eines Schiffes, wovon RES der senkrechte Querschnitt, und EF dessen verticale Achse seyn mag (die nähmlich durch beyde Schwerpuncte g, H durchgeht, und auf der Oberfläche RS senkrecht steht) so liegt das Metacentrum in dem Mittelpuncte G des Halbkreises RES für jeden in dieser Ebene RES angenommenen Neigungswinkel EGe = AIC. Sonst ist gemeiniglich die Stelle des Metacentrum für jeden anderen Neigungswinkel verschieden.

§. 31.

Wie nun bey einem gegebenen schwimmenden Körper die Lage des Metacentrum durch Rechnung zu bestimmen sey (das ist, wie die Linie Gg als die gesuchte Erhöhung des Metacentrum über den Schwerpunct des geometrischen Raumes der verdrängten Flüssigkeit durch Rechnung gefunden werden könne) gehöret zwar eigentlich in die Schiffbaukunst; indessen erlaube ich mir doch etwas weniges hiervon zu erwähnen, und zwar Folgendes.

1) Bey der Bestimmung des gesuchten Werthes von Gg wird der Winkel EGe = AIC = DIB, um welchen der schwimmende Körper mittelst der Drehung um irgend eine horizontale Achse, welche durch die Ebene RES in I senkrecht durchgehen mag, aus der zum Gleichgewichte erforderlichen Lage verrücket gedacht wird, gemeiniglich sehr klein, eigentlich unendlich klein gesetzet. Ferner müssen hierbey folgende Betrachtungen angestellet werden.

2)

2) Der Durchschnittspunct I von AB und CD liegt in der Mitte zwischen A und B: das ist die Durchschnitts-linie des Wasserschnittes CD mit dem Wasserschnitte AB geht durch den Schwerpunct I des Wasserschnittes AB, wo in Fig. 16 dieser horizontale Wasserschnitt durch ATBV, und die erwähnte Durchschnittslinie als Umdrehungs- oder Schwankungsachse betrachtet durch TV abgebildet ist. Fig. 15 16

Denn wegen des kubischen Inhaltes des verdrängten Wassers AEB = CED, ist auch der spaltförmige Raum AIC = DIB, wo sich jeder dieser zwey spaltförmigen Räume (nach 3 Th. §. 137.) bestimmen läßt. Wenn man nähmlich den sehr kleinen Winkel AIC = DIB mit φ, die Fläche AI oder in Fig. 16. ATV mit A, die Fläche IB oder in Fig. 16. TVB mit B, ferner den Abstand des Schwerpunctes der Fläche ATV von der Umdrehungsachse TV mit a, und den Abstand des Schwerpunctes der Fläche TVB von der nähmlichen Umdrehungsachse TV mit b bezeichnet; so ist (vermöge 3 Th. §. 137.) der kubische Inhalt des spaltförmigen Raumes AIC $= A.a\,\varphi$, und DIB $= B.b\,\varphi$, wo φ im Längenmaße für den Halbmesser = 1 ausgedruckt gedacht wird. Es ist daher $A.a\varphi = B.b\varphi$, und folglich auch $A.a = B.b$; das ist die statischen Momente der zwey Flächen ATV und TBV in Absicht auf die Durchschnittslinie TV, sie möge in dieser horizontalen Ebene ATBV was immer für eine Lage haben, sind einander gleich; folglich liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct der Fläche ATBV in dieser Durchschnittslinie TV (3. Th. §. 132.)

3) Um nun die Erhöhung des Metacentrum G über den Schwerpunct g des verdrängten Wassers zu berechnen muß man das Drehungsmoment (3. Th. §. 206.) des Wasserschnittes ATBV in Hinsicht auf eine solche durch den Schwerpunct I gehende Umdrehungsachse TV berechnen, in welcher der Wasserschnitt AB von dem Wasserschnitte CD bey der geänderten Lage des schwimmenden Körpers durchschnitten wird. Ein solches Drehungsmoment di-

vi-

Fig. 15 16 vidiret durch den körperlichen Inhalt des verdrängten Wassers gibt die gesuchte Erhöhung gG des Metacentrum G über den Schwerpunct g des verdrängten Wassers für die angenommene Schwankungsachse TV.

Man kann sich davon auf folgende Art überzeugen.

Wenn G das Metacentrum, f der Schwerpunct des verdrängten Wassers CED bey der geänderten Lage, und H der Schwerpunct des ganzen schwimmenden Körpers ist; so ist HK der Arm des Hebels, womit der Auftrieb $= P$ (24. §.) den schwimmenden Körper aus der geänderten Lage CED in die vorige zum Gleichgewichte erforderliche Lage AEB zurückzudrehen strebet. Das Moment des Auftriebes, oder die Standhaftigkeit der Lage des schwimmenden Körpers ist daher $= P.\text{HK}$, oder auch $= P.\text{GH}.\sin\varphi$, wegen $\text{HK} = \text{GH}.\sin\varphi$.

Eben dieses Moment des Auftriebes läßt sich noch auf eine andere Art ausdrucken. Wenn man nähmlich bey der aus dem Gleichgewichte verrückten Lage CED des schwimmenden Körpers den spaltförmigen Wasserkörper AIC Fig. 15 in Gedanken hinzusetzet, und wieder wegnimmt; so kann man auch sagen, daß das nähmliche Moment des Auftriebes gleich sey dem Momente von DIB, weniger dem Momente von AEB, mehr dem Momente von AIC in Hinsicht auf die Richtungslinie MHh, welche durch den Schwerpunct H des schwimmenden Körpers bey der Lage CED durchgeht. Weil nähmlich das negative Moment von AEB um das Moment von AIC zu groß genommen ist; so muß letzteres, um den wahren Ausdruck zu erhalten, wieder mit dem Zeichen + hinzugesetzet werden. Das Moment von AEB in Hinsicht auf Mh ist $P.\text{gr} = P.\text{gH}.\sin\varphi$ wegen des rechten Winkels bey r. Wenn ferner 1 und 2 die Schwerpuncte der spaltförmigen kubischen Räume AIC, DIB sind; so sind die Momente dieser zwey spaltförmigen Wasserkörper $\frac{\text{AIC}.P}{\text{AEB}} \times \text{Mp}$, und $\frac{\text{DIB}.P}{\text{AEB}} \times \text{Mq}$, weil sich das Gewicht eines

nes solchen spaltförmigen Wasserkörpers zum Gewichte P Fig.
des verdrängten Wassers verhält, wie der Kubikinhalt des 15
erstern zum Kubikinhalte AEB des verdrängten Wassers. 16
Es ist daher das Moment des Auftriebes $P.\ GH.\ \sin\varphi =$

$$\frac{AIC.\ P.\ Mp + DIB.\ P.\ Mq}{AEB} - P.\ gH.\ \sin\varphi;$$ und daraus folgt $GH + gH$, nähmlich $gG = \frac{AIC.\ Mp + DIB.\ Mq}{AEB.\ \sin\varphi}$.

Eben dieser Werth für gG wird erhalten, wenn der Schwerpunct H des schwimmenden Körpers im Stande des Gleichgewichtes unter dem Schwerpuncte g des verdrängten Wassers AEB befindlich wäre. Und nun kommt es darauf an, daß man die Momente AIC. Mp + DIB. Mq der zwey spaltförmigen Räume AIC und DIB in Hinsicht auf Mh gehörig ausdrucke, welches auf folgende Art geschehen kann.

Es sey auf dem Wasserschnitte AI Fig. 15 eine Abscisse von I gegen A genommen $= x$, nähmlich Fig. 16 auf dem Wasserschnitte ATVA sey Im $= x$; die dazu gehörige senkrechte Ordinate auf dem nähmlichen Wasserschnitte sey It $= y$; eben so sey die Abscisse In $= X$, die dazu gehörige Ordinate rs $= Y$; und endlich sey auf dem Wasserschnitte AB Fig. 15 der Abstand IM $= \alpha$: so ist ein Element oder das Differenziale des spaltförmigen Raumes AIC $= dx.\ x \sin\varphi.\ y$; weil man solches wegen des unendlich klein angenommenen Winkels φ für ein Prisma ansehen kann, welches das Rechteck $x \sin\varphi\ dx$ zum senkrechten Querschnitte, und y zur Höhe hat. Das Moment dieses Elementes in Hinsicht auf Mh ist $= xy\,dx \sin\varphi \times (x - \alpha)$. Daraus folgt das Moment des spaltförmigen Raumes AIC. Mp $= \sin\varphi.\int x^2 y\,dx - \alpha.\int xy\,dx \sin\varphi$. Eben so ist das Differenziale des spaltförmigen Raumes DIB $= XY\,dX \sin\varphi$; dessen Moment in Hinsicht auf Mh $= XY dX \sin\varphi.\ (X + \alpha)$; und daher das Moment DIB. Mq $= \sin\varphi.\ \int X^2 Y dX + \alpha\int XY dX \sin\varphi$. Folglich ist AIC,

Fig. 15 16 $AIC.\,Mp + DIB.\,Mq = (\int x^2 y dx + \int X^2 Y dX) \sin\phi - \alpha\,(\int xy dx \sin\varphi - \int XY dX \sin\phi)$.

Nun heben die letzten zwey Glieder einander gänzlich auf, weil $\int xy dx \sin\varphi$ der Inhalt des spaltförmigen Raumes AIC, und $\int XY dX \sin\varphi$ des Raumes DIB ist, für $x = IA$, und $X = IB$, welche einander gleich sind. Daher ist auch $AIC.\,Mp + DIB.\,Mq = (\int x^2 y dx + \int X^2 Y dX).\sin\varphi$.

Wird nun dieser Werth in die oben für gG angegebene Gleichung eingeführet: so ist endlich

$$gG = \frac{\int x^2 y dx + \int X^2 Y dX}{AEB}$$ wo (vermöge 3. Th. §. 206.)

der Zähler nichts anders ist, als das Drehungsmoment des Wasserschnittes TBVA in Hinsicht auf die angenommene Schwankungsachse TV; der Nenner aber ist der kubische Inhalt des verdrängten Wassers.

Wie nun für verschiedene ebene Flächen als Wasserschnitte betrachtet, die Drehungsmomente zu berechnen sind in Hinsicht auf verschiedene Schwankungsachsen, die durch den Schwerpunct des Wasserschnittes gehen, erhellet aus 3. Th. §. 207. Die weitere Ausführung dieser Untersuchung, und die Anwendung derselben auf die Schiffbaukunst findet man in Hrn. *L. Euler* Theorie complette de la constr. des vaiss. Paris. 1776.

4) Indessen ist doch auch schon aus dem Angeführten abzunehmen, worauf man überhaupt zu sehen habe, um einem Schiffe eine große Standhaftigkeit des Gleichgewichtes auf dem Wasser zu verschaffen. Es muß nähmlich zu dieser Absicht die Figur des Schiffes so beschaffen seyn, daß für jede Schwankungsachse das Metacentrum so hoch als möglich über den Schwerpunct des verdrängten Wassers zu liegen komme. Ferner muß die ganze Last dergestalt vertheilet werden, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct des ganzen Schiffes sammt der Ladung so tief als möglich unter dem Metacentrum sich befinde.

§. 32.

§. 32. Fig.

Da vermöge 21. §. ein fester Körper, wenn er in eine schwere flüssige Masse ganz eingetaucht wird, wegen des von allen Seiten gegen seine Oberfläche fortgepflanzten Druckes einen lothrechten Auftrieb (22. §.) von unten nach oben leidet, der dem Gewichte der verdrängten flüssigen Masse gleich ist; so ist es offenbar, daß das Sinken eines specifisch schwereren festen Körpers im Wasser verhindert werden könne, wenn solcher mit einer Gewalt gehalten wird, die der Differenz der Gewichte des eingetauchten Körpers und des verdrängten Wassers gleich ist; oder welches einerley ist, daß das mittelst einer Wage bestimmte Gewicht eines solchen Körpers in der flüssigen Masse genau um das Gewicht des verdrängten Flüssigen kleiner seyn müsse, als dessen Gewicht außerhalb der flüssigen Masse ist. Eben so kann das Steigen eines ganz eingetauchten festen Körpers von specifisch leichterer Art (25. §.) im Wasser verhindert werden, wenn solcher mit einer Gewalt, die ebenfalls der Differenz der Gewichte des verdrängten Wassers und des eingetauchten Körpers gleich ist, hinunter gezogen wird. Dieser Umstand rechtfertiget die Redensart: **Jeder feste Körper, wenn er in eine schwere flüssige Masse ganz eingetaucht wird, verliert von seinem Gewichte so viel, als die verdrängte flüssige Masse wiegt; oder so viel als das Gewicht der flüssigen Masse unter einem mit dem festen Körper gleich großen Kubikinhalte beträgt. Ein Körper, dessen Gewicht kleiner ist, als das Gewicht des Wassers unter einerley Umfange, verliert daher bey der gänzlichen Eintauchung in dasselbe an seinem Gewichte mehr, als er wirklich hat.**

Es ist nähmlich der Gewichtsverlust (als das Gewicht des verdrängten Wassers oder der Auftrieb) eines festen Körpers bey dessen gänzlicher Eintauchung in eine flüssige Masse gleich der Differenz der Gewichte, welche dieser Körper im Freyen und in der flüssigen Masse äußert, wenn jener dichter als diese ist. Wenn hingegen die flüssige

Mas-

Fig. Masse dichter ist, als der eingetauchte feste Körper; so ist dessen Gewichtsverlust darin gleich der Summe der Gewichte des festen Körpers im Freyen und in der flüssigen Masse; weil das Gewicht des festen Körpers in der flüssigen Masse hier in entgegen gesetzter Richtung, nähmlich aufwärts wirket.

Auch hat der erwähnte Auftrieb zu der uneigentlichen Redensart Veranlassung gegeben: Wasser ist im Wasser nicht schwer. Wenn man nähmlich in einem mit Wasser angefüllten Gefäße ein Theilchen des Wassers nach Belieben groß oder klein in Erwägung zieht; so wird dessen Gewicht von dem eben so großen und gerade entgegen gesetzten Auftriebe gänzlich aufgehoben; und ist in Absicht auf das Sinken eben so viel, als wenn das ganze Wasser der Wirkung der Schwerkraft gar nicht ausgesetzt wäre. Dabey ist aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen dem in einem Gefäße ruhenden schweren, und unschweren Wasser. Bey jenem leidet jedes Theilchen von allen Seiten her einen fortgepflanzten Druck, der sich nach 14. §. n. 1. bestimmen läßt; bey diesem hingegen wäre kein einziges Theilchen weder am Boden des Gefäßes noch sonst an irgend einer Stelle einer Zusammendrückung ausgesetzt. Bey einem festen Körper, wenn solcher durch irgend eine feste Unterlage gegen die Erde herabzusinken verhindert wird, ist auch das Gewicht durch die Festigkeit der Unterlage gänzlich aufgehoben; dabey pflegt man aber doch nicht zu sagen, der Körper sey in einem solchen Falle nicht schwer.

§. 33.

Wenn man ein mit Wasser gefülltes Gefäß auf eine Wagschale stellet, und die Wage mit einem Gegengewichte ins Gleichgewicht setzet, sodann aber einen festen Körper mittelst eines Fadens, ohne die Wage und die Wände des Gefäßes zu berühren in das Wasser eintauchet, so wird das Gleichgewicht nicht mehr bestehen. Das Gefäß drücket nun stärker auf die Wagschale; und zwar genau um dasjenige Gewicht, welches der eingetauchte Körper im Wasser verlieret, oder um das Gewicht des verdrängten Wassers. Wenn man daher auf die andere Wagschale ein

dem

dem verdrängten Wasser gleich großes Gewicht leget, so Fig. wird das Gleichgewicht wieder hergestellet. Schneidet man sodann bey einem ganz eingetauchten Körper von specifisch schwererer Art den Faden an der Wasserfläche ab, so wird dieses Gleichgewicht noch ferner bestehen, jedoch nur so lange, als das Sinken eines solchen Körpers dauert. Sobald aber der Körper auf dem Boden des Gefäßes aufliegt, wird das Gleichgewicht wieder gestöret. Um solches herzustellen muß man zu dem vorigen Gewichte, das dem verdrängten Wasser gleich ist, noch ein anderes von solcher Beschaffenheit hinzulegen, daß diese beyde zusammen dem Gewichte des eingetauchten Körpers gleich sind.

Die Ursache dieses Erfolges ist leicht einzusehen. Wenn nähmlich der ganz eingetauchte Körper mit dem Wasser einerley specifisches Gewicht hätte, so wäre es eben so viel, als wenn statt dessen eine Menge Wasser von eben so großem kubischen Inhalte hinzugegossen würde; wodurch denn der Druck des Gefäßes gegen die Wagschale (wegen 20. §) um das Gewicht eben dieses Wassers vermehret wird. Allein wenn der eingetauchte Körper auch specifisch schwerer ist als Wasser; so ist doch der Erfolg noch eben so beschaffen, weil der Gewichtsüberschuß des eingetauchten Körpers über das Gewicht des verdrängten Wassers mittelst des Fadens von der Hand oder einer anderen Befestigung außerhalb der Wage getragen wird, und dadurch so aufgehoben ist, daß er auf die Wage gar nicht wirken kann. Man kann sich hiervon auch noch besser überzeugen, wenn man um einen so eingetauchten festen Körper sich eine lothrechte Wassersäule von der Oberfläche des Wassers bis zum Boden des Gefäßes gleichsam in Gestalt einer angefüllten Röhre vorstellet, und sodann den verticalen Druck gegen den Boden des Gefäßes bey einer solchen mit Wasser und mit dem festen Körper angefüllten Röhre eben so wie im 20. §. Fig. 10, und 21. §. Fig. 11 bestimmet. Wird nun der Faden abgeschnitten, so sinket zwar der eingetauchte Körper schwererer Art wegen des Ueberschusses seines Gewichtes über das Gewicht des verdrängten Wassers; er kann aber doch während

des

Fig. des Sinkens auf die Wagschale noch keinen Druck aus üb... weil das Wasser als eine flüssige Masse dem dagegen an... gebrachten Drucke nach 1. §. ausweichet. Sobald aber de... Körper auf dem Boden des Gefäßes aufliegt; so drückt e... mit dem erwähnten Ueberschusse seines Gewichtes den fe... sten Boden des Gefäßes, und hiermit auch die Wagschale.

Während des Sinkens leidet zwar die untere Fläche des eingetauchten Körpers einen gewissen Widerstand, we... von weiter unten umständlich gehandelt wird; es entste... nähmlich sowohl gegen die untere Fläche des sinkenden Kör... pers als auch gegen die jedesmahlige angränzende Wasser... schichte wegen der Abstoßungskräfte der Materie (3. Th. §. 59.) eine gewisse Pressung, welche verursachet, daß das Sinken nicht genau nach den Gesetzen der gleichför... mig beschleunigten Bewegung geschieht, sondern daß die Beschleunigung (3 Th §. 48.) nach einem gewissen Ge... setze immer mehr und mehr abnimmt, je größer die bereit... durch das Sinken erlangte Geschwindigkeit wird. Allein diese Pressung wirket gar nicht auf die Wagschale. Der Erfolg ist beynahe eben so wie in dem Falle, da man zwey auf einander gelegte Körper, (z. B. zwey Würfel) deren über einander liegende Flächen eine dazwischen ange... brachte elastische Feder aus einander zu treiben sich befin... det, auf eine Wagschale stellet, und mit einem Gegenge... wichte ins Gleichgewicht setzet. Diese zwey Körper, und die elastische Feder müssen bey dem nähmlichen Gegengewich... te immer im Gleichgewichte verbleiben, es möge die elasti... sche Kraft der zwischenliegenden Feder bey ungeänderter Masse gegen diese zwey Körper stärker oder schwächer wir... ken. Die Wagschale leidet keinen anderen Druck, als das Gewicht der zwey Körper und der Feder, als bloß schwe... rer Massen.

Aus den bisher angeführten Gründen ist auch folgen... der Erfolg leicht zu erklären. Wenn man ein mit Wasser angefülltes Gefäß auf einer Wagschale ins Gleichgewicht setzet, und sodann mit einem Stabe oder einem anderen festen Körper von oben gegen die Oberfläche des Wassers

der-

dergestalt herunter stößt, daß sich der feste Körper etwas Fig. eintauchet; so wird das Gleichgewicht gestöret, obwohl im 1. §. gesagt worden ist, daß eine flüssige Masse einem dagegen angebrachten Drucke ausweicht Die Ursache, warum hier das Gleichgewicht gestöret wird, ist bloß diese, weil durch das Eintauchen des festen Körpers der Druck des mit schwerem Wasser angefüllten Gefäßes gegen die Wagschale genau um das Gewicht des verdrängten Wassers vermehret wird; der von dem Stoße herrührende Druck kann in diesem Falle auf die Wagschale gar nicht wirken. Wenn das Wasser nicht schwer wäre, oder wenn man in einem Gewölbe mitten in der Erdkugel auf diese Art ein Gefäß mit Wasser auf die Schale einer Wage stellen könnte; so dürfte das Gleichgewicht nicht gestöret werden, man möge auf die angeführte Art wie immer gegen einen Theil der offenen Oberfläche des Wassers stoßen. Nur damahls, wenn man in einem solchen Falle gegen die ganze offene Oberfläche des Wassers mit einem genau passenden Stämpel stößt oder drücket, wird auch die Wagschale den Druck empfinden.

IV. Abschnitt.

Hydrostatische Abwägung und Ausmessung der Körper.

§. 34.

Das eigenthümliche oder specifische Gewicht eines Körpers, oder vielmehr der Materie oder des Stoffes, woraus die für gleichförmig dicht angenommene Masse des

Fig. Körpers besteht, ist bekannter Maßen nichts anders, als das wirkliche Gewicht eines für die Einheit angenommenen Theiles (z. B. eines kubischen Fußes oder Zolles) dieses Körpers. Daß man aus dem für bekannt angenommenen, oder nach den Gründen der Geometrie ausgemessenen kubischen Inhalte eines Körpers, und aus dessen mittelst einer genauen Wage bestimmten Gewichte sein eigenthümliches Gewicht berechnen könne, ist (vermöge 3. Th. §. 15.) bereits bekannt. Wenn nähmlich der kubische Inhalt des Körpers $= V$, sein ganzes oder absolutes Gewicht $= P$, und sein eigenthümliches Gewicht $= Q$ ist; so ist $Q = \frac{P}{V}$ wegen $V : 1 = P : Q$; woraus auch $P = QV$, und $V = \frac{P}{Q}$ folget.

Eben so kann man auch das eigenthümliche Gewicht $= q$ einer flüssigen Masse finden, wenn man den kubischen Inhalt eines Gefäßes (nähmlich dessen leeren Raum $= v$) ausmißt, darauf diesen mit der flüssigem Masse anfüllet, und mittelst einer genauen Wage das Gewicht der letzteren $= p$ bestimmet; denn daraus folgt wie ehevor $q = \frac{p}{v}$.

§. 35.

Es ist bereits allgemein eingeführet das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers (als einer allerorts leicht zu habenden Masse von gleichförmiger Dichtigkeit) für die Einheit anzunehmen, nähmlich solches $= 1$ zu setzen, und durch diese Einheit die eigenthümlichen Gewichte anderer sowohl fester als auch flüssiger Körper zu bestimmen; und zwar durch gewisse Zahlen, welche angeben, wie vielmahl das eigenthümliche Gewicht des Wassers im eigenthümlichen Gewichte solcher Körper enthalten sey. In diesem Sinne pflegt man daher auch öfters zu sagen: das eigenthümliche oder specifische Gewicht einer vorgelegten Masse ist diejenige Zahl, welche angibt, wie vielmahl das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers im eigen-

thüm-

thümlichen Gewichte der vorgelegten Masse enthalten Fig.
ist. Es wäre besser, um die Zweydeutigkeit zu vermeiden, solchen Zahlen eine andere Benennung zu geben, z. B. relative Dichtigkeit, oder glattweg die Dichtigkeit der Körper; man könnte sie auch Dichtigkeitszeiger, Gewichtszeiger, auch Gewichts-Exponenten heißen. Damit ich nicht neue Benennungen aufdringe, dabey aber doch die Zweydeutigkeit vermeide, so will ich in der Folge für solche Zahlen immer fort die in sehr vielen Schriften bereits eingeführte Benennung specifische Schwere (gravitas specifica), zuweilen auch relative Dichtigkeit beybehalten. Das eigenthümliche Gewicht eines Körpers aber soll auch in der Folge wie bisher die Bedeutung des 34. §. haben.

§. 36.

Da nun festgesetzet ist, daß die specifische Schwere (gravitas specifica) oder die relative Dichtigkeit einer vorgelegten Masse diejenige Zahl sey, welche angibt, wie oft das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers im eigenthümlichen Gewichte der vorgelegten Masse enthalten ist; so ist es nun leicht aus dem für bekannt angenommenen eigenthümlichen Gewichte des Regenwassers und aus der gegebenen specifischen Schwere einer vorgelegten Masse das eigenthümliche Gewicht der letzteren zu bestimmen. Wenn nähmlich das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers $= q$, und die specifische Schwere einer vorgelegten Masse $= n$ ist; so ist deren eigenthümliches Gewicht, wenn solches mit Q bezeichnet wird $Q = nq =$ dem eigenthümlichen Gewichte des Regenwassers multipliciret mit der specifischen Schwere der vorgelegten Masse, weil vermöge der festgesetzten Bezeichnung und Benennung $n = \frac{Q}{q}$ ist. Wäre die specifische Schwere eben dieses Körpers in Absicht auf eine andere Flüssigkeit gegeben, und das eigenthümliche Gewicht dieser Flüssigkeit wäre ebenfalls bekannt (es sey jene $= N$ und dieses $= R$); so ist das gesuchte eigenthüm-

Fig. liche Gewicht Q eines solchen Körpers ebenfalls $Q = N.R$, weil N die Bedeutung $\frac{Q}{R}$ hat.

§. 37.

Die Dichtigkeit des Regenwassers, so wie eines jeden anderen Körpers, wird durch die Wirkung der Wärme geändert. Alle Körper werden nähmlich bey vermehrter Wärme mehr ausgedehnet, und bey der Verminderung der Wärme oder bey der Kälte zusammengezogen; jedoch einige um etwas mehr als andere, z. B. Messing und Eisen in einem Verhältnisse beyläufig von 17 zu 10. Die Dichtigkeiten der Körper und ihre eigenthümlichen Gewichte werden bey vermehrter Wärme kleiner, und bey verminderter Wärme größer; nur ihre absoluten Gewichte bleiben ungeändert, weil der hinzugetretene, die Empfindung der Wärme bewirkende, so genannte **Wärmestoff** so fein seyn soll, daß man sein Gewicht gar nicht wahrnehmen kann. Deßwegen ist es in Fällen von großer Genauigkeit erforderlich das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers bey einer mittleren Temperatur, etwa bey der Wärme von 10 Graden des Reaumürschen Quecksilber-Thermometers durch einen sorgfältig abgeführten Versuch zu bestimmen, und die ferneren Versuche zur Erforschung der specifischen Schwere oder der relativen Dichtigkeit verschiedener Körper bey einer eben solchen mittleren Temperatur anzustellen.

§. 38.

Das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers ließe sich zwar nach dem 34. §. mittelst eines Gefäßes vom bekannten kubischen Inhalte (z. B. mittelst eines genau ausgehöhlten wirklichen Kubikfußes oder auch Kubikzolles) bestimmen. Allein wegen der Anziehung oder Abstoßung der Elementar-Theilchen der Wände des Gefäßes und des Wassers ist es mißlich einen solchen kubischen Inhalt mit Wasser völlig genau auszufüllen. Deßwegen ist es vortheilhafter das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers mittelst

der

der Eintauchung eines festen Körpers zu bestimmen, und zwar auf folgende Art. Fig.

Man nehme einen festen Körper vom bekannten kubischen Inhalte, etwa einen metallenen Würfel, oder lieber einen Cylinder (weil der Cylinder leichter genau zu verfertigen ist als der Würfel), und wäge solchen sowohl außer dem Wasser, als auch im Regenwasser mittelst einer sehr genauen und empfindlichen Wage. Im letzteren Falle kann man denselben mittelst eines Pferdehaares an die Wagschale befestigen. Man wählet hierzu gern Pferdehaare, weil sie mit dem Wasser sehr nahe einerley specifische Schwere haben, da man sodann nur den aus dem Wasser hervorragenden Theil des Pferdehaares mit einem Gegengewichtchen ins Gleichgewicht setzen muß. Die Differenz der Gewichte eines solchen Körpers in und außer dem Wasser ist nun das Gewicht, welches der eingetauchte feste Körper im Wasser verlieret, und (wegen 32. §.) zugleich das Gewicht des Wassers unter einem mit dem eingetauchten festen Körper gleich großen Kubikinhalte. Wenn nähmlich das Gewicht des festen Körpers außer dem Wasser $= P$, das Gewicht des Wassers unter einem mit dem festen Körper gleich großen Kubikinhalte $= p$, und die Kraft, womit dieser ganz eingetauchte feste Körper zu sinken strebet, nähmlich dessen Gewicht im Wasser $= Q$ ist; so ist (wegen 32. §.) $Q = P - p$, und daher $p = P - Q$ wo $P - Q$ dasjenige Gewicht heißt, welches der Körper im Wasser verliert. Aus diesem so gefundenen Gewichte des verdrängten Wassers läßt sich sodann das Gewicht eines Kubikfußes oder Kubikzolles, als das gesuchte eigenthümliche Gewicht des Regenwassers durch folgende Proportion ableiten: Der bekannte kubische Inhalt des eingetauchten festen Körpers verhält sich zu 1 Kubikfuß oder Kubikzoll, gleich wie das gefundene Gewicht des Regenwassers unter dem nähmlichen Kubikinhalte zu dem Gewichte eines Kubikfußes oder Kubikzolles desselben. Auf diese Art findet man, daß ein Wiener-Kubikfuß des unter

freyem

Fig. freyem Himmel aufgefangenen Regenwassers bey der Temperatur von 5 Reaumürschen Graden sehr nahe $56\frac{3}{8}$ Pfunde des Wiener-Handelsgewichtes wiege. Ein Paris. Kubikfuß des nähmlichen Regenwassers wiegt sehr nahe 7[illegible] Paris. Pfund.

Bey einer von Hrn. Professor Jacquin dem jüngern zu Wien 1799 in der Absicht vorgenommenen Untersuchung war das Gewicht eines metallenen Cylinders von 1 Zoll im Durchmesser und 2 Zoll hoch (des W. F.) in freyer Luft 3431,8 Gran, und dessen Gewichtsverlust im destillirten Wasser bey + 5 Grad des 80 theiligen Quecksilber-Thermometers, und bey $28\frac{1}{6}$ Wien. Zoll Barometer-Höhe 393,6 Gran des Wiener-Apothekergewichtes; woraus das Gewicht eines Wiener-Kubikfußes des destillirten Wassers = 56 Pfund 12 Loth 31 Gran, also sehr nahe $56\frac{3}{8}$ Pfund folget.

Auf die angeführte Art läßt sich auch das eigenthümliche Gewicht einer jeden andern Flüssigkeit bestimmen, worin der eingetauchte feste Körper vom bekannten kubischen Inhalte, ohne aufgelöset zu werden, zu Boden sinken kann.

Bey der Untersuchung des eigenthümlichen Gewichtes verschiedener Wasser findet man, daß nicht alle Arten des gemeinen Wassers, als Regenwasser, Brunnenwasser, Flußwasser, u. d. gl. einerley eigenthümliches Gewicht haben. Daher wählte man das Regen- oder Schneewasser, um die eigenthümlichen Gewichte der übrigen Massen damit zu vergleichen, weil man es für das reinste hält. Es muß aber solches, um es desto reiner zu erhalten, nicht von den Dächern, sondern unter freyem Himmel aufgefangen werden. Um es von einigen fremden Theilchen, die etwa noch demselben beygemischet sind, zu reinigen, kann man solches durch eine feine Leinwand filtriren, und sodann auskochen. Will man es noch reiner haben so muß man solches destilliren, oder wenn man hierzu nicht selbst eingerichtet ist, dasselbe in einer Apotheke destilliren lassen. Weiter unten (im 41. und 43. §.) wird eine sehr leichte Anweisung folgen um den Gewichtsverlust eines festen Körpers in einer flüssigen Masse zu bestimmen.

§. 39.

§. 39.

Fig.

Ist einmahl das eigenthümliche Gewicht des Wassers oder einer anderen Flüssigkeit bekannt, so läßt sich sodann der kubische Inhalt eines jeden hineingetauchten festen Körpers (wenn solcher von der Beschaffenheit ist, daß er weder vom Wasser aufgelöset wird, noch auch die Wassertheilchen in seine Zwischenräume merklich aufnimmt) mittelst des zu erforschenden Gewichtes bestimmen, welches ein solcher Körper im Wasser verliert; und zwar durch folgende Regel: **Der Gewichtsverlust des auszumessenden Körpers im Wasser dividirt durch das eigenthümliche Gewicht des Wassers gibt den gesuchten Kubikinhalt des Körpers.**

Denn da (wegen 32. §.) der Gewichtsverlust des eingetauchten Körpers dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist, und dieses mit dem eingetauchten Körper einerley Kubikinhalt hat; so verhält sich das eigenthümliche Gewicht des Wassers (als das Gewicht eines Kubikfußes oder Kubikzolles) zu dem beobachteten Gewichtsverluste des eigetauchten festen Körpers (als dem Gewichte des verdrängten Wassers), gleich wie ein Kubikfuß oder Kubikzoll zum gesuchten kubischen Inhalte des eingetauchten festen Körpers (als dem Inhalte des verdrängten Wassers) in Kubikfuß- oder Kubikzoll-Maße ausgedruckt. Daraus läßt sich sodann aus dem bekannten Gewichte eines solchen Körpers und aus dessen eben gefundenem kubischen Inhalte sein eigenthümliches Gewicht (nach 34. §.) ableiten. Auf diese Art ist es sehr leicht das eigenthümliche Gewicht der Eisen-Munition von verschiedenen Gußwerken, wie auch des Stuckmetalles, und anderer fester Körper zu bestimmen. Ist nun der feste Körper, dessen Kubikinhalt auf diese Art hydrostatisch gesucht wird, von specifisch schwererer Art als Wasser; so ist die Erforschung des im Wasser verlornen Gewichtes weiter keiner Schwierigkeit ausgesetzt.

§. 40.

Ist aber der feste Körper, dessen Kubikinhalt hydrostatisch gesucht wird, von specifisch leichterer Art als Wasser;

Fig. ser; so muß derselbe an einen andern Körper von beträchtlich schwererer Materie auf eine solche Art angebunden werden, daß sodann beyde mit einander vereiniget im Wasser zu Boden sinken können. Der specifisch leichtere Körper kann z. B an einen Bleyklumpen mit Eisendrath angebunden werden. Sodann untersucht man mittelst der Wage 1) das Gewicht, welches beyde vereinigte Köper zusammen im Wasser verlieren, 2) das Gewicht, welches der Hülfskörper schwererer Art im Wasser verliert. 3) Die Differenz dieser zwey verlornen Gewichte ist nun das Gewicht des von dem specifisch leichteren festen Körper verdrängten Wassers, welches am kubischen Inhalte diesem festen Körper gleich ist. Daraus ergibt sich nun der gesuchte Kubikinhalt dieses Körpers, wenn man dieses so bestimmte Gewicht des verdrängten Wassers durch das eigenthümliche Gewicht des Wassers dividiret. Wenn nähmlich daß im Wasser verlorne Gewicht der zwey vereinigten Körper $= P$, und das verlorne Gewicht des Hülfskörpers $= p$ ist; so ist das verlorne Gewicht Q des auszumessenden Körpers $Q = P - p$. Denn es ist (wegen 32. §.) $P = Q + p$; und daher $Q = P - p$.

§. 41.

Auf folgende Art wird der Gewichtsverlust eines festen Körpers in einer flüssigen Masse, er mag nun specifisch schwerer oder leichter seyn, als diese flüssige Masse, wenn er nur nicht zu groß ist, noch kürzer gefunden.

1) An die eine Wagschale einer genauen Wage hänge man den Hülfskörper an, tauche solchen in das darunter gestellte Flüssige gehörig ein, und bringe ihn mit einem beliebigen Gegengewichte auf der anderen Wagschale (z. B. mit Bleyschrotte oder klarem Sande) ins Gleichgewicht.

2) Sodann lege man den zu untersuchenden festen Körper auf die Wagschale, von welcher der Hülfskörper in das Flüssige herunter hängt, und bringe die andere Wagschale mittelst Auflegung der erforderlichen Theile eines Gewichtseinsatzes mit demselben ins Gleichgewicht. Diese Gewichtstheile sind nun das absolute Gewicht des zu unter-

suchen-

suchenden Körpers, oder sein Gewicht im Freyen, eigentlich in der Luft. Fig.

3) Darauf nehme man den zu untersuchenden Körper von der Wagschale wieder weg, verbinde ihn mit dem eingetauchten Hülfskörper mittelst der schon daben befindlichen Vorrichtung, und lege nun auf eben diese Wagschale so viele Theile eines Gewichtseinsatzes, bis wieder das Gleichgewicht hergestellet ist; so sind diese Theile der gesuchte Gewichtsverlust des zu untersuchenden Körpers, oder das Gewicht des von ihm verdrängten Flüssigen Auf diese Art kann man auch den Gewichtsverlust (im 38. §.) bey der Erforschung des eigenthümlichen Gewichtes verschiedener Flüssigkeiten, so wie auch im 39. §. und in allen ähnlichen Fällen sehr leicht bestimmen.

§. 42.

Mittelst des bekannten eigenthümlichen Gewichtes des Wassers läßt sich auch die innere Aushöhlung eines wasserhaltenden Gefäßes, z. B. einer gläsernen Flasche, einer irregulär ausgehöhlten Kugel, u. m. d. gl. im Kubikmaße angeben. Man muß zu dieser Absicht sowohl das leere, als auch das mit Wasser angefüllte Gefäß genau abwägen, und diese zwey Gewichte von einander abziehen, um das Gewicht des Wassers zu erhalten, welches die auszumessende Aushöhlung genau ausfüllet. Man kann auch das Wasser, wenn dessen gar viel seyn sollte, abgießen, und solches theilweise abwägen. Sodann ergibt sich der gesuchte Kubikinhalt, wenn man das gefundene Gewicht des Wassers mit dessen eigenthümlichem Gewichte dividiret.

§. 43.

Wenn einmahl das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers (nach 38. §.) richtig gefunden worden ist; so ist zur Bestimmung der eigenthümlichen Gewichte anderer sowohl fester als flüssiger Massen (nach 36. §.), nur noch erforderlich deren specifische Schweren oder relative Dichtigkeiten ausfindig zu machen. Dieses kann auf folgende Art geschehen.

Fig. 1) Ein Stück eines festen Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit, dessen specifische Schwere (36. §.) oder relative Dichtigkeit gesucht wird, wiegt man zu erst sehr genau in freyer Luft um das absolute Gewicht dieses Stückes zu erhalten. Sodann bestimmt man (nach 41. §.) dasjenige Gewicht, welches eben dieses Stück im Regenwasser verliert. Dieses Gewicht ist nun zugleich das Gewicht einer Menge Wassers, die mit dem eingetauchten festen Körper einerley kubischen Inhalt hat (32. §.). Nun dividire man das absolute Gewicht durch den Gewichtsverlust im Regenwasser, so ist der Quotient die gesuchte specifische Schwere des Körpers in der Bedeutung des 36. §. Denn wenn der kubische Inhalt des beym Abwägen gebrauchten Stückes $= V$, dessen absolutes Gewicht $= P$, dessen Gewichtsverlust im Regenwasser $= R$, und das eigenthümliche Gewicht des Körpers $= Q$ ist, des Regenwassers eigenthümliches Gewicht aber $= q$, und die gesuchte specifische Schwere des Körpers $= x$ gesetzt wird; so ist $x = \frac{Q}{q}$ (vermöge 36. §.). Es ist aber

$Q = \frac{P}{V}$ (wegen 34. §.), und $q = \frac{R}{V}$ (wegen 38. §.); folglich $x = \frac{P}{R}$.

Die zum hydrostatischen Gebrauche besonders eingerichteten Wagen sind gewöhnlich mit einem kleinen gläsernen Eimer versehen, der mit einem durchbrochenen Deckel verschlossen wird, um einen hineingelegten Körper von specifisch leichterer Art zu hindern, daß er im Wasser nicht empor komme. Mittelst einer solchen Vorrichtung ist es nun sehr bequem (nach 41. §.) den Gewichtsverlust eines festen Körpers im Wasser, oder in einer anderen Flüssigkeit zu bestimmen, er mag specifisch schwerer oder leichter seyn als eine solche Flüssigkeit. Sollte der zu untersuchende feste Körper eine so geringe specifische Schwere haben,

ben, daß er sammt dem gläsernen Eimer nicht untergehen Fig.
könnte, so darf man nur letzteren mit einigen Bleyschrotten, oder mit etwas Quecksilber beschweren.

2) Um die specifischen Schweren anderer Flüssigkeiten dur Versuche zu bestimmen, wählet man gewöhnlich ein massives Stück Glas, weil solches auch von den schärfesten Flüssigkeiten, als Vitriolöhl, Scheidewasser, u. d. gl. nicht merklich angegriffen wird. Die zum hydrostatischen Gebrauche eingerichteten Wagen sind gemeiniglich mit einem dergleichen Stück Glas unter dem Nahmen der Glasperle versehen. Von einer solchen Glasperle bestimmt man einmahl für alle Mahl den Gewichtsverlust im Regenwasser. Diese nähmliche Glasperle wird sodann mehr in einer schwereren, und weniger in einer leichteren Flüssigkeit verlieren. Die Gewichtsverluste einer solchen Glasperle in verschiedenen Flüssigkeiten dividirt durch den Gewichtsverlust im Regenwasser geben nun die gesuchten specifischen Schweren dieser verschiedenen Flüssigkeiten. Denn wenn man das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers $= q$, den Gewichtsverlust der Glasperle im Regenwasser $= R$, und den kubischen Inhalt dieser Glasperle $= V$ setzet, die eigenthümlichen Gewichte verschiedener Flüssigkeiten aber mit a, b, c . . . und die beobachteten Gewichtsverluste der Glasperle in diesen Flüssigkeiten mit A, B, C, . . . bezeichnet; so ist (wegen 32. §.) $R = qV$, $A = aV$, $B = bV$, $C = cV$, . . .; und $q = \frac{R}{V}$, $a = \frac{A}{V}$, $b = \frac{B}{V}$, $c = \frac{C}{V}$; folglich sind die gesuchten Quotienten $\frac{a}{q} = \frac{A}{R}$, $\frac{b}{q} = \frac{B}{R}$, $\frac{c}{q} = \frac{C}{R}$ u. s. w.

Die specifische Schwere des Quecksilbers läßt sich auf diese Art nicht bestimmen, weil die Glasperle darin nicht ganz einsinken kann. Dafür aber läßt sich die specifische Schwere des Quecksilbers nach n. 1. mittelst des gläsernen Eimers untersuchen.

3)

Fig. 3) So wie man nach n. 1. und 2. die specifischen Schweren verschiedener Körper in Absicht auf das Regenwasser finden kann; eben so lassen sich solche auch in Absicht auf eine andere Flüssigkeit z. B. Brunnenwasser, Weingeist, Terpentinöhl, u. d. gl. durch Versuche bestimmen. Untersucht man ferner die specifische Schwere einer solchen Flüssigkeit nach n. 2; so können sodann die gefundenen specifischen Schweren in Absicht auf diese Flüssigkeit sehr leicht auf Regenwasser reduciret werden, wenn man sie mit der specifischen Schwere der dabey gebrauchten Flüssigkeit multipliciret. Denn wenn die specifische Schwere eines Körpers in Hinsicht auf eine solche Flüssigkeit $= N$, die specifische Schwere eben dieser Flüssigkeit in Hinsicht auf das Regenwasser $= n$, die gesuchte specifische Schwere des untersuchten Körpers aber $= x$; ferner das eigenthümliche Gewicht des Regenwassers $= q$, des untersuchten Körpers $= Q$, und der dabey gebrauchten Flüssigkeit $= p$ gesetzet wird; so ist $x = \frac{Q}{q}$; es ist aber (vermöge 36. §.) $Q = N.p$, und $p = n.q$; folglich $x = N.n$.

Man kann auch das eigenthümliche Gewicht einer solchen Flüssigkeit nach 38. §. bestimmen, darauf aus den gefundenen specifischen Schweren verschiedener Körper in Hinsicht auf diese Flüssigkeit die wirklichen eigenthümlichen Gewichte dieser nähmlichen Körper eben so wie 36. §. berechnen, und darauf solche endlich auf Regenwasser reduciren.

Auf diese Art ist man im Stande auch die specifischen Schweren verschiedener Salze, und anderer fester Massen, die vom Wasser aufgelöset werden, durch Versuche zu bestimmen, wenn man deren eigenthümlichen Gewichte mittelst des Terpentinöhls, des feinsten Weingeistes u. d. gl. nach der angeführten Art untersuchet, und sodann auf Regenwasser reduciret.

§. 44.

§. 44. Fig.

Man kann die specifischen Schweren verschiedener sowohl fester als flüssiger Körper auch mittelst eines eigens hierzu eingerichteten schwimmenden Körpers bestimmen; weil es bekannt ist, daß ein schwimmender Körper sich nur so tief in eine flüssige Masse eintauchet, bis das Gewicht des verdrängten Flüssigen dem absoluten Gewichte des schwimmenden Körpers gleich ist (25. §.).

Es sey z. B. ABCD Fig. 17 ein hohler Cylinder von Glas am Boden mit einigen Bleyschrotten oder mit etwas Quecksilber beschweret, damit er (wegen 28. §.) in einer flüssigen Masse immer in lothrechter Stellung schwimme. 17
Sinkt derselbe nun in einer Flüssigkeit bis EF; so ist (wegen 25. §.) das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse EBCF dem absoluten Gewichte dieses so eingerichteten Cylinders gleich. Untersucht man dieses Gewicht des gehörig beschwerten Cylinders mittelst einer genauen Wage, und berechnet den kubischen Inhalt des eingetauchten Theiles; so findet man das eigenthümliche Gewicht einer solchen Flüssigkeit, wenn man das Gewicht des Cylinders mit dem kubischen Inhalte des eingetauchten Theiles oder des verdrängten Flüssigen dividiret, so wie im 38. §. Wenn man nähmlich das absolute Gewicht des Cylinders $= P$, und das eigenthümliche Gewicht des Flüssigen $= Q$ setzet; so ist $Q = \frac{P}{\mathrm{EBCF}}$, weil P zugleich das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse EBCF ist. Sinkt nun eben dieser Cylinder in einer anderen Flüssigkeit bis ef, und es ist dieser Flüssigkeit eigenthümliches Gewicht $= q$; so ist $q = \frac{P}{\mathrm{eBCf}}$. Daraus folgt $Q : q = \frac{1}{\mathrm{EBCF}} : \frac{1}{\mathrm{eBCf}} = \mathrm{eBCf} : \mathrm{EBCF}$. Nähmlich die eigenthümlichen Gewichte verschiedener Flüssigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die eingetauchten Theile eines und desselben darin schwimmenden Cylinders, oder auch eines anderen schwimmenden Körpers von beliebiger Gestalt: weil die angeführ-

ten

Fig. 17 ten Gleichungen immer richtig sind, wenn die eingetauchten Theile EBCF und eBCf, als die kubischen Inhalte der zwey verschiedenen verdrängten flüssigen Massen, auch keine cylindrische sondern was immer für eine irreguläre Form haben.

§. 45.

Ist nun die Differenz der eigenthümlichen Gewichte sehr klein, so ist bey dem angeführten Gebrauche des schwimmenden Cylinders der Punct e desto näher bey E, je weiter der Cylinder ist; welches die Ausmessung und Berechnung immer etwas ungewiß macht. Man hat daher verschiedene schwimmende Körper anstatt des Cylinders zur Bestimmung der specifischen Schweren verschiedener Flüssigkeiten ausgedacht, und solchen die Benennung Senkwagen beygelegt.

Die sogenannte Fahrenheitische Senkwage ist in einigen Fällen sehr bequem. Sie besteht aus einer gläser-
18 nen Röhre CD Fig. 18 und aus zwey damit verbundenen hohlen Kugeln A, B, wovon die unterste A einige durch die Röhre hinein gelassene Bleyschrotte aufnimmt, die obere B aber, die auch in jeder Flüssigkeit untergetauchet seyn muß, den Schwerpunct des verdrängten Wassers über den Schwerpunct der gehörig beschwerten Senkwage beträchtlich erhebet, wodurch dieses Instrument immer in verticaler Stellung verbleibet.

Solche Senkwagen läßt man 1) entweder bey einerley Gewichte zu verschiedenen Tiefen, oder 2) bey verschiedenen Gewichten zu einerley Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten einsinken, um dadurch die Verhältnisse der eigenthümlichen Gewichte, oder die specifischen Schweren solcher Flüssigkeiten bestimmen zu können.

§. 46.

Läßt man nun in zwey verschiedenen Flüssigkeiten die Senkwage verschiedentlich beschweret bis zu einerley Tiefe einsinken; und setzet das specifische Gewicht der einen Flüssigkeit $= q$, und der anderen $= Q$, daß absolute Gewicht der Senkwage im ersten Falle $= p$, und im zwey-

ten $= P$, den kubischen Inhalt des eingetauchten Theils Fig.
der Senkwage aber, oder des verdrängten Flüssigen in je- 18
dem Falle $= V$; so ist $p = Vq$, und $P = VQ$, weil Vq und VQ die Gewichte der verdrängten Flüssigkeiten bedeuten, welche jederzeit dem absoluten Gewichte der Senkwage gleich sind. Daraus folgt $p : P = q : Q$, nähmlich die verschiedenen Gewichte der Senkwage, womit sie in verschiedenen Flüssigkeiten bis zu einerley Tiefe einsinket, verhalten sich, wie die eigenthümlichen Gewichte, oder auch wie die specifischen Schweren dieser Flüssigkeiten. Wenn man daher die Senkwage zu erst im Regenwasser, und sodann in verschiedenen anderen Flüssigkeiten verschiedentlich beschweret bis zu einerley Tiefe einsinken läßt, und in jedem Falle das Gewicht der gehörig beschwerten Senkwage mittelst einer genauen Wage richtig bestimmet; so lassen sich daraus die specifischen Schweren solcher Flüssigkeiten ableiten.

§. 47.

Wenn man die Senkwage immer mit einerley Gewichte beschweret in verschiedenen Flüssigkeiten bis zu verschiedenen Tiefen einsinken läßt; so ist es nicht soleicht aus diesen verschiedenen Tiefen die specifischen Schweren der Flüssigkeiten abzuleiten. Solche verhalten sich zwar umgekehrt wie die Kubikinhalte des verdrängten Flüssigen. Denn wenn das Gewicht der Senkwage $= p$ ungeändert verbleibt, und solche in der ersten Flüssigkeit bis E einsinket, so daß der kubische Inhalt des verdrängten Flüssigen ABE $= v$ sey, in einer anderen Flüssigkeit aber dieselbe bis F einsinket, so daß ABF $= V$ sey; wenn ferner das eigenthümliche Gewicht der ersten Flüssigkeit $= q$, und der zweyten $= Q$ ist: so ist $p = qv$, und auch $p = QV$ wie im 44 §. Daher ist auch $qv = QV$, und $q : Q = V : v$. Allein eben diese kubischen Inhalte für verschiedene Einsenkungen sind wegen der irregulären Gestalt der Senkwage beschwerlich zu bestimmen. Im erforderlichen Falle kann man durch Beyhülfe der Gleichung $p = qv$ diese kubischen Inhalte auf folgende Art suchen.

Man

Fig. 18 Man bemerke die Puncte E und F, bis wohin die Senkwage in der schwereſten und leichteſten der verſchiedenen zu unterſuchenden flüſſigen Maſſen einſinket, und theile den Raum EF in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. In einer flüſſigen Maſſe, deren eigenthümliches Gewicht $= q$ (nach 38. §.) bereits bekannt iſt, tauche man ſodann dieſe Senkwage mit verſchiedenen Gewichten beſchweret nach und nach bis zu allen Theilungspuncten, und beſtimme für jeden Theilungspunct das abſolute Gewicht der dazu gehörig beſchwerten Senkwage $= p$; ſo iſt vermöge der angeführten Gleichung der mit einem ſolchen Theilungspuncte zuſammen gehörige kubiſche Inhalt des eingetauchten Theiles der Senkwage oder des verdrängten Flüſſigen $v = \frac{p}{q}$.

Dieſe ſo beſtimmten kubiſchen Inhalte für verſchiedene Theilungspuncte werden nun in einer Tabelle angemerket, um ſodann mittelſt verſchiedener Einſenkungen bey einerley Gewichte der Senkwage die ſpecifiſchen Schweren verſchiedener Flüſſigkeiten angeben zu können.

§. 48.

Wenn die Senkwage ſo eingerichtet iſt, daß man auf ihr oberes Ende, welches die Geſtalt eines kleinen Tellers oder einer kleinen Schale hat, die Theile eines Gewichtseinſatzes auflegen kann; und man verbindet mit dem unteren Ende einen gläſernen Eimer, oder eine andere ähnliche Vorrichtung (um hiermit kleine Stückchen von feſten Körpern, ſie mögen ſpecifiſch ſchwerer oder leichter ſeyn als die flüſſige Maſſe, eintauchen zu können); ſo läßt ſich ſodann mittelſt einer ſolchen Senkwage ſowohl das abſolute Gewicht, als auch die ſpecifiſche Schwere eines feſten Körpers in Hinſicht auf eine beliebige Flüſſigkeit beſtimmen, und zwar auf folgende Art.

1) Man beſchwere die ſolcher Geſtalt eingerichtete Senkwage mit hineingelaſſenem Bleyſchrotte ſo viel, daß ſolche mit dem oberhalb auf den Teller gelegten zu unterſuchenden feſten Körper bis zu einem feſtgeſetzten Puncte E einſinket.

2)

2) Sodann nehme man diesen festen Körper von dem Teller weg, und lege anstatt desselben so viele Theile eines genau zertheilten Gewichtseinsatzes darauf, bis die Senkwage auf den nähmlichen Theilungspunct einsinket; so sind diese Theile das absolute Gewicht $= P$ des ehevor aufgelegten Körpers. Fig. 18

3) Nun nehme man diese aufgelegten Gewichtstheile wieder weg, versenke aber dafür den nähmlichen zu untersuchenden festen Körper in den eingetauchten Eimer der Senkwage, und lege wieder auf den Teller so viele Gewichtstheile $= p$, daß die Senkwage abermahl bis zum nähmlichen Puncte einsinket; so sind diese Gewichtstheile p der Gewichtsverlust des nun im Eimer befindlichen festen Körpers, oder das Gewicht der verdrängten flüssigen Masse unter einem mit dem zu untersuchenden festen Körper gleich großen Kubikinhalte.

4) Und daraus findet man endlich die specifische Schwere des eingetauchten festen Körpers in Hinsicht auf die dabey gebrauchte Flüssigkeit $= \frac{P}{p}$, eben so wie im 43. §.; wobey $p > P$ gefunden wird, wenn der zu untersuchende Körper specifisch leichter als die dabey gebrauchte Flüssigkeit seyn sollte.

Eine solche Senkwage zur Abwägung kleiner Körper sowohl in freyer Luft, als auch im Wasser kann von Blech verfertiget werden. Mit dem hohlen Theile B Fig. 18 wird an dessen unterem Ende mittelst zweyer oder dreyer Stängelchen ein oberwärts offenes und unten zugespitztes Gefäß verbunden, welches mit einem durchbrochenen Deckel versehen, und mit etwas Bley beschweret seyn muß.

§. 49.

Die Bestimmungen der eigenthümlichen Gewichte und specifischen Schweren sowohl von festen als auch von flüssigen Körpern nach 38. bis 43. §. sind sicherer und genauer, als die von 44. bis 48. §. angeführten mittelst der Senkwage. Die Senkwagen werden meistens zu anderen Absich-

Fig. ten gehörig eingerichtet, z. B., um zu untersuchen wie viel eine Salzauflösung oder ein Salzwasser, auch Sohle genannt, in jedem Kubikfuß oder auch in jedem Eimer zu 40 Maß an Salz enthalte. Eine dazu eingerichtete Senkwage erhält den Nahmen Salzwage, Aräometer oder auch Sohlwage. Man findet nähmlich durch einen leicht anzustellenden Versuch, daß eine Salzauflösung eine desto größere Dichtigkeit, und folglich auch ein desto größeres eigenthümliches Gewicht hat, und daß daher auch eine und dieselbe darein getauchte Senkwage um so mehr hervorraget, jemehr an Salz darin enthalten ist.

Um eine Sohlwage einzurichten, damit sie mit einer erträglichen Zuverlässigkeit den Salzgehalt einer Sohle anzeige, nimmt man eine oben zugeschmolzene Senkwage von solcher Beschaffenheit, daß sie in reinem Wasser beynahe ganz einsinket, und schreibt zu diesem Puncte eine 0. Sodann nimmt man 1 oder 2 Pfunde Salz, gießet so viel reines Wasser darauf, daß die Salzauflösung einen bestimmten kubischen Inhalt z. B. genau Einen Eimer beträgt (dieses kann im verjüngten Maße und Gewichte geschehen) und untersucht nun, wie tief jetzt die nähmliche Senkwage einsinket. Den Punct dieser Einsenkung bezeichnet man mit 1 oder mit 2, nachdem man 1 oder 2 Pfunde Salz zu einem Eimer der Salzauflösung genommen hat. Eben so werden die Puncte der Sohlwage gesucht, welche anzeigen sollen, daß in Einem Eimer einer Sohle 3, 4, 5, oder mehr Pfunde an Salz enthalten sind.

Man hat auch Senkwagen um die Beschaffenheit des Biers und des Weins zu prüfen, die sodann **Bier**- oder **Weinwagen**, auch **Bier**- oder **Weinproben** heißen. Auch kann man den Senkwagen eine Einrichtung geben, daß sie anzeigen, ob eine Salpeterlauge hinlänglich Gehalt habe, um mittelst des Einsiedens den Salpeter zu gewinnen.

§. 50.

Der schon so oft gebrauchte Satz, daß jeder feste Körper im Wasser ganz eingetaucht am Gewichte so viel verliert,

liert, als das verdrängte Wasser wiegt; und daß daher Fig. auch die Gewichtsverluste von verschiedenen Theilen eines und desselben gleichförmig dichten Körpers sich verhalten, wie die absoluten Gewichte dieser Theile, setzet uns in den Stand folgende Aufgabe aufzulösen.

Aufgabe.

Ein fester Körper ist aus zwey verschiedenen mit einander vermischten Massen dergestalt zusammen gesetzt, daß der Raum oder Kubikinhalt dieser gemischten Masse der Summe der Räume gleich ist, welche die zwey verschiedenen Massen oder Ingredienzen vor der Vermischung einnahmen; man soll hydrostatisch untersuchen, wie viel von jeder Masse in der Mischung enthalten sey.

Auflösung.

Man untersuche das ganze Gewicht der gegebenen Mischung, und zugleich auch (nach 41. §.) den Gewichtsverlust im Regenwasser, oder in einer anderen Flüssigkeit. Ferner nehme man von jeder Gattung der zwey bekannten Ingredienzen, woraus die Mischung besteht, ein beliebiges Stück, und bestimme von jedem solchen Stücke sowohl das absolute Gewicht, als auch den Gewichtsverlust in eben derselben Flüssigkeit. Daraus läßt sich sodann die gesuchte Menge jeder Ingredienz am Gewichte auf folgende Art berechnen.

Die Mischung M wiege m verliere im Wasser μ

ein Stück	von	A	a	α
der Ingred.		B	b	β

Fig. Ist nun in M von A am Gewichte x, so ist darin von B am Gewichte $m - x$;

folglich $a : \alpha = x : \frac{\alpha x}{a}$;

und $b : \beta = m - x : \frac{m\beta - \beta x}{b}$;

hiermit sind die Gewichtsverluste der zwey in der Mischung enthaltenen Ingredienzen einzeln ausgedruckt, deren Summe μ bekannt ist.

Daher ist $\mu = \frac{\alpha x}{a} + \frac{m\beta - \beta x}{b}$;

und daraus folgt endlich

$$x = \frac{(\mu b - m\beta)\, a}{\alpha b - a\beta} \text{ die Menge von } A$$

$$m - x = \frac{(m\alpha - \mu a)\, b}{\alpha b - a\beta} \;\ldots\; B.$$

Es sey z. B. M eine Mischung von Zinn (A) und von Bley (B) zusammen geschmolzen; es sey das Gewicht dieser Mischung $m = 120$ Pfund, und $\mu = 14$ Pfund. Ferner sey bey einem Stücke von reinem Zinne $a = 37$ Loth, $\alpha = 5$ Loth; und bey einem Stücke von reinem Bley $b = 23$ Loth, $\beta = 2$ Loth: so sind in der Mischung an Zinn 74 Pfund, und an Bley 46 Pfund enthalten.

Auf dieselbe Art und bey derselben Voraussetzung findet man die Menge des Zinnes und Kupfers bey einem vorgelegten Stuckmetall, auch Kanonengut und Bruchmetall genannt, wenn sich dabey keine anderen Ingredienzen befinden.

Die letzten zwey Gleichungen können auch auf folgende Art geschrieben werden:

die

die aus A und B bestehende Mischung Fig.

$$\text{enthält von } A = \frac{\frac{a}{\alpha}\left(m - \frac{b}{\beta}\mu\right)}{\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}},$$

$$\text{und von } B = \frac{\frac{b}{\beta}\left(m - \frac{a}{\alpha}\mu\right)}{\frac{b}{\beta} - \frac{a}{\alpha}},$$

wo $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{b}{\beta}$ die für bekannt angenommenen specifischen Schweren der zwey Ingredienzen sind, $\frac{b}{\beta}\mu$ und $\frac{a}{\alpha}\mu$ aber die Gewichte der Ingredienzen unter einem mit der Mischung m gleich großen kubischen Inhalte vorstellen. Unter dieser Gestalt sind nun die Formeln etwas leichter zu merken, als unter der vorigen.

Anmerkung. Diese Aufgabe rühret ursprünglich von Hiero, Könige zu Syrakusa in Sicilien her. Dieser König hatte sich von einem Künstler eine goldene Krone verfertigen lassen. Als die Krone bereits fertig war, gefiel zwar solche dem Könige wegen der zierlichen und künstlichen Arbeit ganz gut; jedoch hatte er Ursache zu vermuthen, daß der Künstler aus Betrug mehr Silber unter das Gold gemischt habe, als es ausbedungen war. Er fragte den berühmten Mathematiker Archimedes, ob es nicht möglich sey die Menge des Goldes und Silbers in der bereits fertigen Krone anzugeben, ohne solche im geringsten zu verletzen. Archimedes suchte lange vergebens eine Auflösung dieser Aufgabe. Endlich bey einer Gelegenheit

Fig. heit, da er sich eben im Bade befand, und vermuthlich über das Eintauchen der festen Körper in flüssigen Massen nachdachte, verfiel er auf die gesuchte Auflösung dieser Aufgabe. Er war darüber so sehr erfreuet, und von einem solchen Eifer zur baldigen Ausführung der gefundenen Auflösung ergriffen, daß er alsogleich aus dem Bade aufsprang, ohne sich zu bekleiden nach Hause lief, und unterweges mehrmahl laut ausrief: ευρηκα! ευρηκα! gefunden! gefunden!

Zwey-

Zweytes Hauptstück.

Grundlehre der Aerostatik.

I. Abschnitt.

Grundlehre des Gleichgewichtes der Kräfte bey elastischen flüssigen Massen.

§. 51.

Es ist bereits im 2. und 3. §. gesagt worden, daß man diejenigen flüssigen Massen, welche durch einen vermehrten Druck in einen kleineren Raum zusammen gepresset werden, bey vermindertem Drucke aber sich in einen größeren Raum ausbreiten, elastische flüssige Massen, oder luftförmige Flüssigkeiten nennet. Eine flüssige Masse wäre vollkommen elastisch, wenn sich solche durch einen ohne Ende vermehrten Druck in einen ohne Ende verminderten Raum zusammen pressen ließe; und umgekehrt, wenn sie sich bey gänzlich aufgehobener äußerer Zusammenhaltung in einen Raum ohne alle Gränzen ausbreiten würde. Vollkommen elastische Flüssigkeiten können daher nicht anders, als in Gefäßen von hinlänglich festem Umfange eingeschlossen, in Erwägung gezogen werden. Die in der Natur wirklich vorhandenen elastischen Flüssigkeiten dürften nicht vollkommen elastisch seyn. Wenn solche allzu stark zusammen gepresset, Fig.

oder

Fig. 1 oder allzu sehr ausgedehnet werden; so verlieren solche vielleicht ihre Elasticität, so wie bey einer elastischen Stahlfeder durch Ueberspannung die Federkraft zerstöret wird.

§. 52.

Die Eigenschaften, welche elastische flüssige Massen bloß wegen der Flüssigkeit besitzen, als z. B. die leichte Beweglichkeit der Elementar-Theilchen an und neben einander, die Fortpflanzung eines dagegen angebrachten Druckes nach allen Richtungen, u. s. w. sind eben dieselben wie bey unelastischen Flüssigkeiten. Doch haben letztere wegen der Elasticität noch einige besondere Eigenschaften, welche nun zu bestimmen sind.

Eine wesentliche Eigenschaft der elastischen Flüssigkeiten, welche den unelastischen mangelt, besteht darin: **Wenn von einer elastischen Flüssigkeit, ohne auf die Schwerkraft Rücksicht zu nehmen, was immer für eine Menge in irgend einem Gefäße gänzlich eingeschlossen gehalten wird, so drückt solche vermöge ihrer Elasticität gegen jeden Theil des festen Umfanges des Gefäßes, wo eine unelastische Flüssigkeit in einem solchen Zustande gegen die Theile des Umfanges des Gefäßes gar keinen Druck äußert.** Die Pressungen der elastischen Flüssigkeit in dem angenommenen Zustande gegen gleich große ebene Flächen des Umfanges des Gefäßes nach darauf senkrechten Richtungen von innen nach außen sind gleich groß; gegen ungleich große Flächen aber sind sie diesen **proportional** wie im 7. §. Wenn nähmlich in irgend einem Gefäße des Durchschnittes HE Fig. 1 eine elastische Flüssigkeit ohne Schwere sich eingeschlossen befindet; so sind die Pressungen gegen die ebenen Flächen AB und HG nach darauf senkrechten Richtungen gleich groß, wenn diese Flächen am Flächeninhalte gleich groß sind. Ist aber die Fläche HG $n$mahl größer als AB; so ist auch die Pressung gegen HG $n$mahl größer als gegen AB, oder die erste Pressung verhält sich zur zweyten wie HG zu AB.

§. 53. Fig. 1

Wenn man die Pressungen der in irgend einem Gefäße eingeschlossenen elastischen Flüssigkeit ohne Schwere gegen wie immer ungleich große ebene Flächen durch Gewichte von schweren lothrecht stehenden Wassersäulen auf eben diesen ebenen Flächen als Grundflächen ausdrucket; so haben solche Wassersäulen einerley Höhe, oder die Druckhöhe der Elasticität ist in allen Stellen einerley.

Denn es sey im Gefäße Fig. 1 die Pressung der elastischen Flüssigkeit ohne Schwere von innen nach außen gegen AB $= P$, und gegen HG $= Q$; die Höhe einer schweren Wassersäule auf der Grundfläche AB, die in verticaler Stellung gegen AB die Pressung $= P$ auszuüben vermag, $= a$, und die Höhe einer schweren Wassersäule auf HG, die ebenfalls in verticaler Stellung gegen HG eine Pressung $= Q$ ausübet, $= b$: so ist $P = AB.a.q$, und $Q = HG.b.q$ für das specifische Gewicht des Wassers q. Nun ist $P : Q = AB : HG$ (52. §.), oder $AB.a.q : HG.b.q = AB : HG$; folglich $a : b = 1 : 1$, nähmlich $a = b$.

§. 54.

Wenn das Gefäß Fig. 1, worin eine elastische Flüssigkeit ohne Schwere eingeschlossen ist, bey AB geöffnet, und dafür ein frey beweglicher Stämpel in einer dazu passenden Röhre angebracht wird; so muß im Zustande des Gleichgewichtes ein solcher Stämpel mit einer Kraft P hineinwärts gedrücket werden, die eben so groß ist, als die Pressung der elastischen Flüssigkeit gegen die Stämpelfläche AB.

Denn wäre die Kraft P, womit der Stämpel AB die elastische Flüssigkeit hineinwärts presset, größer als der Elasticitätsdruck der letzteren gegen die Stämpelfläche; so würde die elastische Flüssigkeit sich in einen kleineren Raum zusammenziehen, und der Stämpel sich in seiner Röhre so weit hineinwärts bewegen, bis der Elasticitätsdruck eben so groß würde, als die auf den Stämpel wirkende Kraft.

Wäre

Fig. Wäre im Gegentheile der auf den Stämpel von außen wirkende Druck kleiner als der Elasticitätsdruck von innen gegen die nähmliche Stämpelfläche; so würde der Stämpel sich herauswärts so weit bewegen, und die elastische Flüssigkeit sich in einen größeren Raum so weit ausbreiten, bis der dadurch verminderte Elasticitätsdruck eben so groß würde, als die auf die Stämpelfläche von außen wirkende Kraft. Das Gleichgewicht kann daher nur dann bestehen wenn die zwey erwähnten von innen und von außen gegen einander wirkenden Kräfte gleich sind.

§ 55.

Wenn man die Kraft, womit eine Stämpelfläche gegen eine eingeschlossene elastische Flüssigkeit im Stande des Gleichgewichtes einwärts gedrückt werden muß, durch eine schwere Wassersäule auf der Stämpelfläche als Grundfläche vorstellet, so muß nun (wegen 54. §.) die Höhe einer solchen Wassersäule eben so groß seyn, als die (im 53. §.) erwähnte Druckhöhe der Elasticität. Man hat daher von der Größe der Elasticität einer eingeschlossenen elastischen Flüssigkeit einen ganz bestimmten Begriff, wenn man die Höhe einer schweren Wassersäule weiß, welche durch ihren Druck gegen irgend einen Theil des Umfanges der elastischen Flüssigkeit diese im Gleichgewichte erhält. Zur Ausmessung der Elasticität einer elastischen Flüssigkeit ist nicht unumgänglich nöthig, sondern nur gewöhnlich, bekanntes Wasser zu gebrauchen. Man kann hierzu öfter mit größerem Vortheile eine andere unelastische Flüssigkeit z. B. Quecksilber anwenden.

§. 56.

Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem cylindrischen
3 oder prismatischen Gefäße Fig. 3 von einem auf die Stämpelfläche AB wirkenden Drucke in dem Raume ABCD im Gleichgewichte gehalten wird; und man macht sodann diesen Druck *n*mahl so groß, als er anfänglich war: so ist es zwar aus dem Begriffe der Elasticität ersichtlich, daß der Raum EFCD, in welchen die elastische Flüssigkeit dadurch gebracht und im Gleichgewichte erhalten wird, kleiner werden

den müsse, und daß also die Dichtigkeit der elastischen Flüssigkeit dadurch vermehret werde; jedoch läßt sich das Gesetz, nach welchem die Dichtigkeiten einer elastischen Flüssigkeit bey verschiedenen zusammendrückenden Kräften sich ändern, aus dem bloßen Begriffe der Elasticität nicht ableiten. Es kann eine elastische Flüssigkeit gedacht werden, die durch eine *n*fache Druckhöhe in einen *n*fach kleineren Raum zusammen gepresset wird, wo sodann die Dichtigkeiten bey verschiedenen zusammendrückenden Kräften sich eben so gegen einander verhalten, wie diese zusammendrückenden Kräfte. Allein wenn die Dichtigkeiten einer verschiedentlich gepreßten elastischen Flüssigkeit sich auch anders verhielten, z. B. wie die Quadratwurzeln der zusammendrückenden Kräfte; so könnte dessen ungeachtet eine solche Flüssigkeit vollkommen elastisch seyn. Bey den in der Natur wirklich vorhandenen elastischen Flüssigkeiten wird man daher durch Versuche bestimmen müssen, in welchem Verhältnisse die Dichtigkeiten einer elastischen Flüssigkeit bey verschiedenen zusammendrückenden Kräften stehen.

§. 57.

Der Druck einer elastischen der Schwerkraft überlassenen Flüssigkeit gegen den Boden eines lothrecht stehenden prismatischen Gefäßes, worin solche eingeschlossen gehalten wird, ist dem ganzen Gewichte einer solchen Masse und dem Elasticitätsdrucke der obersten Schichte gleich, den diese durch die Fortpflanzung gegen die Bodenfläche ausübet.

Das prismatische Gefäß ABCD Fig. 19, worin eine elastische schwere Flüssigkeit ganz eingeschlossen ist, sey in unzählige Schichten von einer so kleinen Dicke getheilet, daß man ohne Fehler die Masse in jeder Schichte für gleichförmig dicht halten könne. Nun seyen die eigenthümlichen Gewichte dieser Schichten, wie sie von unten nach oben auf einander folgen, p, q, r, . . . z; so ist das ganze Gewicht aller Schichten, womit der Boden BC gedrückt wird, $= p.$ BCaaB $+ q.$ aabba $+ r.$ bbccb . . . $+ z.$ nnDAn. Ist nun die oberste Schichte nnDAn noch

ela-

Fig. 19 elastisch; so sucht sie sich auszudehnen, und drückt dadurch sowohl gegen den Deckel AD, als auch gegen die zunächst unten befindliche Schichte. Dieser Druck pflanzet sich auch gegen die Bodenfläche BC fort, und muß daher zu dem Gewichte aller Schichten noch hinzugesetzet werden, um den sämmtlichen Druck gegen BC zu erhalten. Wäre aber das Gefäß so hoch, daß sich die elastische Flüssigkeit darin soweit ausgebreitet hätte, bis die oberste Schichte keine ausdehnende Kraft mehr besäße, oder bis ihr Ausdehnungsbestreben nur noch so groß wäre als ihr Gewicht; so wäre zu obiger Summe der Gewichte aller Schichten nichts mehr hinzuzusetzen. Der Druck gegen die Bodenfläche wäre sodann eben so beschaffen, als wenn das Gefäß ABCD mit verschiedenen schweren Schichten unelastischer Flüssigkeiten von den Dichtigkeiten p, q, r, ... z angefüllet wäre.

§. 58.

Die niedriger liegenden Schichten im vorigen 57. §. leiden einen größeren Druck, als die höheren, da jene durch ein größeres darauf drückendes Gewicht gepresset werden als diese. Die niedrigeren Schichten sind daher dichter und elastischer als die oberen. Auch pflanzet sich wegen der Flüssigkeit der Masse der Druck, den jede Schichte leidet, nach jeder Richtung, und folglich auch gegen jeden Theil des Umfanges des Gefäßes fort.

§. 59.

Wenn man im §. 57. die Dicken der Schichten gleich groß annimmt, und jede solche Dicke $= e$ setzet; so sind die Gewichte der von unten auf einander folgenden Schichten, deren jede durch die Fortpflanzung des Druckes eine ihrem Gewichte gleiche Pressung gegen die Bodenfläche ausübet, $= BC.e.p + BC.e.q + BC.e.r... + BC.e.z$ $= BC.e.(p + q + r... + z)$, weil die Durchschnittsflächen BC, aa, bb, &c. alle einander gleich sind.

Wären die horizontalen Durchschnittsflächen BC, aa, bb, cc... verschieden; wäre also das Gefäß nicht prismatisch, sondern wie immer irregulär gestaltet: so wären

die

die Gewichte der von unten auf einander folgenden Schichten, deren jede die unendlich kleine Höhe e hätte, $= BC.e.p + aa.e.q + bb.e.r \ldots$ Daraus folgt der von den Schichten aabb, bbcc, &c. auf BC wirkende fortgepflanzte Druck (wegen 7. §.) $= BC.e.q + BC.e.r +$ &c. (Es verhält sich nähmlich der von dem Gewichte der Schichte aabba gegen BC fortgepflanzte Druck zu dem Gewichte $aa.e.q$ dieser Schichte, womit die Durchschnitts-Ebene aa unmittelbar gedrückt wird, wie die Fläche BC zur Fläche aa). Folglich ist auch in diesem Falle wie ehevor der Druck gegen die Bodenfläche BC wegen der Schwere der elastischen Schichten $= BC\ e.(p + q + r \ldots + z)$, wozu man noch den Elasticitätsdruck, welchen die oberste Schichte durch die Fortpflanzung gegen die Bodenfläche ausübet, hinzusetzen muß, um den sämmtlichen Druck gegen die Bodenfläche zu erhalten. Fig. 19

Wenn daher ein Gefäß, welches eine schwere elastische Flüssikeit eingeschlossen enthält, auch nicht prismatisch, sondern wie immer gestaltet ist; so ist doch der Druck gegen die Bodenfläche eben so beschaffen als in einem prismatischen Gefäße von eben derselben Bodenfläche und lothrechter Höhe.

Und nun ist es auch leicht den fortgepflanzten Druck einer eingeschlossenen schweren elastischen Flüssigkeit gegen jedes gegebene Stück des festen Umfanges des Gefäßes zu beurtheilen. Zu dieser Absicht darf man die eingeschlossene schwere elastische Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichtes so betrachten, wie eine andere in einem solchen Gefäße eingeschlossene unelastische Flüssigkeit, die aus einer unzähligen Menge über einander liegender Schichten von unendlich kleinen Höhen bestünde, wovon jede Schichte ihre eigene Dichtigkeit hätte. Durch diese Erwägung bestimmet man den Druck gegen das gegebene Stück des Umfanges wegen der Schwere einer jeden Schichte nach 15. §. und vermehret solchen um den fortgepflanzten Elasticitätsdruck der obersten Schichte gegen das gegebene Stück des festen Umfanges des Gefäßes. Durch diese Betrachtung kann man

auch

Fig. auch ferners so wie im 20. §. darthun, daß aus allen senkrechten Pressungen der eingeschlossenen schweren elastischen Flüssigkeit gegen den festen Umfang des Gefäßes ein verticaler Druck nach unten entstehe, der dem ganzen Gewichte der eingeschlossenen Flüssigkeit gleich ist.

§. 60.

Erfahrunssätze.

Es gibt wirklich in der Natur eine elastische Flüssigkeit, die wir Luft nennen. Die uns allenthalben umgebende, und alle sonst leere Räume erfüllende Luft ist wirklich eine flüssige, elastische, schwere Masse, welche durch einen dagegen angebrachten Druck eine größere Dichtigkeit und Elasticität, durch Wärme hingegen eine kleinere Dichtigkeit aber eine vermehrte Elasticität erhält. Die ganze, unsere Erde in Gestalt einer mit der Erde concentrischen Kugel umgebende, Luftmasse heißt die Atmosphäre oder der Dunstkreis, weil in ihr die Dünste von der Erde aufsteigen, und aus ihr in Gestalt des Thaues, Nebels, Regens, Schnees und Hagels auf die Erde wieder herabfallen; daher auch die Luft nach der größeren oder geringeren Menge solcher Dünste entweder feucht oder trocken genannt wird.

1) Das Daseyn einer solchen elastischen Flüssigkeit, obschon sie gewisser Massen unsichtbar, eigentlich durchsichtbar ist, kann zwar nicht unmittelbar mittelst des Gesichtes, wohl aber mittelst des Gefühles wahrgenommen werden. Z. B. eine schnelle Bewegung mit der flachen Hand gegen das Gesicht macht uns die Luft fühlbar. Mit jedem Athemzuge ziehen wir die Luft in die Brust, und stoßen sie wieder heraus. Durch das Blasen mit dem Munde, noch mehr aber durch Winde und Stürme offenbaret sich die Luft dem Gefühle und Gehöre. Ohne zu athmen kann kein Thier leben; daher überall, wo Thiere sich aufhalten, auf

den

den höchsten Bergen, und in den tiefsten Gründen, Luft befindlich seyn muß. Auch ist die Luft die flüssige Masse, worin die Wolken schwimmen, und worin ein Luftballen wegen seines geringeren Gewichtes in Vergleichung mit dem Gewichte der verdrängten Luft, so wie ein specifisch leichterer Körper im Wasser, in die Höhe steigt. Fig.

2) Die Elasticität der Luft zeigt eine Lammsblase, die man durch Hineinblasen mit Luft füllet, und hierauf fest zubindet. Dieselbe erhält durch einen gegen den Umfang angebrachten Druck sehr merkliche Gruben, nach aufgehobenem Drucke aber ihre vorige Gestalt wieder. Auch wirkt die elastische Kraft der Luft bey einem Glase, das man umgekehrt, damit die Luft nicht zur Seite entwische, in lothrechter Richtung ins Wasser hineindrücket. Die eingeschlossene Luft wird durch das eintretende Wasser und durch den fortgepflanzten Druck desselben zusammen gedrückt; aber nach aufgehobenem Drucke dehnet sie sich sogleich wieder aus, und treibt das Wasser zurück. Eben dieses zeigen auch die bekannten Cartesischen Teufelchen. Bey diesen presset der auf die Oberfläche des eingeschlossenen Wassers angebrachte Druck durch die Fortpflanzung die in der Höhlung des gläsernen Teufelchens befindliche Luft etwas zusammen, und dadurch dringet in diese Höhlung so viel Wasser hinein, daß sodann das Teufelchen specifisch schwerer als Wasser wird, und in diesem zu Boden sinket. Nach aufgehobenem Drucke gegen die Oberfläche dehnet sich die in der Höhlung des Teufelchens befindliche Luft aus, und treibt von dem durch die kleine Oeffnung eingedrungenen Wasser wieder soviel heraus, daß das Teufelchen specifisch leichter wird als Wasser, und daher in diesem wieder in die Höhe steiget. Eben diese Cartesischen Teufelchen zeigen zugleich die Fortpflanzung des Druckes in einer flüssigen Masse nach allen Richtungen auf eine sehr deutliche Art. Denn der mit dem Finger angebrachte Druck gegen die Oberfläche des in einer engen Flasche eingeschlossenen Wassers pflanzet sich durch die Oeffnung des wie immer gekrümmten Schwänzchens indessen innere Höh-

Fig. lung bis zu der allda im oberen Theile befindlichen Luft fort, und drücket diese etwas zusammen.

3) Die Schwere ist der Luft mit allen übrigen Körpern gemein, und erhält sie bey der Erde, so daß sie mit Beseitigung der Schwere, wodurch sie gegen die Erde gedrückt wird, vermöge ihrer Elasticität sich gänzlich zerstreuen würde. Im folgenden wird auch gezeigt werden, wie man ihr eigenthümliches Gewicht bestimmen könne.

4) Der **Druck** treibt die Lufttheilchen näher zusammen, und bringt eine bestimmte Menge derselben in einen kleineren Raum, oder in einen bestimmten Raum eine größere Menge derselben. Der Druck comprimirt die Luft, wodurch die Dichtigkeit und Elasticität derselben vergrößert wird. Die comprimirte Luft dehnt sich bey aufgehobenem Drucke wieder in ihren vorigen Raum aus, oder dilatirt sich, wodurch ihre vorhergehende vermehrte Dichtigkeit und Elasticität wieder abnimmt. Dieses zeigte schon in 2) das in verkehrter Lage ins Wasser eingetauchte Glas. Auch läßt sich in ein festes mit Luft erfülltes cylindrisches Gefäß ein genau passender Stämpel oder Kolben hineinstoßen, der, sobald der Druck nachläßt, von der sich ausdehnenden Luft zurückgetrieben wird.

5) Die **Wärme** dehnt die Luft in einen größeren Raum aus, und vermehrt ihre Elasticität, so daß sie einer dichteren kalten Luft das Gleichgewicht hält. Dieses zeiget folgender Versuch. Man binde eine schlaffe Lammsblase fest zu, und erwärme sie allmählich auf allen Seiten; so wird die wenige noch darin enthaltene Luft sich sichtbahrlich ausdehnen, und der dichteren aber kälteren äußeren Luft das Gleichgewicht halten. Wäre daher eine Luftmasse in einem Gefäße eingeschlossen, so daß sie sich in keinen größeren Raum ausdehnen könnte; so bliebe bey der Erwärmung ihre Dichtigkeit zwar ungeändert, aber ihr Bestreben sich auszudehnen, das ist, ihr Elasticität, würde immer größer, je mehr man sie erwärmete. Ein Grad der Wärme, der die Luft in einen *n*mahl größeren Raum ausdehnen würde, machete ihre Elasticität *n*mahl größer. Der

Druck

Druck vergrößert die Elasticität der Luft, weil er mehrere Lufttheilchen in einen engeren Raum zusammenbringt; die Wärme aber verstärkt sie, weil sie jedem Lufttheilchen ein größeres Ausdehnungsbestreben ertheilet. Fig.

6) Die Atmosphäre hat die Gestalt einer mit der Erde concentrischen Kugel, und eine von der Erdoberfläche hinaufwärts abnehmende Dichtigkeit und Elasticität.

Denn da die Luft flüssig und gegen den Mittelpunct der Erde schwer ist; so muß sie im Stande des Gleichgewichtes die Erdkugel allenthalben in gleicher Höhe umgeben. Denkt man sich nun die ganze Masse durch lauter concentrische Kugelflächen in Schichten von sehr kleinen Höhen getheilet; so ist die Dichtigkeit und Elasticität in jeder solchen Schichte bey einerley Grad der Wärme desto kleiner, je kleineres Gewicht darauf drücket, das ist je höher eine solche Schichte über der Erde ist. An der äußersten Gränze der Atmosphäre haben die Lufttheilchen von außen keinen Druck mehr zu leiden, und hören auf elastisch zu seyn; oder das Ausdehnungsbestreben der äußersten Schichte der Atmosphäre ist ihrem Bestreben gegen die Erde zu fallen gleich.

7) Die Luft in unserer Atmosphäre ist wohl selten oder vielmehr nie vollkommen rein, sondern in ihren Zwischenräumen mit verschiedenen fremdartigen Theilen, besonders mit wässerigen Dünsten erfüllet, welche schwerlich nach eben dem Verhältnisse ausgebreitet sind, in welchem die Dichtigkeit der reinen Luft von der Erde hinaufwärts abnimmt. Nach der verschiedenen Menge solcher Dünste ist die Luft bald feuchter bald trockener, wodurch auch ihre Dichtigkeit und ihr Gewicht bald größer bald kleiner werden. Die untere Luft wird besonders durch mehrere Dünste dichter, aber dagegen auch durch mehrere Wärme ausgedehnter, so daß eines durch das andere zum Theil aufgehoben wird.

Fig. §. 61.

Die dem Drucke der Atmosphäre auf die Oberfläche des Weltmeeres zugehörige Höhe beträgt ungefähr 32 Paris. Fuß: das ist jede dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzte ebene Fläche im Horizonte des Weltmeeres wird von der schweren und elastischen Flüssigkeit der Atmosphäre nach einer darauf senkrechten Richtung so stark gepresset, als wenn schweres Wasser mit einer lothrechten Höhe von beyläufig 32 Par. Fuß darauf drückete.

Dieser Satz wird durch folgenden Versuch erwiesen.
20 Man nehme Fig. 20 eine gläserne Röhre AB über 28 Paris. Zolle lang, im Durchmesser 2 bis 3 Linien, die oben bey B luftdicht verschlossen, das ist, so zugeschmolzen ist, daß keine Luft eindringen kann, fülle sie mit gereinigtem Quecksilber an, und treibe die zwischen dem Quecksilber sich etwa noch aufhaltenden Luftbläschen mit einem feinen Eisendrathe bey der in die Höhe gerichteten Mündung A gänzlich heraus. Sodann stecke man diese Röhre mit der fest zugehaltenen Mündung A in ein mit Quecksilber angefülltes Gefäß, und öffne darauf die Mündung A; so wird das Quecksilber in der Röhre von B bis D herabsinken, so daß es in einer Höhe CD von etwa 28 Paris Zoll über der Oberfläche MN des Quecksilbers im Gefäße stehen bleibt. Diese Höhe CD des Quecksilbers von beyläufig 28 Paris. Zollen findet statt, wenn der Versuch sehr nahe am Horizonte des Weltmeeres gemacht wird. In Gegenden, welche über den Horizont des Weltmeeres sehr beträchtlich erhöhet sind, ist die erwähnte Höhe CD des stehengebliebenen Quecksilbers um vieles geringer. Auf dem Gotthardsberge in der Erhöhung von beyläufig 1000 Paris. Tois. ist die Quecksilberhöhe CD nur noch ungefähr 21 Paris. Zoll.

Die Ursache, daß das Quecksilber bey dem erwähnten Versuche nahe am Meerhorizonte in einer Höhe von beyläufig 28 Zollen stehen bleibt, ist keine andere, als der von der Atmosphäre auf die Oberfläche des Quecksilbers MN wir-

wirkende, und mittelst der Fortpflanzung durch die Mündung A der Röhre AB aufwärts gerichtete Druck. Zu mehrerer Deutlichkeit denke man in dem Quecksilber die Fortsetzung einer umgebogenen Röhre von A nach R; so steht über R eine schwere Luftsäule bis an die oberste Gränze der Atmosphäre, drückt mittelst ihres Gewichtes auf das Quecksilber in der Röhre, und erhält es in einer Höhe CD im Gleichgewichte, wo das Quecksilber in dem unteren Theile der Röhre CAR für sich im Gleichgewichte ist. Es drückt demnach die Atmosphäre gegen die Fläche CE so stark als eine Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Oeffnung CE, und die Höhe CD = 28 Paris. Zoll ist. Da ferner die Dichtigkeit des Quecksilbers gegen 14mahl größer ist, als die Dichtigkeit des Wassers; so ist eine Wasserhöhe von 14×28 Zoll = $32\frac{2}{3}$ Paris. Fuß mit der erwähnten Quecksilberhöhe von 28 Zoll gleichgültig. Daher ist die dem Drucke der Atmosphäre auf die Oberfläche des Meeres zugehörige Höhe ungefähr gleich 32 Paris. Fuß. Fig. 20

Wenn man den erwähnten Versuch unmittelbar mit Wasser vornimmt; so erhält man das Nähmliche, was die Vergleichung des Quecksilbers mit dem Wasser gab; welches auch durch folgenden Versuch bestätiget werden kann.

Es sey HQ Fig. 21 eine lothrecht stehende Röhre, 21
deren offenes Ende Q in einen mit Wasser angefüllten Behälter MCDN getauchet ist. In einer solchen genau cylindrischen Röhre sey ein genau passender Kolben oder Stämpel befindlich. Wenn man nun den Kolben in die Höhe zieht, so steigt das Wasser in der Röhre so hoch bis es ungefähr 32 Fuß über der Oberfläche des Wassers im Behälter stehen bleibt. Weiter als bis zu dieser Höhe folget es dem Kolben nicht nach, wenn man solchen gleich noch viel höher hinauf zieht. Wenn nähmlich der ehevor im Wasser ganz eingetauchte Kolben, wo sich zwischen seiner unteren Fläche und dem Wasser keine Luft befand, in die Höhe gezogen wird; so entsteht unter demselben ein leerer Raum, in welchen die äußere Luft nicht eindringen kann. Der Druck der Atmosphäre auf die Oberfläche des Wassers

Fig. 21 im Behälter verursachet nun durch seine Fortpflanzung, daß das Wasser durch die Oeffnung Q in die Röhre hineingetrieben, und auf eine solche Höhe gebracht wird, bis der Druck einer solchen erhöheten Wassersäule mit dem Drucke der Atmosphäre im Gleichgewichte ist. Man findet am Horizonte des Weltmeeres diese Höhe von beyläufig 32 Paris. Fuß. Das äußerste Ende der cylindrischen Röhre unter dem Wasserspiegel kann auch in ein enges Röhrchen auslaufen, wie bey den bekannten **Handspritzen**, die sich bey der Hervorziehung des Stämpels aus eben der angeführten Ursache mit Wasser anfüllen. In älteren Zeiten, da man die Eigenschaften der Schwerkraft noch nicht kannte, glaubte man, der **Abscheu der Natur vor dem leeren Raume** (horror vacui) sey die Ursache des Steigens des Wassers in der Röhre bey dem letzt angeführten Versuche. Sobald man wahrnahm, daß dieses Steigen seine Gränzen habe, welche zugleich von den Dichtigkeiten der flüssigen Massen abhingen, erkannte man gar bald die wahre Ursache dieser Erscheinung.

§. 62.

Die zu dem ehevor angeführten Versuche dienende mit Quecksilber gefüllte gläserne Röhre, die in ein Gefäß mit Quecksilber verkehrt hineingesteckt wird, heißt die **Torricellische Röhre**, weil **Johann Evangelista Torricelli** ein Schüler des berühmten Galliläi im Jahre 1643 zuerst diesen Versuch angestellet hat. Auch heißt der leere Raum im obern Theile der Röhre, wozu der äußeren Luft aller Zugang abgeschnitten ist, die **Torricellische Leere**. Die Veranlassung zu dem so folgereichen Torricellischen Versuche gab ein Gärtner zu Florenz, der mittelst einer Pumpenröhre ungefähr wie Fig. 21 das Wasser über 18 Ellen oder über 32 Fuß heben wollte, und nicht konnte.

§. 63.

Schließt man bey dem im 61. §. erwähnten Torricel-
20 lischen Versuche das Gefäß in GF Fig. 20. luftdicht zu, so daß die zwischen MN und GF enthaltene Luft mit der äußern gar keine Gemeinschaft hat, so muß diese eingeschlos-

schlos-

schlossene Luft eben das bewirken, was vorher die ganze Atmosphäre bewirkte; sie muß nähmlich eben der Quecksilbersäule CD wie ehevor, nun zwar nicht mehr durch ihre Schwere, sondern durch ihre Elasticität das Gleichgewicht halten. Würde ferner die so eingeschlossene Luft mehr erwärmet; so würde ihre Elasticität dadurch vergrößert, und das Quecksilber auf eine größere Höhe erhoben werden. Fig. 20

Da übrigens die Luft in einem Zimmer durch mancherley Oeffnungen mit der äußeren in Verbindung ist, so ist sie darin immer so zusammen gedrückt, daß sie mit dem Drucke der äußeren Luft von einer verschiedenen Temperatur im Gleichgewichte steht. Der Torricellische Versuch bleibt daher eben derselbe, er mag in einem gewöhnlich zugemachten Zimmer, oder unter freyem Himmel vorgenommen werden. Im ersten Falle leistet die Luft das durch Elasticität, was sie im zweyten unmittelbar durch ihr Gewicht wirket.

§. 64.

Wird die Toricellische Röhre (62. §.) auf ein lothrechtes Brett befestiget, und mit einer Eintheilung von Zollen und Linien versehen, von der unteren Oberfläche an gezählet, so bekommt sie den Nahmen eines Barometers, eines Instrumentes, wodurch man das Gewicht der Luft finden soll; eigentlich aber findet man nur die Elasticität derselben.

Die Höhe, auf welcher das Quecksilber in der Torricellischen Röhre steht, heißt die Barometerhöhe. Diese ist wegen der von der Oberfläche der Erde abnehmenden Dichtigkeit der atmosphärischen Schichten in verschiedenen Erhöhungen über den Meerhorizont verschieden.

Auch selbst an einem und demselben Orte ist die Barometerhöhe verschiedenen Veränderungen unterworfen, die gegen 2 Zolle betragen, weil verschiedene Umstände, als Feuchtigkeit, Dünste, Luftströme, die Elasticität der Luft verändern können; da denn bald eine kürzere bald eine längere Zeit zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich ist.

Das

Fig. Das arithmetische Mittel zwischen der größten und kleinsten Barometerhöhe, welche an einem und demselben Orte durch längere Zeit wenigstens durch ein Jahr beobachtet worden ist, heißt die mittlere Barometerhöhe desselben Ortes.

Ob die mittlere Barometerhöhe eines und desselben Ortes immer beynahe einerley verbleibe, oder ob sie gewissen Veränderungen unterworfen sey, müssen die Beobachtungen künftiger Zeiten bestimmen. Man will vor wenigen Jahren die Entdeckung gemacht haben, daß zwey gewisse in unserer Atmosphäre vorfindige Luftgattungen in einem gewissen Verhältnisse vermischet, und von einem electrischen Funken entzündet sich in Wasser verwandeln. Wenn nun der Regen, der bey heftigen electrischen Erschütterungen der Atmosphäre gemeiniglich zu fallen pflegt, von der Verwandlung solcher Luftgattungen in Wasser herrühret; und wenn vielleicht mehr Wasser in Gestalt des Regens aus der Atmosphäre auf die Erde fallen sollte, als von dieser an luftförmigen Stoffen hinaufsteigt: so müßte die mittlere Barometerhöhe an einem und demselben Orte von Zeit zu Zeit kleiner werden; im entgegen gesetzten Falle aber zunehmen.

Bey den gewöhnlichsten Barometern ist der offene Theil der gläsernen Röhre umgebogen, und mit einem angeschmolzenen länglichten kugelförmigen Gefäße versehen. Der Querdurchmesser dieser Kugel sollte wenigstens 10 bis 12mahl größer seyn als die innere Weite der Röhre, damit bey einer Veränderung der Barometerhöhe von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll der Stand der Oberfläche des Quecksilbers in der Kugel, als der Anfangspunct des Barometer-Maßstabes, sich nicht merklich ändert. Zu genauen Barometer-Beobachtungen sind die besten die sogenannten Heber-Barometer, bey denen der umgebogene offene Schenkel mit dem längeren oben zugeschmolzenen einerley Weite hat. Bey dergleichen Barometern wird der Anfangspunct der Eintheilung in der Gegend der Mündung des umgebogenen Schenkels angenommen. Dadurch erhält man die Barometerhöhe, wenn man die Abstände beyder Oberflächen des Quecksilbers von dem bemerkten Anfangspuncte zusammen addiret. Um diese bequemer zu erhalten, pflegt man entweder den Maßstab, oder aber die ganze Barometerröhre auf dem Barometerbrette um einige Zolle auf- und abwärts beweglich zu machen, damit man durch eine leichte Verschiebung den Anfangspunct des Barometer-Maßstabes bey einer zu machenden Beobachtung mit der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel in eine Ebene zusammen bringen könne. Fig.

§. 65.

Wenn man die Barometerhöhe an einem bestimmten Orte beobachtet; so läßt sich der Druck, den jede gegebene Fläche von der Atmosphäre in dieser Gegend zu dieser Zeit leidet, leicht berechnen. Findet man z. B. die Barometerhöhe = 28 Wiener Zoll, und das specifische Gewicht des Quecksilbers = 13,600; so ist der Druck auf eine Fläche von einem Wien. Quadratfuß $= 13{,}6 \times 56\frac{3}{8} \times \frac{28}{12} =$ 1789 Wien. Pfund sehr nahe, weil 1 Wien. Kub. Fuß Regenwasser $56\frac{3}{8}$ Wien. Pfund wiegt. An einem hohlen Würfel, dessen jede Seite 1 Fuß beträgt, wird daher bey der Barometerhöhe von 28 Wien. Zoll jede der 6 Seitenflächen mit einer Gewalt von 1789 Wien. Pfund nach einer darauf senkrechten Richtung von der Atmosphäre hineinwärts gedrückt. Daß dessen ungeachtet die Seitenflächen des hohlen Würfels nicht hineingebogen werden, verhindert die von innen nach außen eben so stark wirkende Elasticität der im hohlen Würfel befindlichen Luft. Aus derselben Ursache empfinden wir auch den ungemein großen Druck nicht, den die Atmosphäre von allen Seiten gegen die Oberfläche unseres Körpers ausübet.

§. 66.

Wenn auf eine tropfbare Flüssigkeit die Luft an zwey Stellen drückt, an der einen durch ihr Gewicht, an der andern aber (in einem Gefäße oder sonst eingeschlossen) durch ihre Elasticität; so kann das Gleichgewicht nur in so fern bestehen, als der Druck der Atmosphäre eben so groß ist, wie die Elasticität der eingeschlossenen Luft. Wird die einge-

Fig. geschlossene Luft verdünnet, und dadurch ihre Elasticität vermindert; so wird die tropfbare Flüssigkeit durch den überwiegenden Druck der äußeren Luft in das Gefäß getrieben, und steigt so hoch, bis der senkrechte Druck der aufgestiegenen Säule und die noch übrige Elasticität der etwa noch vorhandenen eingeschlossenen Luft mit dem Drucke der äußeren Luft im Gleichgewichte ist. Das entgegen Gesetzte geschieht, wenn die eingeschlossene Luft verdichtet, oder ihre Elasticität sonst vergrößert wird.

Hierauf gründet sich das Ansaugen einer trinkbaren Flüssigkeit mittelst einer hinein gesteckten Röhre, die Wirkung des Saugens der Kinder, des gewöhnlichen Trinkens, Tabackrauchens, wie auch verschiedener Wasser-Hebmaschinen: als Pumpenkünste, Heber, u. s. w. wovon weiter unten gehandelt werden wird.

§. 67.

Die Dichtigkeit und Elasticität der Luft bey einerley Wärme und Trockenheit ist der zusammen drückenden Kraft proportionirt.

Dieser Satz wird durch folgenden Versuch erwiesen.

22 1) Eine gläserne Röhre ABC Fig. 22 sey dergestalt gebogen, daß beyde Schenkel AD, EC lothrecht seyn; der kürzere Schenkel EC durchaus von gleicher Weite sey etwa 2 bis 3 Linien im Durchmesser, beyläufig 6 Zoll lang, und oben in C inwendig flach zugeschmolzen, oder luftdicht verschraubet; der längere Schenkel AD habe eine Länge von 6 bis 8 Fuß, und sey oben in A offen.

Füllet man nun die untere Krümmung zu einer Zeit, wo sich die Temperatur und Elasticität der Luft nicht merklich ändert, dergestalt mit Quecksilber, daß es sich genau in eine horizontale Ebene PDEQ stellet; so ist die eingeschlossene Luft in EC mit der atmosphärischen im offenen Schenkel auf PD drückenden Luft von einerley Dichtigkeit und Elasticität; folglich mit dieser von einerley Kraft zusammen gedrückt, welche der zu dieser Zeit allda stattfindenden Barometerhöhe $= k$ zukommt.

Schüt-

Schüttet man sodann in A mehreres Quecksilber hinein, daß es im langen Schenkel die Höhe DH $= a$, im kurzen aber die Höhe EF $= b$ über die ehevor bemerkte Horizontallinie DE habe; so wird die Höhe des Quecksilberdruckes, womit nun die Luft in dem Raume CF zusammen gepresset ist, aus $k + a - b$ bestehen, da eh vor die Quecksilberdruckhöhe $= k$ war, als eben dieselbe eingeschlossene Luft den Raum CE ausfüllte. Fig. 22

Durch diesen Versuch findet man immer

$$k : k + a - b = CF : CE$$

das ist die Räume, in welche eine und dieselbe Luft bey übrigens einerley Umständen durch verschiedene zusammen drückende Kräfte gebracht wird, verhalten sich umgekehrt, wie die zusammen drückenden Kräfte.

2) Ferner verhalten sich die Dichtigkeiten einer und derselben Menge Luft, welche durch verschiedene zusammen drückende Kräfte in verschiedene Räume zusammen gepresset wird, umgekehrt wie diese Räume. Wenn nähmlich der Raum CF, in welchen die anfänglich den Raum CE erfüllende Luft nun zusammen gepresset ist, nur $\frac{1}{n}$ des Raumes CE beträgt; so ist die Dichtigkeit der Luft im Raume CF $n$mahl so groß, als sie ehevor im Raume CE war.

Die Dichtigkeiten der Luft bey verschiedenen zusammen drückenden Kräften, übrigens aber einerley Umständen, verhalten sich demnach gerade so wie die zusammen drückenden Kräfte.

3) Da übrigens die zusammen drückenden Kräfte allhier in demjenigen Zustande betrachtet werden, in dem sie bey verschiedenen Dichtigkeiten einer und derselben Luft den damit verbundenen Elasticitäten das Gleichgewicht halten; so verhalten sich auch die elastischen Kräfte einer und derselben Luft bey verschiedenen Zusammenpressungen, doch übrigens einerley Umständen, gerade wie die Dichtigkeiten dieser verschiedentlich zusammen gepreßten

Luft.

Fig. 22 Luft. Wird nähmlich eine Luftmenge bey einerley Wärme und Trockenheit durch Zusammenpressung $n$mahl dichter; so wird auch ihre Elasticität $n$mahl größer als im vorigen Zustande.

Es ist daher aus dem angeführten Versuche erwiesen, daß die Dichtigkeit und Elasticität der atmosphärischen Luft, bey einerley Wärme und Trockenheit, der zusammen drückenden Kraft proportional ist.

Anmerkung. Mariotte, ein französischer Naturforscher, stellte diesen Versuch zuerst an, und entdeckte das angeführte Verhältniß, welches man auch daher das Mariottische Gesetz der Luftelasticität nennt.

Wenn nähmlich CE = 12 Zoll, k = 28 Zoll war; so fand er

$$\text{für}\begin{cases} a = \text{DH} = 18;\quad 34;\quad 93 \text{ Zoll} \\ b = \text{EF} = 4;\quad 6;\quad 9 \end{cases}$$

$$\text{den Raum CF} = 8;\quad 6;\quad 3;$$

wo die Proportionen statt finden

$$28 : 28 + 18 - 4 = 8 : 12;\ \text{nähmlich}\ 28 : 42 = 8 : 12$$
$$28 : 28 + 34 - 6 = 6 : 12 \qquad 28 : 56 = 6 : 12$$
$$28 : 28 + 93 - 9 = 3 : 12 \qquad 28 : 112 = 3 : 12$$

Nach Mariotte hat man diesen Versuch vielfältig wiederhohlet, und das angeführte Gesetz bey einer 8fachen Verdichtung der Luft noch immer zutreffend befunden.

§. 68.

Das angeführte Mariottische Gesetz (§. 67.) findet auch bey den Verdünnungen der Luft statt; wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann.

23 Eine durchaus gleichweite gläserne Röhre AB Fig. 23 etwa 3 bis 4 Linien weit, in A anfänglich verschlossen, in B offen, werde bis D mit Quecksilber angefüllet, hierauf in B mittelst einer genau passenden Schraube, oder sonst mittelst einer schicklichen Verkittung luftdicht verschlossen, und sodann in ein hinlänglich weites Gefäß mit Quecksilber so ge-

gestecket, daß CB $= b$ hervorraget. Wird nun die Röhre in A geöffnet; so wird die in dem Raume DB $= a$ befindliche Luft, deren Elasticität dem Drucke der äußeren Luft bey einerley Temperatur das Gleichgewicht hält, und durch die zu dieser Zeit allda statt findende Barometerhöhe gegeben ist, das Quecksilber bis H herabtreiben, und sich in dem Raume BH $= y$ soweit verbreiten, bis der äußere Druck der Atmosphäre mittelst der Fortpflanzung sowohl der Quecksilbersäule CH $= b - y$, als auch der Elasticität der in BH verbreiteten Luft zusammengenommen, das Gleichgewicht hält. Fig. 23

Ist nun die zu dieser Zeit an dem Orte des Versuches statt findende Barometerhöhe $= k$, welche mit dem Drucke der äußeren Luft, folglich auch mit der Elasticität der anfänglich in DB eingeschlossenen Luft im Gleichgewichte ist; und man setzt die Höhe einer Quecksilbersäule $= e$, welche mit der Elasticität der nun verdünnten im Raume BH verbreiteten Luft das Gleichgewicht halten könnte: so findet man, wenn das Mariottische Gesetz auch hier bey der Verdünnung der Luft richtig ist,) diese Höhe e durch folgende Proportion

$$\text{BH } (y : \text{BD } (a = k : e, \text{ nähmlich } e = \frac{ak}{y}.$$

Der äußere Druck der Atmosphäre ist demnach hier mit der Quecksilbersäule CH $= b - y$ sammt der Elasticität $\frac{ak}{y}$ der in BH verbreiteten Luft im Gleichgewichte;

$$\text{folglich ist } b - y + \frac{ak}{y} = k.$$

Dieses gibt die quadratische Gleichung

$y^2 - (b - k)\, y = ak$; und endlich

$y = \frac{1}{2}(b - k) + \sqrt{(ak + \frac{1}{4}(b - k)^2)} = \text{BH}.$

Hieraus folgt nun auch die Höhe der in der Röhre stehen gebliebenen Quecksilbersäule

$b - y = \frac{1}{2}(b + k) - \sqrt{(ak + \frac{1}{4}(b - k)^2)} = \text{CH}.$

Bey

Fig. 23 Bey sorgfältig angestellten Versuchen, wo man alles immer in einerley Temperatur zu erhalten trachten muß, stimmen nun die Erfolge immer mit der angegebenen Berechnung überein; daher findet das angeführte Mariottische Gesetz auch bey den Verdünnungen der Luft statt.

Z. B. für $k = 28$, $b = 30$, $a = 2\frac{1}{4}$ Zoll findet man $y = BH = 9$, und $CH = 21$ Zoll.

Dergleichen Versuche sind vielfältig bey verschiedenen Veränderungen der Luft, von den französischen Gelehrten **Bouguer** und **Condamine** auch auf den höchsten Gebirgen in Amerika, wo die Barometerhöhe nur 16 Zoll war, angestellet worden; und man hat das erwähnte Mariottische Gesetz überall bestätiget gefunden.

Anmerkung. Der letzte Versuch läßt sich auf eine leichtere Weise auch so anstellen, daß man eine durchaus gleichweite Glasröhre wie beym Torricellischen Versuche (62. §.) nur zum Theil mit Quecksilber füllet, und darüber in einer festgesetzten Länge $= a$ die Luft stehen läßt; dann die Oeffnung mit dem Finger fest zu hält, die Röhre sodann umkehret, und die Luft in das andere Ende der Röhre gänzlich hinaufsteigen läßt; hierauf die mit dem Finger geschlossene Oeffnung der Röhre in das Gefäß mit Quecksilber einsetzt, den Finger wegzieht, und die aus dem Quecksilber lothrecht hervorragende Höhe der Röhre $CB = b$, wie auch die Länge $BH = y$ merket. In dieser Länge y ist nun die eingeschlossene Luft verbreitet, und hält mit der noch beyhabenden Elastieität und mit der stehen gebliebenen Quecksilbersäule $b - y$ dem Drucke der Atmosphäre, oder der zu dieser Zeit allda statt findenden Barometerhöhe $= k$ das Gleichgewicht. Bey diesem Versuche bestimmet man mit eben derselben Röhre und mit demselben Quecksilber die Barometerhöhe k, welche zu dieser Zeit Statt findet.

Soll im letzten Versuche die in BH verbreitete Luft $n$mahl dünner werden, als sie ehevor in BD war; so setze man $y = na$, bringe diesen Werth in die obige Gleichung, und suche daraus $a = BD$: so findet man

$$a = \frac{k + n(b - k)}{n^*}.$$ Fig. 23

Z. B. für $n = 4$, $k = 28$, $b = 30$ Zoll, ist $a = 2\frac{1}{4}$ Zoll $=$ BD wie ehevor.

§. 69.

Aus dem angeführten Mariottischen Gesetze (67. §.) läßt sich nun darthun, daß bey einerley Wärme an verschiedenen in arithmetischer Progression auf einander folgenden Erhöhungen über einem beliebigen Horizonte die Dichtigkeiten und Elasticitäten der atmosphärischen Luft, sowie auch die dazu gehörigen Barometerhöhen in einer geometrischen Progression abnehmen; und daß man aus den gleichzeitigen Beobachtungen der Barometerhöhen an verschiedenen Erhöhungen, oder auch aus den bekannten mittleren Barometerhöhen verschiedener Orte deren Höhenunterschiede finden könne. Dieses ist im 2ten Theile meiner mathem. Vorles. in den Anfangsgründen der practischen Meßkunst umständlich gezeigt worden, und kann hier nachgelesen werden. Indessen wird es nicht überflüssig seyn, dieselben Wahrheiten auf eine kürzere Art mittelst der Infinitesimal-Rechnung abzuleiten; und zwar auf folgende Art.

1) Es seyen A, C, Fig. 24 zwey Orte in verschiedenen Erhöhungen über eben demselben Horizonte; die zu A, C, zugehörigen Barometerhöhen bey einerley Temperatur seyen a, c; die Dichtigkeit aber, oder das eigenthümliche Gewicht der Luft bey A verhalte sich zum eigenthümlichen Gewichte des Quecksilbers wie 1 zu α (nähmlich das eigenthümliche Gewicht der Luft bey A sey $= \frac{1}{\alpha}$ für das eigenthümliche Gewicht des Quecksilbers $= 1$); so ist bey einerley Temperatur die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht der Luft an C nach dem Mariottischen Gesetze $= \frac{c}{\alpha a}$. 24

2) Die Erhöhung AC sey $= x$, und CD $= dx$ unendlich klein; so kann die Luft in dieser Schichte von der

Di-

Fig. 24 Dicke dx für gleichförmig dicht angesehen werden. Die Veränderung, um welche die Barometerhöhe von C bis D abnimmt, sey dc; so kann dc auf folgende Art ausgedrückt werden. Eine Quecksilbersäule von der Höhe dc ist mit einer gleichförmig dichten Luftsäule von der Höhe dx, wie in vereinigten Röhren zwey schwere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten, im Gleichgewichte; deßwegen verhalten sich (wegen §. 18.) die Höhen dc und dx verkehrt wie die eigenthümlichen Gewichte der Luft in der Schichte CD, und des Quecksilbers, nähmlich $dc : dx = \frac{c}{\alpha a} : 1$; und daher $dc = \frac{c dx}{\alpha a}$; oder eigentlich $dc = - \frac{c dx}{\alpha a}$ weil c abnimmt, wenn x wächst.

3) Aus der letzten Gleichung folgt ferner

$$\int dx = - \alpha a . \frac{\int dc}{c} + \text{Const.}$$ nähmlich

$$x = - \alpha a . \text{lognat} . c + \text{Const.}$$

Nun ist für $x = 0$ die Barometerhöhe $c = a$; folglich $\text{Const.} = \alpha a . \text{lognat } a$; und $x = \alpha a . \text{lognat} \frac{a}{c}$

4) Die letzte Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{x}{\alpha a} . 1 = \text{lognat} \frac{a}{c}, \frac{x}{\alpha a} . \text{lognat } h = \text{lognat} \frac{a}{c}, \text{ und}$$

$$h^{\frac{x}{\alpha a}} = \frac{a}{c}$$ für die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems $= h$.

Und daraus folgt $c = \frac{a}{h^{\frac{x}{\alpha a}}}$; woraus es zu ersehen ist, daß an verschiedenen in einer arithmetischen Progression auf einander folgenden Erhöhungen x über einen und denselben Horizont bey einerley Tempera-

tur

nur die dazu gehörigen Barometerhöhen in einer geo= metrischen Progression abnehmen. Fig. 24

5) Es sey die Erhöhung AB $= B$ gemessen, und an B die Barometerhöhe $= b$ beobachtet;

so ist wegen 3) $B = \alpha a . \text{lognat} \frac{a}{b}$;

und daraus folgt $\alpha = \frac{B}{a \text{ lognat} (a : b)}$.

6) Man setze den Werth 5) in 3), so ist

$$x = \frac{B . \text{lognat.} (a : c)}{\text{lognat} (a : b)}; \text{ oder auch } x = \frac{B . \text{log. vulg.} (a : c)}{\text{log. vulg.} (a : b)}.$$

7) Man findet durch Vergleichung mehrerer Beobachtungen, daß am Meerhorizonte die mittlere Barometerhöhe $a = 345$ Wien. Duodec. Linien ist; und daß in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wien. Klaft. über den Meerhorizont die Barometerhöhe um 2 Wien. Duod. Linien abnimmt, also in dieser Erhöhung nur 343 Wiener Linien gleich ist.

Setzt man nun in 6) $a = 345$, $b = 343$ Lin. und $B = 25\frac{1}{4}$ Klaft.; so ist die Erhöhung eines Ortes C, dessen mittlere Barometerhöhe c Lin. beträgt, über die Meeresfläche

$$x = \frac{25\frac{1}{4} . \log . (345 : c)}{\log . (345 : 343)} = 10000 . (\log 345 - \log c)$$

Wien. Klafter.

Und eben so ist die Erhöhung x' eines anderen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometerhöhe c' W. L. beträgt,

$x' = 10000 . (\log 345 - \log c')$ W. K.

Es ist also auch

$$\begin{aligned} x' - x &= 10000 . (\log 345 - \log c') \\ &\quad - 10000 . (\log 345 - \log c) \\ &= 10000 . (\log c - \log c') \text{ W. K.} \end{aligned}$$

oder wenn man den Höhenunterschied zweyer Oerter

Fig. 24 $x' - x = y$, und die dazu gehörigen Barometerhöhen a, b setzet so ist

$$y = 10000\,(\log a - \log b)\ \text{W. Klaft.}$$

8) Mittelst der Formel $\alpha = \dfrac{B}{a(\operatorname{lognat} a - \operatorname{lognat} b)}$ in 5) läßt sich aus dem Höhenunterschiede B, zweyer Oerter A, B, und aus den dazu gehörigen mittleren Barometerhöhen a, b, die Dichtigkeit der Luft α am Orte A berechnen, wo der Zähler B und der Coefficient a des Nenners in einerley Maß ausgedruckt seyn müssen. Z. B.

Die Höhe des Berges Pico auf der Insel Teneriffa beträgt 13158 Par. Fuß $= B$; die Barometerhöhe am Fuße dieses Berges fand man durch Beobachtungen 334 Par Lin. $= \frac{167}{72}$ Fuß $= a$, und zur nähmlichen Zeit am Gipfel des Berges die Barometerhöhe 209 Par. Lin. $= b$; daraus folget die Dichtigkeit der Luft am Fuße des Berges Pico in Hinsicht auf das Quecksilber.

$$\alpha = \frac{13158 \times 72}{167 \,.\, (\operatorname{lognat} 334 - \operatorname{lognat} 209)}$$

$$= \frac{13158 \times 72}{167 \times 0{,}4688067} = 12100.$$

Da ferner die Dichtigkeit des Quecksilbers, wie es gewöhnlich zu Barometern verwendet zu werden pflegt, beyläufig 13,6mahl so groß seyn dürfte, als die Dichtigkeit des Regenwassers; so ist die Luft am Fuße des Berges Pico 889 mahl dünner oder specifisch leichter als Regenwasser.

9) Aus der Formel 7) $y = 10000\,(\log a - \log b)$ folgt $\log a = \log b + 0{,}0001\,y$;
und $\log b = \log a - 0{,}0001\,y$.

Aus dem in W. Klft. gegebenen Höhenunterschiede y zweyer Oerter, und aus der Barometerhöhe des einen Ortes läßt sich daher die Barometerhöhe des anderen Ortes bestimmen.

10)

10) Die letzte Gleichung kann man auch so schreiben Fig.

$$\log \text{vulg}\ \frac{a}{b} = 0{,}0001\,y,\ \text{und}$$

$$\log \text{nat}\ \frac{a}{b} = 0{,}0002302585\,y\,;$$

daraus folgt für die Grundzahl h des natürlichen logarithmischen Systems

$$\frac{a}{b} = h^{0{,}0002302585\,y}$$

11) Da übrigens bey einerley Temperatur die mit den Barometerhöhen a, b zustimmenden Dichtigkeiten der Luft α, β, sich wie die Barometerhöhen verhalten; so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}\text{; und daher auch } \frac{\alpha}{\beta} = h^{0{,}0002302585\,y}\,;$$

daraus folgt

$$\alpha = \beta\,.\,h^{0{,}0002302585\,y} \quad \text{und } \beta = \alpha\,.\,h^{-0{,}0002302585\,y}\,.$$

Mann kann daher aus dem in W. Klaft. gegebenen Höhenunterschiede y zweyer Oerter, und aus der Dichtigkeit der Luft an einem dieser zwey Oerter, die Dichtigkeit der Luft am anderen Orte bey einerley Temperatur berechnen.

Fig.

II. Abschnitt.

Von der Luftpumpe, und von einigen anderen aerometrischen Werkzeugen.

§. 70.

Die Wirkungen des Druckes der Luft durch ihr Gewicht und durch ihre Elasticität hat man insbesondere mittelst der Luftpumpe kennen gelernet. Die Luftpumpe ist ein Werkzeug, wodurch man die Luft in einem Gefäße verdünnen und verdichten kann.

Zur Structur einer Luftpumpe gehören folgende wesentliche Theile. Fig. 25.

25 1) Ein hohler metallener Cylinder, der Stiefel AB mit einem genau passenden Stämpel oder Kolben C, der mittelst der Kolbenstange CD in dem Stiefel durch eine mechanische Vorrichtung sich hinauf und hinunter bewegen läßt, und am Boden des Stiefels so genau als möglich anschließt.

2) Eine vom Boden des Stiefels B ausgehende, und am anderen Ende in die Höhe gekehrte Verbindungsröhre PHF.

3) Ein metallener recht eben abgeschliffener Teller TL mit einer Oeffnung in der Mitte, wodurch solcher an das Ende F der Verbindungsröhre fest angeschraubet, und mit einem nassen Leder belegt wird.

4) Der Recipient, gewöhnlich eine gläserne Glocke, deren unterer Rand recht eben abgeschliffen ist; damit solcher an den Teller mittelst des zwischen liegenden feucht gemachten Leders recht gut anschließe. Anstatt der Glocke wird zuweilen an die Oeffnung F der Verbindungsröhre ein me-

metallenes Gefäß mit einem engen Halse, durch den ein gera- Fig.
de durchbohrter Wirbel oder Hahn geht, fest angeschrau- 25
bet.

5) Der Hahn oder Wirbel P mit einem conischen wohl abgeschmiergelten Zapfen in der Verbindungsröhre, welcher auf zweyerley Art senkrecht auf seine Achse über einander durchgebohret ist. Einmahl geradlinig, daß nur ein Weg durch ihn aus dem Recipienten in den Stiefel geht. Zweytens schiefwinkelig, so daß nur ein Weg durch ihn aus freyer Luft in die Verbindungsröhre einmahl nach F in den Recipienten, ein anderes Mahl bey dazu gehöriger Drehung nach C in den Stiefel geht. Dabey muß auch bey gehöriger Drehung des Wirbels die Verbindung zwischen dem Stiefel und Recipienten gänzlich gesperret werden können.

§. 71.

Der Gebrauch der Luftpumpe zur Verdünnung der Luft erfordert folgende Arbeiten.

1) Man stelle den Hahn P so, daß der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen sey, und stoße den Kolben bis an den Boden B des Stiefels.

2) Darauf drehe man den Hahn P so, daß der Weg vom Recipienten in den Sicfel offen sey, und ziehe den Kolben bis gegen A herauf; so wird die Luft im Recipienten sich ausbreiten, und zugleich den Raum des Stiefels ausfüllen, folglich sich verdünnen. Nun stelle man den Hahn P wieder so, daß nur der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen sey, und stoße abermahl den Kolben bis an den Boden des Stiefels; so wird die aus dem Recipienten in den Stiefel eingedrungene Luft hinausgetrieben. Hierauf drehet man wieder den Hahn P so, daß der Weg vom Recipienten in den Stiefel offen sey, und zieht den Kolben abermahl bis A herauf, damit die im Recipienten befindliche schon etwas verdünnte Luft vermöge ihrer Elasticität zum Theil in den Stiefel trete, und sich dadurch noch mehr verdünne.

Das einmahlige Einstoßen und Aufziehen des Kolbens auf die erwähnte Art heißt eine Auspumpung; wodurch

Fig. 25 die Luft im Recipienten im Verhältniße des Raums des Recipienten bis zum Hahne P zur Summe der Räume des Recipienten und des Kolbenzuges sammt der Verbindungsröhre verdünnet worden ist. Durch eine zweyte Auspumpung wird diese verdünnte Luft abermahls verdünnet. So wird nach wiederhohlten Auspumpungen die Luft im Recipienten immer dünner. Dabey erhält der Druck der äußeren Luft auf den Recipienten das Uebergewicht über den Elasticitätsdruck der eingeschlossenen verdünnten Luft; und drücket dadurch den Recipienten, wenn solcher eine Glocke ist, immer stärker gegen den Teller an. Wenn die Luft durch das Auspumpen gänzlich herausgebracht werden könnte; so wäre der Druck der Glocke gegen den Teller so groß, als das Gewicht einer Quecksilbersäule auf der Grundfläche der Glocke von der Länge der damahls statt findenden Barometerhöhe. Die obere Wölbung der Glocke hat auf den Druck gegen den Teller keinen Einfluß, trägt aber dazu bey, daß sie dem Drucke der Atmosphäre um so leichter wiedersteht.

§. 72.

Der Gebrauch der Luftpumpe zur Verdichtung der Luft besteht im folgenden.

1) Bey dem gänzlich hineingestoßenen Kolben stelle man den Hahn P so, daß der Weg aus freyer Luft in den Recipienten offen sey; so wird die Luft darin mit der atmosphärischen in einerley Zustande seyn.

2) Darauf drehe man den Hahn so, daß der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen sey, und ziehe den Kolben vom Boden B des Stiefels bis A heran, so wird die atmosphärische Luft den Stiefel anfüllen.

3) Nun stelle man den Hahn P so, daß der Weg aus dem Stiefel in den Recipienten offen sey, und stoße den Kolben von A bis an den Boden B hinein; so wird die Luft aus dem Stiefel in den Recipienten hineingetrieben, und kommt zu der darin schon befindlichen hinzu, welche dadurch verdichtet wird. Dieses einmahlige Aufziehen und Einstoßen des Kolbens heißt eine Compression

der

der Luft. Dadurch wird die Luft in dem an die Verbindungsröhre bey F angeschraubten Recipienten im Verhältnisse des Raumes des Recipienten zur Summe des Raumes des Recipienten und Stiefels verdichtet. Fig. 25

4) Stellet man sodann den Hahn P wieder so, daß nur der Weg aus freyer Luft in den Stiefel offen sey, ziehet den Kolben auf, öffnet mittelst gehöriger Drehung des Hahns die Verbindung zwischen dem Recipienten und Stiefel; und stößt sodann den Kolben bis an den Boden des Stiefels; so wird die in den Stiefel eingetretene atmosphärische Luft abermahl zu der im Recipienten befindlichen schon etwas verdichteten Luft hineingetrieben, und auf diese Art noch mehr verdichtet. Durch dergleichen öfter wiederhohlte Compressionen kann immer mehr und mehr Luft in den Recipienten hineingetrieben, und darin verdichtet werden.

5) Will man die verdichtete, oder die nach dem vorigen Verfahren verdünnte Luft in dem aufgeschraubten Gefäße zu irgend einem anderen Gebrauche aufbewahren; so muß der Hals des Gefäßes, ehe solches von der Verbindungsröhre abgenommen wird, mittelst des daran befindlichen Hahnes geschlossen werden.

§. 73.

Anstatt des Hahnes P in der Verbindungsröhre dienen auch ein Paar Klappen oder Ventile, die so eingerichtet sind, daß ein Druck von einer Seite die Klappe öffnet, ein Druck von der anderen Seite aber sie nur desto fester verschließt. Ein Ventil ist im Boden des Stiefels, um die Luft aus dem Recipienten in den Stiefel durchzulassen, wenn der Kolben aufgezogen wird. Das andere Ventil ist im Kolben, wodurch die im Stiefel befindliche Luft beym Niederstoßen des Kolbens ins Freye heraus geht. Diese Vorrichtung dienet zur Verdünnung der Luft. Um die äußere Luft wieder unter die Glocke zu lassen, ist die Verbindungsröhre wie ehevor mit einem Hahne P versehen, den man bloß zu diesem Ende öffnet.

Soll eine Luftpumpe mit Ventilen zur Verdichtung der Luft dienen; so haben die Ventile die umgekehrte Lage.

Auch

Fig. Auch kann alsdann das Ventil im Kolben wegfallen, und statt dessen ein Loch im Stiefel oben bey G gebohrt seyn, wodurch die äußere Luft eindringet, wenn der Kolben so hoch aufgezogen wird, bis seine Grundfläche dieses Loch erreichet.

Von den mancherley Einrichtungen, die man den Luftpumpen zu geben pflegt, damit man mit solchen die Luft sowohl verdünnen als verdichten kann, von der näheren Beschreibung und Abbildung des Kolbens, der Hähne, Ventile, von dem zur Bewegung des Kolbens dienenden Mechanismus, und von sonstigen dazu gehörigen Geräthschaften muß man umständliche Nachrichten in ausführlichen Lehrbüchern der Naturlehre, und in eigenen Beschreibungen solcher Luftpumpen nachschlagen.

Der erste Erfinder der Luftpumpe war Otto von Guericke, Bürgermeister zu Magdeburg, der im Jahre 1654 zu Regensburg in Gegenwart Kaisers Ferdinand III. und vieler Reichsfürsten mit seiner Luftpumpe verschiedene Experimente machte. Darauf wurde diese Erfindung bald allgemein bekannt, und die Luftpumpe erhielt nach und nach verschiedene Abänderungen, und Verbesserungen.

§. 74.

Zu den Luftpumpen gehöret auch die **Windbüchse**, ein Flintenlauf mit einem Recipienten, die **Windflasche** genannt, worin die Luft mittelst einer **Druckpumpe** stark verdichtet wird. Durch das Niederschlagen des Hahnes wird das Ventil des Recipienten geöffnet, aber durch eine inwendig angebrachte Feder sogleich wieder verschlossen; wodurch die inzwischen aus dem Recipienten in den Flintenlauf eingedrungene Luft die im letzteren befindliche Kugel mit großer Geschwindigkeit hinaustreibt.

§. 75.

Aufgabe.

Nach einer gegebenen Zahl der Auspumpungen zu finden, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdün-

dünnet sey; vorausgesezt, daß die Luft sich jedes Fig.
Mahl im Stiefel gleichförmig ausbreite, keine neue von
außen eindringe, und die noch eingeschlossene durch Wär-
me und Feuchtigkeit sich nicht ändere.

Auflösung.

Die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Recipienten sey $= \Delta$, die mit der atmosphärischen zu dieser Zeit einerley ist; nach einer Anzahl von n Auspumpungen sey die Dichtigkeit der Luft im Recipienten $= \delta$; der kubische Inhalt des Recipienten und der Verbindungsröhre bis zum Hahne sey $= A$; der kubische Inhalt aber der übrigen Verbindungsröhre und des Stiefels bis zum höchsten Stande des Kolbens sey $= a$; so ist

$$\frac{\Delta}{\delta} = \left(1 + \frac{a}{A}\right)^n .$$

Denn nach einer jeden Auspumpung breitet sich die Luft aus dem Raume A in den Raum $A + a$ aus, und wird im Verhältnisse dieser Räume verdünnet: es verhält sich nähmlich nach einer jeden Auspumpung die Dichtigkeit x der Luft nach der Auspumpung zu der Dichtigkeit D vor dieser Auspumpung, wie der Raum A zum Raume $A + a$, das ist

$$x : D = A : A + a; \text{ folglich } x = D. \frac{A}{A+a}.$$

Nun ist die Dichtigkeit D vor der ersten Auspumpung $= \Delta$; folglich ist solche nach der ersten oder zunächst vor der zweyten Auspumpung $x = \Delta . \frac{A}{A+a}$.

Ferner setze man $D = \Delta . \frac{A}{A+a}$ in voriger Formel, so ist die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach der 2ten Auspumpung $x = \Delta . \left(\frac{A}{A+a}\right)^2$. Eben so ist für $D = \Delta \left(\frac{A}{A+a}\right)^2$

die

Fig. die Dichtigkeit der Luft nach der 3ten Auspumpung = $\Delta.(\frac{A}{A+a})^3$; und folglich nach der *n*ten Auspumpung $\delta = \Delta.(\frac{A}{A+a})^n$; das ist $\frac{\Delta}{\delta} = (1 + \frac{a}{A})^n$.

§. 76.

Aus der letzten Formel folget.

$$1)\quad \log \frac{\Delta}{\delta} = n.[\log(A+a) - \log A]$$

$$2)\quad n = \frac{\log \Delta - \log \delta}{\log(A+a) - \log A}$$

$$3)\quad \frac{a}{A} = -1 + \sqrt[n]{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

Durch 1) findet man den Grad der Verdünnung $\frac{\Delta}{\delta}$, wenn die Räume A, a (welche man mittelst Anfüllung und Abwägung des Wassers bestimmen kann) und die Zahl n der Auspumpungen gegeben sind. Durch 2) kann man die Zahl der Auspumpungen n aus dem Grade der Verdünnung $\frac{\Delta}{\delta}$, und aus den Räumen A, a; und endlich durch 3) das Verhältniß der Räume A, a aus n, und aus $\frac{\Delta}{\delta}$ finden.

Z. B. Die Luft soll 100mahl dünner werden, und der Raum A des Ricipienten ist 4mahl größer als der Raum a des Stiefes; so ist $\Delta = 100$, $\delta = 1$, $A = 4$, $a = 1$; folglich nach 2) $n = \frac{2}{0,09691} = 20$ bis 21 Auspumpungen.

Mit

Mit einer wohl eingerichteten Luftpumpe kann man die Luft im Recipienten immer mehr und mehr verdünnen; man kann aber doch den Recipienten niemahls dadurch vollkommen luftleer machen, welches auch die Formel 2) für $\Delta = 1$, und $\delta = 0$ anzeiget. Das Guerikische Leere ist niemahls so rein als das Torricellische bey einem gut ausgekochten Barometer. Fig.

§. 77.

Aufgabe.

Nach einer gegebenen Zahl der Compressionen zu finden, wie vielmahl die Luft im Recipienten verdichtet sey; vorausgesetzt, daß die Luft aus dem Stiefel jedesmahl ganz in den Recipienten getrieben wird, und daraus nichts davon entwischen kann.

Auflösung.

Bedeuten A und a die Raumsinhalte des Recipienten und des Stiefels wie zuvor; Δ, δ aber die Dichtigkeiten der Luft im Recipienten im Anfange und nach n Compressionen, so ist

$$\frac{\delta}{\Delta} = 1 + \frac{na}{A}.$$

Denn nach einer jeden Compression wird die Luft aus dem Raume a zu der Luft im Raume A hinzugefüget, und darin im Verhältnisse des Raumes A zu $A + a$ verdichtet. Nach n Compressionen wird daher zu der anfänglich in A befindlichen Luft A von der Dichtigkeit Δ aus dem Raume a die Luft a von eben derselben Dichtigkeit $n$mahl hinzugefüget. Das ist: die Menge der Luft im Recipienten vor der ersten Compression verhält sich zu der Menge in eben diesem Recipienten nach n Compressionen wie $A : A + na$. Nun aber verhalten sich die Dichtigkeiten Δ, Fig. δ bey einerley Raumsinhalte des Recipienten, wie die angeführten Mengen der Luft. Folglich $\Delta : \delta = A : A + na$. Daraus folgt

$$1)\ \frac{\delta}{\Delta} = 1 + \frac{na}{A}$$

$$2)\ n = \frac{A}{a}\left(\frac{\delta}{\Delta} - 1\right)$$

$$3)\ \frac{a}{A} = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta}{\Delta} - 1\right)$$

Durch 1) findet man den Grad der Verdichtung für gegebene A, a, und n; durch 2) die Zahl der Compressionen für einen gegebenen Grad der Verdichtung; und endlich durch 3) aus $\frac{\delta}{\Delta}$ und aus n das Verhältniß der Räume a zu A.

§. 78.

Die angeführten Rechnungen (§. 75 und 77.) kann man nicht jederzeit mit völliger Sicherheit anwenden, weil die dabey angenommenen Voraussetzungen nie völlig genau eintreffen, und weil die dazu nöthigen Abmessungen nicht jederzeit hinlänglich genau bestimmet werden können. Deßwegen hat man eigene Instrumente erdacht, wodurch man den Grad der Verdünnung oder Verdichtung der Luft im Recipienten einer Luftpumpe beurtheilen kann.

Hierzu dienet 1) eine gläserne Barometer-Röhre von gehöriger Länge. Sie geht mit ihrem oberen offenen Ende luftdicht durch den Teller der Luftpumpe unter die Glocke, mit dem unteren ebenfalls offenen Ende aber in ein Gefäß mit Quecksilber, oder ist hier mit einer angeblasenen Kugel umgebogen, und mit Quecksilber gefüllet. Diese Vorrichtung dienet die Verdünnnng der Luft unter der Glocke anzuzeigen. Je mehr nähmlich die Luft unter der Glocke mittelst der Luftpumpe verdünnet wird, je höher wird das Quecksilber aus dem unteren Gefäße in den Schenkel hinauf aufsteigen. Es wird aber doch nie die zur Zeit des gemachten Versuches statt findende Barometerhöhe völlig erreichen, weil man mittelst der Luftpumpe kein genaues Luftleere zu wege bringen kann. Dieser Elasticitätszeiger scheint vor anderen deßhalb Vorzüge zu haben, weil dadurch gleich vom Anfange die Grade der Verdünnung der Luft beurtheilet werden können; und weil die Luft, die sich etwa aus dem Quecksilber entwickelt, hierbei nicht nachtheilig wird. Wenn das obere Ende der Barometer-Röhre zur Seite gekrümmet, nicht in den Teller sondern in die Verbindungsröhre tritt; so ist es noch vortheilhafter, und auch da zu gebrauchen, wo in einem auf die Verbindungsröhre aufgeschraubten Gefäße die Luft verdünnet werden soll. Fig.

2) Eine mit Quecksilber gefüllte Torricellische Röhre von 10 bis 12 Zoll, die man auf den Teller der Luftpumpe unter die Glocke stellen kann, dienet auch als Elasticitätzeiger um den Grad der Verdünnung der Luft zu beurtheilen, wenn die Luft durch wiederhohlte Auspumpungen so weit verdünnet worden ist, bis das Quecksilber in der Torricellischen Röhre zu sinken anfängt. Diese ist die gewöhnlichste Barometerprobe der Luftpumpe. Nur hat sie den Nachtheil, daß sich nach wiederhohltem Gebrauche die Luft mit dem Quecksilber in etwas vermenget, und in den oberen Theil der Torricellischen Röhre dringet, wodurch die Probe unrichtig wird.

Etwas besser ist 3) die heberförmige Barometerprobe, das ist ein abgekürzter heberförmiger Barometer, welcher ausgekochtes Quecksilber enthält. Man beurtheilet hier ebenfalls die Elasticität der Luft unter dem Recipienten aus der Höhe der Quecksilbersäule in dem geschlossenen Schenkel über dem Niveau des Quecksilbers in dem offenen Schenkel.

Das Werkzeug, um die wirkliche Verdünnung der Luft im Recipienten genau zu messen, ist 4) die sogenannte Birnprobe, ein gläsernes birnförmiges Gefäß, das unten offen ist und sich oben in eine genau cylindrische Röhre endigt, deren Inhalt einen genau bestimmten aliquoten Theil

des

Fig. des ganzen Inhalts des Gefäßes ausmacht, und in kleinere Abtheilungen getheilet ist. Man hängt die leere Birnprobe an einen beweglichen Stift, der durch eine Lederbüchse in dem Gewölbe des Recipienten geht, und dadurch auf- und abwärts beweget werden kann, unter dem Recipienten über einem Gefäße mit Quecksilber auf; pumpet die Luft so stark als möglich aus dem Recipienten aus; drückt dann die Birnprobe mit ihrer offenen Mündung in das Quecksilber tief hinab; und läßt endlich wieder die äußere Luft unter den Recipienten treten. Nun drückt diese das Quecksilber in den Raum der Birnprobe hinauf. Zugleich wird der Dunst, der auf den Elasticitätsmesser Einfluß hatte, hierbey durch diesen Druck niedergeschlagen, und es bleibt bloß die Luft übrig. Der Raum dieser oben in der Röhre der Birnprobe übrig bleibenden Luft, verglichen mit dem Raume des ganzen Gefäßes, zeigt an, wie vielmahl die Luft unter dem Recipienten durch die vorgenommene Auspumpung wirklich dünner geworden sey. Hierbey ist wohl zu erinnern: 1) daß, wenn die Birnprobe den wirklichen Grad der Verdünnung der Luft anzeigen soll, es unumgänglich nothwendig ist, daß das Quecksilber außerhalb der Birnprobe in dem Gefäße, worein man diese taucht, nicht niedriger stehe als inwendig, sondern in gleichem Niveau sey: sonst wird die Luft in der Birnprobe nicht eben dieselbe Dichtigkeit haben wie die sie umgebende; 2) daß ferner die zurückbleibende Luft in der Birnprobe einerley Temperatur habe mit der Luft vor der Verdünnung; und endlich 3), daß aus dem Quecksilber selbst sich keine Luft während des Anfüllens der Birnprobe entwickle. Um das letztere zu verhüten, muß man solches Quecksilber hierzu anwenden, das man kurz vorher ausgekocht hat.

§. 79.

Um die Verdichtung der Luft in einem Recipienten der Luftpumpe zu beurtheilen, kann ebenfalls eine umgebogene Barometerröhre von beträchtlicher Länge gebraucht werden, wovon der kürzere Schenkel mit dem Recipienten in Verbindung ist, der andere offene Schenkel aber außerhalb

des

des Recipienten gerade in die Höhe gehet. Wird nun die Luft in dem Recipienten verdichtet, so wird das Quecksilber in dem Schenkel, welcher mit dem Recipienten verbunden ist, stärker niedergedrückt als in dem anderen von dem blo-ßen Drucke der Atmosphäre; die Oberfläche des Quecksil-bers wird daher in diesem 2ten Schenkel höher stehen als in dem ersten; und aus diesem Ueberschuße der Quecksilber-säule im zweyten Schenkel kann man die Verdichtung der Luft im Recipienten beurtheilen. Ist der zweyte Schen-kel mit dem ersten von einerley Länge, und Luftdicht zu-geschlossen, so kann man aus dem verminderten Luftraume in demselben die Verdichtung der Luft berechnen, wie im §. 67. Fig.

§. 80.

Mit einer wohl eingerichteten Luftpumpe kann man nun verschiedene Versuche anstellen, welche theils die an-geführten Sätze von der Elasticität und von dem Drucke der Luft auf eine anschauliche Art bestätigen, theils noch ver-schiedene andere Eigenschaften der Luft erweisen. Einige der merkwürdigsten Versuche mit der Luftpumpe sind fol-gende.

1) Das Quecksilber sinkt im Barometer bey der Ver-dünnung der Luft, die auf das Quecksilber drücket; und steigt wieder auf die vorige Höhe durch Hinzulassung der atmosphärischen Luft. Das Gegentheil erfolget bey der Verdichtung der Luft.

2) Bey der Verdünnung der Luft steigt das Queck-silber in einer Röhre, die oben offen und mit dem Rau-me des Recipienten in Verbindung steht, das untere eben-falls offene Ende aber in ein Gefäß mit Quecksilber ge-taucht ist. Bey Hinzulassung der atmosphärischen Luft fällt das Quecksilber wieder soweit herab, daß es im Gefäße und in der Röhre einerley Höhe hat.

3) Eine ebene Glasplatte, als ein Theil des Um-fanges des Recipienten angebracht, wird bey hinlänglicher Verdünnung der Luft von dem überwiegenden Drucke der Atmosphäre zersprenget. Daß die Glocke den Druck der At-

mo-

Fig. mosphäre bey einer noch so großen Verdünnung auszuhalten vermag, verursachet die gewölbte Figur derselben.

4) Eine schlaffe, fest gebundene Blase mit etwas atmosphärischer Luft in deren Falten, schwillt in verdünnter Luft stark auf; und fällt durch Hinzulassung der äußeren Luft wieder zusammen.

5) Zwey hohle, gut an einander passende Halbkugeln oder Kugelabschnitte, wenn zwischen ihnen die Luft verdünnet wird, hängen wegen des äußeren Druckes der Atmosphäre gewaltig zusammen. Die Guerickischen Halbkugeln von einer Magdeburgischen Elle im Durchmesser konnten bey stark verdünnter Luft auf jeder Seite mit 15 Pferden bespannet nicht getrennet werden.

6) Eine brennende Kerze verlischt in verdünnter Luft.

7) Thiere sterben schnell in derselben.

8) Bey der Verdünnung der Luft vermindert sich der Schall eines darin befindlichen Schlagwerkes, und verschwindet beynahe ganz.

9) Cartesianische Teufelchen, die sonst im Wasser zu Boden sinken, schwimmen bey verdünnter Luft.

10) Unter dem Recipienten siedet bey starker Verdünnung der Luft nur mäßig erwärmtes Wasser.

11) Bier, Milch, Sauerteig geben bey verdünnter Luft eine große Menge Luftblasen von sich.

12) Etwas weniges Wasser wird unter dem Recipienten bey stark verdünnter Luft in elastischen vollkommen durchsichtigen Dampf aufgelöset, der sich bey Hinzulassung der atmosphärischen Luft wieder als eine tropfbare Flüssigkeit niederschlägt; u. s. w.

§. 81.

Vorzüglich ist die Luftpumpe geeignet um augenscheinlich zu beweisen, daß die Luft wirklich schwer ist.

Denn wird in einer metallenen hohlen Kugel, die als ein Recipient mit einem Hahne versehen an die Verbindungsröhre der Luftpumpe angeschraubet ist, die Luft möglichst verdünnet; so findet man sodann das Gewicht einer sol-

solchen Kugel geringer als in dem vorigen Zustande, da sie mit Luft angefüllet war. Im Gegentheile findet man das Gewicht einer solchen Kugel größer, wenn man die Luft darin verdichtet. Fig.

Der Unterschied der Gewichte einer solchen Kugel, wenn sie einmahl mit Luft erfüllet, und dann möglichst luftleer gemacht wird, ist das wirkliche Gewicht einer Menge Luft in dem Raume der hohlen Kugel. Dieses mit dem Gewichte des Wassers in eben demselben Raume der hohlen Kugel verglichen, gibt das specifische Gewicht der Luft, mit der man den Versuch gemacht hat. Auf diese Art hat man gefunden, daß die atmosphärische Luft nahe an der Meeresfläche und bey mittlerer Temperatur ungefähr 850 bis 900mahl leichter sey als Regenwasser: oder daß 1 Wien. Kub. Fuß einer solchen atmosphärischen Luft sehr nahe 1 Unze Wien. Gew. wiege.

§. 82.

Hieraus ergibt sich ferner der Unterschied am Gewichte der Körper in freyer Luft und im luftleeren Raume. Das Gewicht eines Körpers (Druck gegen die Unterlage) im luftleeren Raume ist nähmlich größer als in freyer Luft um das Gewicht dieser Luft unter dem Umfange des Körpers; weil jeder Körper in der schweren und flüssigen Luft eben so wie im Wasser einen lothrechten Auftrieb (§ 21.) leidet, der dem Gewichte der verdrängten Luft gleich ist.

§. 83.

Als man im vorigen Jahrhunderte die Entdeckung gemacht hatte, daß die uns allenthalben umgebende Luft eine schwere Flüssigkeit ist, und daß daher jeder darin befindliche Körper von seinem Gewichte so viel verlieret, oder einen so großen Auftrieb darin leidet, als die verdrängte Luft am Gewichte beträgt; so hat man sogleich eingesehen, daß eine hinlänglich große metallene hohle Kugel von möglichst geringem Gewichte, wenn man solche möglichst luftleer machete, in freyer Luft in die Höhe steigen müßte. Hierzu wäre erforderlich, daß das Gewicht des Metalles

Fig. der hohlen Kugel sammt allem Zugehöre geringer wäre, als das Gewicht der verdrängten atmosphärischen Luft. Allein wegen des äußeren Druckes der Atmosphäre gegen den Umfang einer solchen luftleer zu machenden Kugel konnte man die Hülle der hohlen metalleuen Kugel niemahls so dünn machen, daß ihr Gewicht kleiner geworden wäre, als das Gewicht der Luft unter eben demselben Umfange; und daher blieb der Gedanke des Aufsteigens einer luftleer gemachten hohlen Kugel für die Ausübung immer unausführbar.

Endlich entdeckte man vor mehreren Jahren eine Luftgattung, die so genannte **brennbare Luft**, welche bey einer 10 bis 12mahl geringeren Dichtigkeit mit der atmosphärischen Luft einerley Elasticität hat. Man gewinnt diese brennbare Luft bey der Auflösung der Eisenspäne in verdünnter Vitriolsäure. Seifenblasen mit dieser Luft angefüllet steigen in die Höhe. Und eben so steigt auch ein Luftballon aus überfirnistem Taffet mit dieser Luft angefüllet, in die Höhe, so lange das Gewicht des Luftballons sammt der mit ihm verbundenen Last und sammt der eingeschlossenen dünneren Luft geringer ist, als das Gewicht der verdrängten atmosphärischen Luft. Der Ueberschuß des letzteren Gewichtes über das gesammte erstere Gewicht ist die bewegende Kraft, welche den Luftballon in die Höhe treibet.

Die brennbare Luft nennt man auch **Wasserstoff-Gaß**, weil solche bey der Zersetzung des Wassers als ein chymischer Bestandtheil desselben durch das dazu gehörige Verfahren gewonnen werden kann. Der andere Bestandtheil des reinen Wassers ist die so genannte Lebensluft, oder das Sauerstoff-Gas, wozu noch der **Wärmestoff** gehöret, um das Wasser im flüssigen Zustande zu erhalten. Die merkwürdigen Eigenschaften verschiedener erst in neueren Zeiten bekannt gewordener Gase gehören nicht in gegenwärtige Anfangsgründe. Man kann solche in neueren Lehrbüchern der Naturlehre und der Chymie nachschlagen.

§. 84.

Fig.

§. 84.

Vermöge des Auftriebes der schweren Luft gegen jeden darin befindlichen Körper muß auch das Gewicht eines Körpers nach Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft verschieden seyn. Hierauf gründet sich der Gebrauch des Manometers (eines Instrumentes um die Veränderungen der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bey verschiedener Temperatur anzuzeigen.) Es besteht solcher aus einer hohlen luftdicht verschlossenen Kugel (sie kann von dünnem Glase seyn) etwa ein Fuß im Durchmesser, welche an einer empfindlichen Wage mittelst eines Gegengewichtes von einer sehr dichten Materie bey einer mittleren Temperatur der Luft ins Gleichgewicht gebracht ist. Wie sich nun in der Folge die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft verändert; so wird die hohle Kugel bey einer dichteren Luft einen größeren Auftrie leiden, als das Gegengewicht, und wird daher etwas in die Höhe steigen, das Gegengewicht aber um eben so viel herabsinken. Das Gegentheil wird bey einer dünner gewordenen Luft erfolgen.

In beyden Fällen kann die Zunge des Wagebalkens an einem eingetheilten Gradbogen die Veränderungen anzeigen. Die Dichtigkeit der Luft für den Zustand des Gleichgewichtes am Manometer muß man aus anderen Versuchen für bekannt annehmen. Den kubischen Inhalt der hohlen Kugel und des Gegengewichtes kann man auch bestimmen, und daraus das Gewicht den verdrängten Luft berechnen. Wenn man sodann beobachtet, welche Zusatz-Gewichte erforderlich sind um den Zeiger des Manometers auf verschiedene Eintheilungspuncte zu bringen; so wird man dadurch in den Stand gesetzet, aus den verschiedenen Anzeigen des Manometers die jedesmahlige Dichtigkeit der Luft ersehen zu können.

Es sey der kubische Inhalt der Kugel $= K$, und des Gegengewichtes im Stande des Gleichgewichtes $= k$; so ist $K - k = a$ der Raumsinhalt der Luft, die auf den Manometer wirket. Das Gewicht der Luft in dem Raums-

Fig. inhalte a bey dem Zustande des Gleichgewichtes des Manometers sey $= P$; so ist $\frac{P}{a}$ das eigenthümliche Gewicht dieser Luft (§. 34.). Für einen anderen Zustand der Luft sey p das Gewicht, welches man bey vermehrter Dichtigkeit der Luft an der Seite der Kugel, bey verminderter aber dem Gegengewichte zulegen muß um das Gleichgewicht herzustellen; so wird nun das geänderte eigenthümliche Gewicht der Luft $= \frac{P \mp p}{a}$ seyn, nähmlich $+$ bey vermehrter, $-$ aber bey verminderter Dichtigkeit. Wenn z. B. die Luft dreymahl dünner würde, als sie bey der Bestimmung des P und Regulirung des Manometers war; so müßte zum das Gleichgewicht zu erhalten auf der Seite des Gegengewichtes noch ein Gewicht $p = \frac{2}{3} P$ hinzugelegt werden. Und für $p = \frac{1}{2} P$ an der Seite des Gegengewichtes wäre die Luft nur halb so dicht, als sie bey der Regulirung des Manometers war. Die Zuleg-Gewichte p haben zwar übrigens auch einen Raumsinhalt, welchen man aus der specifischen Schwere ihrer Materie berechnen, und in Erwägung ziehen könnte; allein er kann als sehr unbeträchtlich gegen a ohne merklichen Fehler vernachlässiget werden.

§. 85.

Die angeführte Aenderung des Gewichtes eines und desselben Körpers nach Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft könnte einige Kaufleute, z. B. Juwelenhändler verleiten ihre Waren bey möglichst dichter Luft einzukaufen, und bey möglichst dünner nach Anzeige des Manometers zu verkaufen. Wenn die specifische Schwere der Juwelen vielmahl geringer ist, als die specifische Schwere der zum Abwägen gebrauchten metallenen Gewichtstheile; so muß die Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft immer eine Aenderung an dem Gewichte der Juwelen verursachen. Wenn hingegen die specifische Schwere der zum Abwägen erforderlichen Gewichtstheile mit der specifischen Schwere des abzuwä-

wägenden Körpers beynahe einerley ist; so kann die Aen- Fig.
derung des Gewichtes nach Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft mittelst der gewöhnlichen Wage nicht bemerket werden.

§. 86.

Nebst den bereits erwähnten Werkzeugen, Barometer, Luftpumpe, Manometer, um verschiedene Eigenschaften der Luft zu beobachten, gibt es noch verschiedene andere, als z. B. Thermometer, Pyrometer, Hygrometer, Anemometer, Gazometer, Eudiometer, u. s. w. deren lehrreiche Beschreibung und Gebrauch in Gehlers physikal. Wörterbuche unter den genannten Artikeln zu finden ist. Hier will ich bloß von den gewöhnlichsten Thermometern eine kurze Erwähnung machen.

Der Thermometer ist ein Werkzeug, welches die Veränderungen der Wärme und Kälte der atmosphärischen Luft, oder auch einer anderen Flüssigkeit anzeiget. Es besteht aus einer gläsernen Röhre, die sich in eine Kugel, zuweilen auch in ein cylinderförmiges Gefäß endiget, und gemeiniglich mit Quecksilber, oder auch mit einer anderen Flüssigkeit gehörig angefüllet wird. Durch die Wärme wird die eigeschlossene Flüssigkeit etwas ausgedehnet, durch die Kälte aber zusammengezogen, und zeiget daher durch Steigen und Fallen in der lothrechten Röhre die Veränderungen der Wärme und Kälte. Beym gehörig gefüllten Thermometer bemerket man den Stand des Quecksilbers im siedenden Wasser, und dann im aufthauenden Eise oder Schnee. Der Raum zwischen diesen zwey Puncten wird der Fundamental-Abstand genannt. Dieser

1) in 80 gleiche Theile getheilet gibt den Reaumürschen Quecksilber-Thermometer, wo die Grade vom Frierpuncte 0 sowohl auf- als abwärts gezählet werden; aufwärts bis zum Siedpuncte 80, und abwärts bis zur Kugel etwa 30 oder höchstens 40.

2) In 180 gleiche Theile getheilet, und 32 solcher Theile unter den Frierpunct getragen um den 0 Punct als den Punct einer künstlichen Kälte aus einer Mischung von

Fig. Schnee und Salmiak zu erhalten, wo sodann der Siedpunct mit 212 bezeichnet wird, gibt den **Fahrenheitischen Thermometer.**

3) In 150 Theile, den **Delislischen Thermometer,** welcher die Grade vom Siedpuncte 0 herabwärts bis zum Frierpuncte, und noch weiter unter diesen etwa 200 nahe an der Kugel in einem fortzählet.

4) In 100 Theile getheilet, gibt endlich den **schwedischen und neufränkischen Thermometer** (Thermométre centigrade) welcher die Grade vom Frierpuncte 0 auf- und abwärts zählet; aufwärts bis zum Siedpuncte 100, und abwärts bis zur Kugel etwa 40, höchstens 50.

Wenn man einem Thermometer die Gestalt gibt, wie
26 es die Figur 26 anzeiget, bey welchem die Kugel, und der Theil der Röhre von A bis B mit Weingeiste, der Theil BCD aber mit Quecksilber angefüllet ist; und man legt in die Höhlung der gläsernen Röhre bey B und bey D Cylinderchen von etwas kleinerem Durchmesser etwa Stückchen von Eisendrath: so wird ein solcher Thermometer die Eigenschaft haben, daß er jederzeit seit der letzten Beobachtung, bis man ihn wieder ansieht, ein Merkmahl sowohl des höchsten als auch des niedrigsten Grades der inzwischen gewesenen Temperatur zurück läßt, und zugleich wie jeder andere Weingeist-Thermometer den gegenwärtigen Grad der Temperatur anzeiget. Wenn man nähmlich nach einer gemachten Beobachtung einen solchen Thermometer nach der Seite C so drehet, daß die zwey in der Röhre eingeschlossenen Cylinderchen beyde an die Oberflächen des Quecksilbers herabfallen, sodann aber den Thermometer wieder in die anfängliche horizontale Lage stellet; so wird bey vermehrter Wärme das Cylinderchen bey D von dem Quecksilber so lange gegen E fortgeschoben als die Wärme zunimmt. Wenn hingegen die Wärme abnimmt, so wird das Cylinderchen bey B gegen A fortgeschoben. Jedes bleibt dort stehen, wo die Oberfläche des Quecksilbers den höchsten oder niedrigsten Stand der

Tem-

Temperatur erreichet hat. Weil übrigens der Weingeist-Thermometer die Veränderungen der Temperatur nicht so regelmäßig anzeiget, als der Quecksilber-Thermometer; so kann man den bemerkten höchsten und niedrigsten Stand des erwähnten zusammengesetzten Thermometers bey jeder Beobachtung mittelst eines anderen gewöhnlichen Quecksilberthermometers berichtigen; dessen Vergleichung mit jenem für mehrere gleichnahmige Grade durch vorhergehende Untersuchungen ausgemittelt seyn muß. Fig.

Drit-

Drittes Hauptstück.

Grundlehre der Hydraulik.

I. Abschnitt.

Ausfluß des Wassers durch Oeffnungen im Boden oder in der Wand eines Gefäßes.

§. 87.

Fig. Hydraulik heißt die Lehre von der Bewegung flüssiger Massen. Von dieser weitläufigen noch nicht ganz ins reine gebrachten Wissenschaft sollen hier nur einige der nothwendigsten Grundlehren angeführet werden, um einige täglich in die Augen fallende mechanische Wirkungen des Wassers erklären, und insbesondere die Bewegung der festen Körper in einem flüssigen Mittel mit der nöthigen Deutlichkeit abhandeln zu können. Wer die Hydraulik in ihrem ganzen Umfange kennen muß, der studiere die classischen Bücher eines Hrn. Kästners, Karstens, Belidors über diesen Gegenstand, wie auch K. Chr. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik 2 Bände in 4. Altenburg 1794 und 1796. Als ein Handbuch wird insbesondere Herrn Rosmanns Lehrbuch der Hydraulik Berlin bey Lange 1797 wegen seines practischen Nutzen empfohlen.

§. 88.

Fig.

1) Unter Boden versteht man eine wagrechte oder horizontale, unter Wand aber jede nicht wagrechte ebene oder krumme Fläche im Umfange eines mit Wasser oder mit einer anderen schweren Flüssigkeit angefüllten Behälters oder Gefäßes.

2) Wenn sich im Boden eines Wasserbehälters eine Oeffnung befindet, so nennt man die lothrechte Entfernung der Oeffnung vom Wasserspiegel die Druckhöhe. Ist die Oeffnung in irgend einer Wand, und die Entfernung des Schwerpunctes einer solchen Oeffnung vom Wasserspiegel beträchtlich größer als die Höhe der Oeffnung; so nennt man diese Entfernung des Schwerpunctes von dem Wasserspiegel auch noch die Druckhöhe einer solchen Oeffnung. Sie ist gleichsam die mittlere Druckhöhe, weil die Wassertheilchen ober dem Schwerpuncte eine kleinere, die unter demselben hingegen eine größere Druckhöhe haben. Der Wasserstand aber heißt die Entfernung des untersten Randes einer solchen Wandöffnung von dem Wasserspiegel.

3) Die Geschwindigkeit des Wassers heißt der in einer Zeit-Einheit, gewöhnlich in 1 Secunde gleichförmig durchlaufbare Weg desselben. Geschwindigkeitshöhe heißt hier eben so wie in der Mechanik der festen Körper (3. Th. §. 47.) diejenige Höhe, von welcher ein schwerer Körper frey herabfallen müßte, um dadurch eine der gegebenen gleiche Geschwindigkeit zu erhalten. Aus der gegebenen Geschwindigkeits-Höhe $= a$ läßt sich die dazu gehörige Geschwindigkeit $= c$ sehr leicht berechnen; und umgekehrt. Es ist nähmlich für die bekannte Beschleunigung der Schwere $= g = 15\frac{1}{2}$ W. Fuß (vermöge 3. Th. §. 47.) $c = \sqrt{4ga}$, und $a = \frac{c^2}{4g}$.

4) Die Wassermenge heißt der kubische Inhalt des in einer Zeit-Einheit, gewöhnlich in 1 Secunde durch eine Oeffnung, oder durch sonst einen Querschnitt abfließenden Wassers. Die Wassermenge wird gemeiniglich in Kubik-

fu-

Fig. füßen oder Kubikzollen, zuweilen auch im Gewichte, oder in einem anderen bekannten Maße angegeben, wodurch sich der kubische Inhalt bestimmen läßt. Wenn nun bey einer gleichförmigen Bewegung eines aus irgend einer Oeffnung ausfließenden Wasserstrahls die Geschwindigkeit des Wassers oder die Länge des in einer Secunde zurückgelegten Weges $= c$, und der Querschnitt des Wasserstrahls $= f$ ist; so ist die Wassermenge $= fc$; nähmlich es fließet durch die Oeffnung in einer Secunde ein Wasser-Prisma hindurch, welches f zur Grundfläche, und c zur Höhe hat. Eben so ist bey einem in seinem Bette durch einen Querschnitt $= f$ mit der Geschwindigkeit $= c$ gleichförmig fortströmenden Fluße die Wassermenge $m = fc$.

A. Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers.

§. 89.

Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes ausfließet, hat die Druckhöhe der Oeffnung zu ihrer Geschwindigkeitshöhe. Ist nähmlich einer kleinen Oeffnung Druckhöhe $= a$, die bekannte Beschleunigung der Schwere $= g = 15\frac{1}{2}$ Wien. Fuß, und die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers an der Oeffnungsfläche $= c$; so ist

$$c = \sqrt{4ga} = 2g^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}.$$

27 1) Um diese Grundwahrheit der Hydraulik einzusehen sey ABCD Fig. 27 ein Gefäß mit schwerem Wasser bis EF angefüllet; im Boden sey eine Oeffnung mn angebracht, deren Flächeninhalt gegen die übrigen Querschnitte des Gefäßes so klein sey, daß das Wasser während des Ausflußes durch die Oeffnung mn im Gefäße selbst ohne merklichen Fehler als ruhend angesehen werden könne, so daß in einer kurzen Zeit von ein Paar Secunden das Wasser in jedem Querschnitte des Gefäßes oder der Oeffnung seinen Ort nicht merklich ändere, und die Druckhöhe beynahe ungeändert verbleibe. Bey solchen Umständen wird jede durch

die

die Oeffnung mn ausströmende Wasserschichte mnqp, die Fig.
man als ein Wasser Prisma von der Grundfläche $mn = pq = f$, 27
und von einer unendlich kleinen Dicke $mp = e$ betrachtet, einen auf die Oeffnung senkrechten Druck leiden der dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche $mn = f$ und von der Höhe $mr = a$ gleich ist (§. 15.), wo a die Druckhöhe der Oeffnung ist. Die zu bewegende Masse ist daher in diesem Falle das Gewicht der erwähnte Wasserschichte $= fe$; und die bewegende Kraft ist das Gewicht der erwähnten Wassersäule $= fa$ für das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$. Diese bewegende Kraft ist unveränderlich wegen der gemachten Voraussetzung des im Gefäße in Ruhe verbleibenden Wassers, während etwas davon durch die kleine Oeffnung ausströmet. Folglich kann die Geschwindigkeit $= c$, welche das Wasser bey seinem Ausströmen durch die Oeffnung mn erlanget, da die Fläche mn der Wasserschichte mnqp von mn bis pq gelanget, und den unendlich kleinen Weg $mp = nq = e$ zurückleget, durch die allgemeine Formel $c = \sqrt{\frac{4gPs}{M}}$ (3. Th. §. 50.) bestimmet werden, wenn man darin $P = fa$, $M = fe$, und $s = e$ setzet; es ist nähmlich diese Geschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{4g.fa.e}{fe}} = \sqrt{4ga}$; und ist daher gleich der Geschwindigkeit, welche ein frey fallender Körper durch die Druckhöhe a erlanget; das ist, sie hat die Druckhöhe a zu ihrer Geschwindigkeitshöhe. Man muß allhier die Dicke der Schichte mp und auch den zurück gelegten Weg $mp = s$ unendlich klein annehmen, eigentlich nur so klein, daß die bewegende Kraft während der Zurücklegung des Weges e für unveränderlich angesehen werden könne, und damit die am Ende dieses Weges e erlangte Geschwindigkeit der Wasserschichte durch die Schwerkraft nicht merklich geändert werde. Mit der gefundenen Geschwindigkeit schießt jede Wasserschichte aus der Oeffnung gleichsam plötzlich heraus; und befol-

get

Fig. get sodann weiters die Gesetze der Bewegung eines mit einer gegebenen Geschwindigkeit abwärts geworfenen Körpers. Bey den meisten in der Natur vorkommenden Bewegungen wird zur Hervorbringung einer gegebenen Geschwindigkeit eine gewisse bestimmte Zeit erfordert, wie z. B. beym freyen Falle der schweren Körper. Allhier hingegen ist die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers plötzlich da, weil die bewegende Kraft in Vergleichung gegen die bewegte Masse unendlich groß ist.

2) Wenn die kleine Oeffnung nicht im Boden, sondern irgendwo in einer lothrechten Seitenwand angebracht ist; so bleiben die Gründe zur Bestimmung der Geschwindigkeit eben dieselbe wie in 1); daher ist für die Druckhöhe a auch hier die Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$; die Richtung der Geschwindigkeit aber ist in diesem Falle horizontal; und der ausströmende Wasserstrahl bildet mit Beseitigung aller sonstigen Hindernisse eine Parabel, die sich leicht bestimmen läßt.

28 Wenn nähmlich in Fig. 28 die Druckhöhe $MR = a$, die Erhöhung des Mittelpunctes der Oeffnung M über die Horizontal-Linie PQ, als die Abscisse $MP = x$, und die Ordinate $PQ = y$ gesetzet wird; so ist für die Dauerzeit $= t$ der Bewegung von M bis Q in der krummen Linie MQ die Ordinate $PQ = MS = y = ct$ wegen der gleichförmigen Bewegung nach der Richtung MS; und die Abscisse $MP = x = gt^2$ wegen der gleichförmig beschleunigten Bewegung nach dieser Richtung. Daraus folgt (nach Hinwegschaffung von t aus $y = ct$, und aus $x = gt^2$)

die Gleichung für die Parabel $y^2 = \frac{c^2}{g} . x$; und die Gleichung für die Geschwindigkeit $c = \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, welche gebraucht

werden kann, um bey einem gemachten Versuche aus den bekannt gewordenen x und y die Geschwindigkeit zu bestimmen.

Da ferner allhier auch $c = \sqrt{4ga}$ ist; so ist auch $\sqrt{4ga}$

=

$= \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, und $y^2 = 4a.x$ ebenfalls eine Gleichung für die Parabel MQ, deren Parameter $= 4$ MR, und R der Punct ist, durch welchen die Leitlinie (Directrix) durchgehet. Fig. 28

Aus den angeführten Formeln

$$c = \sqrt{4ga},\ c = \frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}},\ y = \sqrt{4ax}$$

wird ein aufmerksamer Leser verschiedene nützliche Folgerungen selbst ableiten können. Z. B.

a) Bey verschiedenen Druckhöhen sind die Geschwindigkeiten des aus kleinen Oeffnungen ausfließenden Wassers den Quadratwurzeln dieser Druckhöhen proportional in Fig. 27, und in 28.

b) Für einerley Erhöhung MP in Fig. 28 verhalten sich die Geschwindigkeiten c wie die Ordinaten oder Springweiten PQ, und diese wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen.

c) Damit bey einer gegebenen Erhöhung PR $= b$ des Wasserspiegels über die Horizontal-Ebene PQ der ausströmende Wasserstrahl MQ die größte Weite PQ erreiche; muß die Erhöhung der Oeffnung MP $= \frac{1}{2}$PR, nähmlich $x = \frac{1}{2}b$, wie auch die Druckhöhe MR $= \frac{1}{2}b$ seyn: und die größte Weite des Strahles ist sodann $y = b$, nähmlich PQ $=$ PR. Denn in der Gleichung $y^2 = 4(b - x)x$, welche aus der oben angeführten $y^2 = 4ax$ für $a = b - x$ folget, erhält man durch die Differenzirung $ydy = (2b - 4x)\,dx$; und dieses Differenziale $= 0$ gesetzt gibt $x = \frac{1}{2}b$; wofür nun $y = b$ wird.

d) Die Springweiten der Strahlen aus kleinen Oeffnungen in gleichen Entfernungen ober und unter der Mitte der Vertical-Linie PR sind einander gleich. Denn aus der Gleichung $y = \sqrt{[4(b - x)x]}$ erhält man sowohl für $x = \frac{1}{2}b + z$, als auch für $x = \frac{1}{2}b - z$ einerley Werth $y = \sqrt{(b^2 - 4z^2)}$.

Fig. 29 3) Ist die Achse der Oeffnungsfläche wie Fig. 29 gerade in die Höhe gerichtet, so bleiben auch hier die Gründe zur Bestimmung der Geschwindigkeit eben dieselben wie in 1); es ist also auch hier die Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ bey der Druckhöhe MN $= a$; nur ihre Richtung geht in diesem Falle lothrecht aufwärts, weil der hydrostatische Druck als die bewegende Kraft nach der auf die Oeffnungsfläche senkrechten Richtung hier lothrecht aufwärts presset. Die ausströmende Wasserschichte befolget in diesem Falle die Gesetze der Bewegung eines mit der Geschwindigkeit $\sqrt{4ga}$ gerade aufwärts geworfenen schweren Körpers (nach 3. Th. §. 46.) das ist, jede mit der Geschwindigkeit $\sqrt{4ga}$ aus der kleinen Oeffnung hinausschießende Wasserschichte steiget mit abnehmender Geschwindigkeit bis zur Höhe MN $= a$ des Wasserspiegels ABN, wo ihre Geschwindigkeit verschwindet und die Wassertheilchen sodann herabfallen müssen. Da die Wasserschichten aus der Oeffnung mit einer der Druckhöhe zugehörigen Geschwindigkeit ununterbrochen aufeinander folgen; so bilden sie einen in die Höhe springenden Wasserstrahl, wie man es bey den allgemein bekannten Springbrunnen sehen kann.

§. 90.

Die Erfahrung zeiget, daß die Höhe des Wasserstrahles bey den Springbrunnen gemeiniglich etwas kleiner ist, als die Druckhöhe, besonders wenn letztere sehr groß ist. Man kann hiervon mehrere Ursachen angeben z. B.

1) Weil die innere Fläche der Oeffnung nicht vollkommen glatt ist, und das ausströmende Wasser daher an dieser Stelle durch eine Art von Reibung in etwas gehindert wird.

2) Weil das Wasser nicht vollkommen flüssig ist, sondern dessen Theilchen einen obschon geringen Zusammenhang mit einander haben, auf dessen Trennung auch eine Kraft verwendet werden muß.

3) Weil das Wasser zu oberst am Strahle, welches nach völlig verlorner Geschwindigkeit vertical herabfallen soll, von dem nachfolgenden getragen oder auf die Seite ge-

getrieben werden muß. Daher auch der Wasserstrahl des Springbrunnens gleich etwas höher steiget, wenn die Springöffnung ein wenig schief seitwärts gewendet wird. Fig. 29

4) Weil die Luft dem emporspringenden Wasserstrahle einen desto größeren Widerstand leistet, je größer die Druckhöhe ist.

5) Weil bey großen Springbrunnen die Leitröhre EF, welche das Wasser vom Behälter ACDB zur Springöffnung M leitet, in ihrem senkrechten Querschnitte gemeiniglich zu klein ist. Eine solche Leitröhre sollte in ihrem Querschnitte überall so weit seyn, daß das Wasser darin, während es aus der kleinen Springöffnung empor springet, beynahe als ruhend angesehen werden könnte, weil nur unter dieser Voraussetzung die Geschwindigkeitshöhe des aus der Oeffnung ausfließenden Wassers der Druckhöhe gleich ist.

§. 91.

Wie nun bey der Anlage eines Springbrunnens für eine gegebene Druckhöhe die Größe sowohl der Springöffnung, als auch die Weite der Leitröhre anzugeben sey, damit der Wasserstrahl die größte Höhe erreiche, läßt sich mit einiger Zuverlässigkeit nicht anders, als durch Vergleichung mehrerer Beobachtungen bestimmen. Diese hier anzuführen ist nicht meine Absicht. Man findet solche in den oben genannten hydraulischen Büchern. Nur so viel will ich bemerken, daß es bey Springbrunnen vortheilhaft ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Metallplatte im Deckel eines hinlänglich weiten Springrohres anzubringen, und nicht wie es gemeiniglich geschieht, die Leitröhre in eine cylindrische oder konische Springröhre auslaufen zu lassen. Bey dergleichen am vortheilhaftesten eingerichteten Springbrunnen hat man beobachtet, daß bis zu einer Druckhöhe von 5 bis 6 Fuß der Wasserstrahl ziemlich genau bis zur Höhe des obersten Wasserspiegels sich erhebe, und daher die dem ausfließenden Wasserstrahle an der Springöffnung zugehörige Geschwindigkeitshöhe der Druckhöhe gleich sey. Wenn hingegen die Druckhöhe be-

trächt-

Fig. trächtlich größer ist als 5 Fuß; so ist (vorzüglich wegen §. 90. n. 3. und 4.) der Wasserstrahl niedriger als die Druckhöhe.

Fernere Bemerkungen über Springbrunnen.

1) Aus mehreren angestellten Beobachtungen hat man die Regel abgeleitet: Bey Springbrunnen von verschiedenen Druckhöhen verhalten sich die Höhenunterschiede der Wasserstrahlen von den dazu gehörigen Druckhöhen, wie die Quadratzahlen dieser Wasserstrahlen: und eine Druckhöhe von 61 Zoll gibt einen Wasserstrahl von 60 Zoll im Pariser-Maß. Daraus findet man für jede andere Druckhöhe $= A$ und für den dazu gehörigen Wasserstrahl $= a$ eines gut eingerichteten Springbrunnens aus der Proportion

$$60^2 : a^2 = 1 \text{ Zoll} : A - a \text{ Zoll},$$

die Gleichung

$$a^2 + 3600\, a = 3600\, A,$$

wodurch man a aus A, oder auch umgekehrt A aus a in Pariser-Zollen berechnen kann;

es ist nähmlich $$\left.\begin{aligned} a &= -1800 + 60\sqrt{(A+900)} \\ \text{und } A &= a + \frac{a^2}{3600} \end{aligned}\right\} \text{Par. Zoll.}$$

Z. B. Ein Springbrunnen von 30 Paris. Fuß Druckhöhe $= 360$ Zoll $= A$ gibt bey der besten Einrichtung einen Wasserstrahl a nur von 329 Zoll $= 27$ Fuß 5 Zoll.

Sind aber die Druckhöhe $= A$, und der dazu gehörige Wasserstrahl $= a$ eines Springbrunnens im Paris. Fuß ausgedruckt; so haben die angeführten zwey Gleichungen folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} a &= -150 + 10\sqrt{(3A+225)} \\ A &= a + \frac{a^2}{300} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{Paris. Fuß.}$$

2)

2) Auch hat man aus Vergleichung mehrerer Beobachtungen gefunden, daß bey hinlänglich weiten Leitröhren der Springbrunnen die zur größten Strahlhöhe gehörigen Springöffnungen sich verhalten wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen; und daß bey der Druckhöhe von 51,75 Par. Fuß der zur größten Strahlhöhe erforderliche Durchmesser der Spring-Oeffnung in einer dünnen Metallplatte = 7,245 Par. Lin. seyn müsse. Fig.

Für die Druckhöhe = A Par. Fuß findet man daher den Durchmesser = δ der Springöffnung in Par. Lin. durch folgende Formel:

$$\delta = 2{,}701 \sqrt[4]{A},$$

welche aus der Proportion $\delta^2 : 7{,}245^2 = \sqrt{A} : \sqrt{51{,}75}$ abgeleitet ist.

§. 92.

Wenn bey dem Ausströmen des Wassers aus kleinen Oeffnungen der Wasserspiegel im Behälter mittelst eines genau passenden Stämpels von einer darauf wirkenden Kraft gepresset wird; so ist sodann die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers größer, als die der Wasserhöhe zugehörige; weil bey diesem Umstande die Wasserschichte in dem Querschnitte der Oeffnung nebst dem hydrostatischen Drucke des darüber stehenden schweren Wassers auch noch den fortgepflanzten Druck der auf den Wasserspiegel mittelst des Stämpels wirkenden Kraft zu leiden hat. Um in einem solchen Falle die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers zu finden, muß man die Kraft, womit der Wasserspiegel wirklich gepresset wird, in eine Wassersäule verwandeln, welche den gepreßten Wasserspiegel zur Grundfläche, und eine solche Höhe hat, daß das Gewicht dieser Wassersäule soviel betrage, als die erwähnte auf den Wasserspiegel wirkende Kraft. Diese so gefundene Druckhöhe der auf den Wasserspiegel wirkenden Kraft muß man nun zur Wasserhöhe oder zur natürlichen Druckhöhe addiren, um die gesuchte Geschwindigkeitshöhe des ausfließenden Wassers

in

Fig. in einem solchen Falle zu erhalten. Daraus wird sodann die Geschwindigkeit selbst wie gewöhnlich berechnet. Um sich von dieser Behauptung zu überzeugen, darf man nur hier eben so wie im §. 89 die ganze bewegende Kraft nach der erwähnten Vorstellung gehörig ausdrucken; so wird man die gesuchte Geschwindigkeit der angeführten Behauptung gemäß erhalten.

§. 93.

Bey der bisherigen Betrachtung über die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers unter verschiedenen Druckhöhen ist vorausgesetzet worden: jeder Querschnitt des Gefäßes sey in Vergleichung der Ausfluß-Oeffnung so groß, daß das Wasser aller Orten im Gefäße beynahe als ruhend angesehen werden könne; und daß daher auch der Wasserspiegel durch eine kurze Zeit der Bewegung nicht merklich sinke. Wenn inzwischen der Ausfluß durch längere Zeit dauert; so wird das Wasser im Gefäße allmählich niedriger und die Druckhöhe kleiner werden. Die Geschwindigkeit wird daher im Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Druckhöhen abnehmen; es wird nähmlich bey der Druckhöhe $= A$ die Geschwindigkeit $C = \sqrt{4gA}$, und bey der kleiner gewordenen Druckhöhe $= a$ die Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ seyn; wo $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ sich verhält.

Soll nun die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, und die dazu gehörige Druckhöhe durch eine geraume Zeit ungeändert beybehalten werden; so ist es nothwendig, daß die ausfließende Wassermenge durch einen gehörig angebrachten Seitenzufluß ersetzet werde. Im Folgenden sollen auch die nöthigsten Sätze beygebracht werden, wodurch man die ausflüßende Wassermenge aus verschiedenen Oeffnungen bey verschiedenen Druckhöhen unter der bisherigen Voraussetzung, daß die Ausfluß-Oeffnung in Vergleichung gegen jeden anderen Querschnitt des Gefäßes sehr klein sey, berechnen kann. Wenn hingegen die Ausfluß-Oeffnung in Vergleichung der Querschnitte des Gefäßes nicht sonderlich klein ist, sondern zu diesen in einem gegebenen Verhält-

nisse

nisse steht; so hat man bis jetzt noch keine für die Aus- Fig.
übung brauchbare Regel zur Berechnung der Geschwindigkeit, und der in einer gegebenen Zeit ausfließenden Wassermenge ausfindig machen können, ungeachtet mehrere der scharfsinnigsten Männer an der Auflösung dieser Aufgabe ihre Kräften versuchten.

§. 94.

Die in den Schriften eines Bernoulli, Kästner, Karsten, u. s. w. vorkommende Formel, daß in einem prismatischen Gefäße bey einer unveränderlich erhaltenen Druckhöhe $= a$ für den horizontalen Querschnitt des Gefäßes $= F$, und für die Oeffnungsfläche im Boden $= f$ die Geschwindigkeitshöhe des ausfließenden Wassers $\frac{c^2}{4g} = a \left(\frac{F^2}{F^2 - f^2}\right)$ sey, ist in der Ausübung für den am gewöhnlichsten vorkommenden Fall, wo die aus der Oeffnung ausfließende Wassermenge durch einen Seitenzufluß ersetzet wird, gänzlich unbrauchbar und unrichtig. Nach dieser Formel wäre die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers jederzeit größer, als die der Druckhöhe zugehörige, und müßte mit der Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung bey einerley Druckhöhe ins Unendliche fortwachsen. Der Strahl eines Springbrunnens bey einerley Druckhöhe müßte daher nach dieser Regel desto höher steigen, je größer die Ausfluß-Oeffnung gemacht würde, welches der Erfahrung gänzlich zuwider ist.

Nach der vom Herrn Baader in seiner vollständigen Theorie der Saug- und Hebepumpen, Beyreuth 1797 angegebenen Formel für eben denselben Fall $\frac{c^2}{4g} = \frac{a}{1 + \frac{f^2}{F^2} - \frac{f^3}{F^3}}$ ist im Gegentheile die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers etwas kleiner als die der Druckhöhe zugehörige; und dieser Umstand ist allerdings

Fig. der Erfahrung gemäß. Allein nach dieser Formel könnte die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers mit der Erweiterung der Oeffnung nur bis $f = \frac{2}{3}F$ abnehmen; wo für $f = \frac{2}{3}F$ bey unverändert erhaltener Druckhöhe a die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{4g} = \frac{27}{31}a$ wäre, und den kleinsten Werth hätte. Bey einer ferneren Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung aber müßte die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers wieder wachsen, und es wäre für $f = F$ die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{4g} = a$. Dieses letztere Wachsen der Geschwindigkeit mit der ferneren Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung von $f = \frac{2}{3}F$ an, dürfte der Erfahrung nicht gemäß seyn. Auch ist für $f = F$ nach dieser Baaderischen **Grundformel der Hydraulik** die Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ unrichtig, da sie für diesen Fall $= 0$ seyn muß. Denn wenn bey einem cylindrischen oder prismatischen mit schwerem Wasser bis zur Höhe a angefülltem Gefäße der Boden plötzlich weggenommen würde; so müßte die Wassermasse eben so wie ein fester Körper unter eben demselben Umfange herabfallen; die anfängliche Geschwindigkeit, welche eigentlich gesucht wird, wäre also hier $= 0$, und nicht $= \sqrt{4ag}$; diese letztere wird erst nach der Zurücklegung des Weges a oder nach Verlauf der Zeit $\sqrt{\frac{a}{g}}$ durch den freyen Fall erlanget, nicht aber in dem ersten Augenblicke der Bewegung nach plötzlicher Hinwegnehmung des Bodens, wie es Hr. Baader im angeführten Werke §. 2, und §. 11. Anmerk. behaupten will.

Da die Bernoullische Grundformel der Hydraulik $\frac{c^2}{4g} = a\left(\frac{F^2}{F^2 - f^2}\right)$ das Verkehrte der Erfahrung angibt, so käme man der Wahrheit vielleicht näher, wenn man in der angeführten Formel den Bruch $\frac{F^2}{F^2 - f^2}$ umkehr-

te,

te, und daher die Geschwindigkeitshöhe des aus einer gege- Fig.
benen Oeffnung ausfließenden Wassers setzte

$$\frac{c^2}{4g} = a\left(\frac{F^2 - f^2}{F^2}\right) = a\left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right).$$

Diese Formel gäbe für sehr kleine Oeffnungen f in Vergleichung gegen den Querschnitt F die Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ bey der Druckhöhe a; und für $f = F$ wäre $c = 0$, wie es der Erfahrung gemäß ist. Ob übrigens bey dieser Formel die mit der Erweiterung der Ausfluß-Oeffnung abnehmende Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers mit der Erfahrung hinlänglich übereinstimmen könne, müßten einige zu machende Versuche entscheiden.

Die erwähnte Bernoullische Formel der Hydraulik $c = \sqrt{\left(\frac{4gaF^2}{F^2 - f^2}\right)}$ setzet voraus, daß die oberste Wasserschichte mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{4gaf^2}{F^2 - f^2}\right)}$ sinke, und durch eine andere eben so große mit eben dieser Geschwindigkeit versehene Wasserschichte in jedem Augenblicke ersetzet werde, da etwa diese ersetzende Wasserschichte aus einem oberwärts befindlichen Gefäße von unbegränzter Weite aus einer Bodenöffnung $= F$ unter der Druckhöhe $= \frac{af^2}{F^2 - f^2}$ unmittelbar auf den vorigen Wasserspiegel herunter stürzte. Wenn nähmlich daß Gefäß Fig. 27 nicht pris- 27
matisch wäre, sondern eine solche Gestalt hätte, wie es der punctirte Durchschnitt MmnN anzeiget, wo der Querschnitt EF in Vergleichung gegen MN für unendlich klein angesehen werden könnte; und man setzte den Querschnitt $mn = f$, $EF = F$, die Höhe $rm = a$, $rP = x$, der ausweichenden oder sinkenden Wasserschichte EF Geschwindigkeit $= y$, und des durch mn ausströmenden Wassers Geschwindigkeit $= c$; so wäre für den Wasserstand mP vermöge §. 89.

$$c^2 = 4g.\ (a + x),\ \text{und}\ y^2 = 4gx;$$

 und

Fig. und weil durch den Querschnitt EF eben so viel Wasser
27 nachfließt, als durch mn ausströmet; so ist auch

$$c.f = F.y\text{, oder } c : y = F : f;$$

aus diesen drey Gleichungen findet man

$$c = \sqrt{\left(\frac{4gaF^2}{F^2-f^2}\right)};\ y = \sqrt{\left(\frac{4gaf^2}{F^2-f^2}\right)};\ x = \frac{af^2}{F^2-f^2}.$$

B. Wassermenge in einer bestimmten Zeit bey ungeänderter Druckhöhe.

§. 95.

Die Wassermenge $= m$ im Kubikmaße, welche in einer gegebenen Zeit $= t$ Sec. aus einer gegebenen kleinen Oeffnung $= f$ Quadratfuß oder Zoll eines bey der Druckhöhe a beständig voll erhaltenen Gefäßes mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{4ga}$ ausfließet, könnte man durch nachstehende Formel ausdrucken,

$$m = tfc\text{, oder } m = tf\sqrt{4ag}\text{,}$$

wenn der Querschnitt des ausströmenden Wasserstrahles eben so groß wäre, als die Oeffnungsfläche.

Denn in jeder Secunde strömete aus der Oeffnung ein Wasserprisma $= fc = f\sqrt{4ag}$, welches die Oeffnungsfläche f zur Grundfläche, und die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers, nähmlich den in einer Secunde gleichförmig zurück zu legenden Weg $c = \sqrt{4ag}$ zur Länge hätte. In t Secunden würden daher bey ungeänderter Druckhöhe t solche Wasserprismen ausströmen; folglich wäre $m = tfc = tf\sqrt{4ag}$.

Allein die Erfahrung lehret uns, daß der Querschnitt des ausströmenden Wasserstrahles merklich kleiner ist, als die Oeffnungsfläche; oder daß sich der ausströmende Wasserstrahl in der Ausfluß-Oeffnung gewisser Maßen zusammenziehet; theils wegen des Seitendruckes, welchen die gegen die Ausfluß-Oeffnung gerichtete Wassersäule von dem

sie

sie umgebenden Wasser leidet, theils wegen der schiefen Richtung, nach welcher die Wassertheilchen innerhalb der Ausfluß-Oeffnung ringsherum sich gegen die Achse derselben verschiedentlich hinlenken. Um nun die ausfließende Wassermenge mit einiger Zuverlässigkeit berechnen zu können, muß man in der angeführten Formel der Wassermenge anstatt der Oeffnungsfläche f den Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles setzen. Fig.

§ 96.

Aus mehreren angestellten Versuchen hat man gefunden, daß der Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles zur Oeffnungsfläche sich verhalte, für eine Ausfluß-Oeffnung

1) in einer dünnen Metallplatte wie 64 zu 100,
2) bey einer kurzen Ansatzröhre, wie 81 zu 100;

oder daß der Querdurchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahles sich zum Durchmesser der Ausfluß-Oeffnung verhalte bey einer dünnen Metallplatte wie 8 zu 10, und bey einer kurzen Ansatzröhre wie 9 zu 10.

Für die Oeffnungsfläche $= f$ in einer dünnen Metallplatte ist daher der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles $= 0{,}64 f$; und bey einer kurzen Ansatzröhre, deren Länge kleiner seyn mag, als etwa der dreyfache Durchmesser der Oeffnung, ist der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles $= 0{,}81 f$.

Bezeichnet man nun den erwähnten Decimal-Bruch 0,64, oder 0,81 mit α, womit man die Oeffnungsfläche multipliciren muß um den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles zu erhalten; so ist für die Oeffnungsfläche $= f$ der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles $= \alpha f$.

§. 97.

Die wirkliche Wassermenge bey den im §. 95. angeführten Umständen ist daher

$$m = \alpha t f c, \text{ oder auch}$$
$$m = \alpha t f \sqrt{4ga}:$$

und für eine andere Druckhöhe $= A$, und für die dazu gehörige Geschwindigkeit $= C = \sqrt{4gA}$, ist bey eben der-

Fig. derselben Oeffnuugsfläche $= f$ in eben derselben Zeit $= t$ die ausgeflossene Wassermenge

$$M = \alpha t f C, \text{ oder}$$
$$M = \alpha t f \sqrt{4gA}.$$

Daraus folgt $M : m = C : c$;
wie auch $M : m = \sqrt{A} : \sqrt{a}$;
und auch $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ wie §. 89.

Nähmlich die Wassermengen in einerley Zeit aus gleichen Ausfluß-Oeffnungen bey verschiedenen Druckhöhen verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, oder wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen.

Wäre aber nebst der Druckhöhe A auch die Oeffnungsfläche $= F$, und die Zeit $= T$ von den vorigen verschieden, so wäre

$$M = \alpha CFT, \text{ oder}$$
$$M = \alpha FT \sqrt{4gA};$$

daraus folgt $M : m = CFT : cft$;
wie auch $M : m = FT\sqrt{A} : ft\sqrt{a}$
und $C : c = \sqrt{A} : \sqrt{a}$.

§. 98.

Um die Zusammenziehung des Wasserstrahles durch Beobachtungen zu bestimmen, dienet die aus obiger Gleichung $m = \alpha t f \sqrt{4ga}$ fließende Formel

$$\alpha = \frac{m}{tf\sqrt{4ga}}$$

wo $tf\sqrt{4ga}$ die hypothetische Wassermenge ist, welche ohne Zusammenziehung des Wasserstrahles statt finden würde.

Die wirkliche Wassermenge dividiret durch die hypothetische gibt daher die Verhältnißzahl der Oeffnungsfläche zum Querschnitte des zusammengezogenen Wasserstrahles.

Und auf diese Art hat man durch vielfältige Beobachtungen gefunden bey Oeffnungen in dünnen Metallplatten $\alpha = 0{,}64$; bey kurzen Ansatzröhren aber, so wie

auch

auch bey Oeffnungen in dicken Wänden der großen aus Mauer- oder Holzwerk verfertigten Wasserbehälter $\alpha = 0{,}81$. Fig.

§. 99.

Mittelst der Formel $m = \alpha t f \sqrt{4ga}$ lassen sich nun verschiedene practische Aufgaben auflösen. Z. B.

1) Ein Wasserbehälter erhält alle 5 Secunden 3 Kubikfuß Wasserzufluß. Man soll in einer Tiefe von 10 Fuß unter dem Wasserspiegel in die Wand eine kreisförmige Oeffnung machen, aus welcher eben so viel Wasser ausfließt, als der Zufluß beträgt. Wie groß muß der Durchmesser dieser Oeffnung seyn? Um diesen zu finden, muß man aus der angeführten Formel die Fläche f suchen für $m = 3$, $t = 5$, $a = 10$, $g = 15{,}5$ (wenn die gegebenen Maße sich auf den Wien. Fuß beziehen), und für $\alpha = 0{,}81$, weil hier die Oeffnung in einer dicken Wand anzubringen ist. Aus der gefundenen Oeffnungsfläche ist sodann nach bekannten geometrischen Gründen der Durchmesser des Kreises leicht zu finden, der diesen Flächeninhalt hat.

2) Ein Wasserbehälter erhält in 16 Secunden 3 Kubikfuß Wasserzufluß. In einer seiner Wände befindet sich eine Oeffnung von 2 Quadratzoll. Man fragt, wie hoch wird der Wasserspiegel über der Mitte der Oeffnung stehen müssen, damit eben so viel Wasser abfließen kann, als zufließt?

3) Durch eine 2 Quadratfuß große Oeffnung in einer dicken Wand eines Wasserbehälters sind bey unveränderlicher Druckhöhe von 9 Fuß 950 Kubikfuß Wasser ausgeflossen; man fragt, wie viel Zeit hat dieser Ausfluß gedauert? u. s. w.

C. Ausleerung lothrecht stehender prismatischer Gefäße durch kleine Oeffnungen im Boden, oder in der Seitenwand.

§. 100.

Es sey Fig. 27 bey einem prismatischen Gefäße ABCD

Fig. 27 F der horizontale Querschnitt desselben BC oder AD,
f die Oeffnungsfläche mn;

a Die Höhe Rm des Gefäßes über den Schwerpunct der Oeffnung, oder eigentlich die Vertiefung mR der Oeffnung unter dem Wasserspiegel vor dem Ausflusse;

t die Zeit, in welcher der Wasserspiegel von R bis r sinket;

x die Tiefe Rr, um welche der Wasserspiegel in der Zeit t gesunken ist; und

T die Zeit, in welcher sich das Gefäß bis an die Oeffnung mn ausleeret; endlich

α der Zusammenziehungs-Coefficient $= 0{,}64$, oder $= 0{,}81$, um aus der Oeffnungsfläche den Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles zu finden; so hat man

I. Die Zeit t, in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinket,

$$t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} \cdot [\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}].$$

II. Die Zeit T, in welcher sich das Gefäß bis an die Oeffnung ausleeret,

$$T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}.$$

Um diese Formeln zu erweisen, sey dx das Differenziale der Tiefe x, um welches der Wasserspiegel in dem Differenziale der Zeit dt sinket; so ist Fdx die Wassermenge, welche in dem Zeit-Elemente dt im Raume BEFC abnimmt, und durch die Oeffnung f ausfließt. Eben diese Wassermenge aber ist auch $= \alpha f dt \sqrt{[4g(a-x)]}$ vermöge §. 97. weil während der unendlich kleinen Zeit dt die Druckhöhe mr$=$mR$-$Rr$=a-x$ für ungeändert angesehen werden kann.

Daher ist $F dx = \alpha f dt \sqrt{[4g(a-x)]}$,

und

Fig. 27

und $dt = \frac{F}{2\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$;

daraus folgt durch die Integration

$t = \text{Const.} - \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . \sqrt{(a-x)}$:

nun ist für $x = 0$ auch $t = 0$;

daher $\text{Const.} = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . \sqrt{a}$;

folglich I. $t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}} . [\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}]$,

und weil für $x = a$ die Zeit $t = T$ wird,

so ist II. $T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$.

Anmerkung. Wenn das Gefäß nicht prismatisch ist, sondern eine solche Gestalt hat, daß sich jeder horizontale Querschnitt $= F$ als eine Function der Tiefe x ausdrucken läßt, als z. B. bey einer Halbkugel, bey einem Kegel, Paraboloid, u. s. w); so kann die Zeit der Ausleerung t und T auch mittelst der Integral-Rechnung bestimmet werden, es möge die Ausflußöffnung in dem untersten Theile des Umfanges, oder irgendwo seitwärts angebracht seyn; welches aber zur eigenen Uebung überlassen wird.

Mittelst der Formel I. können verschiedene practische Aufgaben aufgelöset werden, je nachdem t, x, oder f aus den übrigen gegebenen Größen gesuchet wird. Z. B. In einem prismatischen Wasserbehälter, dessen Querschnitt 300 Quadratfuß beträgt, befindet sich 10 Fuß unter dem Wasserspiegel eine Oeffnung von 8 Quadratzoll in einer dicken Wand: um wie viel wird binnen einer halben Stunde der Wasserspiegel sinken? und wie viel Wasser wird abfließen, wenn der Behälter keinen Zufluß erhält? u. s. w.

§. 101.

Fig.

§. 101.

Die Formel II. im §. 100 für die Zeit der Ausleerung eines prismatischen Gefäßes setzet voraus, daß der Wasserstrahl beständig in einerley Dicke ausläuft. Da dieses nun gegen Ende der Zeit T nicht genau statt findet, weil vermöge allgemein bekannter Beobachtungen bey einer noch geringen Druckhöhe ein trichterförmiger Wirbel über der Oeffnung sich bildet; so muß die Zeit, in welcher sich das Gefäß ganz ausleeret, nach der angeführten Berechnung etwas kleiner gefunden werden, als sie wirklich ist. Indessen kann diese Formel doch in der Ausübung zur beyläufigen Berechnung der Zeit des Anfüllens und Ausleerens der Schleusenkammern von gegebener Größe mit Nutzen angewendet werden.

30 Es sey z. B. ABDC Fig. 30 ein Gefäß, welches durch beständigen Zufluß immer bis AC voll erhalten wird; mit diesem sey ein anderes leeres prismatisches Gefäß CDFG verbunden; und die kleine Oeffnung DE sey beyden gemein: so wird sich mittelst dieser Oeffnung das Gefäß CDFG nach und nach mit Wasser anfüllen, so daß in einer bestimmten Zeit das Wasser in beyden Gefäßen einerley Höhe haben wird.

Setzet man nun, daß in dem 2ten Gefäße das Wasser schon bis MQ stehet; so wird die Geschwindigkeit des durch DE ausfließenden Wassers in diesem Augenblicke der Höhe MC als Druckhöhe zugehören, weil bis zur Höhe MD in beyden Gefäßen das Wasser im Gleichgewichte ist; und weil ferner durch Beobachtungen dargethan ist, daß der Ausfluß des Wassers in ein niedriger stehendes Wasser eben so geschieht, als wenn sich das Wasser in die freye Luft ergießt. Die Geschwindigkeit des aus dem ersten in das zweyte Gefäß durch DE fortströmenden Wassers wird desto kleiner, je mehr der Wasserspiegel MQ in die Höhe steiget; und wird endlich $= 0$, wenn solcher in CG anlanget.

Da nun hier die Bewegung des Wasserspiegels MQ aufwärts eben so beschaffen ist, wie im §. 100 abwärts; so muß die dort angegebene Gleichung für die Zeit der Ausleerung

leerung eines prismatischen Gefäßes auch hier für die Zeit Fig.
der Anfüllung auf die erwähnte Art anwendbar seyn. Wenn 30
daher der Querschnitt MQ = CG = F, die Oeffnungsfläche DE = f, die Wasserhöhe CE = a, und der Zusammenziehungs-Coefficient = α gesetzet wird; so ist wie §. 100 die Zeit des Anfüllens des Gefäßes CDFG,

$$T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$$

Man kann diese Gleichung auch unmittelbar durch die Integral-Rechnung finden. Denn es steige der Wasserspiegel MQ in der Zeit t um EM oder DM = x; so wird in dem Zeit-Elemente dt das Wasser im Gefäße CDFG um das Prisma Fdx zunehmen; und diese Wassermenge fließt in diesem Zeit-Elemente dt durch die kleine Oeffnung ED = f bey der Druckhöhe CM = $a - x$ in das Gefäß CDFG: daher ist (vermöge §. 97.) $Fdx = \alpha f dt \sqrt{[4g(a-x)]}$; daraus folgt

$$t = \frac{F}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}[\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}];$$ und die Zeit des

vollständigen Anfüllens $T = \dfrac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$

§. 102.

Es sey nun in einer Schleusenkammer ABIKH Fig.
31 LM der Spiegel des Unterwassers; und in dem Oberthore AB befinde sich eine Oeffnung F. Man fragt, wie viel Zeit wird erfordert werden, damit sich der Raum ABMLH der Kammer bis zur Höhe AH des Oberwassers anfüllet, vorausgesetzt, daß der Spiegel des Oberwassers immer gleich hoch bleibe. 31

Um diese Zeit zu finden, ziehe man durch den Mittelpunct F der Oeffnung eine Horizontale FG; so wird der anzufüllende Kammerraum ABMLH in zwey Theile AFGH, und FBMLG getheilet, von welchen man sich vorstellen kann, daß der untere Theil FBMLG eben so angefüllet werde, als wenn

Fig. wenn bey unveränderlicher Druckhöhe AF die aus den Abmes-
31 sungen der Schleusenkammer bekannte Wassermenge FBMLG aus der Oeffnung F frey ausströmet, wozu sich die dazu gehörige Zeit mittelst der Gleichung $m = \alpha f t \sqrt{4ga}$ des §. 99. n. 3. berechnen läßt. Die Zeit aber, in welcher sich der obere Theil AFGH anfüllet, wird nach der im §. 101. angeführten Formel $T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}$ bestimmet. Nimmt man endlich die für die einzelnen Theile der Schleusenkammer gefundenen Zeiten zusammen, so erhält man die zur Anfüllung des Kammerraumes nöthige Zeit.

Soll endlich die Zeit berechnet werden, in welcher der Wasserspiegel AH in der Schleusenkammer ABIKH um die Tiefe HL bis an den Spiegel des Unterwassers bey L herabsinket, wenn in dem Unterthore HK das Schützbrett vor der Oeffnung aufgezogen, die Oeffnung F aber im Oberthore geschlossen wird; so findet man für die Druckhöhe HL $= a$, für den mittleren Querschnitt der Kammer $= F$, und für die Oeffnungsfläche LK $= f$ die Zeit der Ausleerung des prismatischen Gefäßes AMLH eben so wie im §. 100 mittelst der Formel

$$T = \frac{F\sqrt{a}}{\alpha f g^{\frac{1}{2}}}.$$

§. 103.

Wenn die Ausflußöffnung in einer verticalen Wand eines Wasserbehälters in ihrer lothrechten Höhe in Vergleichung mit der Druckhöhe beträchtlich groß ist; so wird man in den vorhergehenden Fällen nicht mehr annehmen können, daß allen ausfließenden Wassertheilchen gleiche Geschwindigkeit zugehöre, weil die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus einem jeden horizontalen Streifen ausfließt, von der Tiefe abhängt, in welcher dieser Streifen unter dem Wasserspiegel liegt.

Es sey nun FQ Fig. 32 eine lothrechte Wand eines bis FG mit Wasser angefüllten und durch Zufluß beständig

dig

dig voll erhaltenen Gefäßes; und BCDE sey eine recht- winkelige Oeffnung in dieser Wand angebracht; so wird in jedem horizontalen Streifen BE, PM, CD der Ausfluß- öffnung das Wasser in dem Streifen selbst mit gleicher Geschwindigkeit ausströmen. Fig. 32

Man bezeichne durch

a = AC den Wasserstand, das ist, die Höhe des Wasserspiegels über den unteren Rand der Oeffnung,

$$\left.\begin{array}{l} b = \text{CB die Höhe} \\ c = \text{CD die Breite} \end{array}\right\} \text{der Oeffnung,}$$

x = AP die Entfernung eines unbestimmten horizontalen Streifens PM von dem Wasserspiegel FG,

m, die Wassermenge, welche in einer Secunde durch den unbestimmten Theil EBPM ausfließt; und durch

M, die Wassermenge welche in einer Secunde durch die ganze Oeffnung BCDE ausfließt:

so ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers in dem Streifen BE $= \sqrt{4g(a-b)}$, in dem Streifen PM $= \sqrt{4gx}$, und in dem Streifen CD $= \sqrt{4ga}$, weil jeder horizontale Streifen von einer unendlich kleinen Höhe als eine sehr kleine Oeffnung angesehen werden kann, worin das ausströmende Wasser die dazu gehörige Druckhöhe zur Geschwindigkeitshöhe hat.

Es ist daher das Differenziale der Wassermenge dm in dem Streifen PM, dessen Höhe dx und horizontale Breite PM $= c$ ist, vermöge §. 97.

$$dm = \alpha c dx \sqrt{4gx} \text{ wegen } f = c dx;$$

daraus folgt $m = \text{Const.} + 2\alpha c g^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx$;

nähmlich $m = \text{Const.} + \frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$

Für $m = 0$ ist $x = a - b$;

also $\text{Const.} = - \frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} (a - b)^{\frac{3}{2}}$;

und $m = \frac{4}{3}\alpha c g^{\frac{1}{2}} [x^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$.

Setzet

Fig. 32 Setzet man endlich $x = a$, so wird $m = M$; folglich die Wassermenge, welche durch die verticale rechtwinkelige Oeffnung BCDE bey einem beständig voll erhaltenen Gefäße in einer Secunde ausfließt,

$$M = \tfrac{4}{3}acg^{\frac{1}{2}}[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$$

und in t Secunden ist die ausgeflossene

$$\text{Wassermenge} = \tfrac{4}{3}acg^{\frac{1}{2}}t[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}].$$

Wäre die Oeffnung EBCD kein Rechteck, sondern etwa ein gleichschenkeliges Dreyeck mit der Spitze aufwärts oder abwärts gekehret; oder aber ein Kreisabschnitt, oder sonst eine von einer krummen Linie dergestalt begränzte Fläche, daß man die Ordinate PM als eine Function von AP $= x$ durch x ausdrucken kann; so läßt sich sodann auch in solchen Fällen die in einer Secunde ausfließende Wassermenge mittelst der Integral-Rechnung bestimmen; welches aber zur eigenen Uebung und Anwendung der erlernten Integral-Rechnung überlassen wird.

§. 104.

Befindet sich in der verticalen Wand eines Wasserbehälters eine kreisförmige Ausflußöffnung; so läßt sich die in einer gegebenen Zeit ausfließende Wassermenge bey einem beständig voll erhaltenen Behälter auf vorberührte Art mittelst der Integral-Rechnung bestimmen. Allein folgende zu erst vom Hrn Langsdorf angegebene Näherung ist hierzu bequemer, und für die Ausübung hinlänglich genau.

Man setze den Durchmesser der lothrechten kreisförmigen Ausflußöffnung $= b$, und die Tiefe des untersten Punctes unter dem Wasserspiegel $= a$, wo $a > b$ vorausgesetzt wird; ferner stelle man sich vor, daß um diese kreisförmige Oeffnung ein Quadrat mit verticalen und horizontalen Seiten umgeschrieben sey: so ist die Fläche eines solchen Quadrats $= b^2$, und die Kreisfläche $= \tfrac{1}{4}\pi b^2$. Nun ist die Wassermenge in t Secunden bey einer solchen quadratförmigen Oeffnung $= \tfrac{4}{3}abg^{\frac{1}{2}}t[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$ wegen §. 103; und diese verhält sich ohne merklichen Fehler zur

Was-

Wassermenge bey der kreisförmigen Oeffnung, wie die Quadratfläche b^2 zur Kreisfläche $\frac{1}{4}\pi b^2$, nähmlich wie 1 zu $\frac{1}{4}\pi$. Fig.

Daher ist die ausfließende Wassermenge in t Secunden bey einer lothrechten kreisförmigen Oeffnung eines beständig voll erhaltenen Wasserbehälters

$$M = \tfrac{1}{3}\alpha\pi b g^{\frac{1}{2}} t[a^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}].$$

Bey dieser, wie bey den vorhergehenden Formeln wird $\alpha = 0,64$, oder $\alpha = 0,81$ gesetzet; je nachdem die Oeffnungen in einer dünnen Metallplatte angebracht, oder aber mit kurzen Ansatzröhren versehen sind. Sind die Oeffnungen in beträchtlich dicke Wände eingeschnitten, so sind solche ebenfalls als kurze Ansatzröhren zu betrachten; und daher ist auch für solche $\alpha = 0,81$.

Nach der letzten Formel kann man nun die Wassermenge berechnen, welche aus einer in einer dünnen Metallplatte angebrachten, lothrechten kreisförmigen Oeffnung von 1 Zoll im Durchmesser, wenn der Wasserspiegel nur 1 Linie über dem höchsten Puncte der Oeffnung erhalten wird, binnen 1 Minute ausfließt. Eine solche Wassermenge nennen einige zuweilen einen Wasserzoll. Die Redensart, eine Quelle gibt eine gewisse Anzahl Wasserzolle, wird dadurch verständlich; obschon es deutlicher ist, wenn die Wassermenge, die eine solche Quelle in einer bestimmten Zeit gibt, im gewöhnlichen Kubikmaß, oder auch im Gewichte des Wassers ausgedrucket wird.

§. 105.

Wenn die verticale Ausflußöffnung oben nicht geschlossen, sondern offen ist, so daß sie oben durch den Wasserspiegel begränzet wird; so ist die Höhe des Wasserstandes der Höhe der Oeffnung gleich, nähmlich $a = b$.

Für $a = b$ in der Formel des §. 103 findet man daher die Wassermenge M in t Secunden aus einer oben offenen rechtwinkeligen Ausflußöffnung in einer lothrechten Wand eines beständig voll erhaltenen

Was-

Fig. Wasserbehälters bey dem Wasserstande $= b$ und bey der Breite der Oeffnung $= c$

$$M = \tfrac{4}{3}\alpha bcg^{\frac{1}{2}}t\sqrt{b},$$

wo man $\alpha = 0,64$ setzen kann, weil dergleichen oben offene rechtwinkelige Einschnitte gemeiniglich trichterförmig gemacht werden, so daß der innere Rand der Oeffnung scharf ist, gleichsam wie in einer dünnen Metallplatte.

§. 106.

Bey dem Ausflusse des Wassers aus lothrechten Oeffnungen von beträchtlicher Höhe, wo jeder horizontale Streifen mit einer andern Geschwindigkeit ausströmt, ungeachtet der Wasserspiegel durch einen Seitenzufluß in einerley Höhe erhalten wird, nennet man die mittlere Geschwindigkeit diejenige, bey welcher die Wassermenge, wenn jedes Wassertheilchen mit dieser Geschwindigkeit ausströmete, eben so groß wäre, als die Wassermenge bey den verschiedenen Geschwindigkeiten der horizontalen Wasserstreifen wirklich ist.

Setzet man nun im §. 103 die mittlere Geschwindigkeit $= k$; so ist die Wassermenge in einer Secunde für diese Geschwindigkeit $= \alpha bck$; diese Wassermenge aber ist vermöge §. 103 $= \tfrac{4}{3}\alpha cg^{\frac{1}{2}}[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$; es ist daher $\alpha bck = \tfrac{4}{3}\alpha cg^{\frac{1}{2}}[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]$: und daraus folget für eine verticale rechtwinkelige Oeffnung die mittlere Geschwindigkeit

$$k = \frac{\tfrac{4}{3}g^{\frac{1}{2}}[a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}]}{b}$$

und die dieser mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe ist

$$\frac{k^2}{4g} = \tfrac{4}{9}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}}{b}\right]^2.$$

Es sey z. B. $a = 16$, und $b = 7$, so ist die der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= 12,417$. Die zum Schwerpuncte einer solchen rechtwinkeligen Oeffnung gehörige Druckhöhe ist $= 12,5$; jene ist daher dieser beynahe

nahe gleich. Ueberhaupt wenn der Wasserstand a die Höhe b einer lothrechten Oeffnung einige Mahle übertrifft; so ist sehr nahe der Schwerpunct der Oeffnung derjenige Punct, wo die mittlere Geschwindigkeit statt findet. Fig.

Im §. 105 ist für die mittlere Geschwindigkeit $= k$ die Wassermenge in einer Secunde $\frac{2}{3} abcg^{\frac{1}{2}} \sqrt{b} = abck$; folglich ist die mittlere Geschwindigkeit $k = \frac{2}{3} \sqrt{4gb}$, und deren Geschwindigkeitshöhe $\frac{k^2}{4g} = \frac{4}{9}b$. Bey rechtwinkeligen verticalen Oeffnungen, die oben offen sind; ist daher die der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe gleich $\frac{4}{9}$ des Wasserstandes über den Rand der Oeffnung.

Es wird sowohl bey den rechtwinkeligen oben offenen, als auch bey den vorher erwähnten Ausflußöffnungen in einer lothrechten Wand eines beständig voll erhaltenen Wasserbehälters vorausgesetzt, daß die Oeffnungsfläche in Vergleichung mit der Wandfläche und mit dem horizontalen Querschnitte oder mit dem Wasserspiegel noch immer ziemlich klein sey (wie im §. 93.), so daß das Wasser aller Orten im Behälter beynahe als ruhend angesehen werden könne.

§. 107.

Was bisher von der Geschwindigkeit und von der Menge des aus kleinen Oeffnungen im Boden oder in der Wand eines Gefäßes ausströmenden Wassers beygebracht worden ist, gilt überhaupt von einer jeden unelastischen Flüssigkeit von gleichförmiger Dichtigkeit. Z. B. Die Geschwindigkeit des aus einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes unter der Druckhöhe a ausströmenden Quecksilbers ist auch $c = \sqrt{4ga}$. Die Ausleerungszeit eines Gefäßes ist einerley, es möge solches mit Wasser oder mit Quecksilber angefüllet seyn.

Wären hingegen verschiedene Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit ober der Ausflußöffnung im Gefäße über einander befindlich; so muß man aus den bekannten specifi-

Fig. schen Gewichten die Pressungen der verschiedenen Flüssigkeiten gegen die Oeffnungsfläche in andere flüssige Säulen verwandeln, welche mit der ausströmenden Flüssigkeit einerley Dichtigkeit und dabey eine solche Höhe haben, daß die Pressung gegen die Ausflußöffnung eben dieselbe verbleibe. Auf diese Art erhält man die eigentliche Druckhöhe der gesammten Pressung gegen die ausströmende Schichte; nähmlich die Höhe einer gleichgültigen Säule, welche in ihrem ganzen Inhalte mit der ausströmenden Schichte einerley Flüssigkeit enthält; und diese auf die Dichtigkeit der ausströmenden Flüssigkeit reducirte Druckhöhe ist die der gesuchten Geschwindigkeit zugehörige Höhe.

Wäre nun ein Gefäß von der Ausflußöffnung an bis zu einer Höhe von 3 Fuß mit Quecksilber, und von da an noch weiters 7 Fuß hoch mit Wasser angefüllet, dessen Dichtigkeit nur $\frac{1}{14}$ des Quecksilbers sey; so wird die Oeffnungsfläche von dem anliegenden Quecksilber so stark gepresset, als wenn das Gefäß durchaus mit Quecksilber jedoch nur bis zur Höhe von $3\frac{1}{2}$ Fuß angefüllet wäre; die Wasserhöhe von 7 Fuß ist nähmlich gleichgültig mit einer Quecksilberhöhe von $7 \times \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$ Fuß. Die Druckhöhe gegen die Quecksilberschichte an der Oeffnung ist daher in einem solchen Falle $= 3\frac{1}{2}$ Fuß und die Geschwindigkeit des ausströmenden Quecksilbers $c = \sqrt{(4 \times 15\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2})} = 14{,}73$ Fuß.

Wäre ein auf die angeführte Art gefülltes Gefäß in Gestalt eines Springbrunnens eingerichtet; so würde der springende Quecksilberstrahl bey der vortheilhaftesten Einrichtung nur eine Höhe von höchstens $3\frac{1}{2}$ Fuß erreichen. Wenn hingegen die Vorrichtung so getroffen wäre, daß das Wasser unten, das Quecksilber oben, und zwar wie ehevor die Druckhöhe des Wassers von der Ausflußoffnung an 7, und des Quecksilbers weiter hinauf 3 Fuß wäre; so müßte der Quecksilberdruck von 3 Fuß Höhe in einen gleichgültigen Wasserdruck von der Höhe $3 \times 14 = 42$ Fuß verwandelt werden: es wäre daher die gesammte Druckhöhe gegen die Wasserschichte an der Ausflußöffnung $= 49$ Fuß, und die

Geschwin-

Geschwindigkeit des ausströmenden Wasserstrahles $c = \sqrt{(4 \times 15\frac{1}{2} \times 49)} = 55,1$ Fuß. Fig.

§. 108.

Die Lehre von dem Ausflusse des Wassers aus Gefäßen wollen wir mit folgender Untersuchung beschließen.

Gewöhnliche atmosphärische Luft von einer 900 mahl geringeren Dichtigkeit als Wasser, und von einer solchen Elasticität, daß die Elasticitäts-Druckhöhe der Wasserdruckhöhe von 32 Fuß gleich sey, befinde sich in einem Gefäße eingeschlossen. Ringsherum gedenke man einen unbegränzten, und vollkommen leeren Raum. In dem Gefäße werde sodann eine kleine Oeffnung gemacht. Man fragt: Mit welcher Geschwindigkeit wird die Luft auszuströmen anfangen? und wie groß ist diese Geschwindigkeit, nachdem bereits eine gegebene Menge Luft aus dem Gefäße entflohen ist?

Um die Geschwindigkeit $= c$ der ausströmenden Luft bey den angenommenen Umständen zu finden, sey wie Fig. 27 die Oeffnungsfläche $= f$ Quadratfuß; so ist die Masse der zum Ausströmen angetriebenen Luftschichte von einer unendlich kleinen Dicke e, nähmlich die zu bewegende Masse $= fe \cdot \frac{1}{900}$, und die bewegende Kraft $= f \cdot 32$ für das eigenthümliche Gewicht eines Kubikfußes Wasser $= 1$. Vermöge der allgemeinen Formel $c^2 = \frac{4gPs}{M}$ (3. Th. §. 50.) für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, $P = 32f$, $M = \frac{ef}{900}$, und $s = e$ ist daher die Geschwindigkeit, welche die ausströmende Luftschichte ef nach Zurücklegung des unendlich kleinen Weges e, das ist gleich im Anfange der Bewegung erlanget, $c = \sqrt{(62 \times 32 \times 900)} = 1336$ Fuß; und die der Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft bey den angeführten Umständen zugehörige Höhe ist $\frac{c^2}{4g} = 32 \times 900 =$

 28800

Fig. 28800 Fuß = der auf eine Wasserdruckhöhe reducirten Elasticitätshöhe multipliciret mit der Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit gegen Luftdichtigkeit.

Nun sey bereits $\frac{1}{n}$ der anfänglichen Luft aus dem Gefäße durch die Oeffnung f entflohen, und habe sich ringsherum in dem unbegränzten leeren Raume verbreitet, oder sey gleichsam gänzlich verschwunden; die noch übrige nun verdünnte Luft aber $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ sey vermöge ihrer noch beyhabenden Elasticität in dem Gefäße gleichförmig verbreitet, so ist sodann die Dichtigkeit der noch im Gefäße eingeschlossenen Luft $= (\frac{n-1}{n}) . \frac{1}{900}$, und die auf den Wasserdruck reducirte Elasticitätshöhe (vermöge §. 68.) nur noch $= (\frac{n-1}{n}) . 32$ Fuß; die zu bewegende Masse M ist daher in diesem Falle die Luftschichte $= f . e . (\frac{n-1}{n}) . \frac{1}{900}$, und die bewegende Kraft P ist $= f . (\frac{n-1}{n}) . 32$; folglich ist die Geschwindigkeitshöhe der nun verdünnten ausströmenden Luft $=$

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{Ps}{M} = f . (\frac{n-1}{n}) . 32 \times e \times \frac{n900}{f.e.(n-1)} =$$

$32 \times 900 = 28800$ Fuß, eben so groß, wie im Anfange der Ausströmung bey der größeren Dichtigkeit und Elasticität.

Würde anfänglich so viel Luft in das Gefäß hineingepresset, daß ihre Dichtigkeit $n$mahl größer wäre, als die Dichtigkeit der gewöhnlichen atmosphärischen Luft $\frac{1}{900}$ der Wasserdichtigkeit; so wäre auch die auf den Wasserdruck reducirte Elasticitätshöhe $n$mahl größer als die Elasticitätshöhe von 32 Fuß der gewöhnlichen Luft; und

und das Product aus der Elasticitätshöhe $32n$ multi- Fig.
pliciret mit der Verhältnißzahl $\frac{900}{n}$ der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit, als die der Ausströmungsgeschwindigkeit zugehörige Höhe wäre auch $= 32n \times \frac{900}{n} = 32.900 = 28800$ Fuß, eben so groß wie in den vorher bemerkten Fällen.

Die in einem Gefäße eingeschlossene atmosphärische Luft, es möge solche darin wie immer verdichtet, oder wie immer verdünnet seyn, strömet also durch eine gemachte Oeffnung in einen unbegränzten leeren Raum unaufhörlich mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit hinaus, so lange die noch im Gefäße übrige Luftmenge elastisch verbleibet; und die Geschwindigkeitshöhe einer solchen Ausströmungsgeschwindigkeit ist gleich der auf den Wasserdruck reducirten Elasticitätshöhe multipliciret mit der Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit.

Wäre anstatt der atmospärischen eine andere, z. B. brennbare Luft (welche bey der auf Wasserdruck reducirten Elasticitätshöhe von 32 Fuß 9mahl dünner sey als atmosphärische Luft, und deren Dichtigkeit also nur $\frac{1}{9 \times 900} = \frac{1}{8100}$ der Wasserdichtigkeit ist) in einem Gefäße eingeschloßen; und es würde dieser so eingeschlossenen Luft durch eine Oeffnung der Ausgang in einen unbegränzten leeren Raum gestattet: so wäre die der Ausströmungsgeschwindigkeit zugehörige Höhe $= 32 \times 8100 = 259200$ Fuß; da hier die Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit 8100 ist. Eine solche Luft würde daher mit der unveränderlichen Geschwindigkeit $c = \sqrt{62 \times 259200} = 4008$ Fuß in einen unbegränzten leeren Raum unaufhörlich hinausströmen.

Nun ist es auch leicht zu bestimmen, mit welcher Ge-

Fig. Geschwindigkeit die in einem Gefäße zusammen gepreßte Luft durch eine Verbindungsöffnung in ein anderes Gefäß, worin eine eben solche Luftart von eben der Temperatur, aber von geringerer Dichtigkeit befindlich ist, einzuströmen anfängt, und mit immer abnehmender Geschwindigkeit so lange fort strömet, bis die Luft in beyden Gefäßen von einerley Dichtigkeit, und so im Gleichgewichte ist. Wenn nähmlich die Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit im ersten Gefäße bey der zusammen gepreßten Luft $= n$, im zweyten bey der dünneren Luft $= N$, und die auf Wasserdruck reducirte Elasticitätshöhe im ersten Gefäße $= a$ ist; so ist die Elasticitätshöhe der Luft im 2ten Gefäße nur $= \frac{na}{N}$ (vermöge §. 67.); die Luftschichte $= f \, . \, e \, . \, \frac{1}{n}$ an der Oeffnung f im ersten Gefäße wird daher in das 2te Gefäß mit einer Kraft $= f \, . \, a$, und von der dünneren Luft im 2ten Gefäße nach der entgegen gesetzten Richtung mit der Kraft $= f \, . \, \frac{na}{N}$ gepresset. Daraus folgt die bewegende Kraft $P = fa - \frac{nfa}{N} = af.(\frac{N-n}{N})$, wodurch im Anfange der Bewegung die Luftschichte $f.e. \, \frac{1}{n}$ als die zu bewegende Masse M in der Verbindungsöffnung f aus dem ersten Gefäße in das 2te getrieben wird; und folglich ist die zur Ausströmungsgeschwindigkeit c im Anfange der Bewegung zugehörige Höhe $\frac{c^2}{4g} = \frac{na(N-n)}{N}$ wegen der allgemeinen Formel $\frac{c^2}{4g} = \frac{Ps}{M}$ für $P = \frac{af(N-n)}{N}$, $M = fe. \frac{1}{n}$, und $s = e$; wo nun die Ausströmungs-

geschwin-

geschwindigkeit immer kleiner wird, je mehr sich N und n Fig.
der Gleichheit nähern, so daß für $N = n$ die Geschwindigkeit $= 0$ ist; für $N = \infty$ aber in Rücksicht n ist $\frac{c^2}{4g} = an$ wie bey der Ausströmung der Luft in einen leeren Raum.

II. Abschnitt.

Von dem Stoße des fließenden Wassers gegen die Oberflächen der eingetauchten festen Körper.

§. 109.

Stößt fließendes Wasser senkrecht gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feste Ebene, deren Flächeninhalt in Vergleichung mit dem Querschnitte des fließenden Wassers klein ist, damit das anstossende Wasser ringsherum frey abfließen könne; so ist der gegen eine solche Ebene entstehende Stoß oder hydraulische Druck dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die angestoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat. Wenn nähmlich Fig. 33 der In- 33
halt der Fläche AB $= f$ Quadratfuß (es ist AB die Ansicht von oben einer dem senkrechten Wasserstoße ausgesetzten festen Ebene), das Gewicht eines Kubikfußes Wasser $= q$ Pfund, die Geschwindigkeit des Wassers $= c$, die bekannte Beschleunigung der Schwere $= g$ Fuß, und der gesuchte Wasserstoß $= P$ gesetzet wird, so ist

$P =$

Fig. 33

$$P = \frac{c^2 fq}{4g}.$$

Um diese Wahrheit einzusehen, gedenke man statt der festen Ebene AB eine feste Masse mit dem Wasser von einerley Dichtigkeit in Gestalt eines geraden Prisma, welches die Ebene AB $= f$ zur Grundfläche, und nach der Richtung des Wasserstromes eine unendlich kleine Dicke $= e$ habe. Wenn nun ein solches Prisma dem senkrechten Stoße des Wassers ausgesetzet, und sodann der Wirkung desselben mit Beseitigung der festhaltenden Kraft plötzlich überlassen wird; so erhält es sogleich mit dem fortfließenden Strome die diesem eigene Geschwindigkeit $= c$, so wie ein in fortfließendes Wasser gefallener Regentropfen. In einem solchen Falle sind die bewegte Masse oder das Gewicht des erwähnten Prisma $M = feq$, und die Geschwindigkeit $= c$, welche die bewegte Masse nach Zurücklegung des unendlich kleinen Weges e, das ist gleich im Anfange der Bewegung wie bey der Ausströmung des Wassers durch eine kleine Oeffnung erlanget, bekannt; die bewegende Kraft $= P$ aber, welche hier der Wasserstoß ist, und während der unendlich kleinen Zeit, in der die Geschwindigkeit $= c$ erzeuget wird, für unveränderlich angesehen werden kann, ist zu suchen. Diese Kraft P findet man aus der bekannten allgemeinen Formel $c^2 = \frac{4gPs}{M}$ (3. Th. §. 50.) wo in diesem Falle $M = feq$, und $s = e$ ist; es ist also hier $P = \frac{c^2 fq}{4g} = f \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q =$ dem Gewichte eines Wasser-Prisma von der Grundfläche f und von der Höhe oder Länge $\frac{c^2}{4g}$, welche letztere die Geschwindigkeitshöhe des fließenden Wassers ist. Soll nun nach der entgegen gesetzten Richtung eine Kraft angebracht werden, welche dem Wasserstoße gegen die Fläche f das Gleichgewicht hält, und so die Bewegung des erwähnten festen Prisma verhindert; so muß diese entgegen wirkende Kraft offenbar eben so groß seyn, als der gefundene Wasserstoß $p = \frac{c^2 fq}{4g}$. Sind zwey solche Kräfte, die gegen das erwähnte feste Prisma nach entgegen gesetzten Richtungen wirken, einmahl im Gleichgewichte; so wird das Gleichgewicht nicht gestöret, wenn sodann statt des erwähnten festen Prisma nur eine feste Ebene des Inhalts $= f$, oder auch ein anderes festes Prisma von eben derselben Grundfläche $= f$, aber von einer anderen beliebigen Länge und Dichtigkeit zwischen die zwey entgegen gesetzten Kräfte gestellet wird. Auch wird der gefundene Wasserstoß gegen die Fläche f nicht geändert, wenn anstatt der nach entgegen gesetzter Richtung wirkenden, den Wasserstoß aufhaltenden Kraft eine sonstige Festhaltung der Fläche f angebracht wird, welche das Ausweichen dieser Fläche verhindert. **Der senkrechte Stoß des fließenden Wassers gegen eine eingetauchte und unbeweglich gehaltene feste Ebene, oder auch gegen die Grundfläche eines festgehaltenen geraden Prisma ist daher gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die gestoßene Ebene zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit des fließenden Wassers zugehörige Höhe zu ihrer Länge hat.**

Es muß aber, damit dieser Satz in der Ausübung zutreffe, die dem Stoße ausgesetzte Fläche in Vergleichung mit dem Querschnitte des fließenden Wassers nur klein seyn, damit das anstoßende Wasser frey abfließen könne, und in seiner Bewegung nicht merklich geändert werde, weil sonst, wenn die dem Stoße ausgesetzte Fläche beynahe so groß ist, als der Querschnitt des fließenden Wassers, eine Aufschwellung vorwärts der Stoßfläche, und eine Erniedrigung des Wassers hinter derselben verursachet wird, wodurch nicht nur die Geschwindigkeit des Wassers sich ändert, sondern der hydraulische Stoß auch noch mit einem hydrostatischen Drucke verbunden ist.

Die Dicke des Prisma, und die Länge des Weges e muß man in dem geführten Beweise unendlich klein annehmen, Fig. men, eigentlich nur so klein, daß die gesuchte bewegende Kraft während der Zurücklegung des Weges e für unveränderlich angesehen werden könne.

§. 110.

Wie groß nun der senkrechte Wasserstoß gegen eine feste Fläche $= f$ von beträchtlicher Ausdehnung sey, wenn der gegebene Querschnitt $= F$ des fließenden Wassers auch in Erwägung gezogen werden soll, läßt sich bloß allein aus den Gründen der Mechanik nicht ableiten. Indessen haben einige darüber angestellte Versuche gezeigt, daß man in einem solchen Falle den senkrechten Wasserstoß für die Geschwindigkeit $= c$, und für das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= q$ durch folgende Formel vorstellen könne,

$$P = \frac{c^2 fq}{4g} . \left(1 + \frac{f}{F}\right),$$

wo für $F = \infty$ in Vergleichung mit f der Stoß so groß wird, wie im §. 109; für $f = F$ aber ist er doppelt so groß, das ist, die den Wasserstoß vorstellende Säule auf der Grundfläche f hat die 2fache Geschwindigkeitshöhe zu ihrer Länge.

§. 111.

Aus dem gefundenen Werthe für den senkrechten Stoß $P = \frac{c^2 fq}{4g}$ des fließenden Wassers gegen eine feste Ebene (§. 109.) kann man verschiedene nützliche Folgen ableiten. Z. B.

1) **Bey verschiedenen Geschwindigkeiten des fließenden Wassers ist der senkrechte Stoß den quadrirten Geschwindigkeiten proportional.** Denn weil $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{C^2 fq}{4g}$ für eine andere Geschwindigkeit C ist; so ist auch $P : P' = c^2 : C^2$.

2) **Bey einerley Geschwindigkeit und verschiedenen Stoßflächen ist der senkrechte Wasserstoß den Stoßflächen**

Fig.

flächen proportional. Denn aus $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{c^2 Fq}{4g}$ folgt $P : P' = f : F$.

3) Bey verschiedenen Geschwindigkeiten und verschiedenen Stoßflächen ist der senkrechte Wasserstoß dem Producte aus den Stoßflächen in die quadrirten Geschwindigkeiten proportional. Denn aus $P = \frac{c^2 fq}{4g}$, und $P' = \frac{C^2 Fq}{4g}$ folgt $P : P' = c^2 f : C^2 F$.

4) Der senkrechte Wasserstoß gegen eine ebene Fläche von 1 Quadratfuß bey der Geschwindigkeit des Wassers von 1 Fuß für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und $q = 56\frac{3}{8}$ Pfund ist $= 29\frac{1}{10}$ Loth Wiener Gewicht. Daraus kann man nach 1) 2) oder 3) in jedem andern Falle den senkrechten Wasserstoß in Wien. Pfunden berechnen.

5) Ist die anstoßende Flüssigkeit nicht gemeines Wasser; so muß man für eine solche Flüssigkeit den Werth von q als das Gewicht eines Kubikfußes gehörig bestimmen, um nach der angeführten Formel den Stoß berechnen zu können. Z. B. Bey dem Stoße des Windes ist $q = \frac{56\frac{3}{8}}{900}$ Pfund, wenn die Verhältnißzahl der Wasserdichtigkeit zur Luftdichtigkeit $= 900$ ist. Bey einer solchen Dichtigkeit der Luft sind Windstoß und Wasserstoß gegen gleich große Flächen einander gleich, wenn die Geschwindigkeit des Wassers nur $\frac{1}{30}$ der Geschwindigkeit des Windes beträgt. Denn bey dieser Voraussetzung ist der senkrechte Windstoß $= \frac{c^2 f}{4g} \cdot \frac{56\frac{3}{8}}{900}$ gegen eine Fläche f bey der Geschwindigkeit des Windes c; und der senkrechte Wasserstoß bey der Geschwindigkeit $\frac{c}{30}$ gegen die nähmliche ebene Fläche ist $= \frac{c^2 f . 56\frac{3}{8}}{900 . 4g}$ eben so groß wie der Windstoß. Man findet daher auch

den

Fig. den senkrechten Windstoß gegen eine ebene Fläche, wenn man für den 30ten Theil der gegebenen Geschwindigkeit des Windes den Wasserstoß gegen die nähmliche Stoßfläche berechnet.

§. 112.

1) Der schiefe Wasserstoß gegen eine ebene Fläche nach der darauf senkrechten Richtung ist gleich dem senkrechten Stoße gegen eine eben so große Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Wasserstromes.

2) Nach der Richtung des Wasserstromes aber ist der schiefe Stoß gleich dem senkrechten Stoße gegen eine eben so große Fläche multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

3) Nach einer auf den Strom senkrechten Richtung endlich ist der schiefe Wasserstoß gleich dem senkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus, und mit dem einfachen Cosinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

34 Wenn nähmlich eine feste Ebene BC $= f$ Fig. 34 unter dem Neigungswinkel BAF $= \phi$ dem Stoße eines nach der Richtung FAE mit einer Geschwindigkeit $= c$ fließenden Stromes ausgesetzet wird, und g bedeutet wie bisher die Beschleunigung der Schwere, q aber das eigenthümliche Gewicht eines Kubikfußes der stoßenden flüssigen Masse; so leidet die Stoßfläche BC

1) nach der auf BC senkrechten Richtung AG eine Pressung $= \frac{c^2 fq.\sin^2\phi}{4g}$,

2) nach der Richtung des Stromes FAE eine Pressung $= \frac{c^2 fq.\sin^3\phi}{4g}$,

3)

3) nach einer auf FAE senkrechten Richtung von A nach H eine Pressung $= \frac{c^2 fq.\sin^2\varphi.\cos\varphi}{4g}$. Fig. 34

Um diese Wahrheiten einzusehen zerfälle man die Geschwindigkeit $= c$ des Stromes mittelst des Rechteckes AGEI in zwey andere gleichgültige Geschwindigkeiten, eine senkrecht auf BC nach der Richtung AG, und die andere nach der Richtung AI oder GE parallel mit BC. Wenn man nun die gegebene Geschwindigkeit $c =$ AE setzet; so ist die Geschwindigkeit nach der auf BC senkrechten Richtung AG $= c.\ \sin\varphi$, weil AG : AE ($c =$ sin AEG (sin φ : sintot (1 sich verhält; die andere Geschwindigkeit aber nach der Richtung AI ist $= c.\ \cos\varphi$. Diese letztere, da ihre Richtung mit der Ebene CB parallel ist, bewirket keinen Stoß gegen diese Ebene; vermöge der ersteren Geschwindigkeit $c.\sin\varphi$ aber nach der auf BC senkrechten Richtung AG wird die Ebene BC nach dieser Richtung AG so stark gepresset, als wenn ein mit der Geschwindigkeit $c.\sin\varphi$ fortfließender Strom gegen solche senkrecht fließe. Wegen §. 109. ist daher nach dieser Richtung AG die Pressung oder der Stoß $= \frac{c^2\sin^2\varphi}{4g}.fq = \frac{c^2 fq}{4g}.\ \sin^2\varphi =$ dem senkrechten Stoße multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels.

Um die Pressungen der Ebene BC nach der Richtung AE in der Verlängerung der Stromrichtung, und auch nach AH senkrecht auf FE zu bestimmen, darf man nur die bereits gefundene Pressung nach der Richtung AG in zwey andere gleichgültige mittelst des Rechteckes HK zerlegen. Wenn man nähmlich die schon gefundene Pressung $\frac{c^2 fq.\sin^2\varphi}{4g} =$ AG setzet; so ist vermöge des Kräften-Parallelogramms HK nach der Richtung FAE die Pressung oder der Stoß AK $=$ AG.sin AGK $= \frac{c^2 fq.\sin^2\varphi}{4g} \times \sin\varphi =$

Fig. 34 $\frac{c^2 fq.\sin^3\varphi}{4g}$; und nach der auf FE senkrechten Richtung von A gegen H ist der Stoß AH $=$ AG.cosHAG $=$ $\frac{c^2 fq.\sin^2\varphi.\cos\varphi}{4g}$. Der schiefe Wasserstoß gegen eine feste ebene Fläche nach der Richtung des Stromes ist daher gleich dem senkrechten Stoße gegen eine eben so große Fläche multiplicirt mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels; nach der auf den Strom senkrechten Richtung aber ist der schiefe Wasserstoß gleich dem senkrechten multipliciret mit dem quadrirten Sinus und mit dem einfachen Cosinus des Neigungswinkels der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes.

§. 113.

Es gibt eine Lage der festen Ebene BC, bey welcher der Stoß $\frac{c^2 fq.\sin^2\varphi.\cos\varphi}{4g}$ nach der auf den Strom senkrechten Richtung AH §. 112. ein Größtes wird. Denn sowohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = 90°$ ist dieser Wasserstoß $= 0$. Dieser Wasserstoß wächst nähmlich bey einerley c, f, q mit dem Zunehmen des Winkels φ von 0 bis auf einen gewissen bestimmten Werth, und nimmt sodann bey dem weiteren Wachsen des Winkels φ wieder ab, so daß er für $\varphi = 90°$ wieder $= 0$ wird.

Um den Neigungswinkel φ zu finden, bey welchem eine dem Wasserstrome nach einer schiefen Richtung ausgesetzte feste Ebene nach der auf den Strom senkrechten Richtung den größten Stoß leidet, darf man nur den gefundenen Werth für diesen Stoß $\frac{c^2 fq}{4g} \times \sin^2\varphi\cos\varphi$, oder wegen des beständigen Factors eigentlich nur $\sin^2\varphi.\cos\varphi$ differenziren, und das Differenziale $= 0$ setzen; auf diese Art erhält man eine Gleichung, woraus sich der gesuchte Winkel φ bestimmen läßt.

Es

Es ist nähmlich Fig. 34

$d(\sin^2\varphi.\cos\varphi) = 2d\varphi.\sin\varphi\cos^2\varphi - d\varphi.\sin^3\varphi = 0$ daraus folgt $2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, oder $2(1-\sin^2\varphi) = \sin^2\varphi$, und $2 = 3\sin^2\varphi$; folglich $\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = 0{,}8164966$, und der gesuchte Neigungswinkel $\varphi = 54^\circ\ 44'$.

Diese Untersuchung findet bey den so genannten fliegenden Brücken ihre Anwendung. Wenn man nähmlich die fliegende Brücke so stellet, daß bey ihrer Bewegung von einem Ufer zum anderen die Richtung des Stromes mit der Mittellinie der fliegenden Brücke einen Winkel von beyläufig $54\frac{3}{4}$ Grad einschließt; so wird die auf die Richtung des Stromes senkrechte Kraft, wodurch die an einem langen Seile befestigte fliegende Brücke von einem Ufer zum anderen getrieben wird, ein Größtes seyn, und auf diese Art die Ueberschiffung in der kürzesten Zeit geschehen.

Auf dieselbe Art, wie man den vortheilhaftesten Neigungswinkel für eine fliegende Brücke gefunden hat; läßt sich auch bey den Windmühlen der Winkel bestimmen, unter welchem die Flächen der Windflügel gegen ihre Umdrehungsachse oder gegen die Richtung des Windes geneigt seyn müssen, damit der die Umdrehung des Windflügelrades bewirkende Stoß ein Größtes wird.

§. 114.

Wenn man in die Gleichungen für den schiefen Wasserstoß im §. 112 anstatt der Stoßfläche BC $= f$ den Querschnitt BD $= b$ des gegen solche anstoßenden Wassers hineinbringt, so ist

1) Der Stoß nach der auf BC senkrechten Richtung AG $= \frac{bc^2q}{4g}.\sin\varphi =$ dem senkrechten Wasserstoße gegen eine dem Querschnitte des anstoßenden Wasserstrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche.

2)

Fig. 34 2) Der Stoß nach der Richtung des Wassers AK ist $= \frac{bc^2q}{4g}.\sin^2\phi =$ dem senkrechten Stoße gegen eine dem Querschnitte des anstoßenden Wasserstrahles gleiche Fläche multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels der Stromrichtung gegen die Stoßfläche.

Denn für BC $= f$, BD $= b$, und FAB $=$ DCB $= \varphi$ ist $f = \frac{b}{\sin\varphi}$; folglich erhält man allhier 1) und 2) wenn man in §. 112. 1) und 2) den Werth $\frac{b}{\sin\varphi}$ statt f substituiret.

§. 115.

Wenn man nun ein gerades Parallelepipedum AD
35 Fig. 35 mit seiner Grundfläche AB $= b$ dem senkrechten Stoße eines mit der Geschwindigkeit c nach der Richtung FG fließenden Stromes gerade entgegen setzt; so ist vermöge §. 109. der senkrechte Stoß oder Druck gegen die Fläche AB nach der Richtung des Stromes $= \frac{bc^2q}{4g}$ für das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeit q; so groß muß demnach auch die nach einer entgegen gesetzten Richtung angebrachte Kraft seyn, um diesem Stoße das Gleichgewicht zu halten.

Verbindet man aber mit der Grundfläche AB dieses Parallepipedums einen Keil AFB von der Höhe EF $= a$; so leiden die zwey gleichen Seitenflächen des Keiles FA und FB zusammen genommen, und daher auch das Parallelepipedum von dem nach der Richtung FG anstoßenden Strome einen schiefen Stoß, dessen Größe nach der Richtung FG (vermöge §. 114.) gleich ist dem senkrechten Stoße $\frac{bc^2q}{4g}$ gegen AB multipliciret mit dem quadrirten Sinus des Neigungswinkels BFE oder AFE. Es ist aber, wenn die

die Linie BA $= k$ gesetzet wird, $\sin^2 BFE = \frac{k^2}{k^2 + 4a^2}$ Fig. 35
wegen $\sin BFE : EB(\frac{1}{2}k = \text{sintot}(1 : BF(\sqrt{[\frac{1}{4}k^2 + a^2]}$; folglich ist der Stoß gegen ein solches mit einem angesetzten Keile versehenes Parallelepipedum nach der Richtung des Stromes $= \frac{bc^2q}{4g} \cdot \frac{k^2}{k^2 + 4a^2}$.

Ist $a = \frac{1}{2}k$, nähmlich FE = EB = EA, so ist der Winkel AFB = 90°, und $\frac{k^2}{k^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}$; der Stoß gegen ein solcher Gestalt keilförmig zugespitztes Parallelepipedum ist daher nur halb so groß, als wenn das Parallelepipedum senkrecht abgeschnitten ist.

Uebrigens wird der Stoß bey einerley AB desto kleiner, je größer die Höhe EF des Keiles gemacht wird. Daraus ist ersichtlich, warum man die Brückenpfeiler, die Schiffe der Schiffmühlen, und mehr dergleichen dem Wasserstoße ausgesetzte Körper an der Stoßseite keilförmig macht. Jedoch darf ein dergleichen keilförmiger Rücken nicht allzuscharf seyn, damit er durch den Anstoß anderer fester Körper, die der Wasserstrom mitbringt, nicht so leicht beschädiget werde.

§. 116.

Der Stoß eines fließenden Stromes gegen die krumme Oberfläche eines geraden senkrecht abgekürzten Kegels, der nach der Richtung seiner Achse dem Stoße ausgesetzet wird, ist nach dieser Richtung gleich dem senkrechten Stoße gegen eine der krummen Oberfläche des Kegels gleich große Ebene multipliciret mit dem cubicten Sinus des Neigungswinkels der Seite des Kegels gegen dessen Achse.

Wenn man nähmlich die Seite eines solchen abgekürzten Kegels AC $= b$ Fig. 36, den mittleren Umkreis MN $= p$ 36
setzet, und die Neigung der Seite AC gegen AE parallel zur Achse des Kegels und zur Richtung des Stromes FG mit φ bezeichnet; so ist für die Geschwindigkeit $= c$ und

Fig. 36. für das eigenthümliche Gewicht q der anstoßenden Flüssigkeit der Stoß gegen die krumme Oberfläche ABDC (mit Ausnahme des Stoßes gegen die ebene Grundfläche) $= bp \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q \cdot \sin^3\varphi$.

Denn wenn man den mittleren Umkreis MN $= p$ in unendlich viele gleiche Theile zertheilet, und von der Spitze F des ergänzten Kegels durch die Theilungspuncte des mittleren Umkreises gerade Linien bis an den Umkreis der größeren Grundfläche gedenket; so wird dadurch die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels in ihre Elemente aufgelöset, in gleich große Trapezien von der mittleren Breite $= \frac{p}{\infty}$ und von der Höhe $= b$. Der Inhalt eines solchen Trapezium ist $= \frac{bp}{\infty}$, und dessen Neigung gegen die Richtung des Stromes und gegen die Achse des Kegels $=$ CAE $=$ CFG $= \varphi$; folglich ist (vermöge §. 112.) die Pressung oder der Stoß des mit der Geschwindigkeit $= c$ fließenden Stromes gegen ein solches Element nach der Richtung des Stromes $= \frac{bp}{\infty} \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot q \sin^3\varphi$; und die Summe aller solcher Pressungen nach parallelen Richtungen, das ist, der sogenannte Stoß gegen die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels nach der Richtung des Stromes ist also

$$= \infty \cdot \frac{bp}{\infty} \cdot \frac{c^2}{4g} q \cdot \sin^3\varphi = \frac{bpc^2 q \sin^3\varphi}{4g}.$$

§. 117.

Der Stoß eines fließenden Stromes gegen eine feste Kugel nach der Richtung des Stromes ist gleich dem Gewichte einer Säule dieser Flüssigkeit, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe des Stromes zu ihrer Länge hat.

Um

Um diese Wahrheit einzusehen sey AMBM'A Fig. 37 eine feste Kugel dem Stoße eines nach der Richtung von A nach B fließenden Stromes ausgesetzet. Der Halbmesser der Kugel sey AC $= a$, die Absciſſe AP $= x$, und ihr Differenziale Pp $=$ dx; so ist das Differenziale der Oberfläche des Kugelabschnittes MAM' die Zonne Mmm'M', welche man für die Oberfläche eines abgekürzten Kegels ansehen kann; und das Differenziale dp des Stoßes p gegen den Kugelabschnitt MAM' ist der Stoß, welchen die Kegelfläche Mmm'M' nach der Richtung des Stromes AB leidet. Dieser Stoß dp ist vermöge §. 116 für die Geschwindigkeit c und für das eigenthümliche Gewicht q gleich Fig. 37

der Kegelfläche Mmm'M' multipliciret mit $\frac{c^2 q}{4g}$ und mit dem cubirten Sinus des Winkels mMR oder PMC.

Es ist aber vermöge der Geometrie die Oberfläche Mmm'M' gleich dem größten Umkreise der Kugel $2a\pi$ multipliciret mit Pp, nähmlich $= 2a\pi$dx; und sin mMR

$= \sin$ PMC $= \frac{\text{PC}}{\text{MC}} = \frac{a-x}{a}$ wegen

sinPMC : PC$(a-x) =$ sintot$(1$: MC$(a$;

folglich ist $dp = 2a\pi dx . \frac{c^2 q}{4g} . (\frac{a-x}{a})^3$,

nähmlich $dp = \frac{c^2 \pi q}{2a^2 g} . x^0 dx (a-x)^3$.

daraus folget durch die Integration

$p =$ Const $- \frac{c^2 \pi q (a-x)^4}{8a^2 g}$;

nun ist $p = 0$ für $x = 0$;

folglich Const $= \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g} . a^4$,

und $p = \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g} . [a^4 - (a-x)^4]$.

 Um

Fig. Um nun den Stoß gegen die Kugel zu erhalten, muß man $x = a$ setzen, weil nur die Hälfte der Kugelfläche dem Stoße ausgesetzet ist. Es ist sodann der Stoß, welchen die Kugel nach der Richtung des Stromes auszustehen hat, $p = \frac{c^2 \pi q}{8a^2 g} . a^4 = \frac{1}{2} a^2 \pi . \frac{c^2}{4g} . q =$ dem Gewichte einer Säule von dieser Flüssigkeit, welche die größte Kreisfläche $a^2 \pi$ der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe des Stromes $\frac{1}{2} . \frac{c^2}{4g}$ zur Höhe oder Länge hat.

§. 118.

Setzet man einen geraden Cylinder mit seiner Achse in der Richtung eines Wasserstromes dem Stoße entgegen; so ist der Stoß gegen dessen Grundfläche $= a^2 \pi . \frac{c^2 q}{4g}$ für den Halbmesser des Cylinders $= a$, für die Geschwindigkeit des Stromes $= c$, und für das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeit $= q$. Ist aber der dem Stoße ausgesetzte Cylinder an seinem vorderen Ende mit einer Halbkugel des nähmlichen Halbmessers $= a$ abgerundet; so ist sodann (vermöge §. 117.) der Stoß nach der Richtung des Stromes $= \frac{1}{2} . a^2 \pi . \frac{c^2 q}{4g}$, nur halb so groß, als ehevor. Auch wird der Stoß nur halb so groß, wenn man den Cylinder an der Stoßseite in einen Kegel von der Höhe $= a$ auslaufen läßt.

Die Bestimmung des Wasserstoßes gegen andere krumme Oberflächen, z. B. gegen ein Paraboloides nach der Richtung seiner Achse, gegen einen Cylinder senkrecht auf dessen Achse, u. s. w. wird dem eigenen Fleiße überlassen.

§. 119.

Stößt der aus einer Oeffnung eines Gefäßes ausfahrende Wasserstrahl nicht weit von der Ausflußöffnung gegen eine demselben ausgesetzte Fläche, so kommt es darauf an, ob

ob die Stoßfläche kleiner oder größer sey, als der Querschnitt Fig.
des zusammen gezogenen Wasserstrahles.

Ist nun bey einem solchen Stoße die Stoßfläche kleiner oder auch eben so groß als der Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles; so wird sowohl der senkrechte, als der schiefe Stoß so berechnet, wie es bisher für kleine Stoßflächen in Strömen von großen Querschnitten gezeiget worden ist.

Ist aber die Stoßfläche beträchtlich größer als der Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles; so verbreitet sich der anstoßende Wasserstrahl auf der Stoßfläche in einer beträchtlichen Ausdehnung, und vermehret dadurch den Druck gegen dieselbe sehr merklich. Wenn die Stoßfläche 16mahl oder darüber größer ist, als der Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles; so ist vermöge der Erfahrung in einem solchen Falle der senkrechte Wasserstoß gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles zur Grundfläche, und die 2fache Geschwindigkeitshöhe des anstoßenden Wassers zur Höhe hat.

Ist die Stoßfläche zwar größer als der Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahles, aber doch kleiner als das 16fache dieses Querschnittes; so ist die Höhe der Wassersäule auf der Grundfläche eines solchen Querschnittes, welche dem senkrechten Wasserstoße gleich seyn soll, größer als die einfache, und kleiner als die doppelte Geschwindigkeitshöhe des anstoßenden Wasserstrahles. Aus dem Verhältnisse des Querschnittes zur Stoßfläche läßt sich in dergleichen Fällen beyläufig beurtheilen, um welchen Bruchtheil man die einfache Geschwindigkeitshöhe vermehren soll, um den Wasserstoß einiger Maßen berechnen zu können.

§. 120.

1) Beweget sich die flüssige Masse eines Stromes mit der Geschwindigkeit $= C$, und ein dem Stoße ausgesetzter fester Körper nach eben derselben Richtung mit einer kleineren Geschwindigkeit $= c$; so ist der Stoß so groß, als wenn

der

Fig. der feste Körper unbeweglich wäre, und der Strom mit der Geschwindigkeit $C - c$ gegen solchen fließe. Beweget sich ferner die flüssige Masse eines Stromes mit der Geschwindigkeit $= C$, ein dem Stoße ausgesetzter fester Körper aber nach entgegen gesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit $= c$; so ist auch der Stoß so groß; als wenn der feste Körper unbeweglich wäre, der Strom aber mit der Geschwindigkeit $= C + c$ auf solchen fließe.

2) Die Geschwindigkeit $C \mp c$, nähmlich der Unterschied bey übereinstimmenden, und die Summe der Geschwindigkeiten des Stromes und der Stoßfläche bey entgegen gesetzten Richtungen heißt die relative Geschwindigkeit des Stromes in Beziehung auf die als unbeweglich angesehene Stoßfläche. Den Stoß eines fließenden Stromes gegen einen darin bewegten festen Körper nennt man den relativen Stoß, den Stoß aber gegen einen ruhenden Körper den absoluten Stoß.

3) Der relative Wasserstoß gegen eine auf die Richtung des Stromes senkrechte, und in dieser Lage vor- oder rückwärts bewegte ebene Fläche ist daher gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Stoßfläche zur Grundfläche, und die der relativen Geschwindigkeit zugehörige Höhe zur Länge hat. Wenn nähmlich die Geschwindigkeit des Stromes $= C$, die den senkrechten Stoß leidende ebene Fläche $= f$, die Geschwindigkeit dieser Fläche nach der mit dem Strome übereinstimmenden oder entgegen gesetzten Richtung $= \mp c$, und das eigenthümliche Gewicht der anstoßenden Flüssigkeit $= q$ gesetzet wird; so ist der relative die Fläche senkrecht treffende Stoß

$$p = \frac{f(C \mp c)^2 q}{4g}$$

4) Der relative Wasserstoß aber gegen eine auf die Richtung des Stromes unter einem gegebenen Neigungswinkel schief gestellte, und in dieser Lage nach der Richtung des Stromes vor- oder rückwärts be-

weg-

wegte ebene Fläche ist nach dieser Richtung gleich dem Fig.
Gewichte einer Wassersäule, welche die Stoßfläche zur
Grundfläche, und die der relativen Geschwindigkeit
des Stromes zugehörige Höhe zur Länge hat, multipliciret mit dem cubirten Sinus des Neigungswinkels
der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes (vermöge §. 112. n. 2) weil auch hier der Stoß eben so beschaffen ist, als wenn die dem schiefen Wasserstoße ausgesetzte Fläche unbeweglich wäre, und der Strom mit der relativen Geschwindigkeit unter dem gegebenen Neigungswinkel gegen solche stieße. Für die vorigen Benennungen, und
für den Neigungswinkel $= \varphi$ der Stoßfläche gegen die Richtung des Stromes ist also der relative Stoß

$$p = \frac{f(C \mp c)^2 q \cdot \sin^3 \varphi}{4g}.$$

5) Der relative Wasserstoß endlich gegen eine in der Richtung des Stromes vor- oder rückwärts bewegte Kugel ist gleich dem Gewichte einer Säule der anstoßenden Flüssigkeit, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die Hälfte der zur relativen Geschwindigkeit gehörigen Höhe zur Länge hat. Für die vorigen Benennungen und für den Halbmesser der Kugel $= a$ ist daher der relative Wasserstoß gegen eine Kugel

$$p = \frac{a^2 \pi (C \mp c)^2 q}{8g}.$$

§. 121.

Der relative Wasserstoß in den Gleichungen des vorigen §. 120 nähmlich $\frac{f(C-c)^2 q}{4g}$, $\frac{f(C-c)^2 q . \sin^3 \varphi}{4g}$, und $\frac{a^2 \pi (C-c)^2 q}{8g}$ wird $= 0$ für $c = C$. Stößt nähmlich der Strom senkrecht gegen die Fläche eines hinein gelegten schwimmenden Körpers; so fängt seine Bewegung von der Ruhe an, und wird von dem Stoße des Stromes nach und

nach

Fig. nach so lange beschleuniget, bis der Körper eben so schnell ausweicht, als das anstoßende Wasser nachfolget, das ist, bis seine Geschwindigkeit der Geschwindigkeit des Stromes gleich geworden ist, wo sodann der schwimmende Körper keinen Stoß mehr leidet. Der relative Stoß wird also mit dem Zunehmen der Geschwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche immer geringer, und nimmt bis auf Null ab, wo die Geschwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche der Geschwindigkeit des Stromes gleich ist, welches in dergleichen Fällen binnen einer sehr kurzen Zeit geschieht.

§. 122.

Nun läßt sich auch die Wirkung des Wasserstoßes gegen ein unterschlächtiges Mühlrad in einem Strome wie z. B. bey den Schiffmühlen erklären. Im Anfange leidet die unterste noch ruhende Schaufel einen senkrechten Stoß so groß als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche der Schaufelfläche und deren Höhe oder Länge der zur Geschwindigkeit des Wassers gehörigen Höhe gleich ist; einige der übrigen auch schon eingetauchten Schaufeln aber leiden zum Theil einen schiefen Stoß, der sich (nach §. 112. n. 1.) berechnen läßt. Kommt nun das Rad in Bewegung; so ist der Stoß gegen die folgenden Schaufeln schwächer, weil das Wasser nur mit seiner relativen Geschwindigkeit darauf wirket. Käme das Rad in einen so schnellen Umlauf, daß die Schaufeln mit der ganzen Geschwindigkeit des Wassers auswichen; so würde der Stoß gegen die Schaufeln gänzlich aufhören. Dieses wäre aber nur möglich, wenn das Rad ohne allen Widerstand umliefe, und die Maschine keine Last zu bewegen hätte.

Man setze den Wasserstoß gegen ein unterschlächtiges Wasserrad = 150 Pfund. Wäre nun der sämmtliche Widerstand der Maschine auf den Halbmesser des Schaufelrades bis zum Mittelpuncte des Stoßes gegen die eingetauchten Schaufeln, als auf einen und denselben Hebelsarm reduciret, auch = 150 Pfund; so könnte die Maschine gar nicht in Bewegung kommen, sondern die eingetauchten Schaufeln stelleten feste unbewegliche Ebenen vor, gegen welche

der

der Wasserstoß stäts = 150 Pfund verbliebe, und von dem eben Fig.
so großen reducirten Widerstande im Gleichgewichte erhalten würde. Wäre aber bey dem anfänglichen Wasserstoße von 150 Pfunden der sämmtliche reducirte Widerstand nur 100 Pfund; so würde sich das Rad zu bewegen anfangen, und seine Geschwindigkeit würde so lange fortwachsen, bis der relative Stoß als die bewegende Kraft auch 100 Pfund wäre, und dem erwähnten reducirten Widerstande von 100 Pfund das Gleichgewicht hielte, worauf sodann das Rad mit gleichförmiger Bewegung umliefe, in so lange weder an der bewegenden Kraft noch an dem Widerstande etwas geändert würde. Dieser Zustand einer Maschine in gleichförmiger Bewegung, wo die bewegende Kraft den gesammten auf einerley Hebelsarm reducirten Widerstande gleich ist, heißt der **Beharrungsstand der Maschine.**

§. 123.

Bedeutet p die bewegende **Kraft**, nähmlich den relativen **Wasserstoß**, und c die **Geschwindigkeit** des **Mittelpunctes** der **Schaufeln** des **Wasserrades** im **Beharrungsstande** einer **Maschine**; so wird der **Effect** oder die geleistete **Wirkung** der **Maschine** aus dem **Producte** pc ermessen.

Der Effect ist nähmlich desto größer, je größer die von der Maschine in Bewegung gesetzte Last ist, und je geschwinder diese Last beweget wird; und wird daher aus dem Producte dieser Last multipliciret mit ihrer Geschwindigkeit ermessen. Es ist aber im Beharrungsstande einer durch ein unterschlächtiges Wasserrad getriebenen Maschine die bewegte Last oder der auf einen dem Halbmesser des Wasserrades gleichen Hebelsarm reducirte Widerstand eben so groß als der relative Wasserstoß p gegen die Radschaufeln; und die Geschwindigkeit dieser reducirten Last ist auch so groß, als die Umlaufsgeschwindigkeit c des Wasserrades; folglich wird der Effect einer solchen Maschine auch aus dem Producte pc des relativen Wasserstoßes multipliciret mit der Umlaufsgeschwindigkeit der Radschaufeln ermessen.

§. 124.

Fig.

§. 124.

Ist nun C die absolute Geschwindigkeit des Wassers, f die dem Wasserstoße ausgesetzte Schaufelfläche eines unterschlächtigen Wasserrades, c ihre Umlaufsgeschwindigkeit kleiner als C, P der absolute Wasserstoß des mit der Geschwindigkeit $= C$ anschlagenden Wassers gegen eine unbewegliche Stoßfläche $= f$, und p der relative Stoß gegen eben dieselbe mit der Geschwindigkeit $= c$ ausweichende Stoßfläche, das eigenthümliche Gewicht des anstoßenden Wassers aber $= q$;

so ist $P = \frac{fC^2 q}{4g}$ wegen §. 109.

und $p = \frac{f(C-c)^2 . q}{4g} = \frac{fC^2 q}{4g} . (1 - \frac{c}{C})^2$ wegen §. 120 n. 3.

folglich auch $p = P . (1 - \frac{c}{C})^2$;

und der Effect $E = Pc (1 - \frac{c}{C})^2$ wegen §. 123.

Dieser Effect $Pc (1 - \frac{c}{C})^2$ ist $= 0$ sowohl für $c = 0$, als auch für $c = C$, das ist, sowohl wenn der sämmtliche Widerstand der Maschine so groß ist als der absolute Wasserstoß, da die Maschine sich gar nicht beweget, und also keine Wirkung leistet; als auch wenn die Radschaufeln eben so geschwinde umlaufen als das Wasser sich gegen solche beweget, da das Rad keinen Widerstand zu überwältigen hat, und daher auch keine Wirkung leistet. Für alle übrige Werthe von $c = 0$ bis $c = C$ hat das Product $Pc (1 - \frac{c}{C})^2$ einen Werth, das ist, die Maschine hat einen Effect, der für einen gewissen Werth c ein Größtes wird. Für diesen Werth von c ist

$$d[Pc(1 - \frac{c}{C})^2] = Pdc (1 - \frac{c}{C})^2 - \frac{2Pcdc}{C} . (1 - \frac{c}{C}) = 0$$

folglich $c = \frac{1}{3} C$;

nähm-

nähmlich damit der Effect einer solchen Maschine mit Fig. einem unterschlächtigen Wasserrade ein größtes wird, muß die Geschwindigkeit der Radschaufeln $= \frac{1}{3}$ der absoluten Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers seyn; und daher ist in diesem Falle die relative Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers $= \frac{2}{3}$ der absoluten, der relative Stoß $= \frac{4}{9}$ des absoluten, und der Effect $= \frac{4}{27}$ des Effectes vom absoluten Wasserstoße.

Will man nun nach dieser Lehre die vortheilhafteste Umlaufszahl $= n$ binnen einer Minute bey einem unterschlächtigen Wasserrade in einem offenen Strome bestimmen, damit die Maschine die größte Wirkung leiste; so sey der Halbmesser des Rades $= a$ bis zum Mittel- oder Stoßpuncte der Schaufeln, also der Umkreis $= 2a\pi$; die Geschwindigkeit des Rades, das ist, der in 1 Sec. gleichförmig zurückgelegte Weg soll seyn $= \frac{1}{3}C$, wenn C die Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers ist; der in einer Minute zurückgelegte Weg des Rades soll also seyn $= 60 \times \frac{1}{3}C = 20C$; folglich ist $2a\pi . n = 20C$, und $n = \frac{10C}{a\pi}$.

§. 125.

Um den Wasserstoß gegen ein unterschlächtiges Rad in einem offenen Fluße zu berechnen muß man unter der Schaufelfläche $= f$ des vorigen §. nicht bloß allein die Fläche der untersten Schaufel verstehen, sondern man muß meines Erachtens zu dem senkrechten Wasserstoße gegen die unterste Schaufel auch noch die schiefen Pressungen hinzusetzen, welche die Flächenstücke der übrigen eingetauchten Schaufeln nach darauf senkrechten Richtungen von dem anstoßenden Wasser leiden. Diese Pressungen zusammen genommen sind die bewegende Kraft, womit ein solches Wasserrad sammt der damit verbundenen Last beweget wird. Eine feste Fläche, welche für sich allein als die unterste Radschaufel in lothrechter Lage bey eben derselben Geschwindigkeit einen eben so großen Wasserstoß litte, wäre der Werth für f im vorigen §. Nach dieser Bemerkung kann man aus den gegebe-

Fig. gebenen Abmessungen eines unterschlächtigen Wasserrades, und aus der bekannten Lage der eingetauchten Radschaufeln für die gegebenen Geschwindigkeiten *C* und *c* den relativen Wasserstoß berechnen, und solchen mit angestellten Versuchen vergleichen, wo es sich näher zeigen wird, um wie viel und wie man den senkrechten Wasserstoß gegen die unterste Schaufel wegen der schiefen Pressungen gegen die übrigen Flächenstücke der zugleich eingetauchten Schaufeln vermehren soll.

§. 126.

Die Berechnung der Bewegenden Kraft, oder des relativen Wasserstoßes bey einem unterschlächtigen Wasserrade in einem gewöhnlichen Mühlgerinne, wo der Querschnitt des anstoßenden Wassers beynahe eben so groß ist, als die Fläche einer Radschaufel, ist noch größeren Schwierigkeiten unterworfen, weil da nicht wie bey Schiffmühlen das anschlagende Wasser frey abfließen kann, sondern solches hier nebst dem hydraulischen Stoße durch den Aufenthalt zwischen den Radschaufeln auch dabey einen hydrostatischen Druck ausübet.

Inzwischen wird gewöhnlich (vermöge §. 110.) in der Ausübung folgende Regel beobachtet.

Die bewegende Kraft oder der Wasserstoß bey einem unterschlächtigen Rade in einem Mühlgerinne ist gleich einer Wassersäule, welche die senkrecht angestoßene Schaufelfläche zur Grundfläche und die der relativen Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers zugehörige Höhe doppelt genommen zu ihrer Länge hat. Wenn die Radschaufeln so weit von einander stehen, daß bey dem senkrechten Wasserstoße gegen eine Schaufel die nächst folgende sich eben einzutauchen anfängt; so dürfte diese Regel hinlänglich richtig seyn. Wenn hingegen die Radschaufeln etwas näher beysammen stehen, und das Gerinne in der Gegend des anstoßenden Wassers kreisförmig abgerundet ist, wodurch das Wasser gegen mehrere Schaufeln zugleich beynahe senkrecht nur mit verschiedenen Geschwindigkeiten anschlägt; so ist der relative Wasserstoß noch größer.

Bey

Bey der vortheilhaftesten Einrichtung eines solchen unterschlächtigen Wasserrades dürfte die den relativen Wasserstoß vorstellende Wassersäule auf der Grundfläche einer Radschaufel die dreyfache Höhe der relativen Geschwindigkeit zur Länge haben. Auch will man aus mehreren Versuchen wahrgenommen haben, daß Mühlen und andere Maschinen mit dergleichen unterschlächtigen Wasserrädern in Gerinnen damahls den größten Effect leisten; wenn die Geschwindigkeit des Mittelpunctes oder eigentlich des Stoßpunctes der Radschaufeln beynahe die Hälfte der Geschwindigkeit des Wassers beträgt, und nicht genau $\frac{1}{3}$, wie es oben im §. 124. gezeiget worden ist. Fig.

Die Berechnung des Wasserstoßes gegen ganz und halb oberschlächtige, so wie auch gegen horizontale Wasserräder wird hier mit Stillschweigen übergangen, und kann in anderen ausführlicheren Abhandlungen über diesen Gegenstand nachgeschlagen werden. Als ein Handbuch kann hierzu dienen, Hrn Mönichs Anleitung zur Berechnung und Anordnung der gebräuchlichsten Maschinen. Augsburg 1779, wo man auch die nöthigsten weiteren Nachweisungen findet. Inzwischen ist es aus dem bereis Vorgetragenen begreiflich, daß das statische Moment der bewegenden Kraft bey einem oberschlächtigen Wasserrade der Summe der einzelnen Momente gleich ist, die man erhält, wenn man das Gewicht des in jeder Sackschaufel enthaltenen Wassers mit dem Abstande seines Schwerpunctes, oder beyläufigen Mittelpunctes von dem lothrechten Durchmesser multipliciret.

§. 127.

Daß der relative Wasserstoß $= p$ in einem großen Strome gegen eine kleine ebene Fläche $= f$ in senkrechter Richtung für das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= q$, für die Geschwindigkeit des fließenden Wassers $= C$, und für die Geschwindigkeit der ausweichenden Fläche $= c$ nach §. 120 durch die Gleichung,

$$\text{I. } p = \frac{fq}{4g}.(C-c)^2$$

rich-

Fig. richtig ausgedruckt sey, sollte doch keinem Zweifel unterworfen seyn, vorausgesetzt, daß in einem solchen Falle der absolute Wasserstoß (nach §. 109.) durch das Gewicht der Wassersäule $f.\dfrac{C^2}{4g}.q$ richtig ausgedrucket ist; wie auch, daß in denjenigen Fällen, wenn (nach §. 110 und 119.) der absolute Wasserstoß $= \dfrac{fC^2q}{2g}$ ist, nähmlich wenn die denselben vorstellende Wassersäule die 2fache Geschwindigkeitshöhe zu ihrer Länge hat, der relative Wasserstoß durch folgende Gleichung richtig ausgedruckt sey

$$\text{II. } p = \frac{fq}{2g}.(C-c)^2.$$

Die Richtigkeit der angeführten Gleichungen für den relativen Wasserstoß beruhet auf der Behauptung, daß der Stoß gegen eine auf die Richtung des Stromes senkrecht gestellte und nach dieser Richtung ausweichende Stoßfläche eben so groß ist, als wenn die Stoßfläche in ihrer Lage als ruhend befestiget wäre, und der Strom nur mit der relativen Geschwindigkeit gegen solche stieße. Um diese Behauptung deutlicher einzusehen, sey eine Fläche $= f$ in einem Strome dem senkrechten Wasserstoße ausgesetzet, und so befestiget, daß ihre Lage durch den Wasserstoß nicht geändert wird; so ist für die Geschwindigkeit $= v$ des Stromes der Wasserstoß $= \dfrac{fv^2q}{4g}$. Nun gedenke man, der ganze Stromcanal sammt der darin befestigten Stoßfläche bewege sich nach der Richtung des Stromes mit der Geschwindigkeit $= c$; so verbleibt bey einer solchen Bewegung der Wasserstoß gegen die Fläche f eben so groß, wie ehevor, nähmlich $= f.\dfrac{v^2}{4g}.q$. Es ist aber sodann die absolute Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers $= v + c$, und die Geschwindigkeit der nach eben dieser Richtung mit dem Canale fortgehenden Stoßfläche $= c$, und daher die relative Ge-

schwin-

schwindigkeit des anstoßenden Wassers $= (v + c) - c = v$. Fig.
Folglich ist in einem solchen Falle der Wasserstoß $f. \frac{v^2}{4g}. q = f. \frac{[(v+c)-c]^2}{4g}. q$ gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Stoßfläche zur Grnndfläche, und die der relativen Geschwindigkeit zugehörige Höhe zur Länge hat. Auf eben diese Art kann man die Richtigkeit der Formel II. für solche Fälle bekräftigen, in welchen zur Bestimmung des Wasserstoßes die Geschwindigkeitshöhe doppelt zu nehmen ist.

§. 128.

In neueren Zeiten haben einige Schriftsteller die angeführten Ausdrücke für den relativen Wasserstoß

$$\text{I.}\ p = \frac{fq}{4g}.(C - c)^2, \text{ und II.}\ p = \frac{fq}{2g}.(C - c)^2 \quad \text{§. 127.}$$

für unrichtig erkläret, dafür andere Gleichungen aufgestellet, und daraus die zum größten Effect eines unterschlächtigen Wasserrades erforderliche Geschwindigkeit anders gefunden, als es im §. 124 erwiesen worden ist. Z. B.

Hr. Gerlach, Professor der mechanischen Wissenschaften in der k. k. Ingenieur-Accademie zu Wien behauptet in seinem Lehrbuche Anfangsgründe der Mechanik zum Gebrauche der k. k. Ingenieursschule, Wien bey Trattnern 1786. 2r. Th. §. 811 bis 822 der relative Wasserstoß sey in jedem Falle sowohl in einem weiten Strome als auch in einem Mühlgerinne

$$p = \frac{fq}{4g}(C^2 - c^2)$$

nähmlich so groß als das Gewicht einer Wassersäule, welche die ausweichende Stoßfläche $= f$ zur Grundfläche, und die Differenz der zwey Geschwindigkeitshöhen $\frac{C^2}{4g} - \frac{c^2}{4g}$ zur Höhe hat. Für $c = \frac{99}{100} C$ wäre also der relative Wasserstoß nach dieser Gerlachischen Formel 199mahl größer als nach der sonst zu derselben Absicht gebrauchten Gleichung I. in

Fig. §. 127. Zur Berechnung des Wasserstoßes bey einem unterschlächtigen Rade nimmt Hr. Gerlach jederzeit nur die Fläche einer einzigen senkrecht getroffenen Radschaufel für f in der angeführten Formel, und findet auf diese Art seine Formel mit den Versuchen sehr übereinstimmend, die Gleichung I. in §. 127. aber, die man die Parentische Formel nennt, davon sehr abweichend. Nach den Erinnerungen im §. 125 und 126. werden jedoch dergleichen Abweichungen vermieden. Übrigens setzet Hr. Gerlach in allen Fällen den absoluten Wasserstoß dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche den Querschnitt des anstoßenden Wasserstrahles zur Grundfläche, und die einfache Geschwindigkeitshöhe zur Länge hat; da es doch durch Versuche ausgemacht ist, daß in einigen Fällen diese Geschwindigkeitshöhe doppelt genommen werden muß.

Herr Gerstner, Professor der höheren Mathematik an der Universität zu Prag in seiner Theorie des Wasserstoßes in Schußgerinnen (der neueren Abhandlungen der königl. Böhm. Gesellsch. der Wissensch. 2. Bd. Prag 1795. XIV. Abhandl.) findet durch seine Untersuchung für den relativen Wasserstoß gegen ein unterschlächtiges Rad in einem Mühlgerinne bey denselben Benennungen folgende Gleichung

$$p = \frac{fq}{2g} \cdot C(C-c).$$

Für $c = \frac{99}{100} C$ wäre daher der relative Wasserstoß nach dieser Formel 200mahl größer als nach der Formel I. im §. 127. und noch immer hundertmahl größer als nach der Formel II. in eben dem §. 127.

Die Gerstnerische Formel hat eigentlich die Gestalt

$p = M.\frac{C-c}{2g}$, wo $M = fCq$ ist, und das Gewicht des in einer Secunde durch das Gerinne des Querschnittes $= f$ mit der Geschwindigkeit $= C$ fließenden, und an die Radschaufel des Inhaltes $= f$ anschlagenden Wassers von dem eigenthümlichen Gewichte $= q$ bedeutet.

Diese

Diese Formel für den relativen Wasserstoß, welche auch Hr. Rosmann in dem oben §. 87 angemerkten Lehrbuche der Hydraulik angenommen hat, ist auf die Voraussetzung gegründet, daß bey dem relativen Wasserstoße binnen einer Secunde eben so viel Wasser an die Stoßfläche anschlage, als bey dem absoluten; oder daß die anstoßende Wassermenge ungeändert verbleibe, die Geschwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche möge wie immer geändert werden. Allein eine solche Voraussetzung ist unrichtig. Denn es ist ja eine ausgemachte Wahrheit, daß um so weniger Wasser binnen einer Secunde an die bewegliche Stoßfläche anschlägt, je mehr sich die Geschwindigkeit c der ausweichenden Stoßfläche der Geschwindigkeit C des anschlagenden Wassers nähert, so daß für $c = C$ gar kein Wasser mehr anschlägt; für jeden bestimmten Werth von c aber ist die in einer Secunde an die Stoßfläche $= f$ anschlagende Wassermenge $M = f(C-c)$, und nicht $= fC$. Fig.

Hr. Langsdorf hat im §. 107 seines Lehrbuches der Hydraulik für den relativen Wasserstoß folgende Formel in Vorschlag gebracht, welche auch Hr. Rosmann im §. 228 seines Lehrbuches anführet,

$$p = fq.[A - a + \frac{(C-c)^2}{4g}]$$

wo nebst den übrigen bekannten Benennungen A die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers, und a die Geschwindigkeitshöhe der ausweichenden Stoßfläche bedeutet; es ist nähmlich $A = \frac{C^2}{4g}$, und $a = \frac{c^2}{4g}$. Setzet man diese Werthe für A und a in die Langsdorfische Formel; so hat sie mit der angeführten Gerstnerischen eben denselben Werth

$$p = \frac{fq}{2g}.C(C-c)$$

und ist daher eben denselben Einwendungen ausgesetzet.

Fig.

§. 129.

Aufgabe.

Die Geschwindigkeit des Wassers in einem Strome auszumessen.

Auflösung.

I. Mittelst einer schwimmenden Kugel. Auf die Oberfläche des Wassers beynahe in der Mitte der Stromweite in einer Gegend, wo das Wasser in geradliniger Richtung mit gleichförmiger Bewegung fortfließt, lege man eine hohle Kugel von Messingblech, mit soviel Wasser gefüllet und gut verschraubet oder mit Siegellack vermacht, daß von der schwimmenden Kugel nur sehr wenig aus der Wasserfläche hervorrage, und daß dieselbe von einem mäßigen Winde in ihrer Bewegung nicht merklich gestöret werde. Sodann bemerke man die Zeit an einer guten Secunden-Taschenuhr, binnen welcher die schwimmende Kugel, nachdem sie die Geschwindigkeit des Wassers bereits angenommen hat, eine ehevor ausgesteckte, und gemessene Länge der geradlinigen Stromrichtung zurückleget. Diese Zeit kann auch mittelst eines für halbe Secunden eingerichteten Pendels beobachtet werden. Dividiret man nun die gemessene Länge des zurückgelegten Weges mit der dazu gehörigen in Secunden ausgedruckten Dauerzeit; so ist (wegen 3. Th. § 25.) der Quotient die gesuchte Geschwindigkeit des Stromes an der Oberfläche in derjenigen Richtung, in der sich die schwimmende Kugel mit dem fortfließenden Wasser fortbewegte.

Wenn man solche Ausmessungen sowohl in der Mitte, als auch nahe an den Ufern vornimmt; so findet man, daß der Strom in einem und demselben Querschnitte nicht überall dieselbe Geschwindigkeit hat.

Verbindet man ferners zwey Kugeln mittelst eines Fadens unter einander dergestalt, daß eine bis zu einer beliebigen Tiefe unter die Wasserfläche hinabsinket, die andere

aber

aber nur etwas weniges hervorraget; so findet man, daß die Fig.
untere Kugel gemeiniglich etwas zurückbleibt, und daß daher die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe kleiner ist, als an der Oberfläche des Stromes.

II. Mittelst des Pitotischen Strommessers. Der von Pitot angegebene Strom = Geschwindigkeitsmesser besteht aus einer offenen an einem abgetheilten Stabe befestigten gläsernen Röhre ABC Fig. 38 mit einem kurzen seit- 38
wärts gebogenen trichter = oder kegelförmigen Schenkel BC. Man senkt einen solchen Strommesser in das fließende Wasser dergestalt in eine beliebige Tiefe, daß BA beyläufig senkrecht auf die Oberfläche des fließenden Wassers, und daher die zu BA parallele Oeffnungsfläche CF der Richtung des Stromes senkrecht ausgesetzt sey.

Ist nun D im Wasserspiegel: so treibt der hydrostatische Druck das Wasser nur bis D, der hydraulische Wasserstoß aber weiter bis E, wo es nicht eher ruhig bleibt, als bis das in der Röhre befindliche Wasser gegen die Oeffnungsfläche CF eben so stark nach außen drückt, als jene vereinigte Kraft nach innen.

Nun sey die Oeffnungsfläche CF $= f$, die Höhe BD $= b$, und DE $= a$; so ist der hydrostatische Druck des äußeren Wassers gegen die Oeffnungsfläche CF (wegen §. 15.) $= fbq$ für das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= q$; und der hydraulische Stoß gegen eben diese Oeffnungsfläche für die gesuchte Geschwindigkeit c des anstoßenden Wasserstrahles ist (wegen §. 109) $= \frac{fc^2q}{4g}$; folglich ist der gesammte Druck gegen CF nach innen $= (b + \frac{c^2}{4g})fq$; der Gegendruck aber des in der Röhre befindlichen Wassers gegen dieselbe Oeffnungsfläche FC nach außen ist (wegen §. 15.) $= f(b+a)q$; und es ist wegen des Gleichgewichtes $(b + \frac{c^2}{4g})fq = f(b+a)q$;

Fig. 38 $f(b+a)q$; folglich ist $\frac{c^2}{4g} = a$, und $c = \sqrt{4ga}$, nähmlich es ist $c = \sqrt{4g \cdot DE}$, oder $\frac{c^2}{4g} = DE$.

Die beobachtete Höhe der Wassersäule in dem Pitotischen Strommesser ober dem Wasserspiegel ist also die Geschwindigkeitshöhe des Wassers im Strome an derjenigen Stelle, wo die trichterförmige Oeffnung dem senkrechten Wasserstoße ausgesetzet ist; und die gesuchte Geschwindigkeit wird erhalten, wenn man aus dem 4fachen Producte der erwähnten Höhe der Wassersäule multipliciret mit der bekannten Beschleunigung der Schwere die Quadratwurzel auszieht.

Um diese Rechnung abzukürzen kann man eine Tabelle verfassen, welche für verschiedene Höhen der Wassersäulen die dazu gehörigen Geschwindigkeiten enthält.

Wenn die Oberfläche des fließenden Wassers nicht für beynahe horizontal angesehen werden kann, sondern gegen den Horizont um einen gegebenen Winkel geneigt ist, wie in den Mühlgerinnen der unterschlächtigen Räder; so muß man die beobachtete auf die Oberfläche des fließenden Wassers senkrechte Länge der Wassersäule in dem Pitotischen Strommesser mit dem Cosinus eines solchen Neigungswinkels multipliciren, um die lothrechte Höhe der Wassersäule zu erhalten, welche der gesuchten Geschwindigkeitshöhe gleich ist.

Als Geschwindigkeitsmesser ist das erwähnte Pitotische Instrument weit vorzüglicher, als die schwimmende Kugel, da man mit demselben in jeder beliebigen Stelle sowohl in einem Strome als auch in einem Mühlgerinne die Geschwindigkeit des Wassers bestimmen kann.

Bey der Bestimmung der Geschwindigkeit eines Stromes an der Oberfläche können die zwey erwähnten Arten der Ausmessung, mittelst der schwimmenden Kugel und mittelst des Pitotischen Strommessers, einander wechselweise zur Bestätigung dienen.

Da

Da man mit dem Pitotischen Strommesser die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen einer und derselben Vertical-Linie beobachtete; so hat man aus mehreren Versuchen gefunden, daß die Differenzen, um welche die Geschwindigkeiten eines Stromes (in einer solchen Strecke seines Bettes, wo die Bodenfläche mit der Oberfläche des fließenden Wassers beynahe parallel läuft) in verschiedenen Tiefen abnehmen, diesen Tiefen beynahe proportional sind. Aus zwey beobachteten Geschwindigkeiten und aus den dazu gehörigen Tiefen in einer und derselben Vertical-Linie läßt sich demnach in jeder anderen Tiefe in eben dieser Vertical-Linie die Geschwindigkeit des Stromes berechnen. Fig.

III. **Mittelst des Strom-Quadranten.** An dem Mittelpuncte C eines Quadranten ACB Fig. 39 sey ein feiner Faden CP befestiget, an dem eine Kugel P etwas schwerer als Wasser frey herabhängt. Senkt man diese ins Wasser, daß die Fläche des Quadranten mit der Richtung des Stromes parallel, und CA vertical sey; so wird sie vom Strome nach einer beynahe horizontalen Richtung PQ getrieben, und der Faden wird mit der verticalen Linie CA einen gewissen Winkel ACP machen, den man beobachten kann. Ist nun alles in Ruhe; so halten sich drey Kräfte das Gleichgewicht, nähmlich das Gewicht der Kugel im Wasser PR, der Wasserstoß gegen die Kugel PQ, und die Festigkeit des Fadens PS. Aus PR läßt sich PQ bestimmen; es ist nähmlich PQ = PR. Tang RPS = PR. Tang ACP. Nun ist PR als das Gewicht der Kugel im Wasser (wenn deren Halbmesser $= a$ ist, und deren Dichtigkeit gegen Wasser sich verhält wie $n : 1$) $= \frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$ für das eigenthümliche Gewicht des Wassers q (wegen §. 23.). Folglich ist $PQ = \frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$. Tang ACP. Ferner ist auch PQ als der Wasserstoß gegen die Kugel, wenn die gesuchte Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers $= c$ gesetzet wird, (vermöge §. 117.) 39

$= a^2\pi.\frac{c^2}{8g}.q$; es ist also $\frac{4}{3}a^3\pi(n-1)q$. Tang ACP

=

Fig. 39 $= \frac{a^2 \pi c^2 q}{8g}$; und endlich die gesuchte Formel

$$c = \sqrt{[{}^{3}_{3}{}^{2}(n-1)ag.\text{Tang ACP}]}$$

wodurch man nun aus den bekannten Größen a, g, n, Tang ACP die Geschwindigkeit c berechnen kann.

Ist einmahl die zu einem beobachteten Abweichungswinkel zugehörige Geschwindigkeit bekannt; so kann man für jeden anderen Abweichungswinkel eben desselben Strom-Quadranten die zugehörige Geschwindigkeit durch den Satz berechnen, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich verhalten, wie die Tangenten der Abweichungswinkel. Hierüber kann man wieder sehr leicht eine kleine Tabelle verfassen, um aus dem beobachteten Abweichungswinkel die Geschwindigkeit zu finden.

Weil übrigens der Faden des Strom-Quadranten biegsam ist, und der eingetauchte Theil desselben mit der übrigen Länge des Fadens außerhalb des Wassers nicht genau in einer und derselben geraden Linie liegt; so kann man mit dem Strom-Quadranten die Geschwindigkeiten der Ströme besonders in beträchtlichen Tiefen nicht mit derselben Zuverlässigkeit bestimmen, wie mit dem Pitotischen Strommesser.

Anmerk. Eine vollständige Anweisung die Geschwindigkeiten des fließenden Wassers auf verschiedene Arten zu messen, findet man in Hr. Brunigs Abhandlung über die Geschwindigkeiten des fließenden Wassers, und von den Mitteln dieselbe auf allen Tiefen zu bestimmen. Aus dem Holländ. übersetzt von Krönke. Frankfurt am Mayn, bey Behrns 1798 in 4.

§. 130.

Soll nun die Wassermenge berechnet werden, welche in einem Strome durch einen bestimmten auf die Stromrichtung senkrechten Querschnitt seines Bettes in jeder Secunde durchfließt; so muß man zu erst einen solchen Querschnitt genau aufnehmen, und in einer richtigen Zeichnung durch einige horizontale und verticale Linien in mehrere, theils

gleiche

gleiche theils ungleiche Flächenstücke zertheilen. Sodann muß man für den beyläufigen Mittelpunct oder Schwerpunct eines jeden solchen Flächenstückes des Querschnittes die dazu gehörige Geschwindigkeit nach §. 129. II. bestimmen. Endlich multipliciret man jeden solchen Theil des Querschnittes mit der dazu gehörigen Geschwindigkeit, und addiret alle diese Producte zusammen; so erhält man den kubischen Inhalt der in jeder Secunde durch einen solchen Querschnitt durchströmenden Wassermenge. Wenn man sodann diese Wassermenge durch den Querschnitt dividiret; so ist der Quotient die mittlere Geschwindigkeit des Stromes an derjenigen Stelle, wo man den Querschnitt aufgenommen hat. Fig.

§. 131.

Weitere Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in natürlichen Flüssen und in künstlichen Canälen hier anzuführen ist nicht meine Absicht. Die nothwendigsten Gründe dieser Lehre, so wie auch von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen mit vielen practischen Anwendungen findet man in dem schon angeführten Lehrbuche der Hydraulik des Hrn. **Rosman.** Berlin 1797.

In diesem Buche findet man auch nachstehende Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen der mittleren Geschwindigkeit eines Flusses, oder eines Canals, zwischen seinem Gefälle, seinem Querschnitte, und des letzteren Umfange bey gleichförmiger Bewegung seines Gewässers darstellet, $c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{f}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)}$, wo die Buchstaben folgende Bedeutungen haben, und im Rheinländischen Fußmaße ausgedrucket werden müssen.

c die mittlere Geschwindigkeit

f der Flächeninhalt des Querschnittes,

p der Umfang des Querschnittes, nähmlich die Summe der unteren Breite und der beyden Seitenlinien; oder, welches bey regelmäßigen trapezförmigen Querschnitten einerley ist, die Summe der mittleren Breite und der doppelten Tiefe des Wassers.

Fig. α das Gefälle, und

β die zu diesem Gefälle gehörige Weite,

m die in 1 Sec. abfließende Wassermenge.

Soll man alles im Wiener-Fußmaße ausdrucken, so kann man, da der Wiener-Fuß nur um etwas weniges größer ist, als der Rheinländische (es sind 13913 W. F. = 14013 Rh F.) die angeführte Gleichung ohne merklichen Fehler auch so schreiben:

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90\sqrt{\left(\frac{f}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)} \text{ Wien. Fuß}$$

und die Wassermenge

$$m = 90f\sqrt{\left(\frac{f}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)} \text{ Wien. Kubik-Fuß}$$

für einen regelmäßigen Fluß oder für einen Canal im Beharrungsstande.

Nach der letzten Formel läßt sich folgende practische Aufgabe auflösen, die bey der Anlegung schiffbarer Canäle vorkommen kann.

Wie groß muß das Gefälle α eines Canales auf eine gegebene Weite $\beta = 6000$ Wien. F. seyn, damit in demselben bey einer mittleren Breite $b = 24$ Wien. F. das mit gleichförmiger Bewegung fortfließende Wasser überall eine gegebene Tiefe $a = 5$ W. F. beybehalte, wenn der beständige Wasserzufluß nach Abschlag der Durchseigerung und Verdünstung $m = 200$ W. Kub. Fuß beträgt, das ist, wenn die in jeder Secunde durch den Querschnitt des Inhaltes $f = ab = 120$ und des Umfanges $p = b + 2a = 34$ fließende Wassermenge $m = 200$ bekannt ist.

Das gesuchte Gefälle ist vermöge der letzten Gleichung

$$\alpha = \frac{(2a+b)m^2\beta}{8100a^3b^3} = \frac{34.40000.6000}{8100.1728000} = \frac{425}{729} \text{ W. F.}$$
$$= 7\tfrac{1}{7} \text{ Zoll.}$$

Da

Da übrigens in dem angenommenen Falle durch den Fig.
Querschnitt von 120 Quadratfuß in jeder Secunde eine Wassermenge von 200 Kubikfuß durchfließt; so ist die Geschwindigkeit des Wassers in einem solchen Canale $= \frac{200}{120}$ $= 1\frac{2}{3}$ Fuß, und das Wasser legt in einer Stunde einen Weg von 1000 Klaftern zurück.

Wenn man aus der letzten Formel den Werth von b suchet, so erhält man eine cubische Gleichung, wodurch sich folgende Aufgabe auflösen läßt.

Ein Canal soll in jeder Secunde 200 Kubikfuß Wasser abführen, und auf die Weite von 100 Klafter ein Gefälle von 2 Zoll haben; dabey soll das mit gleichförmiger Bewegung im Canale fortfließende Wasser in jedem Querschnitte die Tiefe von 4 Fuß beybehalten; wie groß muß dessen Mittelbreite seyn? und mit welcher Geschwindigkeit wird sodann das Wasser bey einer solchen Breite im Canale fortfließen?

Hr. Baader gibt in seinem im §. 94 genannten Werke Seite 43 §. 42. folgende sehr einfache Gleichung für die Geschwindigkeit v des Wassers an der Ausflußmündung einer geradlinigen Röhrenleitung von durchaus gleicher Weite

$$v = \sqrt{\left(\frac{478H \times 53D}{L + 53D}\right)} \text{ Parif. Zoll.}$$

welche aus Vergleichung mehrerer Versuche mit der gegebenen Theorie abgeleitet ist, und in Fällen, wo eben nicht die schärfeste Genauigkeit erfordert wird, mit Nutzen gebrauchet werden kann. Hierbey wird alles in Pariser-Zollen ausgedruckt, und es ist

D der Durchmesser der Röhrenweite,
L die Länge der Röhrenleitung,
H die Druckhöhe, nähmlich die lothrechte Vertiefung der Ausflußmündung unter dem Wasserspiegel des Behälters.

Für gegebene v, L, und H läßt sich nach dieser Formel auch D finden; so wie auch H aus v, L und D.

Die

Fig. Die Gründe, aus welchen Herr Baader diese Formel abgeleitet hat, sind kürzlich folgende.

1) Für die Beschleunigung der Schwere $g = 182$ Paris. Zoll, und für die Verhältnißzahl des zusammen gezogenen Wasserstrahles $\alpha = 0,81$ kann man bey einer Druckhöhe $= H$ Paris. Zoll die mittlere Geschwindigkeit, (diejenige nähmlich, womit man die wirkliche Ausflußöffnung einer kurzen Ansatzröhre multipliciren soll um die Ausflußmenge zu erhalten) sehr nahe durch nachstehende Formel ausdrucken $c = \sqrt{478H}$ Paris. Zoll.

2) Man hat durch Beobachtungen und Versuche gefunden, daß der Widerstand der Röhrenwände (eigentlich die Widerstandshöhe, um welche man die Druckhöhe H in der eben angeführten Formel vermindern soll, um die gesuchte mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einer Röhrenleitung zu erhalten) bey einerley Weite der Röhren dem Producte aus der Länge derselben in die quadrirte Geschwindigkeit des durch selbige fließenden Wassers proportional sey; bey gleicher Länge und Geschwindigkeit aber sich verhalte wie der Quotient aus dem Umfange des Querschnittes dividiret durch dessen Flächeninhalt; und daher bey kreisförmigen Querschnitten verkehrt wie der Röhrendurchmesser.

3) Wenn man also für einen Fall den Durchmesser der Röhre $= D$, die Länge derselben $= L$, die Geschwindigkeit des durch dieselbe fließenden Wassers $= v$, und die Widerstandshöhe der Röhrenwand $= x$; für einen anderen Fall den Röhrendurchmesser $= \delta$, die Länge $= \lambda$, die beobachtete Geschwindigkeit $= u$, und die Widerstandshöhe $= y$ nennt; so wird

$$x : y = \frac{Lv^2}{D} : \frac{\lambda u^2}{\delta} = Lv^2\delta : \lambda u^2 D,$$

und folglich $x = \dfrac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D}$ seyn.

Die wirkliche Geschwindigkeit in der Röhre L bey der Druckhöhe H wird daher nur der Höhe $H - x$, oder der

der Höhe $H - \frac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D}$ zugehören. Fig.

Folglich ist $v = \sqrt{[478(H - \frac{yLv^2\delta}{\lambda u^2 D})]}$;

ferner $v^2 (1 + \frac{478 yL\delta}{\lambda u^2 D}) = 478 H$,

und $v = \frac{\sqrt{(478 H)}}{\sqrt{(1 + \frac{478 yL\delta}{\lambda u^2 D})}}$

4) Man hat aus mehreren Beobachtungen für bekannte Werthe von δ, λ, u und y gefunden, daß man $\frac{478 y\delta}{\lambda u^2} = \frac{1}{53}$ beynahe setzen könne. Z. B. bey einer Beobachtung war die Druckhöhe oder das Gefälle der Röhrenleitung $= 145$ Paris. Zoll, $\delta = 18$, $\lambda = 43200$, und $u = 39,16$ Zoll. Die dieser mittleren Geschwindigkeit u zugehörige Höhe vermöge der Formel $c = \sqrt{478 H}$, oder $H = \frac{c^2}{478}$ ist $= \frac{1533}{478} = 3,2$ Zoll; folglich die Widerstandshöhe $y = 145 - 3,2 = 141,8$ Zoll; und $\frac{478 y\delta}{\lambda u^2} = \frac{1}{54}$.

5) Setzet man nun den aus mehreren Beobachtungen gefundenen Werth $\frac{1}{53}$ statt $\frac{478 y\delta}{\lambda u^2}$ in die vorige Gleichung n. 3, so erhält man die von Hrn. Baader angegebene Formel.

$$v = \frac{\sqrt{478 H}}{\sqrt{(1 + \frac{L}{53 D})}} = \sqrt{[\frac{478 H \times 53 D}{53 D + L}]}.$$

Die vorher aus dem Lehrbuche des H. Kosmann angeführte Formel für die Geschwindigkeit in einem regelmäßigen

Fig. gen Canale beruhet auf ähnlichen Gründen. Man hat nähmlich beobachtet, daß in einem regelmäßigen Flußbette der Widerstand, wodurch die weitere Beschleunigung der Bewegung aufgehoben wird, dem zusammen gesetzten Verhältnisse aus den quadrirten Geschwindigkeiten, und aus den Umfängen der Querschnitte in soweit das Wasser in solchen reichet, und ferner dem verkehrten Verhältnisse dieser Querschnitte proportional sey Eben dieser Widerstand, als eine entgegengesetzte Beschleunigung, ist auch proportional dem Sinus des Neigungswinkels des Canalbettes, oder dem Quotienten aus dem Gefälle dividiret durch die dazu gehörige Weite; so wie bey der Bewegung der schweren Körper auf einer schiefen Ebene die Beschleunigung sich verhält wie die Höhe der schiefen Ebene dividiret durch deren Länge. Wenn man daher bey zwey verschiedenen Canälen die Abhänge oder Gefälle $= A$, α, die dazu gehörigen Weiten $= B$, β, die Querschnitte $= F$, f, deren Umfänge $= P$, p, und die Geschwindigkeiten des fließenden Wassers im Beharrungsstande $= C$, c setzet;

so hat man $\frac{A}{B} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{C^2 P}{F} : \frac{c^2 p}{f}$;

folglich ist $c = \left(\frac{C^2 B P}{A F}\right)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{\alpha f}{\beta p}}$.

Nun hat man aus mehreren zu dieser Absicht gemachten Beobachtungen, da man alle Größen durch Par. Zolle ausdruckte, den Coefficienten $\left(\frac{C^2 B P}{A F}\right)^{\frac{1}{2}}$ ohngefähr $= 309$ gefunden. Es ist also in einem gegebenen Canale die mittlere Geschwindigkeit im Beharrungsstande beyläufig

$$c = 309 . \sqrt{\frac{\alpha f}{\beta p}} \text{ Pariser Zoll.}$$

III.

Fig.

III. Abschnitt.

Von einigen der gebräuchlichsten Maschinen zur Hebung des Wassers.

§. 132.

Die Werkzeuge, deren man sich bedienet, das Wasser auf verschiedene Höhen zu bringen, führen den allgemeinen Nahmen Wasserkünste; und heißen insbesondere hydraulische Maschinen, in so fern Rüstzeuge damit verbunden sind, um entweder die daran wirkenden Kräfte zu verstärken, oder aber die Geschwindigkeit der Bewegung zu vergrößern.

Die gebräuchlichsten hydraulischen Werkzeuge lassen sich füglich unter folgende drey Classen bringen.

1) Diejenigen, bey welchen bloß der Druck der Luft wirket, als **Heber**, **Herons-Ball**, **Herons-Brunnen**.

2) Die **Pumpenkünste**, oder die Saug- und Druckwerke, mittelst deren man das Wasser auf sehr große Höhen bringen kann.

3) Die übrigen Wasserkünste, als z. B. gewöhnliche Brunnen mit Schöpfeimern an einem Hebel, oder an einem Wellrade; die Schöpfräder, Kastenkünste, Schaufel- und Püschelwerke, die Archimedische Wasserschraube, u. m. d. gl.

§. 133.

Eine umgebogene an beyden Enden offene Röhre ACB Fig. 40 heißt ein **Heber** (Sipho). Zuweilen ist der Heber aus zwey geraden rechtwinkelig mit einander verbundenen Röhren zusammen gesetzet. 40

Wenn der eine Schenkel CA des **Hebers** ACB in ein bis DF mit **Wasser** gefülltes Gefäß DEF eingetauchet,

Fig. 40 chet wird, der andere Schenkel CB aber außerhalb des Gefäßes mit seiner Mündung B unter den Wasserspiegel hinabreichet; so füllet sich der erste Schenkel vermöge des hydrostatischen Druckes nur bis GH. Wenn aber sodann die Luft entweder durch Aussaugen, oder sonst auf eine Art in dem übrigen Theile des Hebers verdünnet wird, so steigt das Wasser in der Röhre AC über die Wasserfläche DF bis C hinauf, füllet auch den anderen Schenkel CB, und fließt ununterbrochen bey der Mündung B mit einer Geschwindigkeit heraus, deren Höhe der Vertiefung BQ der Mündung B unter dem Wasserspiegel DQ gleich ist.

Denn so lange die Luft im Heber von G bis B mit der atmosphärischen Luft einerley Dichtigkeit und Elasticität hat; so ist der Druck der Atmosphäre gegen die Oberfläche des Wassers DGHF, und der davon entstehende fortgepflanzte Druck um die im hydrostatischen Gleichgewichte stehende Wassersäule AG weiter hinauf zu erheben eben so groß, als der Gegendruck der im Heber befindlichen Luft von eben derselben Dichtigkeit und Elasticität. Wenn hingegen die Luft in dem Theile des Hebers GCB verdünnet wird; so ist der erste Druck stärker als der zweyte: das Wasser muß daher im Schenkel AGC über den Wasserspiegel DF hinaufsteigen; und zwar so, daß, wenn der Heber gänzlich luftleer gemacht wird, der Druck der Atmosphäre fähig ist, das Wasser in demselben bis zu einer Höhe von höchstens 32 Fuß hinaufzutreiben, jedoch nicht weiter. Ist nun die lothrechte Erhöhung CF des Hebers über den Wasserspiegel kleiner als diese Druckhöhe der Atmosphäre; so steigt das Wasser bis C, und sinket von da bis B wegen seines eigenen Gewichtes, und fließt auf diese Art bey B ununterbrochen heraus, so lange B niedriger liegt als der Wasserspiegel DF. Die Wasserschichte an der Mündung B wird sodann nach der Richtung hinauswärts mit einer Kraft gepresset, welche die Höhe der Wassersäule BQ und den Druck der Atmosphäre $= a$ (dessen Druckhöhe auf Wasser reduciret $= a$ höchstens 32 Fuß seyn mag) zur Druckhöhe hat,

hat, weil die zwey Wassersäulen rechts und links an C bis Fig.
zur Ebene des Wasserspiegels DQ für sich im Gleichgewichte 40
sind. Um so viel nähmlich der Druck gegen die Wasserschichte an B nach außen durch die Wassersäule von der Höhe CF vermehret wird; um eben so viel wird der von der Atmosphäre herrührende Druck gegen DF, der sich durch die Wassermasse gegen die Wasserschichte an B fortpflanzet, durch eben dieselbe Wassersäule von der Höhe CF vermindert, so daß die Druckhöhe gegen die Wasserschichte an B nach außen gleich ist $CF + QB + a - CF = BQ + a$; der Drück der Atmosphäre aber gegen eben dieselbe Wasserschichte an B nach innen hat zu seiner Höhe eben dieselbe Druckhöhe der Atmosphäre $= a$, vorausgesetzt, daß die Mündung B nicht außerordentlich tief unter dem Wasserspiegel liegt. Es ist daher die eigentliche Druckhöhe der bewegenden Kraft der Wasserschichte an B nach außen die Differenz der zwey Druckhöhen $QB + a$ und a, nähmlich die Höhe QB, oder die Vertiefung der Mündung B unter dem Wasserspiegel; und es ist der Erfolg beynahe so, als wenn diese Wasserschichte in irgend einer kleinen Oeffnung eines Gefäßes befindlich wäre, und von dem darüber befindlichen schweren Wasser unter der Druckhöhe BQ zum Ausströmen angetrieben würde; und folglich ist diese Vertiefung BQ der Mündung des Hebers die der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers zugehörige Höhe.

Ist nun bey einem solchen Heber das Ende B der Röhre vertical aufwärts gebogen, und die Mündung mit einer sehr kleinen Springöffnung versehen; so springt das auslaufende Wasser in Gestalt eines Springbrunnens bis zur Höhe des Wasserspiegels DQ.

Wenn man den Schenkel CB des Hebers, nachdem solcher bereits Wasser giebt, auch in ein Gefäß einsenket; so wird das Wasser aus dem ersten Gefäße in das zweyte nur so lange fortfließen, als der Wasserspiegel in jenem höher liegt als in diesem. Sobald aber die Wasserfläche in beyden Gefäßen einerley Horizont erreichet; so höret es auf fortzufließen, und wird in dem Bogen des Hebers oberhalb

des

Fig. 40 des Wasserspiegels beyder Gefäße durch den beyderseits gleichen Druck der Atmosphäre als ruhend im Gleichgewichte erhalten. Nimmt man sodann das erste Gefäß DEF hinweg; so wird nun das Wasser aus dem zweyten Gefäße bey der Mündung A herausfließen, so lange diese Mündung A tiefer liegt, als der Wasserspiegel im zweyten Gefäße.

§. 134.

Mittelst des Hebers läßt sich das Wasser aus einem Behälter über eine Anhöhe, die weniger als 32 Fuß beträgt, in eine niedrigere Gegend auf folgende Art hinleiten. Der aus luftdichten Röhren verfertigte Heber ACB wird an seinem höchsten Puncte C mit einer Oeffnung versehen, die sich luftdicht verschließen läßt. Wenn nun ein solcher Heber aus dem Wasserbehälter DEF von A über die Anhöhe FC bis in die niedrigere Gegend B hingeleitet ist; so werden beyde Oeffnungen A und B hinlänglich fest verschlossen, C aber geöffnet, und durch diese letzte Oeffnung der Heber mit Wasser gefüllet. Sodann wird C geschlossen und A geöffnet; so wird das Wasser GC in der Röhre AC durch den Druck der Atmosphäre in der Höhe erhalten, gleichwie auch der andere Theil des Hebers CB noch mit Wasser gefüllet bleibt. Oeffnet man endlich B, so wird allda das Wasser ununterbrochen mit einer der Höhe BQ zugehörigen Geschwindigkeit ausfließen. Eine solche Einrichtung nennet man einen Bergheber.

§. 135.

Der **Vexierbecher** ist ein Gefäß, durch dessen Boden oder Seitenwand der längere Schenkel entweder eines gewöhnlichen gebogenen, oder aber eines solchen Hebers geht, dessen Schenkel in einander stecken; den letzteren nannte
41 man vor Zeiten den Diabetes. Aus Fig. 41 ist die Beschaffenheit des Vexierbechers zu ersehen. Wird nähmlich das Gefäß bis zur Höhe PQ oder darüber mit Wasser, mit Wein, oder mit einer anderen Flüssigkeit gefüllet; so füllet sich auch der Heber, und die Flüssigkeit läuft bey der Oeffnung des Hebers A oder B, nachdem die eine oder die andere Art des Hebers angebracht ist, so lange heraus, bis

das Gefäß beynahe ganz ausgeleeret ist. Da man den Diabetes in einem Trinkbecher auf verschiedene Arten verbergen kann, wodurch ein Unkündiger dieser Einrichtung bey der Anfüllung des Trinkbechers die Flüssigkeit verschüttet; so hat man ein solches Trinkgefäß einen Vexierbecher genannt. Fig. 41

§. 136.

Ein Stechheber ist ein oben und unten verengtes Gefäß, welches durch den äußeren Druck der Atmosphäre sich mit einer Flüssigkeit anfüllet, wenn man die untere Oeffnung in solche eintauchet, und durch das Ansaugen an der oberen die Luft im Gefäße verdünnet. Verschließt man sodann die obere Oeffnung mit dem Finger; so wird die in das Gefäß eingetretene Flüssigkeit in solchem erhalten, wenn man auch die untere verengte Röhre des Stechhebers aus der Flüssigkeit herauszieht, weil der Druck der Atmosphäre das Auslaufen der Flüssigkeit aus dieser verengten Röhre verhindert. In Fig 42 ist ein Stechheber AC abgebildet, 42
der mit einem Handgriffe versehen ist. Die Stechheber sind gemeiniglich aus Glas gemacht, und werden gebrauchet um aus einem Fasse bey dem Spundloche etwas Wein herauszuheben.

§. 137.

Aus den Eigenschaften des Hebers lassen sich die sogenannten intermittirenden Brunnquellen, wie auch verschiedene andere Erscheinungen der Natur sehr gut erklären. Man nennt intermittirende Quellen solche, die zu manchen Zeiten kein Wasser geben, und dann aber wieder stark zu laufen anfangen. Wäre z. B. ACB Fig. 43 ein Wasserbehältniß in 43
einem Berge, welches sein vom eingeseigerten Regen erhaltenes Wasser durch die Oeffnung bey C in den unterirdischen Gang CDE fortleitete, und bey E in einer niedrigeren Gegend wieder an Tag brächte; so ist CDE als ein Heber anzusehen, der nicht eher zu laufen anfängt, als bis der Wasserspiegel AB erweitert die Höhe D erreichet; und von diesem Zeitpuncte an läuft er so lange, bis das Behältniß bis C ausgeleeret ist.

Fig.

§. 138.

44 Der Herons-Ball (Pila Heronis) ist ein luftdichtes Gefäß ABCD Fig. 44 von kugelförmiger oder sonst beliebiger Gestalt, das bis zu einer gewissen Höhe etwa bis GH mit Wasser gefüllet ist, auf welches die im übrigen Raume GABH befindliche Luft durch ein Uebermaß der Elasticität drücket, und das Wasser durch eine oben verengte Röhre EF, die durch den Deckel bis gegen den Boden des Gefäßes geht, in Gestalt eines Springbrunnens in die Höhe treibt.

Es erfolgt aber ein Uebermaß der Elasticität der Luft, wenn man die im Raume ABHG eingeschlossene Luft verdichtet. Ist das Gefäß ziemlich klein, so kann eine merkliche Verdichtung schon dadurch bewirket werden, daß man mit dem Munde so stark, als man kann, durch die Oeffnung F hineinbläset. Durch die Erhitzung des Gefäßes kann die Elasticität der eingeschlossenen Luft noch mehr verstärket werden. Ist der Herons-Ball so eingerichtet, daß man solchen auf eine Druckpumpe anschrauben kann; so läßt sich dadurch ein sehr hoher Wasserstrahl bewirken; nur muß das Gefäß stark genug seyn, damit es durch die sehr zusammen gedrückte Luft nicht zersprenget wird. Um den Herons-Ballen mit Wasser anfüllen zu können, muß außer der Springröhre noch eine andere Oeffnung angebracht seyn, die man durch eine Schraube luftdicht verschließen kann. Ist der Herons-Ball klein, so füllet sich solcher mit Wasser, wenn man ihn erhitzet, und sodann dessen Springröhre ins Wasser eintauchet.

§. 139.

45 Der Herons-Brunnen Fig. 45 besteht aus dem Herons-Ballen AB, und aus zwey anderen Gefäßen VO und CQ, welche mittelst zweyer Röhren GH und LK verbunden sind, deren eine aus dem oberen offenen Gefäße VO dem unteren CQ Wasser zuführet, und die andere aus dem unteren geschlossenen Gefäße die verdrängte Luft in den Herons-Ballen leitet.

Anfangs muß der Herons-Ball AB etwa bis RS mit Wasser gefüllet werden, und dazu dienet eine eigene im oberen Deckel befindliche Oeffnung, die sodann luftdicht ver-

verschlossen werden muß. Darauf gießt man Wasser in die obere Schüssel VO; solches fließt durch die Röhre GH in das untere von allen Seiten luftdicht verschlossene Gefäß CQ hinab, und treibt, so wie es darin höher steigt, einen Theil der Luft aus demselben durch die Röhre LK hinauf in den Herons-Ballen. Dadurch wird die Luft in dem oberen Raume ARSO des Herons-Ballens und zugleich in der Röhre LK, wie auch im Raume des unteren Gefäßes oberhalb MN verdichtet, so lange bis sie mit dem Drucke der Wassersäule GH im Gleichgewichte ist. Hält man bis dahin die Oeffnung bey F verschlossen; so springt darauf das Wasser mit einer Geschwindigkeit heraus, die der Höhe GH zugehöret. Das untere Gefäß CQ muß auch noch eine luftdicht verschlossene Oeffnung haben, die man öffnen kann, um das bereits angefüllte Gefäß CQ auszuleeren, wenn man einen solchen Springbrunnen von neuem anlassen will. Fig. 45

Der Herons-Ball und Herons-Brunnen sind von Hero zu Alexandria, einem Schüler des Ctesibius ungefähr 100 Jahre vor Christi Geburt beschrieben worden.

§. 140.

Eine **Wasserpumpe** überhaupt ist eine cylindrische, zuweilen auch prismatische Röhre, worin vermittelst eines auf- und niedergehenden Kolbens und einiger gehörig angebrachter Ventile oder Klappen das Wasser auf jede beliebige Höhe gebracht werden kann.

Die Ventile einer Wasserpumpe sind entweder Klappenventile, oder Muschelventile. Ein **Klappenventil** besteht aus einer Hülse, das ist aus einem Ringe von Holz oder Messing, und aus einer darauf fallenden und gut schließenden Klappe von Leder mit etwas Bley beschweret, und mit einer Scharnier versehen. Ein **Muschelventil**, welches auch **Kegelventil** heißt, besteht aus einer metallenen Hülse, in deren Oeffnung ein abgekürzter Kegel passet, dessen Stift von der unteren kleineren Grundfläche des Kegels unter der Hülse durch einen Bügel geht, und sich in einen Knopf endiget, um den Kegel beym Auf- und Zuschließen in seiner Lage zu erhalten.

Fig. Das meist gewöhnliche Kolbenventil besteht aus 6 runden Löchern rings um die Achse des Kolbens, welche mit einer runden Scheibe vom starken Leder bedecket werden. Diese Lederscheibe ist in ihrem Mittelpuncte an die obere Kolbenfläche angeschraubet, und von einer solchen Größe, daß sie mit ihrem Umfange allenthalben an die cylinderische Wand des Stiefels genau anschließt. Auch die Röhrenventile können in Ermangelung besserer Ventile auf die Art verfertiget werden, wie es eben von dem meist gewöhnlichen Kolbenventile gesagt worden ist.

§. 141.

Die Wasserpumpen werden abgetheilet 1) in Hebepumpen oder Hebewerke, 2) in Saugwerke, 3) in Druckwerke, und 4) in vereinigte Saug- und Druckwerke.

Ein Hebewerk besteht 1) aus einer Pumpenröhre oder
46 aus dem Stiefel AB Fig. 46, worin der Kolben mit seinem Ventile auf und niedergeht, und sich immer unter dem Wasserspiegel MN des Behälters befindet, aus welchem das Wasser gehoben werden soll; 2) aus der Steigröhre AC oberhalb des Stiefels mit einer Ausgußöffnung D in derjenigen Höhe, auf welche das Wasser gehoben werden soll; 3) aus einem Röhrenventile in der Pumpröhre unter dem niedrigsten Stande des Kolbens, welches sich mit dem Kolbenventile beym Aufziehen und Niederstoßen des Kolbens wechselweise aufwärts öffnet, und wieder schließet. Weiter unten im Wasserbehälter ist ein Seiger mit mehreren kleinen Oeffnungen angebracht, oder statt dessen die untere Oeffnung der Pumpröhre mit einem Netze von Eisendraht überzogen, damit nicht fremdartige gröbere Körper mit dem Wasser in die Pumpröhre eintreten, welche die Ventile verderben könnten. Dieses ist auch bey den weiter unten zu erklärenden Pumpwerken zu beobachten. Aus dieser kurzen Beschreibung eines Hebwerkes ist es nun zu ersehen, daß beym Aufziehen des Kolbens das Kolbenventil geschlossen verbleibe sowohl wegen seines eigenen Gewichtes als auch wegen des Druckes der Atmosphäre, und daß dabey das Röhrenventil sich öffne, wodurch das Wasser durch den äußeren Druck angetrieben

dem

dem Kolben folgen muß. Wird sodann der Kolben nieder- Fig. 46
gestoßen: so wird dadurch sogleich das Röhrenventil geschlossen, das Kolbenventil aber geöffnet, und das Wasser tritt nun über den Kolben in die Steigröhre, welches nach wiederhohlten Kolbenzügen sich ober dem Kolben immer vermehret, und immer höher gehoben wird, bis es in der Steigröhre durch die Ausgußöffnung ausfließt. Die meisten Pumpenbrunnen sind dergleichen Hebewerke.

Der Widerstand, der sich in einem Hebewerke der Kraft am Kolben bey dessen Aufziehen entgegen setzet, nachdem die Steigröhre bis zur Ausgußöffnung mit Wasser gefüllet ist, besteht nebst der Reibung aus dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Kolbenfläche oder den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Erhöhung der Ausgußöffnung über den Wasserspiegel des Behälters zur Höhe hat, wozu auch noch das Gewicht der Kolbenstange im Wasser und des Kolbens selbst zu rechnen ist. Dieses Gewicht wie auch das Gewicht der Wassersäule wird bey den gewöhnlichen Pumpbrunnen meistens mittelst des schweren doppelarmigen Hebels und mittelst des Zugschwenkels ins Gleichgewicht gesetzet, so daß beym Wasserpumpen eigentlich nur die Reibung des Kolbenleders an der Wand des Stiefels, und die Reibung in den Zapfenlagern des Hebels zu überwältigen ist. Uebrigens muß die bewegende Kraft an einer solchen Hebepumpe desto größer seyn, je geschwinder der Kolben beweget werden soll, und je größer das Kolbenspiel oder der Kolbenzug ist, nähmlich die Länge des Stiefels vom niedrigsten bis zum höchsten Stande des Kolbens. Die Wassermenge, welche ein solcher Pumpenbrunnen bey jedem Kolbenzuge liefert, ist am cubischen Inhalte einer Wassersäule gleich, welche den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche und die Länge des Kolbenspieles zur Höhe hat.

Wenn man eine Wasserpumpe so einrichtet, daß das Röhrenventil gleich unter dem Wasserspiegel des Behälters sich befindet, weiter unter diesem aber der Kolben mit seinem

Ventil

Fig. Ventil sein Spiel hat, so ist eine solche Wasserpumpe auch ein Hebewerk.

§. 142.

Ein Saugwerk besteht 1) aus der Saugröhre AB
47. Fig. 47, die mit ihrem unteren Ende im Wasser steht, und gemeiniglich unter dem Wasserspiegel MN mit einem Röhrenventile versehen ist; 2) aus der eigentlichen Pumpröhre oder aus dem Stiefel AC ober dem Wasserspiegel, worin der Kolben mit seinem Ventile auf- und niedergeht. Diese Pumpröhre hat da, wo sie sich an die Saugröhre anschließt, unter dem niedrigsten Stande des Kolbens auch ein Röhrenventil; 3) aus der Steigröhre CD oberhalb des Kolbenspieles mit der Ausgußöffnung in derjenigen Höhe, auf welche man das Wasser heben soll. Die Saugröhre hat gemeiniglich eine kleinere Weite als die Pumpröhre, etwa nur $\frac{2}{3}$ von dieser. Die Steigröhre aber ist öfters mit der Pumpröhre gleich weit, oder noch etwas darüber, damit man jederzeit den Kolben bequem herausnehmen könne, wenn er frisch geledert werden soll.

Wird nun bey einer solchen Einrichtung eines Saugwerkes der Kolben in die Höhe gezogen, so verbleibt das Kolbenventil verschlossen, und dadurch wird die Luft zwischen dem Kolben und dem Wasserspiegel verdünnet; der äußere nun größere Druck der Atmosphäre wird daher die beyden Röhrenventile unter dem Kolben öffnen, und das Wasser in die Saugröhre hinauftreiben. Wird sodann der Kolben hinuntergestoßen, so schließen sich sogleich die 2 Röhrenventile, das Kolbenventil aber öffnet sich, wodurch das Wasser, wenn es schon bis zur Grundfläche des Kolbens bey dessen höchstem Stande gestiegen seyn sollte, nun über den Kolben hinauftritt. Ist aber das Wasser in der Saugröhre noch nicht bis zum Kolben gestiegen, so wird beym Herunterstoßen des Kolbens jederzeit eine gewisse Menge Luft aus dem Raume zwischen dem Wasserspiegel in der Saugröhre und zwischen dem Kolben über diesen in die Steigröhre hinaufgeschaffet, wodurch endlich bey fortgesetztem Kolbenspiele das Wasser über den Kolben in die Steigröhre tritt,

und

und darin immer höher steigt, bis es in der erforderlichen Fig.
Höhe bey der Ausgußöffnung herausfließt. Der Kolben muß 47.
bey seinem niedrigsten Stande so nahe als möglich an das erste Röhrenventil anschließen, damit der Zwischenraum beym niedrigsten Stande des Kolbens zwischen diesem und dem ersten Röhrenventile, welcher der schädliche Raum der Pumpe genannt wird, möglichst klein werde. Das 2te Röhrenventil unter dem Wasserspiegel ist nicht umumgänglich nothwendig; es wird solches nur größerer Sicherheit wegen angebracht, damit das Wasser nicht ausbleibe, wenn etwa durch längeren Gebrauch das obere Röhrenventil etwas schadhaft werden sollte.

Die Erhöhung des Kolbens in seinem höchsten Stande über den Wasserspiegel des Behälters muß bey einem Saugwerke weniger als 32 Fuß betragen. Denn höchstens bis zu dieser Höhe treibt der äußere Druck der Atmosphäre das Wasser nur alsdann, wenn die Luft ganz rein ausgepumpet wird. Da aber solches in den Saugwerken nie völlig genau bewerkstelliget werden kann, über dieß auch zur Eröffnung der Röhrenventile immer etwas von dem Drucke der Atmosphäre verwendet werden muß; so muß die Saugröhre vom höchsten Stande des Kolbens bis zum niedrigsten Wasserspiegel im Behälter immer beträchtlich kleiner seyn, als 32 Fuß; man macht sie daher selten über 24 Fuß lang. Auch der schädliche Raum verhindert zuweilen, daß das Wasser in einem Saugwerke nicht bis zum Kolben hinaufsteigen kann, wenn schon dieser beträchtlich weniger als 32 Fuß über den Wasserspiegel des Behälters erhöhet ist. Jedoch dieses Hinderniß wird beseitiget, wenn man die Saug- und Pumpröhre, ehe man ein dergleichen Saugwerk in Bewegung setzet, von oben mit Wasser anfüllet.

§. 143.

Aufgabe.

Den Widerstand zu finden, der sich in einem Saugwerke der Kraft am Kolben bey dessen Aufziehen

Fig. ziehen entgegen setzet, wenn die Pumpe schon bis zur Ausgußröhre mit Wasser gefüllet ist.

Auflösung.

Es sey f die obere Kolbenfläche oder der Querschnitt des Stiefels, a die auf Wasser reducirte Druckhöhe der Atmosphäre beyläufig 32 Fuß, b die Erhöhung des Kolbens über den Wasserspiegel des Behälters, c die Höhe des Wassers über den Kolben bis zur Ausgußröhre, und q wie bisher das eigenthümliche Gewicht des Wassers; so wird der Kolben von oben herab getrieben von einer Kraft $= faq + fcq$, nähmlich von dem Drucke der Atmosphäre faq, und von dem Gewichte der Wassersäule fcq ober dem Kolben; von unten herauf aber wird der nähmliche Kolben aufwärts getrieben von einer Kraft $= faq - fbq$, nähmlich von dem auf den Wasserspiegel des Behälters wirkenden und gegen den Kolben aufwärts fortgepflanzten Drucke der Atmosphäre faq, der um das Gewicht der Wassersäule fbq unter dem Kolben bis zum Wasserspiegel des Behälters vermindert ist. Diese zwey gegen den Kolben von oben und von unten wirkenden Kräfte sind einander entgegengesetzet; folglich ist ihre Differenz $(faq + fcq) - (faq - fbq) = f(b + c)q$ die Kraft von oben herab, oder der Widerstand, der sich dem Aufziehen des Kolbens wiedersetzet, dieser Widerstand ist daher gleich dem Gewichte einer Wassersäule, die den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Erhöhung der Ausgußröhre über den Wasserspiegel des Behälters zu ihrer Höhe hat.

Bey der wirklichen Bewegung muß die Kraft, welche den Kolben in die Höhe ziehen soll, größer seyn als der angeführte Widerstand, weil auch zur Ueberwältigung der Reibung zwischen dem Kolben und dem Stiefel eine Kraft erforderlich ist, und über dieses je schneller der Kolben auf- und niederwärts sich bewegen soll, eine desto größere Kraft hierzu nothwendig ist.

§. 144.

§. 144. Fig.

Um die Wassermenge zu finden, welche ein Saugwerk im Beharrungsstande binnen einer bestimmten Zeit, z. B. in jeder Minute liefert, muß man wissen, wie vielmahl in jeder Minute der Kolben in die Höhe gezogen wird, und wie groß die Höhe eines jeden Kolbenzuges sey. Wenn man nun den Inhalt des Cylinders, der den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Höhe des Kolbenzuges zur Höhe hat, mit der gegebenen Anzahl der Kolbenzüge binnen einer bestimmten Zeit multipliciret; so erhält man den cubischen Inhalt der Wassermenge für diese Zeit; dabey wird vorausgesetzet, daß der Kolben und die Ventile so genau schließen, daß sie kein Wasser von oben herab durchfließen lassen.

§. 145.

Ein Druckwerk Fig. 48 besteht 1) aus der Pumpröhre 48
oder dem Stiefel AB, der mit seinem unteren Ende BC im Wasserbehälter unter den Wasserspiegel reichet, und worin ein genau passender Kolben ohne Ventil auf- und niederbewegt wird; 2) aus der Knieröhre CD; und 3) aus der damit verbundenen Steigröhre DE, welche das in die Höhe gedrückte Wasser an den bestimmten Ort hinleitet. Sowohl der Stiefel an seinem unteren Ende, als auch die Knieröhre an ihrer oberen Oeffnung haben Ventile, die sich aufwärts öffnen Die Knie-die Saug- und die Steigröhre haben zu ihrer Weite höchstens $\frac{1}{3}$ der Weite des Stiefels.

Wird der Kolben, der nur bis zum Ansatze der Knieröhre hinabgehen kann, damit er deren Oeffnung nicht verschließt, mittelst der Druckstange und mittelst des damit verbundenen Mechanismus in die Höhe gezogen; so wird die Luft im Stiefel unter dem Kolben, und in der Knieröhre unter dem Ventile verdünnet, weil inzwischen das Ventil in der Knieröhre geschlossen bleibet: das Wasser des Behälters wird daher durch den Druck der Atmosphäre das untere Ventil eröffnen, und in den Raum des Stiefels und der Knieröhre eintreten. Wird sodann der Kolben herunter gestoßen; so schließt sich sogleich das Ventil in der Pump-

röhre

Fig. röhre unter dem Kolben, und das eingetretene Wasser wird durch das Ventil der Knieröhre in die Steigröhre gepresset, bis es nach wiederholtem Kolbenspiele zu der erforderlichen Höhe gelanget, und da ausfließt.

§. 146.

An einem Druckwerke ist der Widerstand beym Herunterstoßen des Kolbens, wenn die Steigröhre schon gefüllet ist, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche den Querschnitt des Kolbens oder des Stiefels zur Grundfläche, und die lothrechte Erhöhung des Ausgußes über den Kolben zur Höhe hat. Hierzu kommt noch die sehr beträchtliche Reibung des Kolbens gegen die Wand des Stiefels, die man aus Versuchen bestimmen muß.

Die Wassermenge, welche bey jedem Niedergange des Kolbens in die Steigröhre hineingetrieben wird, und bey der Ausgußöffnung ausfließt, ist eine Wassersäule, welche den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Höhe eines Kolbenzuges zur Länge hat, vorausgesetzt daß sowohl der Kolben als auch beyde Ventile ganz genau schließen. Ist es nun dabey auch bekannt, wie vielmahl der Kolben in einer bestimmten Zeit auf und niedergeht; so kann man auch die Wassermenge für diese Zeit berechnen.

§. 147.

Wenn bey einem Druckwerke der Stiefel nicht im Wasser steht, sondern mittelst einer Saugröhre wie bey einem Saugwerke mit einem Wasserbehälter in Verbindung ist, so nennt man ein solches Pumpwerk ein vereinigtes Saug- und Druckwerk. Die lothrechte Erhöhung der Saugröhre vom Wasserspiegel des Behälters bis zum Kolben darf auch hier wegen der im §. 142. angeführten Ursache nicht viel über 24 Fuß betragen. Uebrigens ist es nicht nothwendig, daß die Saugröhre in lothrechter Richtung von der Pumpröhre bis zum Wasser gerade hinunter gehe; sie kann in einer nach Belieben gebogenen Richtung, wenn es die Umstände so erfordern, bis unter den Wasserspiegel eines entfernt liegenden Behälters geführet werden.

Bey dem vereinigten Saug- und Druckwerke ist der Widerstand, welchen der Kolben beym Niederstoßen zu überwinden hat, so groß, wie es im §. 145 gezeiget worden ist; beym Aufziehen des Kolbens hingegen ist der Widerstand außer der Reibung gleich der Wassersäule, welche den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche, und die Vertiefung des Wasserspiegels des Behälters unter dem höchsten Stande des Kolbens zur Höhe hat. Die Wassermenge, welche ein vereinigtes Saug- und Druckwerk in einer bestimmten Zeit auf eine bestimmte Höhe hinaufbringet, wird nach §. 146 berechnet. Fig.

§. 148.

Sind die Kolbenstangen von zwey Wasserpumpen mittelst einer mechanischen Anrichtung, etwa mittelst einer doppelten Kurbel, oder auch mittelst eines so genannten Kunstkreuzes so verbunden, daß sie wechselweise auf- und abwärts sich bewegen; so nennt man eine solche Anrichtung ein doppeltes Pumpenwerk. Sind mehrere Paare der Wasserpumpen so verbunden, daß die halbe Anzahl der Kolben steigt, wenn die andere Hälfte sinket, so heißt dieses ein zusammen gesetztes Pumpenwerk. Aus dem Vorhergehenden ist es leicht abzunehmen, wie der Widerstand und die Wassermenge eines zusammen gesetzten Pumpenwerkes zu berechnen seyn, es mag solches ein Saug- oder Druckwerk, oder ein vereinigtes Saug- und Druckwerk seyn. Auch ist es leicht begreiflich, daß mehrere Pumpenröhren eines zusammen gesetzten Druckwerkes eine einzige gemeinschaftliche Steigröhre von einer erforderlichen Weite haben können.

§. 149.

Ein Druckwerk, dessen aufwärts gebogene Steigröhre nur wenige Fuß hoch, und am oberen Ende mit einem engen Aufsatzrohre versehen ist, mit hinlänglicher Kraft und Geschwindigkeit angetrieben gibt einen steigenden Wasserstrahl wie ein Springbrunnen, und wird wegen seines Gebrauches bey der Löschung einer entstandenen Feuersbrunst, eine Feuerlöschspritze, oder kurzweg eine Feuerspritze genannt.

Wenn

Fig. Wenn die Kraft nach Abschlag desjenigen Theiles, welcher zur Ueberwindung der Reibung verwendet wird, gegeben ist, womit der Kolben bey einer Feuerspritze gegen das Wasser wirklich gepresset wird, so läßt sich daraus die Höhe des lothrechten Wasserstrahles $= a$ berechnen.

Denn wenn man diese Kraft $= P$ in eine schwere Wassersäule verwandelt, deren Grundfläche der Querschnitt $= f$ des Kolbens oder des Stiefels ist, und welche eine gewisse Höhe $= A$ zu ihrer Höhe hat, wo nähmlich $A = \frac{P}{fq}$ seyn muß; so ist der Erfolg eben so, als wenn der springende Wasserstrahl bey einem Springbrunnen von der Druckhöhe $= A$ bewirket würde; die Höhe des Wasserstrahles ist daher nach §. 91.

$$a = -150 + 10\sqrt{(3A + 225)} \text{ Paris. Fuß.}$$

Und umgekehrt, wenn die lothrechte Höhe $= a$ gegeben ist, welche der springende Wasserstrahl einer Feuerspritze erreichen soll; so läßt sich die Kraft berechnen, mit welcher der Kolben bey seiner Bewegung gegen die Wasserfläche angedrücket werden muß.

Denn aus der gegebenen Höhe $= a$ des Wasserstrahles folget (vermöge §. 91.) die zur Erzeugung dieses Wasserstrahles zugehörige Druckhöhe.

$$A = a + \frac{a^2}{300} \text{ Par. Fuß.}$$

Mit dieser gefundenen Druckhöhe multipliciret man dann den Querschnitt des Kolbens oder des Stiefels; so erhält man den kubischen Inhalt einer Wassersäule, deren Gewicht der gesuchten Kraft gleich ist.

Z. B. Der Stiefel einer Feuerspritze ist 6 Zoll im Durchmesser, und der Strahl soll 80 Par. Fuß hoch steigen; so ist $a = 80$, also $A = 80 + \frac{6400}{300} = 101$ Fuß. Die Grundfläche des Kolbens oder der Querschnitt des Stiefels

hat

hat im Durchmesser $\frac{1}{2}$ Fuß; also ist ihr Flächeninhalt = Fig.
$\frac{1}{16}\pi$ = 0,19635 Quadrat Fuß. Dieser mit A = 101 Fuß multipliciret gibt 19,83 Kub. Fuß für den Inhalt einer Wassersäule, deren Gewicht der gesuchten Kraft gleich ist. Wird nun dieser kubische Inhalt mit 70 Paris. Pfunden als dem Gewichte eines Par. Kub. Fußes Wasser multipliciret, so erhält man 1388 Par. Pfunde für die gesuchte Kraft.

Um bey einer Feuersprize einen ununterbrochen steigenden Wasserstrahl zu erhalten, verbindet man mit der Steigröhre derselben einen so genannten Windkessel, welchen man bey den vorhandenen Feuersprizen sehen kann. Das wesentliche eines solchen Druckwerkes mit dem Windkessel
ist aus Fig. 49 zu ersehen. Es wird nähmlich bey der leb- 49
haften Bewegung eines solchen Druckwerkes, nachdem bereits das Wasser in die Steigröhre BF eingetreten ist, durch den gepreßten Zustand des Wassers die Luft aus dem Raume AEB in den viel kleineren Raum CED zusammengedrücket, welche sodann beym Aufziehen des Kolbens, wo das Ventil in der Knieröhre niederfällt, durch ihre vergrößerte Elasticität das Wasser bey der kleinen Springöffnung F der Steigröhre hinaustreibt.

§. 150.

Für den Erfinder der Wasserpumpen hält man den Ctesibius aus Alexandria in Aegypten, der nicht lange nach Archimedes gelebet, und den schon obengenannten Hero gebildet hat.

Von der Art, wie die Kolben bey den Pumpwerken beweget werden, gibt die practische Mechanik Unterricht, welches man auch an verschiedenen im Großen erbauten Pumpenkünsten dieser Art zu sehen Gelegenheit hat.

Eine höchst sinnreiche und nützliche Art eines dergleichen Mechanismus ist die in England so vielfältig gebrauchte, Dampfmaschine oder Feuermaschine, welche nicht nur zur Bewegung der Kolben bey den Pumpwerken um eine sehr große Menge Wasser auf eine beliebige Höhe zu brin-

gen,

Fig. gen, sondern auch zur unmittelbaren Umdrehung der Mühlräder bey Getreide = und Sägemühlen, bey Stampf = und Hammerwerken, Münzpressen, u. m. d. gl. angewendet wird. Eine ausführliche Beschreibung und Zeichnung der Feuermaschine nach den neuesten Verbesserungen findet man in der Nouvelle Architecture hydraulique par Prony, übersetzt von Hrn. Langsdorf Frankfurt am Mayn 1794.

Für solche, die nicht Gelegenheit haben das genannte Werk des H. Prony zu sehen und zu studieren, wird eine oberflächliche Beschreibung und eine Zeichnung im Durchschnitt der Feuermaschine nach Hrn. Lorenz Elementen der Mathematik der 2ten Auflage Leipzig 1795 hier nicht überflüssig seyn.

50 ACB Fig. 50 ist ein doppelarmiger Hebel, der sich um C drehet, und an dem die Kolbenstangen D, E, F, G, hangen. Die Stange D, die den Kolben H des Dampf-Cylinders K treibt, läuft durch eine mit Werg und Talg gefütterte dampfdichte Büchse bey D, und durch die kreisrunde genau anschließende Oeffnung der gegossenen Platte, die den Dampf = Cylinder oben verschließt.

Aus dem Dampfkessel L, der über einem bey M angelegten Feuer steht, treten die von dem siedenden Wasser aufsteigenden Dämpfe durch die Röhre a, wo sie das Ventil bey b öffnen, in den Canal bcd; dringen bey d in den Dampf = Cylinder über den Kolben H und treiben durch ihre Elasticität denselben herab, wenn unter ihm, wie hernach gezeiget wird, ein beynahe leerer Raum entstanden ist. Der auf diese Art herabgetriebene Kolben zieht den Hebelsarm CB, und mit ihm die Kolbenstangen E, F, G hinauf.

Hat der Kolben H seinen niedrigsten Stand oberhalb f erreichet; so treten die eingedrungenen Dämpfe durch d zurück in den Canal dcb, schließen das Ventil bey b, öffnen das Ventil bey c, und dringen durch die Communications-Röhre cef bey f in den Dampf = Cylinder unter dem Kolben H, bis sie mit dem zurückgebliebenen Theile über demselben das Gleichgewicht halten, wo sodann der Hebelsarm CB, und mit ihm die Kolbenstangen E, F, G, durch das

daran

daran hangende Uebergewicht herab, also der andere Arm CA und mit ihm der Kolben H hinaufgezogen wird. Fig. 50

Der aufsteigende Kolben H treibt den über ihm befindlichen Dampf durch d zurück nach der Communications-Röhre und nach dem unteren Theile des Dampf-Cylinders; wo sodann diese Dämpfe zusammen das Ventil bey g öffnen, und in die Condensations-Röhre ghk dringen, welche durch ein Ventil bey k verschlossen ist. In diese Condensations-Röhre tritt bey m der eine offene Schenkel mn eines gebogenen Hebers lmn, wovon der andere durch ein Ventil bey l verschlossene Schenkel ml in einer mit kaltem Wasser gefüllten Cisterne N stecket.

Hat der Kolben H seinen höchsten Stand erreichet, so öffnet sich das Ventil l, durch welches das kalte Wasser in den Heber lmn dringet, bey n ausspritzet, und die Dämpfe abkühlet, wo indessen die Ventile bey b und k verschlossen sind. Darauf schließen sich die Ventile bey g und l; das Ventil bey b aber öffnet sich wieder, und neue Dämpfe treten, wie anfangs aus dem Dampfkessel in den Dampf-Cylinder über den Kolben H, unter welchem nach obigem ein leerer Raum entstanden ist, ein, und treiben denselben wieder herab.

Um aber das eingespritzte Wasser, das durch die Dämpfe heiß geworden, und noch in der Condensations-Röhre zurückgeblieben ist, nebst der darin entwickelten Luft herauszubringen, dienen die Pumpen PQ, RS, deren erstere das heiße Wasser, indem sich das Ventil bey k öffnet, der anderen zuführet, die ihr Ventil bey R hat, und dieses Wasser in die Höhe fördert, und es durch eine Röhre bey S in den Dampfkessel zur Ersetzung des abgegangenen leitet.

Mittelst des bisher erklärten Mechanismus des wechselseitigen Auf- und Niedergehens des Hebels ACB wird die an B angebrachte Last, sie bestehe nun worin sie wolle, in Bewegung gesetzet. In der Zeichnung ist eine solche Last die Kolbenstange E eines Saugwerkes TV, welches das aus der Tiefe gehobene Wasser bey X ausschüttet.

Ein

Fig. Ein wesentlicher Theil der Feuermaschine ist auch die Steuerung, wodurch die wechselweise Eröffnung und Verschließung der Ventile bewirket wird. Eben so ist auch der neue Mechanismus merkwürdig, welcher mit der wechselweise auf und niedergehenden Bewegung des Hebels verbunden eine ununterbrochene Umlaufsbewegung eines Mühl- oder anderen Maschinenrades hervorbringt. Man muß überhaupt die ganze Feuermaschine, die wegen ihrer sinnreichen Zusammensetzung, und großen Nutzbarkeit dem menschlichen Erfindungsgeiste zu besonderer Ehre gereichet, im Großen oder im Modelle sehen, um einen deutlichen Begriff von ihrer Zusammensetzung und Wirkung zu erlangen.

Bey der angeführten Dampfmaschine ist der Druck der Atmosphäre gegen den Kolben des Dampf=Cylinders ausgeschlossen. Bey der ersten Erfindung dieser Maschine gegen Ende des 17ten Jahrhunderts mußte die elastische Kraft der Wasserdämpfe nebst der zu bewegenden Last auch den großen Druck der Atmosphäre gegen den Kolben des Dampf=Cylinders überwältigen. Das Wesentliche der älteren Erfindung der Dampfmaschine besteht kürzlich im Folgenden, wie es Hr. Burja in den Grundlehren der Hydrostatik, Berlin 1790 beschrieben hat.

51 A Fig. 51 ist ein auf $\frac{2}{3}$ mit Wasser gefüllter Kessel, nebst einem gewölbten am Kessel wohl befestigten Deckel B. Dieser Deckel hat eine Oeffnung und darüber eine Röhre C; diese wird durch einen Hahn C wechselweise geschlossen und geöffnet. Diese Röhre endiget sich in einen Stiefel H von beträchtlicher Weite nach Verhältniß der zu bewegenden Last. An diesem Stiefel ist noch seitwärts eine dünne Röhre I, die ebenfalls durch einen Hahn K wechselweise verschlossen und geöffnet wird, und beständig mit Wasser unter einer ansehnlichen Druckhöhe angefüllet seyn muß, damit etwas von diesem Wasser, sobald der Hahn K geöffnet ist, in den Stiefel H hineinspritze. Im Cylinder H ist ein Kolben L, der auf und nieder gehen kann. Die Kolbenstange LM beweget einen Hebel MN, der in O seine Unterlage hat. Das Ende N des Hebels beweget mittelst der Stange NT einen ande-

anderen Kolben T einer Druckpumpe, welche vermittelst der Röhre PQ das in die Höhe getriebene Wasser in ein Gefäß R ergießt. Fig. 51

Die Maschine wird folgender Weise in Bewegung gebracht. Unter dem Kessel wird Feuer angemacht. Der Hahn C ist anfänglich offen, der Hahn K aber wie auch der Hahn der Ableitungsröhre S verschlossen. Sobald das Wasser anfängt zu kochen; so füllet es den Raum LH mit einem elastischen Dampfe, der den Kolben L in die Höhe treibet, folglich mittelst des Hebels MN den Pumpenkolben NT niederdrücket, und das Wasser zwinget in die Röhre PQ zu steigen.

Nun wird der Hahn C verschlossen, und der Hahn K geöffnet; so spritzet etwas Wasser gerade durch den Dampf in H, und kühlet denselben ab, so daß er in Wassertropfen zusammenfällt, und seine Schnellkraft verlieret. Sodann muß der Kolben L sinken, es sey nun durch den bloßen Druck der äußeren Luft, oder wenn dieser nicht hinlänglich seyn sollte, durch ein Uebergewicht am Hebelsarm OM; wo nun auch der Hahn in der Ableitungsröhre S sich öffnet, und sowohl das eingespritzte als auch das aus den Dämpfen niedergeschlagene Wasser abführet.

Jetzt wird dieser Hahn in der Röhre S wie auch kurz ehevor der Hahn K wieder verschlossen, und C geöffnet. Und da das Wasser immer fort siedet, so steiget neuer Dampf in H, und die Wirkung erfolget abermahls wie vorher. Das Wasser steiget auf diese Art immer höher und höher in der Röhre PQ, und ergießt sich zuletzt in den Behälter R, von wo man es hinleiten kann, wohin man will.

Das wechselweise Eröffnen und Verschließen der Hähne bewirket der auf- und niedergehende Hebel MN mittelst eines eigenen künstlichen Mechanismus, den man die Steuerung nennt. Dergleichen Steuerungen findet man auch bey der Wasser-Säulmaschine und bey der Luftmaschine nach der sinnreichen Erfindung des Hrn. Hell in den Ungarischen Bergwerken, deren Beschreibung man in ausführlicheren Lehrbüchern der Maschinenkunde nachschlagen kann.

Fig.

§. 151.

Unter den Wassermaschinen, welche das Wasser auf eine geringe Höhe in großer Menge mit Vortheile heben, verdienet die von Archimed zu erst angegebene und von ihm den Nahmen führende Archimedische Wasserschraube wegen ihrer vorzüglichen Brauchbarkeit eine kurze Erwähnung.

Die Archimedische Wasserschraube besteht aus einer Welle, um welche eine bleyerne Röhre in Gestalt einer Schraube herumgewunden ist. Anstatt der bleyernen Röhre wird auch öfters um die Welle mit dünnen Brettchen eine Art von Wendeltreppe gemacht, und diese an ihrem äußeren Umfange mit Brettern oder Faß-Dauben wie eine Tonne bedecket, so daß nur an jedem Ende eine hinlänglich weite Oeffnung belassen wird. Diese Maschine wird in schiefer Lage zum Gebrauche aufgestellet, so daß der untere Theil unter Wasser sey, und darin mit seinem Zapfen in einer hinlänglich befestigten Pfanne umlaufen könne. Der obere Zapfen wird mittelst einer Kurbel, oder aber mit einem daran gesteckten conischen Getriebe mittelst eines Stirnrades herumgetrieben. Bey jeder Umdrehung tritt durch die untere Oeffnung eine gewisse Menge Wasser in den hohlen Schraubengang ein; und dieses Wasser wird bey fortgesetzter Umdrehung allmählig steigen, und sich bey der oberen Oeffnung des Schraubenganges in den dazu vorgerichteten Behälter oder ferneren Ableiter ergießen, wenn die Maschine schief genug gegen den Horizont gestellet ist; dergestalt nähmlich daß der Abweichungswinkel ihrer Achse von der Vertical-Linie größer ist, als die Neigung der Schraubengänge gegen den senkrechten Querschnitt; wo ferner bey übrigens gleichen Umständen die mit jeder Umdrehung gehobene Wassermenge desto größer seyn muß; je größer der Unterschied der zwey erwähnten Winkel ist.

Will man die Kraft berechnen, welche zur Umwendung einer solchen Maschine nöthig ist; so stelle man sie vor dem Gebrauche in diejenige geneigte Lage, die sie im Wasser bey dem Gebrauche bekommen soll, und gieße Wasser von oben hinein, soviel sie desselben behalten kann. Man richte so-

dann

dann die Maschine senkrecht auf, und lasse das darin ent- Fig.
haltene Wasser in ein Gefäß ablaufen. Man wäge dieses Wasser, so hat man die absolute Last, die gehoben werden soll. Diese absolute Last multiplicire man mit dem Sinus des Neigungswinkels der Achse der Schraube gegen den Horizont bey ihrem Gebrauche; so erhält man die relative Last, wie auf der schiefen Ebene. Da die Schraube mittelst einer Kurbel, oder aber mittelst eines angesteckten Getriebes wie mittelst eines gegebenen Hebelsarmes gedrehet wird, so berechne man den Umkreis des Cirkels für diesen Hebelsarm als Halbmesser. Man messe auch die Höhe der Schraubenstufen, das ist die Entfernung der Schraubengänge nach einer zur Achse der Schraubenwelle parallelen Richtung. Nun mache man folgende Regel Detri, um die Größe der Kraft zu bekommen, welche am Endpuncte des erwähnten Hebelsarmes angebracht der gefundenen Last das Gleichgewicht hält. Der Umkreis des Hebelsarmes der Kraft verhält sich zur Stufenhöhe, wie die relative Last zur gesuchten Kraft.

Eigentlich müßte beym Abwägen des Wassers derjenige Theil der Röhre, welcher unter Wasser stehen soll, nicht mitgerechnet werden. Doch schadet es nicht ihn mitzurechnen, weil die daraus entstehende Vergrößerung der Kraft bey der Bewegung als ein Uebergewicht dienen kann, so wie auch zur Ueberwindung der Reibung in den Zapfenlagern eine Vergrößerung der berechneten Kraft erforderlich ist.

Inzwischen ist die Reibung (dieses gänzlich unvermeidliche Hinderniß der Maschinen, welches das Ziel derjenigen, die eine immerwährende Bewegung, ein Mobile perpetuum, suchen, unerreichbar macht) bey der erwähnten Archimedischen Wasserschraube weit geringer, als bey anderen zu eben derselben Absicht gebräuchlichen Wasserkünsten, als z. B. Pumpwerken, Kastenkünsten, Schaufelwerken; und eben darum ist jene diesen vorzuziehen, da sie dabey auch die Einfachheit damit verbindet: obwohl die Einfachheit der Zusammensetzung der verschiedenen Theile einer Maschine nicht jederzeit das untrügliche Kennzeichen ihres Vorzuges

Fig. vor anderen zu eben derselben Absicht dienenden Maschinen ist, wie es die angeführten kurzen Beschreibungen der Dampfmaschine nach der älteren und neueren Einrichtung, und noch deutlicher der sinnreiche Strumpfwirkerstuhl in Vergleichung mit den gewöhnlichen Stricknadeln, wie auch die künstlich zusammen gesetzten Bandmacherstühle in Vergleichung mit den ordinären Webestühlen bestätigen. Daraus wird es zugleich begreiflich, daß zusammengesetzte ordentlich eingerichtete Maschinen da immer eine auffallend große Wirkung leisten müssen, wo sie an die Stelle solcher einfacher Werkzeuge gesetzet werden, die vermöge ihrer Einrichtung zur Bewegung einen ganzen Menschen erfordern, ob sie schon zur Ueberwindung der eigentlichen Last vielleicht nur einige Lothe an Kraft nöthig haben; wie z. B. die zusammengesetzten Spinnmaschinen in Vergleichung mit den gewöhnlichen Spinnrädern.

Vier-

Viertes Hauptstück.

Von der Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel.

I. Abschnitt.

Geradlinige Bewegung der festen Körper in einer widerstehenden flüssigen Masse mit Beseitigung der Schwerkraft.

§. 152.

Ein fester Körper, der sich in einer flüssigen Materie beweget, dergleichen z. B. die Luft und das Wasser ist, kann nicht fortgehen, ohne die ihm im Wege liegenden Theilchen derselben in Bewegung zu setzen. Aber eben dadurch muß seine Geschwindigkeit in jedem Augenblicke vermindert werden. Die Elementar-Theilchen der flüssigen Materie widerstehen der Bewegung des in derselben fortgehenden festen Körpers beynahe eben so, wie ein fester Körper der Bewegung eines andern widersteht, der an ihn stößt. Durch einen solchen Widerstand wird in einer gewissen Zeit dem bewegten Körper von seiner Geschwindigkeit etwas entzogen. Der Erfolg ist eben so, als wenn eine bewegende Kraft nach einer Richtung auf den festen Körper wirkete, die der Richtung seiner Bewegung entgegen gesetzet ist. Die Größe dieses Widerstandes, oder dieser negativen bewegenden Kraft hänget

Fig. von verschiedenen Umständen ab. Erstlich von der Dichtigkeit der flüssigen Materie. Der Widerstand ist desto größer, je größer diese Dichtigkeit ist. Ein Körper leidet z. B. bey seiner Bewegung im Wasser einen größeren Widerstand, als bey einer solchen Bewegung in der Luft. Zweytens die Stärke des Widerstandes richtet sich nach der Größe und Gestalt der Oberfläche des festen Körpers, vorzüglich nach der Größe und Gestalt desjenigen Theiles seiner Oberfläche, mit welchem er während der Bewegung gegen die Theilchen der flüssigen Masse unausgesetzt anstößt. Drittens richtet sich die Stärke des Widerstandes nach der Geschwindigkeit, womit sich der feste Körper in einer flüssigen Masse beweget. Man sieht leicht ein, daß bey einer größeren Geschwindigkeit der Widerstand größer seyn müsse, als bey einer kleineren. Bey einer größeren Geschwindigkeit werden nähmlich die anstoßenden Theilchen der vorderen Oberfläche des bewegten Körpers an die vorliegenden Elementar-Theilchen der flüssigen Masse gleichsam näher angerücket, und dadurch einer stärkeren Wirkung der Abstoßungskräfte dieser Elementar-Theilchen ausgesetzet, als bey einer kleineren Geschwindigkeit (3. Th § 59. Anmerk.). Deßwegen ist der Widerstand, welchen die vordere Oberfläche eines festen Körpers bey seiner Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, eine gewisse Function der Geschwindigkeit. Diese Function werden wir bald kennen lernen.

§. 153.

Was im §. 109. der Stoß einer bewegten flüssigen Masse gegen eine unbeweglich gehaltene feste Fläche war, das ist nun hier der Widerstand, welchen eine bewegte feste Fläche, oder die vordere Oberfläche eines bewegten festen Körpers in einer als ruhend betrachteten flüssigen Masse leidet. Der Druck zwischen einer festen Fläche und zwischen den anliegenden Theilchen der flüssigen Masse, welcher von der Abstoßungskraft der Elementar-Theilchen der Materie entsteht, ist nähmlich eben derselbe; es bewege sich entweder eine feste Fläche nach einerley Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit in einer flüssigen Masse; oder aber es werde

die

die Fläche unbeweglich gehalten, und die flüssige Masse be- Fig.
wege sich gegen dieselbe nach eben derselben Richtung mit eben derselben Geschwindigkeit.

Nun ist im §. 109 gezeiget worden, wie man den Stoß einer flüssigen Masse von gegebener Dichtigkeit bey einer gegebenen Geschwindigkeit gegen eine gegebene Stoßfläche ausdrucken könne. Man kann daher auf eben diese Art auch den Widerstand ausdrucken, welchen eben dieselbe Fläche leidet, wenn sie sich mit einer eben so großen Geschwindigkeit in eben derselben flüssigen Masse beweget.

§. 154.

Der senkrechte Stoß einer flüssigen Masse gegen eine feste Ebene ist (§. 109.) gleich dem Gewichte eines Prisma der flüssigen Masse, welches die Stoßfläche zur Grundfläche, und die Geschwindigkeitshöhe des anstoßenden Flüssigen zur Höhe hat. Es ist daher der Widerstand, welchen eine feste Ebene während ihrer Bewegung nach einer auf ihr senkrechten Richtung in einer flüssigen Masse bey einer gegebenen Geschwindigkeit in einem gegebenen Zeitpuncte leidet, dem Gewichte eines Prisma dieser flüssigen Masse gleich, welches die bewegte feste Ebene zur Grundfläche, und die gegebene Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe hat.

Eben so ist auch der Widerstand, welchen ein gerades Prisma oder ein gerader Cylinder bey einer Bewegung nach der Richtung seiner Achse in einer flüssigen Masse in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geschwindigkeit leidet, dem Gewichte eines Prisma dieser Flüssigkeit gleich, welches die Anstoßfläche des bewegten Prisma zur Grundfläche, und die in dem gegebenen Zeitpuncte statt findende Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe hat.

Der Widerstand aber, welchen eine feste Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geschwindigkeit leidet, ist (vermöge §. 117.) dem Gewichte eines Cylinders der flüssigen Masse gleich, welcher den größ-

ten

Fig. ten Durchschnitt einer solchen bewegten Kugel zur Grundfläche, und die Hälfte der im gegebenen Zeitpuncte statt findenden Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe oder Länge hat.

Ist nun D der Durchmesser einer gegebenen festen Kugel, die sich in einer flüssigen Masse beweget,
q das eigenthümliche Gewicht dieser Flüssigkeit,
g wie bisher die Beschleunigung der Schwere,
v die Geschwindigkeit der bewegten Kugel in einem gegebenen Zeitpuncte während ihrer veränderlichen Bewegung, und
R der Widerstand, welcher in diesem Augenblicke bey der gegebenen Geschwindigkeit die Bewegung verzögert; so ist

$$R = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . q = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}.$$

Wenn man z. B. eine bleyerne Kugel von $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser in einem tiefen mit Wasser angefüllten Behälter durch das Wasser gegen den Boden fallen läßt; so wird die Kugel wegen der Schwerkraft mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zu fallen trachten. Allein durch den Auftrieb, und durch den Widerstand des Wassers wird diese Bewegung verzögert, daß die Kugel nicht so schnell sinket, als in freyer Luft. Nach einer gewissen Zeit sey die Geschwindigkeit der sinkenden Kugel $v = 10$ Fuß; so ist für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und für $q = 56\frac{1}{2}$ Pfund, in diesem Augenblicke der Widerstand $R = 8{,}94657$ Pfund, der mittelst der angeführten Formel auf folgende Art gefunden wird.

Log. π	= 0,4971499	Log.	4	= 0,6020600
Log. 100	= 2,0000000	Log.	32	= 1,5051500
Log. 56,5	= 1,7520484	Log.	15,5	= 1,1903317
	4,2491983			3,2975417
Subtr.	3,2975417			
	0,9516566;	die Zahl		= 8,94657 Pf.

Es

Es werde nun eine eiserne Kugel von ½ Fuß im Durch- Fig. messer aus einem Geschützrohre mit einer annemessenen Pulverladung hinausgeschossen; und ihre anfängliche Geschwindigkeit, mit der sie aus der Mündung des Geschützrohres hinausfährt, sey gleich 1500 Fuß. Diese Geschwindigkeit wird durch den Widerstand der Luft, als durch eine nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft nach und nach vermindert. In einem gewissen Puncte der Bahn, oder nach einer gewissen Zeit sey die Geschwindigkeit der Kugel nur noch = 1000 Fuß. Man fragt, wie groß wird in einem solchen Zeitpuncte der Widerstand seyn, wenn die Luft, worin die Kugel fortschießt, von der Beschaffenheit ist, daß 1 Kubikfuß von ihr 2 Loth wiegt? Diesen Widerstand findet man mittelst der angeführten Formel für $D = \frac{1}{2}$, $v = 1000$, $g = 15{,}5$ Fuß, und für $q = 2$ Loth $= \frac{1}{16}$ Pfund durch folgende Rechnung

Log. π = 0,4971499		Log.	4	= 0,6020600
Log. $(1000)^2$ = 6,0000000		Log.	32	= 1,5051500
		Log.	15,5	= 1,1903317
6,4971499		Log.	16	= 1,2041200
Subtr. 4,5016617				4,5016617
1,9954882				

Hierzu gehöret die Zahl 98,9665;

der gesuchte Widerstand ist daher in einem solchen Falle so groß, als wenn in dem festgesetzten Zeitpuncte die Kugel in ihrer Bewegung nach entgegen gesetzter Richtung von einer Kraft von 98,9665 Pfund gepresset würde.

§. 155.

Aus der angeführten Formel für den Widerstand, den eine feste Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, lassen sich verschiedene Folgerungen ableiten; als z. B.

1) **Bey Kugeln von gleichen Durchmessern, und bey verschiedenen Geschwindigkeiten sind die Widerstände in eben demselben flüssigen Mittel den quadrirten Geschwindigkeiten proportional.**

Denn

Fig.

Denn es ist (§. 154.) $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$; und für eine andere Geschwindigkeit V ist $R' = \frac{\pi D^2 V^2 q}{32g}$. Folglich $R : R' = v^2 : V^2$.

2) Bey gleichen Geschwindigkeiten, und verschiedenen Kugeln sind die Widerstände in eben demselben flüssigen Mittel den quadrirten Durchmessernn, oder den quadrirten Halbmessern, oder auch den Oberflächen der Kugeln proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi \delta^2 v^2 q}{32g}$ folget $R : R' = D^2 : \delta^2 = (\frac{1}{2}D)^2 : (\frac{1}{2}\delta)^2 = D^2\pi : \delta^2\pi$.

3) Bey Kugeln von gleichen Durchmessern, und bey gleich großen Geschwindigkeiten sind die Widerstände in flüssigen Massen von verschiedenen Dichtigkeiten, oder von verschiedenen eigenthümlichen Gewichten, diesen eigenthümlichen Gewichten proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi D^2 v^2 Q}{32g}$, folget $R : R' = q : Q$.

§. 156.

Wenn ein schwimmender fester Körper, der zum Theile aus dem Wasserspiegel hervorraget, z. B. ein beladenes Schiff in einem Canale, mit einer gegebenen Geschwindigkeit fortbeweget werden soll; so ist nebst dem Widerstande gegen die Oberfläche des vorderen Theiles auch noch derjenige hydrostatische Druck zu überwinden, welcher daraus entsteht, daß während der Bewegung des Schiffes das Wasser an dem vorderen Theile sich etwas aufstauet, am Hintertheile aber sich etwas vertiefet. Wie nun in dergleichen Fällen der gesammte Widerstand zu bestimmen sey, und wie die Figur des Schiffes beschaffen seyn müsse, damit der gesammte Widerstand ein Kleinstes sey, gehöret eigentlich in die Schiffbaukunst, mit der wir uns nicht beschäftigen können.

Fig.

nen. Hier soll nur von demjenigen Widerstande die Rede seyn, den feste Körper, und zwar vorzüglich Kugeln bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel zu leiden haben, wenn sie darin ganz eingetauchet sich befinden; als z. B. da eine geschossene eiserne Kugel, oder eine geworfene Bombe in der gewöhnlichen Luft sich beweget.

Selbst in der Bestimmung des Widerstandes welchen eine Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, sind die Schriftsteller nicht einig. Die meisten setzen denselben so groß, als er im §. 154. bestimmet worden ist; daß nähmlich der Widerstand gegen eine Kugel dem Gewichte eines Cylinders der flüssigen Masse gleich sey, welcher die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge oder Höhe hat. Einige hingegen sind der Meinung, daß man drey Viertheile der Geschwindigkeitshöhe, zuweilen noch mehr für die Höhe des erwähnten Cylinders annehmen soll. Wenn die Bewegung der Kugel in einer flüssigen Masse so schnell ist, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entsteht, weil die Theilchen der flüssigen Masse sich nicht so geschwind schließen können, als die Kugel ausweichet; so ist nebst dem bisher erwähnten Widerstande, den man den hydrodynamischen zu nennen pflegt, auch noch der hydrostatische Druck zu überwinden, der von dem ungleichen Drucke der schweren flüssigen Masse an der vorderen und hinteren Oberfläche der bewegten Kugel herrühret.

Bey der Bewegung der kugelförmigen Körper in der atmosphärischen Luft, womit diese Untersuchung sich vorzüglich beschäftigen soll, ist selten die Geschwindigkeit so groß, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entstehen könnte, weil die Luft mit einer Geschwindigkeit von beynahe 1336 Wien. Fuß in einen leeren Raum einströhmet (§. 108.) Ist aber die Geschwindigkeit einer bewegten Kugel größer, als 1336 Wien. Fuß; so ist allerdings der nach §. 154. bestimmte Widerstand noch um den Druck der Atmosphäre zu vermehren, welchen die vordere Kugelfläche wegen des rückwärts entstehenden leeren Raumes leidet. Dieser Druck ist

gleich

Fig. gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die an dem Orte der Bewegung statt findende Barometerhöhe zu ihrer Höhe hat.

§. 157.

Aufgabe.

Eine feste Kugel wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einer flüssigen Masse in Bewegung gesetzet; man soll die Bewegung in der Voraussetzung bestimmen, daß die Schwerkraft aufgehoben, und außer dem Widerstande der flüssigen Masse sonst alle Hindernisse der Bewegung beseitiget sind.

Auflösung.

1) Wenn die flüssige Masse keinen Widerstand äußerte; so würde, bey vorausgesetzter Beseitigung der Schwerkraft und aller übrigen Hindernisse, die Kugel in geradliniger Richtung immer mit gleichförmiger Bewegung fortgehen. Weil aber die flüssige Masse der bewegten Kugel einen Widerstand entgegensetzet, der von der Geschwindigkeit der Bewegung abhänget, und nach gerade entgegengesetzter Richtung wirket; so wird dadurch die Geschwindigkeit der Kugel bey der geradlinigen Bewegung beständig vermindert. Der Widerstand ist hier eine veränderliche Kraft, die nach gerade entgegen gesetzer Richtung die Geschwindigkeit unausgesetzt vermindert.

2) Es sey nun D der Durchmesser der in einer flüssigen Masse in Bewegung gesetzten Kugel, und ihr Gewicht oder ihre Masse sey Nmahl so groß, als das Gewicht der flüssigen Masse unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Ferner sey die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, womit die Kugel in der flüssigen Masse in Bewegung gesetzet wird. Nachdem die Kugel nach einer gewissen Zeit $= t$ einen gewissen

wissen Weg $= x$ zurückgeleget hat, sey ihre noch übrige Geschwindigkeit $= v$ nach eben derselben geradlinigen Richtung weiter fortzugehen. Im nächst darauf folgenden Zeit = Elemente, oder Differenziale dt rücket die Kugel auf ihrem geradlinigen Wege um das Differenziale dx weiter fort, und die durch den Widerstand der flüssigen Masse verursachte Vermiderung der Geschwindigkeit in einem solchen Zeit = Elemente ist $= dv$. Fig.

3) Wenn man nun weiters den Widerstand des flüssigen Mittels, als eine verzögernde Kraft P, und die bewegte Masse M gehörig ausdrucket, so wird man mittelst der allgemeinen Formeln der veränderlichen Bewegung

$$\left.\begin{aligned} &\text{A)}\ dv = \pm \frac{2gPdt}{M}. \\ &\text{B)}\ dx = vdt. \\ &\text{C)}\ vdv = \pm \frac{2gPdx}{M}. \\ &\text{D)}\ ddx = \pm \frac{2gPdt^2}{M}. \end{aligned}\right\} \text{(3. Th. §. 56.)}$$

hier, wie in allen übrigen Fällen, die Bewegung vollständig bestimmen können.

4) Aus dem Differenziale dv der veränderlichen Geschwindigkeit, und aus dem Differenziale dt der Zeit läßt sich nähmlich die nach Verlauf der Zeit noch statt findende Geschwindigkeit $= v$ mittelst der ersten Formel $dv = -\frac{2gPdt}{M}$ angeben, wenn man hier $P = \frac{1}{4}D^2\pi.\frac{v^2}{8g}$ (§. 154.), und $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ setzet für das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse $= 1$. Bringet man nun diese Werthe für P und M in die angeführte Gleichung; so erhält man, mit Beybehaltung des Zeichens $-$ wegen der entgegengesetzten Richtung der bewegenden Kraft P, folgende Differenzial = Gleichung

dv

Fig.

$$dv = -\frac{3v^2 dt}{8DN}$$

und ferner nach Absonderung der veränderlichen Größen

$$dt = -\tfrac{4}{3}DN.2v^{-2}dv$$

Um diese Formel noch einfacher auszudrucken, sey

$$\tfrac{4}{3}DN = a$$

so ist $dt = -2av^{-2}dv$.

Hieraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const.} + \frac{2a}{v}.$$

Es ist aber für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; folglich $\text{Const.} = -\frac{2a}{c}$; und

$$\text{I. } t = 2a.\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

Hieraus folget ferner

$$\text{II. } v = \frac{2ac}{2a + ct}$$

$$\text{III. } c = \frac{2av}{2a - vt}.$$

Mittelst der Formel I. läßt sich für gegebene c, v, und $a = \tfrac{4}{3}DN$; die Zeit t berechnen, nach deren Verlauf die anfängliche Geschwindigkeit c bis zu einer gegebenen Größe v abgenommen hat. Setzet man da $v = 0$, und suchet die dazugehörige Zeit t; so findet man t unendlich groß. Die Geschwindigkeit eines bewegten festen Körpers wird daher durch den Widerstand der flüssigen Masse niemahls gänzlich getilget, obschon dieselbe unausgesetzt vermindert wird.

Durch die Formeln II. und III. kann man für eine gegebene Zeit $= t$, und für eine der zwey Geschwindigkeiten, die im Anfange und zu Ende dieser Zeit statt finden; die andere Geschwindigkeit berechnen.

5) Aus den in 2) festgesetzten Bezeichnungen kann man nun auch mittelst der in 3) angeführten allgemeinen Formel

$dx =$

$dx = vdt$ eine Gleichung ableiten, welche den Zusammenhang der veränderlichen Geschwindigkeit v mit dem zurückgelegten Wege x darstellet. Wenn man nähmlich in dieser allgemeinen Formel $dx = vdt$ für dt den Werth $dt = - 2av^{-2}dv$ aus 4) setzet; Fig.

$$\text{so ist } dx = - 2av^{-1}dv = - 2a.\frac{dv}{v}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - 2a.\,\text{lognat}\, v$$

nun ist für $x = 0$, die Geschwindigkeit $v = c$;

$$\text{folglich Const.} = 2a.\,\text{lognat}\, c; \text{ und}$$

$$\text{IV. } x = 2a.\,\text{lognat}\frac{c}{v}.$$

Hieraus folget ferner, wenn man die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systemes mit h bezeichnet,

$$\frac{x}{2a}\,\text{lognat}\, h = \text{lognat}\frac{c}{v}$$

$$\text{folglich auch } h^{\frac{x}{2a}} = \frac{c}{v}; \text{ und endlich}$$

$$\text{V. } v = ch^{-\frac{x}{2a}}$$

$$\text{VI. } c = vh^{\frac{x}{2a}}.$$

Die Formeln IV. V. und VI. findet man auch, wenn man in der Grundformel C) in 3) für P und M die in 4) angegebenen Werthe setzet, und gehörig integriret.

Mittelst der Formel IV. läßt sich für gegebene $a = \frac{4}{3}DN$, für c und v der Weg x berechnen, an dessen Endpuncte die anfängliche Geschwindigkeit c bis zur Größe v abgenommen hat.

Durch die Formeln V. und VI. kann man für ein gegebenes x, und für die gegebene Geschwindigkeit an dem einen Endpuncte dieses Weges, die Geschwindigkeit berechnen welche zu dem anderen Endpuncte desselben Weges gehöret.

6) Um den Zusammenhang zwischen dem zurückgeleg-

ten

Fig. ten Wege x, und zwischen der dazu verwendeten Zeit analytisch auszudrucken, substituire man in IV. für v den Werth aus II; so ist

$$\text{VII. } x = 2a \,.\, \text{lognat}\,(1 + \frac{ct}{2a})$$

$$\text{VIII. } t = \frac{2a}{c} \,.\, (h^{\frac{x}{2a}} - 1)$$

$$\text{IX. } c = \frac{2a}{t} \,.\, (h^{\frac{x}{2a}} - 1).$$

Mittelst der Formel VII. findet man den Weg x, welcher in einer gegebenen Zeit t bey einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c zurückgeleget wird. Umgekehrt aus x und c findet man t mittelst der Formel VIII. Und endlich kann durch die Formel IX. die anfängliche Geschwindigkeit c berechnet werden, damit bey einer solchen Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel ein bestimmter Weg x in einer bestimmten Zeit t zurückgeleget werde.

§. 158.

Um die Formeln für die geradlinige Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel, bey Vernachläßigung der Schwerkraft und sonstigen Hindernisse, in einer bequemen Uebersicht kurz beysammen zu haben, werden dieselben allhier in eben der Ordnung, wie sie erwiesen wurden, wiederhohlet.

D Durchmesser der in Bewegung gesetzten festen Kugel.

N die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl das Gewicht der festen Kugel größer ist, als das Gewicht der Flüssigkeit unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Man findet diese Zahl, wenn man die specifische Schwere der Kugel durch die specifische Schwere der Flüssigkeit dividiret, worin die Bewegung geschieht.

$a = \frac{4}{3} DN$,

c die anfängliche Geschwindigkeit,

Fig.

x der zurückgelegte Weg,
t die dazu gehörige Zeit,
v die Geschwindigkeit am Ende des Weges x nach Verlauf der Zeit t.

Bey diesen Bezeichnungen ist nun der Zusammenhang zwischen.

A. Zeit und Geschwindigkeiten.

$$\text{I. } t = 2a.\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

$$\text{II. } v = \frac{2ac}{2a+ct}.$$

$$\text{III. } c = \frac{2av}{2a-vt}.$$

B. Raum und Geschwindigkeiten.

$$\text{IV. } x = 2a.\,\text{lognat}\,\frac{c}{v}.$$

$$\text{V. } v = ch^{-\frac{x}{2a}}.$$

$$\text{VI. } c = vh^{\frac{x}{2a}}.$$

C. Raum, Zeit, und anfängl. Geschwindigkeit.

$$\text{VII. } x = 2a\,\text{lognat}\left(1 + \frac{ct}{2a}\right).$$

$$\text{VIII. } t = \frac{2a}{c}.\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

$$\text{IX. } c = \frac{2a}{t}.\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Fig. **Anmerk.** Die angeführten Formeln sind auch brauchbar, wenn der bewegte feste Körper keine Kugel wäre, sondern eine andere gegebene Gestalt hätte, z. B. wenn er prismatisch oder cylindrisch wäre. Nur müßte in einem solchen Falle der Werth des Buchstaben a gehörig bestimmet werden. Wenn z. B. ein gerader Cylinder von dem Durchmesser D und von der Länge L, nach der Richtung seiner Achse in einem flüssigen Mittel sich fortbewegete; so wäre bey den (im §. 157.) festgesetzten Bezeichnungen

$$dv = -\frac{2gPdt}{M} = -2gdt \times \tfrac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{4g} : \tfrac{1}{4}D^2\pi LN$$

$$= -\frac{2v^2dt}{4LN}; \text{ und ferner}$$

$$dt = -LN . 2v^{-2}dv.$$

Vergleichet man nun diese Formel mit der im §. 157 in 4) befindlichen $dt = -2av^{-2}dv$; so sieht man, daß alle dort durch die Integral-Rechnung gefundenen Formeln hier ihre Anwendung haben, wenn man hier $a = LN$ setzet.

Die bisher angeführten Formeln können auf die horizontale Bewegung der abgeschossenen Kanonkugeln angewendet werden, in so weit solche bey dem so genannten Kernschuße von der geradlinigen Bewegung nicht merklich abweichen. Wenn z. B. die Geschwindigkeit einer 12pfündigen Kanonkugel, womit sie aus der Mündung des Geschützes hervorschießt, von 1200 Wien. Fuß angenommen wird; so kann man finden, wie groß ihre Geschwindigkeit nach der Zurücklegung eines horizontalen Weges von etwa 600 Fuß sey, und wie viel Zeit zur Zurücklegung eines solchen Weges erfordert werde. Suchet man ferner zu dieser berechneten Zeit, nach der Lehre des freyen Falles schwerer Körper, die zugehörige Höhe; so findet man dadurch, um wie viel beyläufig die abgeschossene Kugel in der Weite von 600 Fuß durch die Schwerkraft von der anfänglichen horizontalen Richtung herabgesunken ist.

§. 159.

Fig.

§. 159.

Wenn die Geschwindigkeit bey der bisher betrachteten geradlinigen Bewegung einer festen Kugel in einem flüssigen Mittel so groß ist, daß hinter der Kugel ein leerer Raum übrig bleibet; so wird die Bewegung außer dem bisher in Erwägung gezogenen Widerstande auch noch durch den hydrostatischen Druck verzögert, welcher wegen des leeren Raumes gegen die vordere Oberfläche der Kugel entsteht. Diesen hydrostatischen Druck kann man durch das Gewicht einer Säule derjenigen Flüssigkeit ausdrucken, worin die Bewegung geschieht. Setzet man die Grundfläche einer solchen Säule dem größten Durchschnitte der Kugel gleich, und ihre Höhe $= \alpha$; so ist sodann bey den übrigen festgesetzten Bezeichnungen in der angeführten allgemeinen Formeln der Bewegung $P = \frac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} + \frac{1}{4} D^2 \pi . \alpha$, und $M = \frac{1}{6} D^3 \pi N$. Sustituiret man nun diese Werthe für P und M in der Formel $dv = - \frac{2gPdt}{M}$; so ist $dv =$

$$- 2gdt . \tfrac{1}{4} D^2 \pi \left(\frac{v^2}{8g} + \alpha \right) : \tfrac{1}{6} D^3 \pi N$$

$$= - \frac{3(v^2 + 8\alpha g)dt}{8DN}$$

und ferner durch die Absonderung

$$dt = - \tfrac{4}{3} DN \left(\frac{2dv}{8\alpha g + v^2} \right) = - 2a \left(\frac{dv}{8\alpha g + v^2} \right).$$

Diese Gleichung läßt sich durch Beyhülfe der Kreisbogen integriren; welches aber zur Uebung und weiterer Ausführung dieser Bewegung dem eigenen Fleiße überlassen wird.

§. 160.

Wenn der Cylinder, dessen Gewicht bey der Bewegung einer Kugel in einem flüssigen Mittel den Widerstand ausdrucket, nicht die halbe Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge hätte, sondern diese Länge $k$mahl größer seyn sollte, als sie bisher festgesetzet worden ist; so werden die angeführten Formeln

Fig. meln (§. 158.) auch für einen solchen Fall brauchbar seyn, wenn man darin $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ gelten läßt. Z. B. Für $k=1$ ist $a=\frac{4}{3}DN$ wie oben (§. 158.); für $k=2$ ist $a=\frac{2}{3}DN$; und für $k=1\frac{1}{3}$ ist $a=DN$; u.s.w. Diese Erinnerung über die Festsetzung des Werthes von a erstrecket sich zugleich auf die folgenden Fälle der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel. Daß übrigens in den angeführten Formeln $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ sey, wenn der Widerstand gegen eine Kugel bey der Bewegung in einem flüssigen Mittel durch $P = \frac{1}{4}D^2\pi.\frac{kv^2}{8g}$ ausgedrucket wird, erhellet aus der Vergleichung der Grundformeln der Bewegung für diesen Fall mit dem oben angeführten Grundformeln für $P = \frac{1}{4}D^2\pi.\frac{v^2}{8g}$.

II. Abschnitt.

Lothrechte Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel.

§. 161.

Bey der lothrechten Bewegung der schweren Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel sind zwey Fälle zu unterscheiden: nähmlich 1tens das lothrechte Sinken eines frey ausgelassenen, oder auch mit einer anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht abwärts geworfenen schweren Körpers; und

und 2tens das lothrechte Steigen eines mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht aufwärts geworfenen oder geschossenen schweren Körpers. Fig.

Beym Sinken sowohl, als auch beym Steigen, in einem widerstehenden flüssigen Mittel sind drey Kräfte in Erwägung zu ziehen, welche auf die Bewegung Einfluß haben: nähmlich 1tens die Schwere, welche als eine unveränderliche Kraft senkrecht gegen die Erde herabwirket. 2tens der Auftrieb (§. 22.), welcher beym Sinken die Bewegung verzögert, und beym Aufsteigen beschleuniget. 3tens der eigentliche Widerstand der flüssigen Masse, welcher die Bewegung verzögert.

Wenn beym Sinken eines schweren Körpers in einem flüssigen Mittel die Geschwindigkeit so groß ist, daß der davon abhangende Widerstand der flüssigen Masse gegen die vordere Oberfläche des fallenden Körpers dem durch den Auftrieb verminderten Gewichte eines solchen Körpers gleich wird; so ist es offenbar, daß sodann die Geschwindigkeit nicht mehr vergrößert werden kann, weil die bewegende Kraft nach der Richtung abwärts durch die gerade entgegengesetzte Kraft des Widerstandes gänzlich aufgehoben wird; dergestalt, daß das fernere Sinken des schweren Körpers eine gleichförmige Bewegung ist.

§. 162.

Aufgabe.

Das Sinken, oder den Fall einer schweren Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel zu bestimmen.

Auflösung.

1) Da eine solche Bewegung von drey verschiedenen Kräften abhänget (§. 161.); so wird man dieselbe mittelst der angeführten Grundformeln der Bewegung (§. 157. N. 3.) bestim-

Fig. bestimmen können, wenn man P und M in $dv = \frac{2gPdt}{M}$, oder auch $vdv = \frac{2gPdx}{M}$ gehörig ausdrucket, und sodann die Gleichung integriret.

2) Es sey nun D der Durchmesser der Kugel welche in einem flüssigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit dem lothrechten Falle überlassen wird. Das Gewicht der Kugel sey Nmahl so groß, als das Gewicht der flüssigen Masse unter einem mit der Kugel gleich großen Inhalte. In der Zeit t lege die Kugel einen Weg x zurück, und erlange nach Verlauf dieser Zeit am Endpuncte des Weges x die Geschwindigkeit v.

3) Im darauf folgenden Zeit-Elemente dt bey der Zurücklegung des Weges dx erlange die Geschwindigkeit des sinkenden Körpers den unendlich kleinen Zuwachs dv; so läßt sich dieses dv, und folglich auch v aus der Gleichung $dv = \frac{2gPdt}{M}$ bestimmen, wenn man darin $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$, und $P = \frac{1}{6}D^3\pi N - \frac{1}{6}D^3\pi - \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{8g}$ setzet. Es ist nähmlich $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ die zu bewegende Masse; die bewegende Kraft P aber besteht aus dem absoluten Gewichte der Kugel $\frac{1}{6}D^3\pi N$, und aus dem nach entgegen gesetzter Richtung wirkenden Auftriebe $\frac{1}{6}D^3\pi$, und Widerstande der flüssigen Masse $\frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{8g}$.

Es ist daher $dv = \frac{2g(N-1)dt}{N} - \frac{3v^2dt}{8DN}$.

4) Um diese Differenzial-Gleichung kürzer auszudrücken, setze man $\frac{g(N-1)}{N} = \gamma$, und $\frac{4}{3}DN = a$ wie im §. 157 und 158. Dadurch wird γ die durch den Auftrieb verminderte Beschleunigung der Schwere bedeuten.

Was

Was die Größe a bey der Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel eigentlich vorstellet, wird weiter unten zu ersehen seyn. Es ist $a = \frac{4}{3} DN$ diejenige Geschwindigkeitshöhe, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse gegen eine feste Kugel dem Gewichte der letzten gleich ist. Fig.

5) Nach dieser Bezeichnung ist

$$dv = \frac{(4\gamma a - v^2)dt}{2a}, \text{ und}$$

$$dt = \frac{2adv}{4\gamma a - v^2}$$

und ferner, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{4\gamma a - v^2} = \frac{1}{(\sqrt{4\gamma a} - v)(\sqrt{4\gamma a} + v)}$$

nach den bekannten Regeln in zwey Brüche

$$= \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}.(\sqrt{4\gamma a} + v)} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}.(\sqrt{4\gamma a} - v)} \text{ zerleget}$$

$$dt = \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} + v}\right) + \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} - v}\right).$$

Hier kann man um die Gleichungen noch einfacher auszudrucken,

$$\sqrt{4\gamma a} = b$$

setzen. Was eigentlich $b = \sqrt{4\gamma a} = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ bey dieser Untersuchung bedeute, wird weiter unten zu ersehen seyn. Und nun ist

$$dt = \frac{a}{b}.\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right)$$

daraus folget endlich durch die Integration

$$\text{I. } t = \frac{a}{b}.\text{lognat}\left(\frac{b+v}{b-v}\right)$$

wo Const. $= 0$ ist, weil für $t = 0$ auch $v = 0$ ist, wenn man annimmt, daß die Kugel nicht abwärts geworfen sondern aus einer vollkommenen Ruhe der Wirkung der Schwer-

Fig. Schwerkraft überlassen wird. Wenn hingegen die Kugel mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht abwärts geworfen würde; so wäre für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; daher Const. $= -\frac{a}{b}.\,\text{lognat}\left(\frac{b+c}{b-c}\right)$,

und $t = \frac{a}{b}.\,\text{lognat}\left(\frac{(b+v)(b-c)}{(b-v)(b+c)}\right)$.

6) Die gefundene Gleichung I. in 5) kann man auch auf folgende Art schreiben, worin h die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems bedeutet,

$$\frac{bt}{a}.\,\text{lognat}\, h = \text{lognat}\left(\frac{b+v}{b-v}\right),$$

und ferner $h^{\frac{bt}{a}} = \frac{b+v}{b-v}$.

Hieraus folget nun

$$\text{II. } v = b.\left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right).$$

Mittelst dieser Formel II. findet man die Geschwindigkeit v, welche eine schwere Kugel bey ihrem lothrechten Sinken in einem flüssigen Mittel nach Verlauf der Zeit t erlanget. Umgekehrt findet man zu einer gegebenen Geschwindigkeit v die dazu gehörige Zeit t mittelst der Formel I.

Die Formel I. zeiget uns an, daß v immer kleiner seyn müsse, als b; weil für $v > b$ nach dieser Formel der Ausdruck für die Zeit durch den Logarithmen einer negativen Zahl angegeben würde, und daher unmöglich wäre.

Daß v immer kleiner seyn müsse als b, zeiget noch deutlicher die Formel II., worin zwar v mit t wächst, aber doch

Fig.

doch dabey immer kleiner bleibt als b, weil

$$\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}$$ ein echter Bruch ist.

7) Um zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der erlangten Geschwindigkeit v eine Gleichung zu finden, setze man nun in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = vdt$ (§. 157. N. 3.) statt dt aus 5) den Werth

$\frac{a}{b}\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right) = \frac{2adv}{b^2 - v^2}$; so erhält man

$$dx = \frac{2avdv}{b^2 - v^2} = -a . \frac{-2vdv}{b^2 - v^2}.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a . \text{lognat}(b^2 - v^2).$$

Nun ist für $x = 0$ auch $v = 0$;
folglich $\text{Const.} = a . \text{lognat}\, b^2$; und

$$\text{III. } x = a . \text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right).$$

Hieraus folget ferner $h^{\frac{x}{a}} = \frac{b^2}{b^2 - v^2}$, und

$$\text{IV. } v = b . \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}.$$

Diese Formeln III. und IV. findet man auch, wenn man in der dritten Grundformel der Bewegung

$2vdv = \frac{4gPdx}{M}$ (§. 157. N. 3.) für P und M die in 3) angegebenen Werthe setzet, darauf die bemerkten Abkürzungen anbringet, und endlich gehörig integriret.

8) Endlich ist es auch noch erforderlich eine Gleichung anzugeben, welche den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der dazu gehörigen Zeit vorstellet. Man findet diese Gleichung auf folgende Art.

Man

Fig. Man setze in der Formel I. statt v den Werth aus der Formel IV. so ist

$$t = \frac{a}{b} . \operatorname{lognat}\left(\frac{1 + \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}}{1 - \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}}\right)$$

und ferner, wenn man den Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Zähler multipliciret, und gehörig reduciret,

$$\text{V. } t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b} . \operatorname{lognat}[1 + \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}].$$

Aus dieser letzten Gleichung folget ferner,

$$\text{VI. } x = bt + 2a . \operatorname{lognat} \tfrac{1}{2}(1 + h^{-\frac{bt}{a}}).$$

Man findet eben diesen Ausdruck für x, wenn man in der Formel III. statt v den Werth aus II. substituiret, und gehörig reduciret; oder welches einerley ist wenn man aus der vorhergehenden Gleichung

$$t = \frac{a}{b} . \operatorname{lognat}\left(\frac{1 + \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}}{1 - \sqrt{(1 - h^{-\frac{x}{a}})}}\right)$$

den Werth von x entwickelt. Man findet auf diese Art

$$x = a . \operatorname{lognat.}\left[\frac{(h^{\frac{bt}{a}} + 1)^2}{(h^{\frac{bt}{a}} + 1)^2 - (h^{\frac{bt}{a}} - 1)^2}\right]$$

und ferner, wenn man im Nenner dieser letzten Gleichung anstatt der Differenz der zwey Quadrate das Product aus der Summe und aus der Differenz ihrer Wurzeln, setzet,

$x =$

Fig.

$$x = a \,.\, \text{lognat}\left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} + 1}{2h^{\frac{bt}{2a}}}\right).$$

welches nun ferner so, wie in VI. geschrieben werden kann.

Die Formel V. und VI. findet man auch, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = vdt$ für v den Werth aus IV. setzet, und die dadurch erhaltene Differenzial-Gleichung gehörig integriret.

Mittelst der Formel V. kann man die Zeit t berechnen, binnen welcher eine gegebene Höhe x durch den lothrechten Fall einer Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel zurückgeleget wird. Umgekehrt findet man die Höhe x, wenn die Zeit t des Falles gegeben ist, mittelst der Formel VI.

§. 163.

Um die Formeln für das Fallen der schweren Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel zur bequemen Uebersicht kurz beysammen zu haben, will ich dieselben hier in der Ordnung, wie sie erwiesen worden sind, wiederhohlen. Es sey nähmlich

D der Durchmesser einer Kugel,

N die Zahl, welche anzeiget, wie oft die specifische Schwere der Flüssigkeit, worin die Bewegung geschieht, in der specifischen Schwere der Kugel enthalten ist,

$a = \frac{4}{3}DN$ eine Abkürzung,

g die Beschleunigung der Schwerkraft,

$b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ eine Abkürzung,

x der durch den Fall zurückgelegte Weg,

t die Zeit, binnen welcher der Weg x zurückgeleget wird,

Fig.

v die nach Verlauf der Zeit t am Ende des Weges x durch den Fall erlangte Geschwindigkeit,

h die Grundzahl des natürlichen logar. Systems: so ist der Zusammenhang zwischen

A. Zeit und Geschwindigkeit.

$$\text{I. } t = \frac{a}{b} \cdot \text{lognat}\left(\frac{b+v}{b-v}\right).$$

$$\text{II. } v = b \cdot \left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right).$$

B. Raum und Geschwindigkeit.

$$\text{III. } x = a \cdot \text{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right).$$

$$\text{IV. } v = b \cdot \sqrt{\left(1 - h^{-\frac{x}{a}}\right)}.$$

C. Zeit und Raum.

$$\text{V. } t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b} \cdot \text{lognat}\left[1 + \sqrt{\left(1 - h^{-\frac{x}{a}}\right)}\right].$$

$$\text{VI. } x = bt + 2a \cdot \text{lognat}\, \tfrac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right).$$

Anmerk. Wenn die specifische Schwere der Flüssigkeit, worin die Kugel lothrecht herabsinket, in Vergleichung der specifischen Schwere der Kugel sehr klein ist; so kann in dem Ausdrucke $b = \frac{\sqrt{4ga(N-1)}}{N}$ ohne merklichen Feh-

ler

ler $\frac{N-1}{N} = 1$ gesetzet werden. Es ist alsdann $b = \sqrt{4ga}$; Fig.
und es bedeutet b eine durch den freyen Fall von der Höhe $a = \frac{4}{3}DN$ erlangte Geschwindigkeit bey welcher der Widerstand der Flüssigkeit gegen eine darin bewegte Kugel so groß ist, als das Gewicht der Kugel. Wenn z. B. eine eiserne Kugel in der widerstehenden Luft mit einer anfänglichen Geschwindigkeit, deren Geschwindigkeitshöhe $a = \frac{4}{3}DN$ wäre, in lothrechter Richtung abwärts geworfen würde; so wäre sie gleich anfangs einem Widerstande $= \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{4}{3}DN . \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{6}D^3\pi N$ ausgesetzet, und das Gewicht der Kugel wäre bey den festgesetzten Bezeichnungen auch $= \frac{1}{6}D^3\pi N$. Es wäre daher in einem solchen Falle der Widerstand der Luft dem Gewichte der Kugel gleich; und weil diese zwey gleichen Kräfte, Gewicht und Widerstand, einander gerade entgegen gesetzet sind: so würde die Kugel in ihrer fernern lothrechten Bewegung weder beschleuniget, noch verzögert werden, sondern müßte mit gleichförmiger Bewegung fortgehen, in so fern die Luft von gleichförmiger Dichtigkeit angesehen werden kann.

Weil nun $a = \frac{4}{3}DN$ diejenige Geschwindigkeitshöhe anzeiget, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse dem Gewichte der darin bewegten Kugel gleich ist; so hat man zuweilen dem Ausdrucke a ($= \frac{4}{3}DN$ bey einer Kugel, und $= LN$ bey einem Cylinder) den Nahmen, Maß des Widerstandes, auch Exponent des Widerstandes, beygeleget. Wenn die specifische Schwere des bewegten Körpers in Vergleichung mit der specifischen Schwere der Flüssigkeit, worin die Bewegung vor sich geht, nicht besonders groß ist; so ist nicht $b = \sqrt{4ga}$, sondern es ist $b = \sqrt{\left(\frac{4ga(N-1)}{N}\right)}$ diejenige Geschwindigkeit, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse gegen einen darin sinkenden festen Körper so groß wird, als das Gewicht des festen Körpers.

Dieser

Fig.

Dieser Ausdruck $b = \sqrt{(\frac{4ga(N-1)}{N})}$ ist die Gränze, der sich die immer wachsende Geschwindigkeit eines fallenden Körpers in einem widerstehenden flüssigen Mittel immer nähert, und dieselbe doch niemahls erreichet, wie es schon (§. 162. N. 6.) erinnert worden ist.

Man kann nach dieser Formel $b = \sqrt{(\frac{4ga(N-1)}{N})}$ die Geschwindigkeit berechnen, welche ein herabfallender Regentropfen eines gegebenen Durchmessers, z. B. von 1 Duodecimal-Linie, niemahls übersteiget, die Erhöhung der Wolke, aus welcher derselbe herabfällt, möge wie immer groß seyn. Daraus wird man ersehen, wie nützlich der Widerstand der Luft in solchen Fällen sey; weil sonst die Geschwindigkeit der Regentropfen bey der großen Höhe, von der sie herabfallen, so beträchtlich anwachsen müßte, daß dieselben für Thiere und Pflanzen eben so tödtlich würden, wie das durch die Kraft des Schießpulvers hinausgeschossene Bleyschrot.

§. 164.

Um die bisher vorgetragene Lehre von der Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit Erfahrungen zu vergleichen, folgen hier in nachstehenden zwey Tafeln einige Versuche, welche auf Newtons Veranlassung in den Jahren 1710 und 1719 zu London in der Paulus-Kirche angestellet worden sind.

Man ließ aus einer Höhe von 220 Londner-Fuß gläserne Kugeln, deren Gewicht und Durchmesser in den zwey ersten Spalten folgender Tabelle angemerket sind, herabfallen, beobachtete die Zeit ihres Falles, und berechnete endlich aus dieser beobachteten Zeit (nach der Formel VI. §. 163.) die dazu gehörige Höhe.

Ver-

Versuche über das Sinken gläserner Kugeln in der widerstehenden Luft.

Fig.

Gewichte der Kug.	Durchm. der Kug.	Beobachtete Zeit des Sinkens.		Berechnete Höhe.	
Londn G.	Londn. Z.	Secund.	Tertien.	Fuß	Zoll
510	5,1	8	12	226	11
642	5,2	7	42	230	9
599	5,1	7	42	227	10
515	5,0	7	57	224	5
483	5,0	8	12	225	5
641	5,2	7	42	230	7

Bey folgenden Versuchen wurden Kugeln aus Schweinsblasen angewendet. Man machte die Schweinsblasen naß, und bließ hierauf, nachdem sie vorher in die innere Höhlung einer hölzernen Kugelform gebracht wurden, Luft hinein. Dadurch wurden sie gezwungen die Kugelgestalt anzunehmen, die sie nach dem Austrocknen beybehielten. Diese Kugeln ließ man sodann aus einer Höhe von 272 Londner-Fuß herabfallen, beobachtete die Zeit des Sinkens, und berechnete endlich zu dieser Zeit die zugehörige Höhe (§. 163. VI.). Man bemerkte auf diese Art mit Vergnügen, daß die Lehre der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit der Erfahrung hinlänglich übereinstimme, wie es aus beygefügter Tabelle erhellet.

Fernere Versuche über das Sinken schwerer Kugeln in der widerstehenden Luft aus einer Höhe von 272 Londner Fuß.

Gewichte der Kugel.	Durchm. der Kugeln.	Beobachtete Zeit des S.	Hieraus berechnete Höhe	
Gran	Zoll.	Secunden	Fuß	Zoll
128	5,28	19	271	11
156	5,19	17	272	1,05
137,5	5,3	18,5	272	7
97,5	5,26	22	277	4
99,125	5	21,125	282	0

Bey

Fig. Bey der Berechnung der Zahlen für die letzte Spalte ist das Gewicht eines Londner Cubik-Zolles Wasser in der Luft von $253\frac{1}{2}$ Gran, und die Luft 860mahl leichter oder dünner als Wasser, angenommen worden. Die Beschleunigung der Schwere g kann man beyläufig = 16 Londner Fuß setzen.

§. 165.

Aufgabe.

Die Bewegung einer mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel zu bestimmen.

Auflösung.

1) Es sey, wie bisher, der Durchmesser der Kugel $= D$, ihr Gewicht Nmahl so groß, als das Gewicht der atmosphärischen Luft unter einem mit der Kugel gleichen Inhalte, und die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, mit welcher die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen wird. Nachdem die Kugel den Weg x in einer gewissen Zeit t zurückgeleget hat, sey ihre Geschwindigkeit $= v$, mit welcher sie im folgenden Zeit Elemente dt den Weg dx weiter hinauf zurückleget, und dabey an ihrer Geschwindigkeit dv verlieret.

2) Die am oberen Endpuncte des Weges x nach Verlauf der Zeit t widerstehende Kraft P ist das um den hydrostatischen Auftrieb verminderte Gewicht der Kugel, und der eigentliche Widerstand der Luft; nähmlich

$$P = \tfrac{1}{6}D^3\pi N - \tfrac{1}{6}D^3\pi + \frac{D^2\pi v^2}{32g}$$

und die zu bewegende Masse ist

$$M = \tfrac{1}{6}D^3\pi N.$$

3) Setzet man nun diese Werthe für P und M in der Formel $dv = -\frac{2gPdt}{M}$ (§. 157. N. 3.); so ist

dv =

$$dv = - \frac{2g(N-1)dt}{N} - \frac{3v^2 dt}{8DN}$$ Fig.

und für $\frac{g(N-1)}{N} = \gamma$, $\frac{4}{3}DN = a$, ist

$$dv = - 2\gamma dt - \frac{v^2 dt}{2a} = - dt \left(\frac{4a\gamma + v^2}{2a}\right)$$

es ist also auch

$$dt = - \frac{2a dv}{4a\gamma + v^2},$$

und ferner für $\sqrt{4a\gamma} = b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}}$.

$$dt = - \frac{2a dv}{b^2 + v^2}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const} - \frac{2a}{b} . \text{Arc tang} \frac{v}{b}$$

nun ist für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$;

daher Const. $= \frac{2a}{b}$. Arc tang $\frac{c}{b}$; und

$$\text{I. } t = \frac{2a}{b} . (\text{Arc tang} \frac{c}{b} - \text{Arc tang} \frac{v}{b}).$$

4) Diese letzte Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\text{Arc tang} \frac{v}{b} = \text{Arc tang} \frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}, \text{ und}$$

$$\frac{v}{b} = \text{Tang arc} [\text{Arc tang} \frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}].$$

Folglich ist

$$\text{II. } v = b . \text{Tang arc} [\text{Arc tang} \frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}].$$

5) Um nun zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Geschwindigkeit v in einem solchen Falle

Fig. die Gleichung zu finden, setze man in der allgemeinen Formel (§. 157. N. 3.) $v\mathrm{d}v = -\frac{2gP\mathrm{d}x}{M}$ für P und M die angeführten Werthe mit den festgesetzten Abkürzungen, und integrire sodann nach den bekannten Regeln. Man gelanget noch geschwinder zu der gesuchten Gleichung, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ für $\mathrm{d}t$ den Werth $-\frac{2a\mathrm{d}v}{b^2+v^2}$ aus 3) setzet. Es ist sodann

$$\mathrm{d}x = -\frac{2av\mathrm{d}v}{b^2+v^2}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a.\,\text{lognat}\,(b^2+v^2)$$

nun ist für $x = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$;
daher $\text{Const.} = a.\,\text{lognat}\,(b^2+c^2)$; und

$$\text{III. } x = a.\,\text{lognat}\,\left(\frac{b^2+c^2}{b^2+v^2}\right).$$

Daraus findet man ferner

$$\text{IV. } v = \sqrt{\left[h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2) - b^2\right]}.$$

6) Um endlich auch zwischen x und t eine Gleichung zu finden, setze man hier in I. statt v den Werth aus IV.; so ist

$$\text{V. } t = \frac{2a}{b}.\left[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \text{Arctang}\sqrt{\left(\frac{h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2)-b^2}{b^2}\right)}\right]$$

$$\text{VI. } x = a.\,\text{lognat}\left[\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right).\text{Cos}^2\text{arc}\left(\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right].$$

§. 166.

Zur Uebersicht der Bewegung einer lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel werden hier die entwickelten Formeln wiederhohlet.

Für die bekannten Werthe, D, N, g, c,

$a =$

Fig.

$$a = \tfrac{4}{3}DN,\ b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}},$$

hat man folgende

A. Gleichungen zwischen der Zeit t, und zwischen der Geschwindigkeit v.

$$\text{I. } t = \frac{2a}{b}.(\text{Arc tang } \frac{c}{b} - \text{Arc tang } \frac{v}{b})$$

$$\text{II. } v = b.\text{Tang arc}[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}].$$

B. Gleichungen zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Geschwindigkeit v.

$$\text{III. } x = a.\text{lognat}(\frac{b^2+c^2}{b^2+v^2})$$

$$\text{IV. } v = \sqrt{[h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2)-b^2]}.$$

C. Gleichungen zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Zeit t.

$$\text{V. } t = \frac{2a}{b}.[\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \text{Arctang}\sqrt{(\frac{h^{-\frac{x}{a}}(b^2+c^2)-b^2}{b^2})}]$$

$$\text{VI. } x = a.\text{lognat}[(1+\frac{c^2}{b^2}).\text{Cos}^2\text{arc}(\text{Arc tang}\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a})].$$

§. 167.

Aus den Formeln im §. 166. lassen sich noch verschiedene andere nützliche Gleichungen ableiten. Z. B.

1) Wenn man im §. 166 in der Formel III. bey der aufsteigenden Bewegung die Geschwindigkeit $v = 0$ setzet;

 so

Fig. so erhält man für die ganze Höhe x, welche die Kugel zu erreichen vermögend ist, folgende Gleichung

$$\text{I. } x = a \,.\, \text{lognat} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2}\right).$$

Hieraus folget die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen werden müßte, um eine gegebene Höhe x zu erreichen; nähmlich

$$\text{II. } c = b \,.\, \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right)}.$$

2) Um die Zeit t zu finden, binnen welcher die anfängliche Geschwindigkeit bey der aufsteigenden Bewegung gänzlich getilget wird, setze man im §. 166. in der Formel I. die Geschwindigkeit $v = 0$; so ist

$$\text{III. } t = \frac{2a}{b} \,.\, \text{Arc tang } \frac{c}{b}.$$

Hieraus folget ferner die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen werden muß, daß diese Geschwindigkeit gänzlich getilget werde; nähmlich

$$\text{IV. } c = b \,.\, \text{Tang arc } \frac{bt}{2a}.$$

3) Um endlich bey einer solchen aufsteigenden Bewegung zwischen der ganzen lothrechten Höhe $= x$, an deren oberen Endpuncte die anfängliche Geschwindigkeit gänzlich getilget wird, und zwischen der dazu erforderlichen Zeit eine Gleichung zu finden, setze man hier in die Formel I. den Werth für c aus IV.; so erhält man

$$\text{V. } x = 2a \,.\, \text{lognat Sec arc} \frac{bt}{2a}$$

$$= -2a \,.\, \text{lognat Cos arc } \frac{bt}{2a}$$

$$\text{VI. } t = \frac{2a}{b} \,.\, \text{Arccos}\, h^{-\frac{x}{2a}}.$$

§. 168. Fig.

Wird endlich das Steigen und Fallen durch gleichen Weg x mit einander verglichen; so erhält man folgende Formeln:

1) Bey der aufsteigenden Bewegung ist (§. 167. I.) die ganze erreichte Höhe

$$x = a . \mathrm{lognat}\left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right).$$

Da auf dieser Höhe die anfängliche Geschwindigkeit gänzlich getilget ist; so fällt die Kugel durch eben dieselbe Höhe x herab; und erlanget dadurch eine gewisse Geschwindigkeit $= v$. Man hat sodann (§. 163. III.)

$$x = a . \mathrm{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right).$$

Es ist daher $a . \mathrm{lognat}\left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right) = a . \mathrm{lognat}\left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right)$; hieraus folget

$$\text{I. } v = \frac{bc}{\sqrt{(b^2+c^2)}}$$

$$\text{II. } c = \frac{bv}{\sqrt{(b^2-v^2)}}.$$

Mittelst der Formel I. findet man die Geschwindigkeit v, mit welcher eine Kugel auf die Erde zurückfällt, wenn dieselbe mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geschossen wird. Umgekehrt findet man c aus v mittelst der Formel II.

2) Im §. 167. in der Formel II.

$$c = b . \sqrt{(h^{\frac{x}{a}} - 1)}$$

setze man statt b den Werth aus §. 163. IV.

$$b = \frac{v}{\sqrt{(1 - h^{\frac{-x}{a}})}}$$

so

Fig. so erhält man folgende Gleichungen zwischen beyden Geschwindigkeiten c, v, und zwischen der dazu gehörigen ganzen Höhe x,

$$\text{III. } \frac{c}{v} = h^{\frac{x}{2a}}$$

$$\text{IV. } x = 2a \,.\, \text{lognat} \frac{c}{v}.$$

3) Um die Zeit $= t$ des Herabsinkens einer mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel durch c ausgedrucket zu finden, setze man im §. 163. in der Formel I. $\tau = \frac{a}{b} . \text{lognat} \left(\frac{b+v}{b-v}\right) = \frac{a}{b} . [L(b+v) - L(b-v)]$ anstatt v den hier in I. angeführten Werth $v = \frac{bc}{\sqrt{(b^2+c^2)}}$;

so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\text{V. } \tau = \frac{2a}{b} . \text{lognat} \left(\frac{c + \sqrt{(b^2+c^2)}}{b}\right).$$

4) Wenn man diesen zuletzt gefundenen Ausdruck V. der Zeit des Fallens zu der Zeit des Steigens im §. 167. III. $t = \frac{2a}{b} . \text{Arc tang} \frac{c}{b}$ hinzu addiret; so erhält man für die ganze Zeit $= T$ des Steigens und Fallens folgende Formel

$$\text{VI. } T = \frac{2a}{b} . \left[\text{Arc tang} \frac{c}{b} + \text{lognat} \left(\frac{c + \sqrt{(b^2+c^2)}}{b}\right)\right].$$

Um diese Formel VI. einfacher auszudrucken, setze man $\frac{c}{b} = \text{Tang } 2\varphi$, so ist $c = b . \text{Tang } 2\varphi$,

und $\text{Arc tang} \frac{c}{b} = 2\varphi$. Dadurch erhält man

$T =$

Fig.

$$T = \frac{2a}{b}.[2\phi + \text{lognat Tang } (45^\circ + \phi)]$$

$$\text{für } \frac{c}{b} = \text{Tang } 2\phi.$$

Für $c = b$. Tang 2φ ist nähmlich $\frac{c + \sqrt{(b^2 + c^2)}}{b} =$

$\text{Tang}2\varphi + \sqrt{(1 + \text{Tang}^2 2\varphi)} = \text{Tang}2\phi + \text{Sec}2\phi =$

$\text{Tang}2\varphi + \frac{1}{\text{Cos}2\phi} = \frac{\sin 2\varphi + 1}{\cos 2\phi} = \frac{\sin 2\varphi + \sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 2\phi}$

$= \frac{2\sin(45^\circ + \varphi).\cos(45^\circ - \phi)}{2\cos(45^\circ + \phi).\cos(45^\circ - \phi)} = \text{Tang}(45^\circ + \varphi).$

§. 169.

Nach der letzten Formel des vorigen §. 168 läßt sich aus der beobachteten Zeit des Steigens und Fallens die anfängliche Geschwindigkeit c einer lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel berechnen, wenn es erlaubet ist die Luft bis zu derjenigen Höhe, welche die Kugel im Steigen erreichet, durchaus für gleichförmig dicht anzusehen. Um nun c zu finden, müßte man in der angeführten letzten Formel für ϕ durch öfteres Versuchen eine solche Kreisbogenlänge zu setzen trachten, daß der zweyte Theil der Gleichung

$$\frac{bT}{2a} = 2\phi + \text{lognat Tang } (45^\circ + \varphi)$$

dem ersten Theile gleich würde. Ist nun der Bogen φ von dieser Eigenschaft gefunden; so hat man sodann die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit $c = b$. Tang2φ.

Anmerk. Wenn der hydrostatische Auftrieb einer festen Kugel in einem flüssigen Mittel größer ist, als ihr absolutes Gewicht; so wird dieselbe in einer solchen Flüssigkeit lothrecht in die Höhe steigen. Durch den Auftrieb wird ihre Bewegung beschleuniget, durch das absolute Gewicht aber, und durch den Widerstand der Flüssigkeit hingegen verzögert. Eine solche aufsteigende Bewegung läßt sich eben so bestimmen, wie das lothrechte Sinken schwerer Körper

in

Fig. in der widerstehenden Luft (§. 162.). Diese Untersuchung wird zur Uebung dem eigenen Fleiße der Leser überlassen. Sie kann auf das lothrechte Steigen eines Luftballons angewendet werden, bis zu so großen Erhöhungen, daß die Luft noch durchaus von beynahe gleichförmiger Dichtigkeit angesehen werden könne.

III. Abschnitt.

Krummlinige Bewegung geworfener, oder geschossener Körper in der widerstehenden Luft.

§. 170.

Aufgabe.

Die Gleichung für die Bahn zu finden, welche ein mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Erhöhungswinkel abgeschossene Kanon-Kugel in der widerstehenden Luft beschreibet.

Auflösung.

52 1) Es sey AMB Fig. 52. die Bahn, welche die Kugel beschreibet, wenn sie unter einem gegebenen Erhöhungswinkel BAT mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit nach der Richtung AT geschossen oder geworfen wird. Man setze

den Elevationswinkel BAT $= m$,
die Abscisse AP $= x$
.. Ordinate PM $= y$,
.. Bogenlänge AM $= z$

das

das Differenziale Pp = MR = dx Fig.
.. .. .. Rr = Mm = dy 52
.. .. .. Mr = $\sqrt{}(dx^2 + dy^2)$ = dz;
D sey der Durchmesser der Kugel; und
N die Zahl welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Flüssigkeit, worin die Bewegung geschieht, unter einem mit der Kugel gleich großen Raumsinhalte in dem Gewichte der Kugel enthalten ist; oder, welches einerley ist, wie oft die spezifische Schwere der Flüssigkeit in der specifischen Schwere der Kugel enthalten ist.

Nach diesen Bezeichnungen ist nun, wenn man das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeit für die Einheit annimmt, die Masse der Kugel

$$M = \tfrac{1}{6} D^3 \pi N.$$

2) Die anfängliche Geschwindigkeit, mit welcher die abgeschossene Kugel aus der Mündung des Geschützes nach der Richtung AT hinausfährt, sey = c; in dem Puncte M aber sey nach der Richtung der Tangente MS die Geschwindigkeit = v;
so ist in dieser Richtungslinie von r gegen M der Widerstand der flüssigen Masse (vermöge §. 154.)

$$R = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g}.$$

Hieraus findet man nach der Lehre von der Zerlegung der Kräfte mittelst des Kräften-Parallelograms den Widerstand nach horizontaler Richtung

$$R' = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . \frac{dx}{dz};$$

und den Widerstand nach lothrechter Richtung

$$R'' = \tfrac{1}{4} D^2 \pi . \frac{v^2}{8g} . \frac{dy}{dz} + \tfrac{1}{6} D^3 \pi N.$$

Die verzögerende Kraft nach der lothrechten Richtung im Puncte der Bahn M besteht nähmlich aus dem Widerstande der

Fig. 52 der Luft nach dieser Richtung $\frac{D^2\pi v^2}{32g} \cdot \frac{dy}{dz}$, und aus dem Gewichte der Kugel $\frac{1}{6}D^3\pi N$. Die Verminderung dieses Gewichtes durch den hydrostatischen Auftrieb kann hier gänzlich vernachlässiget werden, weil der Gewichtsverlust des Eisens und Bleyes, woraus die geschossenen Kugeln gewöhnlich bestehen, in der Luft unmerklich ist.

3) Aus den angeführten Werthen von R', R'' in N. 2. und von M in N. 1. folget nun weiters bey der Abkürzung $\frac{4}{3}DN = a$,

nach lothrechter Richtung $\frac{R''}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dy}{dz} + 1$,

nach wagrechter Richtung $\frac{R'}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dx}{dz}$.

Diese Werthe von $\frac{R'}{M}$, und von $\frac{R''}{M}$ wird man nun weiter unten in den Grundformeln der Bewegung für $\frac{P}{M}$ substituiren müssen, um zu der gesuchten Gleichung der Bahn zu gelangen.

4) Nun setze man die Zeit $= t$, binnen welcher der Bogen AM beschrieben wird, und die Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung $= u$, nach verticaler aber $= u'$; so hat man vermöge der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = udt$, und $dy = u'dt$, oder $u = \frac{dx}{dt}$, und $u' = \frac{dy}{dt}$. Hieraus folget durch die Differenzirung, weil man hier dt für unveränderlich ansehen, das ist, die Zeit in unendlich viele gleiche Theile zertheilet gedenken kann

$$du = \frac{ddx}{dt}, \text{ und } du' = \frac{ddy}{dt}.$$

5)

5) Man setze in der ersten Grundformel der Bewegung $dv = -\frac{2gPdt}{M}$ anstatt dv die in N. 4. bemerkten Ausdrücke $\frac{ddx}{dt}, \frac{ddy}{dt}$; und anstatt $\frac{P}{M}$ die Werthe $\frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dx}{dz}$, und $\frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dy}{dz} + 1$ nach horizontaler und verticaler Richtung aus N. 3; so erhält man folgende zwey Gleichungen: Fig. 52

$$\text{I. } ddx = -\frac{v^2 dx dt^2}{2adz}$$

$$\text{II. } ddy = -\frac{v^2 dy dt^2}{2adz} - 2gdt^2.$$

6) Man multiplicire die Gleichung I. mit dy, und II mit dx; und ziehe sodann die erste von der zweyten ab; so ist

$$\text{III. } dxddy - dyddx = -2gdxdt^2.$$

7) Es ist wegen der zweyten Grundformel der Bewegung $v = \frac{dz}{dt}$, und $v^2 = \frac{dz^2}{dt^2}$. Substituiret man nun diesen Werth v^2 in die Gleichung I; so ist

$$\text{IV. } ddx = -\frac{dxdz}{2a}.$$

8) Im rechtwinkeligen Dreyecke MRr ist $Mr^2 = MR^2 + Rr^2$, nähmlich $dz^2 = dx^2 + dy^2$, und $dz = dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$; so ist $dz = dx(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$.

In eben demselben Dreyecke verhält sich

$MR(dx : Rr(dy = 1 : \text{tang } RMr$;

es

Fig.

es ist daher tang RMr $= \frac{dy}{dx} = p$;

das heißt p ist die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Berührungslinie MS der Bahn mit dem Horizonte im Puncte M einschließt.

9) Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$

folget $dy = pdx$,

und $ddy = dpdx + pddx$.

Diese Werthe für dy, und ddy setze man in die Gleichung III. so erhält man

$$\text{V. } dpdx = -2gdt^2.$$

In der Gleichung IV. aber substituire man statt dz seinen Werth $dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ aus N. 8.; so ist

$$\text{VI. } ddx = -\frac{dx^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}.$$

10) Aus V. folget $dp = -\frac{2gdt^2}{dx}$

und aus VI. fließt $(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2addx}{dx^2}$.

Man multiplicire diese zwey letzten Gleichungen mit einander; so erhält man endlich

$$\text{VII. } dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4agdt^2ddx}{dx^3}$$

Mittelst dieser höheren Differenzial-Gleichung VII. ließe sich nun die Gleichung für die Bahn bestimmen, wenn es möglich wäre dieselbe so weit zu integriren, daß man zuletzt einen endlichen Ausdruck zwischen x und y erhielte. Die erste Integration der Gleichung VII. kann zwar durch Logarithmen bewerkstelliget werden. Allein um die ferneren Integrationen genau zu finden, sind die bisher bekannten Hülfsmittel der Analysis nicht zureichend. Man muß daher

bedacht

bedacht seyn die gesuchte Gleichung zwischen x und y durch eine Annäherung zu erhalten. Fig.

11) Um nun die Gleichung VII. durch eine Annäherung zu integriren, erwäge man, daß es bey den Kanonen nicht gebräuchlich ist unter großen Elevationswinkeln zu schiessen. Die größte gebräuchliche Elevation beym Ricoschettiren erstrecket sich nicht über 15 Grade. Für solche Fälle ist p, als die Tangente des Neigungswinkels der Richtungslinie der Kugel gegen den Horizont in verschiedenen Puncten der Bahn immer ein kleiner Bruch; weil selbst am Ende des niedersteigenden Astes der Bahn dieser Winkel nicht viel größer wird, als der Elevationswinkel. Daher kann man in der Gleichung VII. den sehr kleinen Bruch p^2 gänzlich weglassen. Man erhält sodann

$$\mathrm{d}p = 4ag\mathrm{d}t^2 . \mathrm{d}x^{-3}\mathrm{dd}x.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil hier $\mathrm{d}t$ unveränderlich ist,

$$p = \text{Const.} - \frac{2ag\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

Nun ist für $x = 0$ im Anfange der Bewegung $p = \tang m$, und die Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ist da $= c . \cos m$,

nähmlich $\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{c^2\cos^2 m}$; es ist daher

$$\tang m = \text{Const.} - \frac{2ag}{c^2\cos^2 m},$$

$$\text{Const.} = \tang m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m}, \text{ und}$$

$$\text{VIII. } p = \tang m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{2ag\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

12) Man setze in VIII. den Werth für $\mathrm{d}t^2$ aus V.; so erhält man

$\frac{\mathrm{d}x}{\ast}$

Fig.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dp}{p - \operatorname{tang} m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}}.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$\frac{x}{a} = \text{Const.} + \operatorname{lognat}\left(p - \operatorname{tang} m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\right).$$

Es ist aber für $x = 0$, $p = \operatorname{tang} m$; folglich

$$\text{Const.} = - \operatorname{lognat}\left(- \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\right);\ \text{und}$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{lognat}\left(1 + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} - \frac{pc^2 \cos^2 m}{2ag}\right).$$

Und ferner für die Grundzahl $= h$ des natürlichen logarithmischen Systems

$$\text{IX.}\ h^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag} - \frac{pc^2 \cos^2 m}{2ag}.$$

13) Aus IX. folget

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag}.p = 1 - h^{\frac{x}{a}} + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag},$$

und ferner, wenn man anstatt p den Werth $\frac{dy}{dx}$ aus N. 9. substituiret,

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag}.dy = dx + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag}.dx - dx h^{\frac{x}{a}}.$$

Wird diese Gleichung wieder integriret; so ist

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag}.y = C + x + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag}.x - ah^{\frac{x}{a}}.$$

Nun ist für $x = 0$, auch $y = 0$, folglich $C = a$; und

$$\frac{c^2 \cos^2 m}{2ag}.y = a + x + \frac{c^2 \sin m \cos m}{2ag}.x - ah^{\frac{x}{a}}.$$

Hier-

Hieraus folget endlich die gesuchte Gleichung für die Bahn einer geschossenen Kugel in der widerstehenden Luft Fig.

$$\text{X. } y = x\left(\text{tang}\, m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\right) - \frac{2a^2 g}{c^2 \cos^2 m}\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

§. 171.

Mittelst der Formel X. läßt sich nun zu jeder gegebenen Abscisse x die dazugehörige Ordinate y berechnen. Wenn man ferner in der dazugehörigen Differenzialgleichung (§. 170. N. 13.) $dy = 0$ setzet, daraus $h^{\frac{x}{a}}$ und x nach der bekannten Lehre vom Größten und Kleinsten suchet, und diese Werthe in der Gleichung X. substituiret; so findet man die größte Ordinate der Bahn, oder die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, sammt der dazugehörigen Abscisse, oder Schußweite des aufsteigenden Astes.

Es ist nähmlich die zur größten Ordinate zugehörige Abscisse, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes

$$x = a \cdot \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right)$$

und die größte Ordinate, oder die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes ist

$$y = a \cdot \left[-\text{tang}\, m + \left(\frac{c^2 \sin 2m + 4ag}{2c^2 \cos^2 m}\right) \times \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right)\right].$$

Diese letzte Formel erhält man, wenn man (im §. 170 X.) $a \cdot L\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right)$ für x, und für $h^{\frac{x}{a}}$ den damit zusammen gehörigen Werth $\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right)$ substituiret.

Fig.

§. 172.

Soll nun zu einer gegebenen Ordinate die dazu gehörige Abscisse x mittelst der Gleichung X. im §. 170. berechnet werden; so kann man dieser Gleichung folgende Gestalt geben,

$$\text{I. } h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right) = 1 - \frac{yc^2(1 + \cos 2m)}{4a^2 g}$$

und man muß nun durch öfteres Versuchen für $\frac{x}{a}$ einen solchen Werth n ausfindig zu machen trachten, daß der erste Theil der Gleichung dem zweyten Theile gleich wird. Dadurch findet man die gesuchte Schußweite $x = an$.

Die Tafel der Potenzen von h im 2ten Bande meiner logarithm. trigonometr. Tafeln Leipzig bey Weidmann 1797 kann hiebey mit Nutzen und großen Vortheile gebraucht werden. Wäre y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geschützes; so müßte y allhier in I. mit entgegen gesetztem Zeichen genommen werden.

Soll man nun mittelst dieser Gleichung I. die ganze horizontale Schußweite berechnen, welche die Kugel bey diesen Umständen erreichet; so setze man $y = 0$; und man erhält sodann nachstehende

52 Formel zur Berechnung der ganzen horizontalen Schußweite AB

$$\text{II. } \left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}.$$

Um nun mittelst dieser Gleichung für gegebene Werthe von

$a = \frac{4}{3} DN$

D = dem Durchmesser der Kugel oder Grenade,

N = der Zahl, welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Luft unter einem mit der Kugel oder Grenade

Grenade gleich großen Inhalte im Gewichte der Fig.
letzen enthalten ist,

$c =$ der anfänglichen Geschwindigkeit,
$g =$ der Beschleunigung der Schwere
$m =$ dem Elevationswinkel

die ganze horizontale Schußweite x zu finden, trachte man wieder wie ehevor für $\frac{x}{a}$ durch Versuchen einen solchen Werth ausfindig zu machen, daß der erste Theil dieser Gleichung dem zweyten Theile beynahe gleich wird. Wenn z. B. $\frac{x}{a} = n$ von einer solchen Beschaffenheit ist; so erhält man sodann $x = an$.

Weiter unten ist eine balistische Tafel beygefüget, welche für verschiedene Werthe von $\frac{x}{a} = n$ die dazugehörigen Werthe von $(h^n - 1) : n$ enthält. Mittelst dieser Tafel ist es nun sehr leicht in jedem vorkommenden Falle aus der Gleichung II. den Werth für $\frac{x}{a}$ mit 4 bis 5 Ziffern genau zu finden, welches in der Ausübung jederzeit zureichend ist. Nun suche man aus der Gleichung II. den Werth für c so erhält man folgende

Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der bekannten horizontalen Schußweite x, und aus a, g, m,

$$\text{III. } c = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) . \frac{4a^2 g}{x \sin 2m}\right]}.$$

Endlich suche man aus dieser letzten Gleichung den Werth für m; so erhält man folgende

Fig. Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebenen horizontalen Schußweite x, für bekannte a, c, g,

$$\text{IV. } \sin 2m = (h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1) . \frac{4a^2 g}{c^2 x}.$$

Aus der Gleichung I. kann man auch nachstehende Formel ableiten, wodurch man die anfängliche Geschwindigkeit c aus gegebenen x, y, a, g, m berechnen kann;

$$\text{V. } c = \sqrt{\left[(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1) \times \frac{4a^2 g}{x \sin 2m - y(1 + \cos 2m)}\right]}$$

Ist y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geschützes in der bekannten horizontalen Entfernung x, ist nähmlich y eine negative Ordinate; so muß man hier in V. so wie oben in I. bey y das Zeichen $-$ in $+$ verwandeln.

Suchet man endlich aus §. 170. IX. den Werth für p; so erhält man

$$\text{VI. } p = \tan m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m} (h^{\frac{x}{a}} - 1)$$

eine Formel, wodurch man für jede Abscisse x die Tangente des Neigungswinkels der Bahn gegen den Horizont berechnen kann. Man findet dadurch den Neigungswinkel, unter welchem der niedersteigende Ast der Bahn den Horizont der Mündung des Geschützes durchschneidet, wenn man in dieser letzten Formel für x die ganze nach der Formel II. berechnete Schußweite substituiret.

§. 173.

In der Gleichung VII. §. 170. ist p^2 gänzlich vernachlässiget worden, damit man durch diese Annäherung alle folgende Differenzial-Gleichungen integriren konnte. Will man nun eine etwas genauere Annäherung haben; so setze man in dieser Gleichung anstatt p den unveränderlichen Werth $\tan \frac{1}{2} m$. Man kann dieses aus folgendem Grunde thun

thun. Bey dem Anfange der Bewegung ist $p = \text{tang} m$; Fig.
von da an nimmt p immer ab, je näher die Kugel dem Scheitel der krummen Linie kommt. Da wird $p = 0$. Sodann fängt p wieder zu wachsen an, und wird negativ; welches man aber hier nicht zu erwägen braucht, weil p^2 immer positiv ist. In irgend einem Puncte des niedersteigenden Astes der Bahn wird wieder $p^2 = \text{tang}^2 m$. Man kann daher ohne großen Fehler für p den mittleren Werth zwischen $p = \text{tang} m$, und zwischen $p = 0$ annehmen; und daher $p = \text{tang} \frac{1}{2} m$ setzen.

Bey dieser Annäherung $p = \text{tang} \frac{1}{2} m$ in der Formel VII. §. 170. ist nun

$$dp (1 + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} m)^{\frac{1}{2}} = 4ag dt^2 . dx^{-3} ddx,$$

oder wegen $(1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} m) = \sec^2 \frac{1}{2} m = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} m}$ ist

$$dp = 4(a \cos \tfrac{1}{2} m) g dt^2 . dx^{-3} ddx.$$

Die fernere Behandlung dieser Differenzial-Gleichung um nach mehreren Integrationen die gesuchte Gleichung für die Bahn der geschossenen Kugel zu finden, ist völlig eben dieselbe, wie im §. 170. von N. 11. angefangen: mit dem einzigen Unterschiede, daß man überall $a \cos \frac{1}{2} m$ anstatt a setzen muß. Es ist nähmlich bey dieser Annäherung.

I. Gleichung für die Bahn,

$$y = x \left(\text{tang} m + \frac{2ag \cos \frac{1}{2} m}{c^2 \cos^2 m}\right) - \frac{2a^2 g \cos^2 \frac{1}{2} m}{c^2 \cos^2 m} \left(h^{\frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m}} - 1\right).$$

II. Formel zur Berechnung der ganzen Schußweite.

$$\left(h^{\frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m}} - 1\right) : \frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag \cos \frac{1}{2} m}.$$

Fig. Bey der Berechnung der Schußweite kann auch hier die am Ende beygefügte balistische Tafel mit großem Vortheile gebrauchet werden; denn wenn man durch Beyhülfe dieser Tafel für $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}$ einen solchen Werth n gefunden hat, daß er der Gleichung ein Genüge leistet, so ist sodann die gesuchte Schußweite $x = n \times a\cos\frac{1}{2}m$.

III. Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der Schußweite,

$$c = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}{x\sin 2m}\right]}$$

IV. Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebenen Schußweite,

$$\sin 2\mu = \left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g}{c^2 x},$$

$$\sin 2m = \left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}\mu}{c^2 x}.$$

Man muß nähmlich bey der Berechnung des Elevationswinkels m zu erst den beyläufigen Werth desselben $= \mu$ nach der Formel IV. (§. 172.) bestimmen, und sodann diesen beyläufigen Werth für μ hier in der letzten Gleichung substituiren. Dadurch wird der gesuchte Winkel m meistens mit zureichender Genauigkeit gefunden; wovon man sich überzeugen kann, wenn man diesen so gefundenen Werth m noch einmahl im zweyten Theile der letzten Gleichung für μ substituirt.

V. Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der Abscisse und Ordinate

$c =$

Fig.

$$t = \sqrt{\left[\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}{x\sin 2m - y(1+\cos 2m)}\right]}$$

VI. Formel zur Berechnung der horizontalen Schußweite x, welche mit einer gegebenen Erhöhung $+y$, oder Vertiefung $-y$ zusammen gehöret,

$$h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}\left(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right)$$

$$= 1 \mp \frac{yc^2(1+\cos 2m)}{4a^2 g\cos^2\frac{1}{2}m}.$$

VII. Formel zur Berechnung des Neigungswinkels ϕ der Bahn gegen den Horizont aus der Schußweite x. Wenn man nähmlich $p = \operatorname{tang}\phi$ setzet, so ist

$$\operatorname{tang}\phi = \operatorname{tang} m - \frac{2ag\cos\frac{1}{2}m}{c^2\cos^2 m}.\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

VIII. Formel zur Berechnung der Schußweite x des aufsteigenden Astes,

$$x = a\cos\tfrac{1}{2}m \times \operatorname{lognat}\left(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right).$$

IX. Formel zur Berechnung der größten Ordinate, oder der Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes,

$y =$

Fig.

$$y = a\cos\tfrac{1}{2}m\left[-\tan m + \left(\frac{c^2\sin 2m + 4ag\cos\tfrac{1}{2}m}{2c^2\cos^2 m}\right)\right.$$

$$\left.\times\ \mathrm{lognat}\left(1 + \frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\tfrac{1}{2}m}\right)\right].$$

§. 174.

Die Länge des Bogens AM $= z$ läßt sich auf folgende Art genau berechnen. Aus der Gleichung (§. 170 VII).

$$dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = 4ag\,dt^2.dx^{-3}ddx$$

folget durch die Integration

$$\text{I. } C + \tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}] = -\frac{2ag\,dt^2}{dx^2}$$

Nun ist für $x = 0$ im Anfange der Bewegung,

$p = \tan m$, und $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{c^2\cos^2 m}$; daher ist

$$\text{Const.} = -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \tfrac{1}{2}\tan m.(1+\tan^2 m)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{lognat}[\tan m + (1+\tan^2 m)^{\frac{1}{2}}]$$

und ferner wegen $(1 + \tan^2 m)^{\frac{1}{2}} = \sec m = \frac{1}{\cos m}$,

$$\tan m + \frac{1}{\cos m} = \frac{\sin m + 1}{\cos m} = \frac{\sin 90^\circ + \sin m}{\cos 90^\circ + \cos m}$$

$$= \tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}m), \text{ ist}$$

$$\text{II. Const} = -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{\sin m}{2\cos^2 m} - \tfrac{1}{2}\text{L.T.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}m)$$

Man substituire hier in der Gleichung I. den Werth für dt^2 aus (§. 170. V.); so ist

$$dx = \frac{a\,dp}{C + \tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

und wegen (§. 170. N. 8) $dz = dx\,(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ ist

$dx =$

$$dx = \frac{dz}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}};$$ Fig.

folglich ist auch

$$dz = \frac{a dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{C+\frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil im Nenner dieses Bruches das vollständige Integrale des Zählers $dp(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ enthalten ist,

$$z = C' + aL[C+\tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}L(p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}})]$$

Nun ist für $z = 0$ im Anfange der Bewegung $p =$ tang$m$; folglich

$$C' = -aL[C + \frac{\sin m}{2\cos^2 m} + \tfrac{1}{2}L.T.(45^\circ+\tfrac{1}{2}m)],$$ und

$$z = aL\left[\frac{C+\frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}L[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}{C+\frac{\sin m}{2\cos^2 m}+\frac{1}{2}L.\,T.\,(45^\circ+\frac{1}{2}m)}\right]$$

ferner, wenn man für C den hier in II. angemerkten Werth setzet, und alles gehörig reduciret

$$z = a.L\left\{1+\frac{c^2\cos^2 m}{4ag}\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}m) - p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - L(p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}})\right]\right\}.$$

Um diese letzte Gleichung noch einfacher auszudrucken, setze man $p =$ tangφ, nähmlich man bezeichne den veränderlichen Winkeln mit φ, unter welchem die Tangente der Bahn, oder die Richtung der bewegten Kugel in verschiedenen Puncten ihres Weges gegen den Horizont geneigt ist; so erhält man

$$\text{III. } z = a.L\left\{1+\frac{c^2\cos^2 m}{4ag}\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}m) - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - L.\,T.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi)\right]\right\}.$$

Setzet

Fig. Setzet man nun in dieser Formel $\varphi = m$, so ist $z = 0$; setzet man aber $\phi = 0$, so ist

$$z = a . L[1 + \frac{c^2 \sin m}{4ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} L. T. (45° + \tfrac{1}{2}m)]$$

die Länge des aufsteigenden Astes der Bahn von der Mündung des Geschützes bis zum Scheitel, wo die Richtung der bewegten Kugel horizontal wird.

Für $\phi = - m$ in der Formel III. ist

$$z = a . L[1 + \frac{c^2 \sin m}{2ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} . L(\frac{\tan g(45° + \tfrac{1}{2}m)}{\tan g(45° - \tfrac{1}{2}m)})]$$

die Länge des Bogens der Bahn von der Mündung des Geschützes über den Scheitel hinunter bis zu dem Puncte des niedersteigenden Astes, wo die Neigung der Tangente der Bahn gegen den Horizont eben so groß ist, als die anfängliche Richtung der geschossenen Kugel.

§. 175.

Mittelst der Formel III. §. 174. kann man für jeden Elevationswinkel m, und für gegebene a und c die ganze horizontale Schußweite, und die größte Ordinate, oder die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes berechnen, und zwar auf folgende Art.

1) Man zertheile den gegebenen Elevationswinkel m in so viele kleine gleiche Theile, etwan in einzelne Grade, oder auch von 2 zu 2 Grad $= e$, daß die Länge des Bogens der Bahn zwischen jeden zwey Neigungswinkeln der Tangenten bey dem kleinen Unterschide e ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie angesehen werden könne. Nun setze man in der Formel III. §. 174 nacheinander $\varphi = m - e$, $\varphi = m - 2e$, $\phi = m - 3e$, u. s. w. bis $\varphi = 0$; und berechne für jeden solchen Werth ϕ und für die übrigen gegebenen Größen die dazugehörige Länge z.

2) Sodann ziehe man in dieser Reihe der Bogenlängen jedes vorhergehende Glied von dem nächst darauf folgenden ab, und bezeichne diese Differenzen mit α, β, γ, δ, ε, u. s. w.; so erhält man dadurch die Längen der Bogen der

Bahn

Bahn zwischen den dazu gehörigen Neigungswinkeln der Tangenten; nähmlich man erhält in Fig. 53. die Bogenlänge α zwischen den Neigungswinkeln m und $m - e$, β zwischen $m - e$ und $m - 2e$, γ zwischen $m - 2e$ und $m - 3e$, δ zwischen $m - 3e$ und $m - 4e$ u. s. w. Fig. 53

3) Diese so gefundenen Längen α, β, γ, δ, .. kann man für geradlinige Hypothenusen von rechtwinkeligen Dreyecken ansehen, bey denen die Hypothenusen gegen die horizontalen Katheten oder Grundlinien unter den Winkeln $m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, $m - 4e$, .. geneigt sind. Aus diesen Längen der Bogenstücke, und aus den dazu gehörigen Neigungswinkeln lassen sich daher sowohl die horizontalen Grundlinien, als auch die lothrechten Höhen aller solcher rechtwinkeligen Dreyecke berechnen.

4) Addiret man endlich alle auf diese Art gefundenen lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke bis zum Scheitel der Bahn in eine Summe; so erhält man dadurch die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, oder die größte Ordinate der Bahn. Addiret man ferner auch die gefundenen horizontalen Grundlinien der erwähnten rechtwinkeligen Dreyecke von $\varphi = m - e$ bis $\varphi = 0$ in eine Summe zusammen; so erhält man die zur größten Ordinate zugehörige Abscisse, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes.

5) Um nun auch die Schußweite des niedersteigenden Astes zu erhalten, welche zur Schußweite des aufsteigenden Astes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt, muß man in der Formel III. (§. 174.) noch ferner $\varphi = - e$, $\varphi = - 2e$, $\varphi = - 3e$, $\varphi = - 4e$ u. s. w. setzen, alles hier in N. 2 und 3 angeführte befolgen, und diese Arbeit solange fortsetzen, bis die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste der schon gefundenen größten Ordinate gleich wird. Bis zu diesem Puncte des niedersteigenden Astes, wo die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke so groß wird, als die in N. 4 schon gefundene größte Ordinate, addire man auch alle horizontale Grundlinien der recht-

Fig. rechtwinkeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste in eine Summe zusammen, so erhält man dadurch die gesuchte horizontale Schußweite des niedersteigenden Astes, welche zu jener des aufsteigenden Astes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt.

6) Der Winkel $\phi = - ne$, bey welchem die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste der größten Ordinate gleich wird, ist der Neigungswinkel der Tangente der Bahn an derjenigen Stelle, wo die Kugel wieder den Horizont der Mündung des Geschützes erreichet, oder wo die Bahn diesen Horizont das zweytemahl durchschneidet. Dieser Winkel ist jederzeit größer als m. Um ihn hinlänglich genau zu erhalten muß man zuletzt durch Einschaltung für ϕ einen solchen Werth $- ne$ ausfindig zu machen trachten, daß sodann die Summe der lothrechten Höhen am niedersteigenden Aste der nach N. 4. gefundenen größten Ordinate zureichend genau gleich werde.

7) Wenn man nähmlich in der Formel III. (§. 174.) alles zwischen den Klammern befindliche, bis auf den Factor $\frac{c^2}{4ag}$, in Zahlen berechnet, und diese Zahlen nach der Ordnung mit A, B, C, D, E, .. bezeichnet; so erhält man für nachstehende Werthe von φ die dazu gehörigen Bogenlängen z, wie folget:

für $\phi =$	ist die Bogenlänge $z =$
m	0
$m - e$	$a . \mathrm{lognat}(1 + \frac{c^2}{4ag} . A)$
$m - 2e$	$a . \mathrm{lognat}(1 + \frac{c^2}{4ag} . B)$
$m - 3e$	$a . \mathrm{lognat}(1 + \frac{c^2}{4ag} . C)$
.. ..	.. ..
0	$a . \mathrm{lognat}(1 + \frac{c^2}{4ag} . N)$

Daraus folgen die einzelnen Bogenstücke $\triangle z$, Fig. oder die Hypothenusen der rechtwinkeligen Dreyecke für die Winkel φ

$\varphi =$	$\triangle z =$
m	0
$m-e$	$a.\text{lognat}\left(1+\frac{c^2}{4ag}.A\right)$
$m-2e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.B}{1+\frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m-3e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.C}{1+\frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m-4e$	$a.\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.D}{1+\frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. s. w.	.. ..

Und

Fig. Und aus diesen horizontalen Grundlinien $\triangle x$ eben derselben Dreyecke

$\varphi =$	$\triangle x =$
m	o
$m - e$	$a.\cos(m-e)(\text{lognat}(1+\frac{c^2}{4ag}.A)$
$m - 2e$	$a.\cos(m-2e)\,\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}B}{1+\frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m - 3e$	$a.\cos(m-3e).\,\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.C}{1+\frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m - 4e$	$a.\cos(m-4e).\text{lognat}\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}.D}{1+\frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. s. w.	.. ..

Und

Und die lothrechten Höhen Δy eben derselben Fig. Dreyecke

$\phi =$	$\Delta y =$
m	0
$m - e$	$a \,.\, \sin(m - e) \,.\, \text{lognat}\left(1 + \frac{c^2}{4ag}.A\right)$
$m - 2e$	$a.\sin(m - 2e) \,.\, \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}{1 + \frac{c^2}{4ag}.A}\right)$
$m - 3e$	$a.\sin(m - 3e)\ \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}{1 + \frac{c^2}{4ag}.B}\right)$
$m - 4e$	$a.\sin(m - 4e) \,.\, \text{lognat}\left(\frac{1 + \frac{c^2}{4ag}.D}{1 + \frac{c^2}{4ag}.C}\right)$
u. s. w.	.. ..

Wenn

Fig.

Wenn man z. B. $a = 1$, $\frac{c^2}{4ag} = 5$, und $m = 15^\circ$ setzet; so findet man für den aufsteigenden Ast

ϕ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t.($45^\circ + \frac{1}{2}\phi$)	Hieraus	$\triangle y$	$\triangle x$
14	0,2569609	0,2468145	A = 0,0358913	0,0413261	0,1597960
13	0,2369408	0,2288650	B = 0,0713175	0,0326634	0,1360529
12	0,2173052	0,2109877	C = 0,1063175	0,0262611	0,1184564
11	0,1980184	0,1931766	D = 0,1409304	0,0213436	0,1051488
10	0,1790471	0,1754258	E = 0,1751926	0,0174511	0,0941577
9	0,1603587	0,1577296	F = 0,2091399	0,0142959	0,0854294
8	0,1419220	0,1400822	G = 0,2428068	0,0116883	0,0782082
7	0,1237066	0,1224781	H = 0,2762361	0,0094997	0,0721577
6	0,1056968	0,1049117	I = 0,3094200	0,0076252	0,0669258
5	0,0878228	0,0873774	K = 0,3424562	0,0060224	0,0625453
4	0,0700975	0,0698706	L = 0,3753288	0,0046161	0,0586529
3	0,0524797	0,0523838	M = 0,4080713	0,0033790	0,0552472
2	0,0349420	0,0349137	N = 0,4407441	0,0022829	0,0522882
1	0,0174577	0,0174542	O = 0,4733471	0,0011549	0,0496176
0	0	0	P = 0,5059206	0,0004123	0,0472399
			Summa =	0,2000220	1,2419240

Und

Und für den niedersteigenden Ast

Fig.

φ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t.$(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	Hieraus ist	$\triangle y$	$\triangle x$
—	—	—			
1	0,0174577	0,0174542	A = 0,5384936	0,0003936	0,0451071
2	0,0349420	0,0349137	B = 0,5710965	0,0011309	0,0431872
3	0,0524797	0,0523838	C = 0,6037593	0,0018096	0,0414469
4	0,0700975	0,0698700	D = 0,6365117	0,0024383	0,0398659
5	0,0878228	0,0873774	E = 0,6693843	0,0030241	0,0384244
6	0,1056968	0,1049117	F = 0,7024206	0,0035746	0,0371239
7	0,1237066	0,1224781	G = 0,7356137	0,0040891	0,0358898
8	0,1419220	0,1400822	H = 0,7690340	0,0045811	0,0347966
9	0,1603587	0,1577296	I = 0,8027007	0,0050481	0,0337775
10	0,1790471	0,1754258	K = 0,8366480	0,0054954	0,0328389
11	0,1980184	0,1931766	L = 0,8709102	0,0059256	0,0319719
12	0,2173052	0,2109877	M = 0,9055232	0,0063418	0,0311709
13	0,2369408	0,2288650	N = 0,9405662	0,0067592	0,0304890
14	0,2569609	0,2468145	O = 0,9759610	0,0071343	0,0297166
15	0,2774014	0,2648423	P = 1,0118410	0,0075251	0,0290976
16	0,2983010	0,2829544	Q = 1,0482440	0,0079095	0,0285208
17	0,3197001	0,3011577	R = 1,0851884	0,0082971	0,0280105
18	0,3416408	0,3194583	S = 1,1227227	0,0086565	0,0274548
19	0,3641680	0,3378629	T = 1,1609240	0,0090342	0,0270003
20	0,3873291	0,3563785	U = 1,1998088	0,0094039	0,0265558
21	0,4111741	0,3750121	W = 1,2394420	0,0097778	0,0261519
22	0,4357563	0,3937709	X = 1,2798800	0,0101540	0,0257776
23	0,4611325	0,4126626	Y = 1,3211820	0,0105340	0,0254314
24	0,4873633	0,4316947	Z = 1,3634226	0,0109216	0,0251180
25	0,5145135	0,4508754	a = 1,4066402	0,0113077	0,0248125
26	0,5426522	0,4702127	b = 1,4509360	0,0117728	0,0246822
27	0,5718538	0,4897154	c = 1,4963780	0,0121146	0,0242999
28	0,6021982	0,5093923	d = 1,5430450	0,0125340	0,0240777
$28\frac{1}{4}$	0,6099730	0,5143398	e = 1,5519278	0,0023456	0,0044004
			Summa =	0,2000234	0,8771980

Die Summe in der Spalte $\triangle y$ des niedersteigenden Astes ist für $\varphi = - 28^\circ$ noch um etwas weniges kleiner als die größte Ordinate, oder die Summe aller $\triangle y$ bey dem aufsteigenden Aste; für $\varphi = 29^\circ$ aber wird die Summe aller $\triangle y$ des niedersteigenden Astes schon zu groß: und man findet durch eine leichte Beurtheilung, daß man bey $\varphi = - 28\frac{1}{4}$ die Rechnung enden könne. Dadurch erhält man

die

Fig. die Schußweite des aufsteigenden Astes 1,24192
und des niedersteigenden 0,87720

folglich die ganze Schußweite 2,11912
und die Erhöhung des Scheitels 0,20002

Wenn man es recht genau nehmen will, so kann man bey der Berechnung der horizontalen Grundlinien $\triangle x$, und der lothrechten Höhen $\triangle y$ der rechtwinkeligen Dreyecke für $\phi = m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, u. s. w. die dazugehörigen mittleren Neigungswinkel der Hypothenusen in obigen für $\triangle x$ und $\triangle y$ angegebenen Formeln setzen $m - \frac{1}{2}e$, $m - \frac{3}{2}e$, $m - \frac{5}{2}e$, u. s. w. anstatt $m - e$, $m - 2e$, $m - 3e$, u. s. w. weil am ersten Dreyecke zwischen m und $m - e$ die mittlere Neigung $= m - \frac{1}{2}e$ ist; und so auch $m - \frac{3}{2}e$ die mittlere Neigung zwischen $m - e$ und und $m - 2e$; u. s. w.

Die mühevolle, und langweilige Berechnung der Schußweite für gegebene a, c, und m mittelst der Formel III. (§. 174.) auf die angeführte Weise kann in solchen Fällen vorgenommen werden, wenn man untersuchen will, in wie weit andere durch verschiedene Annäherungen bestimmten Formeln für die Schußweite und Erhöhung des Scheitels zutreffen.

§. 176.

Auch für die Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente läßt sich eine Gleichung angeben.

Denn es ist $dt^2 = -\frac{dp\,dx}{2g}$ (§. 170. V.)

und $dz^2 = dx^2(1+p^2)$

folglich auch $\frac{dz^2}{dt^2} = -\frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$

und wegen $\frac{dz}{dt} = v$,

ist ferner auch $v^2 = -\frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$

Nun

Nun setze man hier statt dx den Werth aus (§. 174.) Fig.

$$dx = \frac{a dp}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

so erhält man

$$v^2 = - \frac{2ag(1+p^2)}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

Setzet man endlich in dieser Gleichung den im §. 174. II. für C bestimmten Werth, und $\tan g\varphi$ anstatt p; so erhält man nach vorgenommener Reduction

$$\text{I. } v^2 = \frac{4agc^2\cos^2 m}{\cos^2\varphi} : \left\{4ag + c^2\cos^2 m \,.\, \left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \text{L. T.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}m) - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \text{L. T.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\right]\right\}$$

die gesuchte Formel für die Tangentialgeschwindigkeit in jedem beliebigen Puncte der Bahn.

Hieraus folget für $\varphi = 0$ die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit am Scheitel der Bahn nach horizontaler Richtung

$$\text{II. } v^2 = \frac{4agc^2\cos^2 m}{4ag + c^2\cos^2 m\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \text{L.T.}(45^\circ + \frac{1}{2}m)\right]}.$$

Anmerk. Man kann für die Tangentialgeschwindigkeit vermöge der (im §. 170.) gebrauchten Annäherung einen einfacheren Ausdruck finden, wenn man in der Gleichung $v^2 = - \frac{2g\,dx(1+p^2)}{dp}$ für dx den Werth

$$dx = \frac{-a dp}{\tan g m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - p} \quad \text{(aus §. 170. N. 12.)}$$

substituiret.

Fig. §. 177.

Um endlich auch die Zeit t zu finden, welche zur Beschreibung eines beliebigen Bogens z der Bahn verwendet wird, ist

$$dt = \sqrt{\left(-\frac{dp dx}{2g}\right)} \text{ aus §. 170. V.}$$

Setzet man nun statt dx den Werth (aus §. 174.)

$$dx = \frac{a dp}{C + \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

so erhält man folgende Differenzialgleichung

$$dt = \frac{dp\sqrt{a}}{\sqrt{2g[-C - \frac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}L[p + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}]]}}$$

die sich aber nicht integriren läßt.

Um nun durch Annäherung eine Differenzialgleichung für dt zu erhalten, die sich integriren läßt, setze man in der Gleichung (aus §. 170. VIII).

$$dt = \frac{dx}{(2ag)^{\frac{1}{2}}}\left(\text{tang}m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - p\right)^{\frac{1}{2}}$$

den Werth für p (aus §. 170. IX.)

$$p = \text{tang}m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{2agh^{\frac{x}{a}}}{c^2\cos^2 m}$$

dadurch erhält man

$$dt = \frac{dx h^{\frac{x}{2a}}}{c\cos m}.$$

Und hieraus folget die gesuchte Annäherungs-Formel zur Berechnung der Zeit, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ seyn muß,

$$t = \frac{2a}{c\cos m} \cdot (h^{\frac{x}{2a}} - 1).$$

Nach der zweyten Annäherung (§. 173.) ist also $t =$

Fig.

$$t = \frac{2a\cos\frac{1}{2}m}{c\cos m} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

§. 178.

Hiermit ist nun das Wesentliche angezeiget, worauf man bey diesem balistischen Probleme zu sehen habe. Bey der ausübenden Artillerie ist davon kein besonderer Gebrauch zu machen. Nur die Formeln II. und III. des § 172 oder auch II und III. des §. 173 können in dem Falle mit Nutzen gebraucht werden, wenn zu einer neuen Geschützgattung eine Tabelle der Tragweiten für verschiedene Elevationswinkel zu entwerfen ist. Wenn z. B. zu einer 8pfündigen Kanone bey einer bestimmten Ladung die Tragweiten für alle einzelne Elevationswinkel von 1 bis 15 Grad anzugeben wären; so müßte man die zu zwey oder drey verschiedenen Elevationen, etwan zu 1°, 8° 15°, zugehörigen Schußweiten durch einige genau ausgeführte Probeschüsse bestimmen. Sodann könnte man mittelst der Formel III. §. 173. aus der mittleren Schußweite bey jeder der drey gebrauchten Elevationen die anfängliche Geschwindigkeit berechnen. Aus den so berechneten anfänglichen Geschwindigkeiten lassen sich sodann die Schußweiten für die übrigen zwischenliegenden Elevationen mit zureichender Genauigkeit mittelst der Formel II. §. 173. einschalten.

§. 179.

Wenn man hier die Formel der geradlinigen Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel bey Vernachlässigung der Schwerkraft (aus §. 158.) mit den Formeln des lothrechten Steigens (aus §. 166.) gehörig verbindet; so erhält man auch eine Gleichung für die Bahn einer geschossenen Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel. Allein eine solche Gleichung ist nicht ganz richtig, weil sie sich nicht zugleich aus den Differenzial-Gleichungen (§. 170.) ableiten läßt. Man kann sie nur als eine Annäherung zur gesuchten wahren Gleichung ansehen. Sie wird auf folgende Art gefunden.

Fig. 54 Es sey AMCB Fig. 54. die Bahn einer unter dem Elevationswinkel BAT $= m$ geschossenen oder geworfenen Kugel; AP $=$ NM $= x$; PM $=$ AN $= y$; die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ nach der Richtung AT; und von A bis M die Dauerzeit der Bewegung $= t$.

Die Geschwindigkeit c kann man nach den Richtungen AN und AP in die zwey Geschwindigkeiten $c.\sin m$, und $c.\cos m$ zerlegen.

Daraus erhält man (vermöge §. 158. VII. und VIII.

$$AP = x = 2a \,.\, \text{lognat}\,\left(1 + \frac{tc\cos m}{2a}\right);$$ und hieraus

$$t = \frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Ferner ist (vermöge §. 166 VI. AN oder

$$y = a\,.\,L\left[\left(1 + \frac{c^2\sin^2 m}{b^2}\right).\operatorname{Cos}^2\operatorname{arc}\left(\operatorname{Arctang}\frac{c\sin m}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right]$$

Substituiret man nun in dieser letzten Gleichung statt t den eben angeführten Werth $\frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)$; so erhält man dadurch eine Gleichung für y, welche bloß durch x, und durch andere gegebene Größen ausgedrucket ist; nähmlich

$$y = a\,.\,L\left[\left(1 + \frac{c^2\sin^2 m}{b^2}\right)\operatorname{Cos}^2\operatorname{arc}\left(\operatorname{Arctang}\frac{c\sin m}{b} - \frac{b}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)\right)\right].$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man sodann die größte Ordinate DC, und die dazu gehörige Abscisse AD, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes nach der Lehre vom Größten und Kleinsten bestimmen.

Dar-

Darauf suchet man die Geschwindigkeit $= V$ für den Scheitel der Bahn nach der horizontalen Richtung CQ mittelst der Formel $v = ch^{\frac{-x}{2a}}$ im §. 158. V. da man in dieser Formel $c \cos m$ statt c, und den Werth AD statt x setzet. Fig. 54

Aus der nun bekannt gewordenen Geschwindigkeit $= V$ im Scheitel der Bahn läßt sich ferner auch eine Gleichung für den niedersteigenden Ast angeben. Wenn man nähmlich $CQ = x$, $QR = y$ setzet, und die Zeit der Bewegung von C bis R mit t bezeichnet; so ist (vermöge §. 158 VII. und VIII.)

$$CQ = x = 2a \cdot \text{lognat}\,(1 + \frac{Vt}{2a}); \text{ hieraus}$$

$$t = \frac{2a}{V}(h^{\frac{x}{2a}} - 1);$$

und (vermöge §. 163. VI.) ist QR, oder

$$y = bt + 2a.\text{lognat}\tfrac{1}{2}(1 + h^{\frac{-bt}{a}}).$$

Substituiret man nun in dieser Gleichung statt t den angeführten Werth $\frac{2a}{V}(h^{\frac{x}{2a}} - 1)$, so erhält man die gesuchte Gleichung für den niedersteigenden Ast. Daraus kann man nun aus dem schon bekannten Werthe von $FB = CD$ die dazugehörige Abscisse $CF = DB$ berechnen. Dadurch erhält man die Schußweite des niedersteigenden Astes. Addiret man endlich diese Schußweite des niedersteigenden Astes zu jener des aufsteigenden; so erhält man die ganze horizontale Schußweite AB.

Durch folgende Erwägung kann man auch eine Gleichung für die Bahn der geschossenen Kugeln in der widerstehenden Luft erhalten; eben so wie im 3ten Th. §. 76. die Gleichung für die Parabel bey der freyen Bewegung geworfener Körper gefunden worden ist.

Die

Fig. 55 Die Kugel werde nach der Richtung AT Fig. 55. unter dem Elevations-Winkel BAT $= m$ mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ geschossen. Nach Verlauf der Zeit $= t$ gelange sie nach M. Es sey AP $= x$,

$$PM = y; \text{ so ist } AN = \frac{x}{\cos m},\ PN = x \cdot \operatorname{tang} m, \text{ und}$$

$$y = x \cdot \operatorname{tang} m - NM.$$

Ohne Schwere würde die Kugel in der Zeit t in der widerstehenden Luft (vermöge §. 158. VII.) den Weg

$$AN = \frac{x}{\cos m} = 2a.\operatorname{lognat}\left(1 + \frac{ct}{2a}\right)$$

zurücklegen; und es wäre

$$t = \frac{2a}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right).$$

Weil aber die Schwerkraft auf die Kugel wirket; so wird diese dadurch in derselben Zeit t nach lothrechter Richtung um NM gegen den Horizont herabgetrieben; und es ist (wegen §. 163. VI.)

$$MN = bt + 2a.\operatorname{lognat}\tfrac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right)$$

oder wenn man statt t den angeführten Werth setzet,

$$MN = \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right) + 2a.L\tfrac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

und endlich ist, wenn man diesen Werth anstatt NM in obiger Gleichung substituiret,

$$y = x \cdot \operatorname{tang} m - \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)$$

$$- 2a.L\tfrac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

die gesuchte Gleichung für die Bahn.

Da

Da man aber von dieser Gleichung bey der Ausübung Fig.
keinen Gebrauch machen kann; und auch von ihrer Richtigkeit keine Ueberzeugung hat; so ist es nicht nöthig sich länger dabey aufzuhalten.

§. 180.

Zum Beschluße dieses Werkes will ich nur noch eine kurze Erwähnung machen, wie man die anfängliche Geschwindigkeit der Kanonenkugeln aus der Pulverladung und aus der Länge des Geschützrohres bestimmen könne. Man kann zwar bey einer solchen Untersuchung den vorgesetzten Zweck niemahls mit befriedigender Genauigkeit erreichen, weil bey der Hervorbringung der Geschwindigkeit durch die Entzündung des Schießpulvers in einem Geschütze so vielerley verschiedene, nicht hinlänglich bekannte, Umstände zusammentreffen, daß man sie nicht alle in Rechnung bringen kann. Indessen wird es doch nicht überflüssig seyn, allhier den Weg zu zeigen, wie man vorzugehen habe, um sich dem ausgesteckten Ziele zu nähern; und zwar durch folgende

Aufgabe.

Aus der gegebenen Länge des Geschützrohres, aus der Länge der Pulverladung, und aus dem Durchmesser der Kugel die anfängliche Geschwindigkeit der geschossenen Kugel zu finden, mit welcher sie aus der Mündung des Geschützes hinausfährt.

Auflösung.

1) Es sey

a = AD Fig. 56. die Länge der cylindrischen Aushöhlung des Geschützes, der Seele Kanone, 56

b = AB die Länge des mit Schießpulver angefüllten cylindrischen Raumes. Hätte dieser Raum eine andere Gestalt, so müßte er in einen Cylinder von der Weite der Kugel verwandelt werden um die Länge = b zu erhalten.

Fig. 56 c der Durchmesser der Kugel, welcher hier dem Durchmesser der Bohrung, oder der Seele gleich gesetzet wird.

n die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die specifische Schwere der Kugel größer ist, als die specifische Schwere des Wassers. Bey den vollen eisernen Kugeln ist sehr nahe $n = 7,1$. Bey den hohlen Kugeln (Bomben und Grenaden) müßte man das Gewicht einer solchen hohlen Kugel durch das Gewicht einer eben so großen vollen Wasserkugel dividiren, um n zu erhalten.

f sey die Höhe der Wassersäule deren Gewicht den Elasticitätsdruck der atmosphärischen Luft in ihrem mittleren Zustande an der Erdfläche vorstellet. Es ist beynahe $f = 32$ Fuß.

m sey die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die aus der Verbrennung des Schießpulvers erzeugte, und durch die Hitze vermehrte Elasticität der in dem Raume der Pulverladung noch eingeschlossenen Luft größer ist, als die Elasticität der gewöhnlichen atmosphärischen Luft. Aus mehreren Versuchen hat man gefunden, daß man beyläufig $m = 1000$ setzen könne,

q sey das eigenthümliche Gewicht des Wassers. Im Wiener-Maße und Gewichte ist $q = 56\frac{3}{8}$ Pfund.

2) Nach diesen Benennungen ist nun die Pressung gegen die Kugel bey B (wenn die Pulverladung durch die Verbrennung in elastischen Dampf sich aufgelöset hat, ehe die Kugel von ihrer Stelle merklich gewichen ist) im Anfange der Bewegung $= \frac{1}{4}c^2\pi . mfq =$ dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche, und die $m$fache Elasticitäts-Höhe der gewöhnlichen atmosphärischen Luft zu ihrer Höhe hat.

3) In einer gewissen Zeit $= t$ wird durch diese anfängliche Pressung die Kugel bis P fortgetrieben; und sie erlanget dadurch in P eine gewisse Geschwindigkeit $= v$ nach zurückgelegtem Wege $BP = x$.

4)

4) Die Pressung des elastischen Pulverdampfes gegen die Kugel in P ist nun hier im Verhältniße des Raumes AP zu AB vermindert; weil die Elasticitäten einer und derselben Luftmasse in verschiedenen Raumsinhalten AB und AP sich verhalten umgekehrt wie diese Raumsinhalte (§. 67.), oder hier umgekehrt wie die Längen AP ($b+x$ zu AB(b. Nähmlich aus der Pressung in B, $= \frac{1}{4}c^2\pi mfq$ folget die Pressung in P gegen die Kugel nach dem bekannten Mariottischen Gesetze $= \frac{1}{4}c^2\pi mfq \times \frac{b}{b+x}$. Dieser Ausdruck stellet uns die bewegende Kraft in dem Puncte P vor. Die bewegte Masse aber ist das Gewicht der Kugel $= \frac{1}{6}c^3\pi nq$. Fig. 56

5) Substituiret man nun in der allgemeinen Formel der Bewegung $vdv = \frac{2gPdx}{M}$ (3. Th. §. 56. III.) anstatt P und M die Werthe $P = \frac{1}{4}c^2\pi mfq \frac{b}{b+x}$, und $M = \frac{1}{6}c^3\pi nq$; so ist

$$vdv = \frac{3mbfg}{cn} \cdot \frac{dx}{b+x}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$v^2 = \text{Const.} + \frac{6mbfg}{cn} . \text{lognat}(b+x)$$

es ist aber $v^2 = 0$ für $x = 0$;

$$\text{folglich Const.} = -\frac{6mbfg}{cn}\text{lognat } b; \text{ und}$$

$$v^2 = \frac{6mbfg}{cn} . \text{lognat}\left(1 + \frac{x}{b}\right).$$

6) Für $x = BD = a - b$ erhält man aus der letzten Formel die Geschwindigkeit der Kugel an der Mündung des Geschützes, welche man die anfängliche Geschwindigkeit zu nennen pflegt. Wird nun diese gesuchte anfängliche Geschwindigkeit mit V bezeichnet; so ist, wenn man in der angeführten Formel $a - b$ statt x und V statt v schreibt,

$V = $

Fig. 56

$$V = \sqrt{\left(\frac{6mbfg}{cn} \cdot \operatorname{lognat} \frac{a}{b}\right)}$$

oder wenn man für m, f, g, ihre Werthe $m = 1000$, $f = 32$, $g = 15\frac{1}{2}$ setzet, und a, b, c im Wien. Fußmaße ausdrucket,

$$V = \sqrt{\left(\frac{2976000b}{nc} \cdot \operatorname{lognat} \frac{a}{b}\right)} \text{ Wien. Fuß.}$$

Nach dieser Formel wird sowohl für $b = 0$, als auch für $b = a$ die Geschwindigkeit $V = 0$. Deßwegen gibt es einen Werth für b, bey welchem V ein Größtes wird; und es ist leicht diesen Werth zu bestimmen.

7) Wenn der Raum hinter der Kugel AB $= b$ nicht ganz, sondern nur ein Theil desselben, dessen Länge $= e$ sey, mit Pulver angefüllet wäre; so müßte in der vorigen Formel $V = \sqrt{\left(\frac{6mbfg}{nc} \cdot \operatorname{lognat} \frac{a}{b}\right)}$ anstatt $m = 1000$ nun gesetzet werden $m = \frac{1000e}{b}$; und die anfängliche Geschwindigkeit, im Wien. Fußmaße ausgedrucket, wäre sodann

$$V = \sqrt{\left(\frac{2976000e}{nc} \cdot \operatorname{lognat} \frac{a}{b}\right)}.$$

§ 181.

Nach der zuletzt angeführten Formel kann man nun zu den gebräuchlichen Feld- und Belagerungs-Kanonen, wie auch zu den Mörsern und Haubitzen aus den bekannten Abmessungen derselben, und aus den dazugehörigen Pulverladungen die anfängliche Geschwindigkeit für jedes Geschütz berechnen. Wenn man diese so berechnete anfängliche Geschwindigkeit mit jener vergleichet, die man durch die oben (§. 173. II.) angegebene Formel aus der bekannten Schußweite und aus dem Elevationswinkel in einem widerstehenden flüssigen Mittel erhält; so wird man daraus ersehen, wie groß man nach Verschiedenheit des Schießpulvers den

Werth

Werth von m in der letzten Formel allhier annehmen könne, daß die zwey aus verschiedenen Gründen abgeleiteten anfänglichen Geschwindigkeiten mit einander übereinstimmen. Fig.

§. 182.

Die nach der gegebenen Formel (§. 180.) berechnete anfängliche Geschwindigkeit kann übrigens nur beynahe richtig seyn, weil verschiedene Hindernisse der Bewegung hier vernachlässiget sind, welche alle insgesammt die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit vermindern.

Diese Hindernisse sind. 1) Der Druck der Atmosphäre gegen die Kugel $= \frac{1}{4}c^2\pi fq$ von der Seite der Mündung. Wenn man nun diesen auch in Erwägung ziehen will, so muß man bey der Auflösung der angeführten Aufgabe in N. 5. für P den Werth $\frac{1}{4}c^2\pi mfq \cdot \frac{b}{b+x} - \frac{1}{4}c^2\pi fq$ setzen; dadurch erhält man die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit in N. 6.

$$V = \sqrt{\left(\frac{6fg}{nc}\left[mb \,.\, \mathrm{L}\,\frac{a}{b} - (a-b)\right]\right)}.$$

2). Der Luftwiderstand. 3) Der Verlust des elastischen Pulverdampfes durch das Zündloch und durch den Spielraum. 4) Die Reibung, welche die Kugel bey ihrer Bewegung im Rohre zu überwinden hat. 5) Die allmählige Entzündung des Pulvers. Es ist nähmlich bey der Auflösung dieser Aufgabe vorausgesetzet worden, daß die ganze Pulverladung durch eine gleichsam plötzliche Verbrennung in elastischen Dampf aufgelöset sey, ehe die Kugel von ihrer anfänglichen Stelle merklich wegrücket. Dieses ist nun nicht so beschaffen. Das Pulver brauchet immer eine gewisse, obschon sehr kleine Zeit zu seiner gänzlichen Verbrennung. Sobald ein Theil der Pulverladung entzunden ist, wird durch diesen elastischen Dampf die Kugel, und mit ihr das noch nicht enzündete Pulver in Bewegung gesetzet, so daß man in obiger Formel bey der Bestimmung der bewegten Masse M zu der Masse der Kugel auch noch einen gewissen Theil der Pulverladung hinzusetzen sollte. Wie nun diese und noch einige andere

Hin-

Fig. 56 Hindernisse im gegenwärtigen Falle in Erwägung zu ziehen, und in Rechnung zu bringen sind, lehret umständlich L. Euler in den Anmerkungen zu Robins neuen Grundsätzen der Artillerie Berlin 1745. Wer sich die bisher vorgetragenen Gründe der höhern Analysis, Dynamik- und Hydrodynamik eigen gemacht hat, wird das genannte Werk des L. Euler, wie auch andere ähnliche Schriften über theoretische Gegenstände der Artillerie lesen, und gründlich beurtheilen können, was für ein Nutzen für die practische Artillerie daraus zu schöpfen sey.

§. 183.

Die im §. 182. angegebene Formel

$$V = \sqrt{\left(\frac{6fg}{nc}\left[mb \,.\, \text{lognat}\,\frac{a}{b} - (a-b)\right]\right)}$$

zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit V aus der gegebenen Länge des Geschützrohres, aus der Pulverladung, und aus dem Durchmesser der Kugel, dienet auch zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit einer mittelst der Windbüchse abgeschossenen Kugel wenn m die Zahl bedeutet, wie vielmahl die im Raume AB zusammengepreßte Luft dichter ist, als die gewöhnliche atmosphärische. Diese Formel gibt zu erkennen, daß V immer größer werden kann, je größer m wird. Und so zeiget auch die Formel im §. 180. N. 6. an daß bey einer bestimmten Pulverladung V mit a ohne Ende wachsen müßte. Das letzte kann zwar nur in solange geschehen, bis die Elasticität des anfangs in AB zusammengepreßten, und nun durch AD verbreiteten Pulverdampfes nur noch so groß ist, als die Elasticität und der Widerstand der atmosphärischen Luft; worauf sodann die fernere Vermehrung der Geschwindigkeit der Kugel aufhöret.

Wenn man übrigens den Werth des Buchstaben m in den angegebenen Formeln vermehren, das ist durch irgend ein Hülfsmittel die Kraft des Pulvers vergrößern könnte, dessen Möglichkeit man doch nicht läugnen kann; so müßte die anfängliche Geschwindigkeit dadurch auch vergrößert wer-

den; nähmlich je größer m würde, desto größer müßte in Fig.
einem gewissen Verhältnisse auch V werden. Die Geschwindigkeit also, die man den Kugeln, Grenaden, und Bomben durch die elastische Kraft des Pulverdampfes beybringen kann, hat kei- Grenze, die sie nicht erreichen, nicht übersteigen könnte.

§. 184.

Und doch behauptet Herr John Muller in seinem Werke Treatise of Artillery, the third Edition, London 1780, daß man einer einer abgeschossenen Kugel nur einen gewissen Grad von Geschwindigkeit in der widerstehenden Luft beybringen kann, die bewegende Kraft möge wie immer vermehret werden: so wie es bey dem lothrechten Sinken eines festen Körpers in der widerstehenden Luft eine Grenze gibt, welche die wachsende Geschwindigkeit nicht übersteigen kann. Ueber diesen neu aufgestellten Satz des H. Muller von der Bestimmung der möglich größten Geschwindigkeit der Kanonenkugeln ist eine aus dem englischen übersetzte Abhandlung in Böhms Magazine für Ingenieurs und Artilleristen V. Bd. Giessen 1779 Seite 259 befindlich.

Diese möglich größte Geschwindigkeit $= c$ hängt nach der Meinung des H. Muller bloß allein vom Durchmesser der Kugel $= D$, und von der Verhältnißzahl $= N$ der specifischen Schwere der Kugel zur specifischen Schwere der Luft ab; er setzet $c = \sqrt{24gDN}$ bey der Beschleunigung der Schwere $= g$. Nach seiner Berechnung ist die möglich größte Geschwindigkeit einer 3 ℔gen englischen eisernen Kugel nicht größer als 615,7 Londner Fuß, und bey der 6 ℔gen Kanone nicht größer als 619,3 Fuß. Wenn ein Geschütz, z. B. eine 6 ℔ge Kanone, und eine dazugehörige Pulverladung dergestalt eingerichtet sind, daß die 6 ℔ge Kugel gerade die angegebene Geschwindigkeit von 619,3 Fuß erhält; so ist nach der Meinung des H. Muller jede fernere Bemühung, etwan durch Verlängerung des Rohres, Verminderung des Spielraums, Verstärkung der Ladung, Verbesserung des Pulvers, u. s. w. die anfängliche Geschwindigkeit der abzuschiessenden Kugel zu vergrößern, gänzlich fruchtlos. Die Erfahrung stimmet mit dieser Behauptung

nicht

Fig. nicht überein; sie ist auch sonst den Gründen der Mechanik nicht gemäß. Im erwähnten Magazine für Ing. und Artill. wird zwar die Richtigkeit dieser neuen Lehre des H. Muller bezweifelt. Allein der eigentliche Irrthum ist nicht aufgedecket. Ich war daher bemühet diesen Irrthum, der in mehreren Auflagen des genannten Werkes vom H. Muller aufrecht erhalten wird, bis zu seinem Ursprunge zu verfolgen; und entdeckte denselben im Folgenden.

H. John Muller hat in seinem Werke, Appendix or Supplement to the Treatise of Artillery, London 1768, Seite 117 im Absatze 168, durch unrichtige Schlüsse nachstehende Gleichungen

$$\text{I. } y = \tfrac{1}{2} r \,.\, \text{lognat} \frac{r - c^2}{r - v^2}$$

$$\text{II. } t = \tfrac{1}{2} a \,.\, \text{lognat} \frac{(a-c)(a+v)}{(a+c)(a-v)}$$

herausgebracht, welche bey einer geradlinigen Bewegung im widerstehenden flüssigen Mittel auf einer horizontalen Ebene mit Beseitigung der Reibung und aller sonstiger Hindernisse außer dem Widerstande des Flüssigen, den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege y, zwischen der Dauerzeit t, zwischen der anfänglichen Geschwindigkeit c, zwischen der noch vorhandenen Geschwindigkeit v nach der Zeit t, und zwischen dem unveränderlichen Werthe $r = a^2$ vorstellen sollen. Und es bedeutet bey ihm $r = 6DN$ diejenige Höhe, von welcher eine Kugel des Durchmessers D im luftleeren Raume frey herabfallen müßte, um eine Geschwindigkeit $= \sqrt{4gr}$ zu erhalten, daß sodann bey dieser Geschwindigkeit der Widerstand einer flüssigen Masse gegen die Kugel eben so groß wäre, als das Gewicht der Kugel; N zeiget übrigens an, wie vielmahl die specifische Schwere der Kugel größer ist, als die specifische Schwere der flüssigen Masse. Der Widerstand der flüssigen Masse gegen eine darin bewegte Kugel ist nach der Meinung des H. Muller dem Gewichte einer Säule dieser Flüssigkeit gleich, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und $\frac{1}{9}$ der

Ge-

Geschwindigkeitshöhe zu ihrer Länge hat. Bey allen bisher angestellten Versuchen hat man den Widerstand weit größer gefunden. Herr Muller mußte ihn so klein annehmen, damit er die aus ebenfalls viel zu klein angenommenen anfänglichen Geschwindigkeiten berechneten Schußweiten der Kanonkugeln mit der Erfahrung übereinstimmend machte. Es hat auf diese Art der zweyte Fehler den ersten beynahe getilget. Fig.

Nachdem H. Muller die angeführten unrichtigen Gleichungen I. und II. aufgestellet hatte, sagte er nun weiters im 169ten Absatze Seite 119. *)

„ Hieraus (aus den angeführten Formeln I. und „ II.) erhellet ganz deutlich, daß die gegebene Geschwin„ digkeit, mit der ein Körper sich zu bewegen anfängt, je„ derzeit kleiner seyn müsse, als die möglich größte, die „ dieser Körper in demselben widerstehenden flüssigen Mit„ tel (durch den Fall) erlangen kann. Denn wenn $r = c^2$, „ oder $a = c$ gesetzet wird; so verschwindet sowohl der zu„ rückgelegte Weg, als auch die verflossene Zeit (eigentlich „ wir y und t unmöglich). Obwohl dieses eine sehr merk„ würdige Wahrheit ist; so hat doch bisher kein Schrift„ steller hierauf Bedacht genommen: im Gegentheile nehmen „ einige die Geschwindigkeit viel größer an. — Man muß „ hierbey ferner bemerken, daß dieser Satz immer wahr „ bleibe; es möge sich der Körper entweder wagrecht, oder „ aber längst einer schiefen Ebene bewegen, weil dadurch an

*) Hence it is manifest, that the given velocity, with which the body begins to move, must always be less than the greatest velocity that the body can acquire in the medium. For when $r = cc$, or $a = c$ then both the space moved over and the time elapsed vanish. Although this is very remarkable, yet no author has taken notice of it; on the contrary, they often suppose this velocity much greater. — It must be observed that the same thing is true, whether the body moves in an horizontal line or in one that makes a given angle with it, since every thing will be the same as above. This we thought necessary to take notice of, to prevent an uncautious reader from taking what has been here said as only applicable to horizontal ranges.

den

Fig. „ den obigen Ausdrücken nichts geändert wird. Wir hal„ ten für nöthig diesen Umstand hier beyzusetzen, damit nicht „ vielleicht ein etwas unachtsamer Leser das bisher gesagte „ nur allein auf horizontale Bewegungen anwendbar glaube.

Daß die zwey angeführten Gleichungen I. und II. auch bey dem vom H. Muller angenommenen Widerstande unrichtig sind, erhellet sogleich, wenn man dieselben mit den oben im §. 158 für eben diesen Fall aus richtigen Gründen abgeleiteten Formeln vergleichet.

Wenn man nähmlich bey der Aufgabe im §. 158. auch den Widerstand gegen die Kugel nach der Meinung des H. Muller $P = \frac{1}{4}D^2\pi . \frac{v^2}{4g} . \frac{1}{9}$ setzet, und sodann in der Grundformel

$$vdv = -\frac{2gPdy}{M}$$

für P diesen Werth, und $\frac{1}{6}D^3\pi N$ für M substituiret; so ist

$$dy = -12DN . \frac{dv}{v},$$

und für $6DN = r$,

$$dy = -2r . \frac{dv}{v};$$

hieraus folget

$$\text{I. } y = 2r . \text{lognat} \frac{c}{v},$$

weil für $y = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ ist.

Setzet man ferner in der zweyten Grundformel der Bewegung $dy = vdt$ statt dy den eben angeführten Werth $-2r . \frac{dv}{v}$; so ist

$$-\frac{2rdv}{v} = vdt, \text{ und}$$

$$dt = -2rv^{-2}dv;$$

Hier-

Hieraus folget nun Fig.

$$t = 2r\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right),$$

weil für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ ist; und endlich ist für $r = a^2$

$$\text{II. } t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right).$$

Es ist daher bey der gradlinigen Bewegung auf einer horizontalen Ebene in einem widerstehenden flüssigen Mittel der Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege, zwischen den Geschwindigkeiten und zwischen der Zeit, wenn man den Widerstand so klein annimmt, als H. Muller denselben voraussetzet, durch folgende zwey Gleichungen richtig vorgestellet,

$$y = 2r \,.\, \text{lognat} \frac{c}{v},$$

und für $a^2 = r$,

$$t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

keinesweges aber durch die vom H. Muller durch unrichtige Schlüsse herausgebrachten, oben bemerkten Formeln

$$y = \tfrac{1}{2}r \,.\, \text{lognat} \frac{r - c^2}{r - v^2},$$

und für $a^2 = r$

$$t = \tfrac{1}{2}a \,.\, \text{lognat} \frac{(a - c)(a + v)}{(a + c)(a - v)}.$$

Da nun die angeführten zwey Gleichungen des Herrn Muller gänzlich unrichtig sind; so ist auch alles übrige, was er daraus in den zwey genannten Werken von der Bestimmung der möglich größten Geschwindigkeit der geschossenen Kugeln nach Verschiedenheit des Calibers, von der vortheilhaftesten Länge der Geschützröhre, von der vortheilhaftesten Pulverladung zu einer gegebenen Länge des Geschützrohres, u. s. w. gefolgert hat, unrichtig und ganz verwerf-

 lich.

Fig. lich. Es wäre zu weitläufig alle diese Unrichtigkeiten hier auszuheben, und zu berichtigen. Dieses könnte nur bey einer vollständigen Uebersetzung des genannten Werkes des H. Muller Appendix or Supplement to the Treatise of Artillery geschehen.

§. 185.

Hier folget noch die oben erwähnte balistische Tafel, welche bey der Berechnung der Schußweiten in der widerstehenden Luft mit Vortheile gebrauchet werden kann, wie es aus folgendem Beyspiele zu ersehen ist.

Es werde eine 4pfündige eiserne Kugel, deren Durchmesser $= 3$ Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß ist, unter einem Erhöhungswinkel von 15 Grad $= m$ mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $c = 1200$ Fuß aus einem dazu angemessenen Geschütze hinausgeschossen; der Kubikfuß des gegossenen Eisens, woraus die Kugel besteht, wiege 400 Pfunde, und der Kubikfuß der atmosphärischen, hier von gleichförmiger Dichtigkeit angenommenen Luft, worin die Bewegung der geschossenen Kugel vor sich geht, wiege 2 Loth $= \frac{1}{16}$ Pfund Wien. Hand. Gew. Man soll die Schußweite im Horizonte der Mündung des Geschützes berechnen.

Diese findet man nun durch Beyhülfe der balistischen Tafel auf folgende Art. Vermöge §. 173. II. ist

$$\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right) : \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 1 + \frac{c^2.\sin 2m}{4ag.\cos\frac{1}{2}m}$$

die Formel, in welcher x die gesuchte Schußweite bedeutet. Weil nun hier $D = \frac{1}{4}$, und $N = 400 : \frac{1}{16} = 6400$ ist; so ist $DN = 1600$;

und $a = \frac{4}{3}DN = \frac{6400}{3}$, $\log a = 3{,}3290587$

$$\log.\cos\tfrac{1}{2}m = \log.\cos 7^\circ 30' = 0{,}9962686 - 1$$

$$\log(a.\cos\tfrac{1}{2}m) = 3{,}3253273$$

$$g = 15\tfrac{1}{2},\ 4g = 62,\ \log 4g = 1{,}7923917$$

$$\log(4ag.\cos\tfrac{1}{2}m) = 5{,}1177190$$

$c^2 =$

$c^2 = 1440000$, $\sin 2m = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ Fig.

$c^2.\sin 2m = 720000$; $\log. c^2 \sin 2m = 5,8573325$

$0,7396135$

hierzu gehöret die Zahl $\frac{c^2 \sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m} = 5,4905$.

Und nun hat man die Gleichung

$$\left(h^{\frac{x}{a.\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right) : \frac{x}{a.\cos\frac{1}{2}m} = 6,4905$$

woraus sich mittelst der balistischen Tafel der Werth für $\frac{x}{a.\cos\frac{1}{2}m} = n$ bestimmen läßt.

Denn wenn man in dieser Tafel in der Spalte $\left(\frac{h^n-1}{n}\right)$ die Zahl 6,4905 aufsuchet; so findet man, daß $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}$ größer als 3,02 und kleiner als 3,03 sey; woraus sodann durch die Einschaltung mittelst der Differenzen $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 3,0278$ folget;

nähmlich gegebene Zahl $= 6,4905$
nächst kleinere i. d. Taf. $= 6,4541$ bey $3,02$

Differenz $= 364$
Differenz der Tafel $= 466$
und nun $\frac{364}{466} \times \frac{1}{100} = 0,0078$

$$\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 3,0278$$

Hiervon $\log \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 0,4811272$

$\log . a\cos\frac{1}{2}m = 3,3253273$

gibt $\log x = 3,8064545$

Fig. folglich ist die gesuchte Schußweite $x = 6404$ Fuß $=$ 1067 Klafter 2 Fuß.

Wenn man in diesem Beyspiele die Schußweite nach der Formel (§. 172. II.)

$$\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}$$

berechnet; so findet man $x = 6437$ Fuß.

Wenn hingegen die Luft keinen Widerstand leistete; so wäre in dem angeführten Falle nach der parabolischen Lehre vermöge (3. Th. §. 77.) die Schußweite $\frac{c^2 \sin 2m}{2g}$ $= 23226$ Fuß. Es ist hieraus ersichtlich, wie sehr die Schuß- und Wurfweiten durch den Widerstand der Luft verkürzet werden.

Aus den angeführten verschiedenen Formeln zur Berechnung der Schußweite bey der Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel ist es ersichtlich, daß bey einerley anfänglichen Geschwindigkeit, und bey sonst gleichen Umständen die Kugeln von größeren Durchmessern auch größere Tragweiten haben müssen, als die von kleineren Durchmessern, obschon der Widerstand des Flüssigen gegen eine größere Kugel größer ist, als gegen eine kleinere. Z. B. Der Widerstand der Luft gegen eine darin bewegte 24 ℔ge Kugel ist viermahl so groß, als gegen eine 3 ℔ge, die sich mit eben derselben Geschwindigkeit in eben derselben Luft beweget; und doch erreichet bey einerley anfänglichen Geschwindigkeit unter einerley Elevation die 24 ℔ge Kugel eine viel größere Weite, als die 3 ℔ge, dieses wird ganz deutlich eingesehen, wenn man nur erwägt, daß die Verminderung der anfänglichen Geschwindigkeit eigentlich von dem Werthe des Bruches $\frac{gP}{M}$ in den

Grund-

Grundformeln der Bewegung abhänget. Diesen Werth kann man hier die Verzögerung der Bewegung wegen des Widerstandes nennen. Diese Verzögerung ist nun, da *P* dem Quadrate des Durchmessers der bewegten Kugel, und *M* dem Würfel desselben bey sonst gleichen Umständen proportional ist, bey einer 24 ℔gen eisernen Kugel nur halb so groß, als bey einer 3 ℔gen; und deßwegen muß die erste bey einerley Geschwindigkeit und Richtung eine größere Weite erreichen, als die zweyte; welches auch mit Erfahrungen und Versuchen übereinstimmet.

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
0,01	1,0050	0,0051	0,34	1,1910	0,0063	0,67	1,4242	0,0080
0,02	1,0101	51	0,35	1,1973	64	0,68	1,4322	80
0,03	1,0152	51	0,36	1,2037	64	0,69	1,4402	80
0,04	1,0203	51	0,37	1,2101	64	0,70	1,4482	81
0,05	1,0254	52	0,38	1,2165	65	0,71	1,4563	82
0,06	1,0306	52	0,39	1,2230	66	0,72	1,4645	82
0,07	1,0358	53	0,40	1,2296	66	0,73	1,4727	83
0,08	1,0411	53	0,41	1,2362	66	0,74	1,4810	83
0,09	1,0464	53	0,42	1,2428	66	0,75	1,4893	84
0,10	1,0517	54	0,43	1,2494	68	0,76	1,4977	85
0,11	1,0571	54	0,44	1,2562	67	0,77	1,5062	85
0,12	1,0625	54	0,45	1,2629	68	0,78	1,5147	86
0,13	1,0679	55	0,46	1,2697	69	0,79	1,5233	86
0,14	1,0734	55	0,47	1,2766	69	0,80	1,5319	87
0,15	1,0789	55	0,48	1,2835	69	0,81	1,5406	88
0,16	1,0844	56	0,49	1,2904	70	0,82	1,5494	88
0,17	1,0900	56	0,50	1,2974	71	0,83	1,5582	89
0,18	1,0956	57	0,51	1,3045	71	0,84	1,5671	90
0,19	1,1013	57	0,52	1,3116	71	0,85	1,5761	90
0,20	1,1070	57	0,53	1,3187	72	0,86	1,5851	91
0,21	1,1127	58	0,54	1,3259	73	0,87	1,5942	91
0,22	1,1185	58	0,55	1,3332	73	0,88	1,6033	92
0,23	1,1243	59	0,56	1,3405	73	0,89	1,6125	93
0,24	1,1302	59	0,57	1,3478	74	0,90	1,6218	93
0,25	1,1361	59	0,58	1,3552	75	0,91	1,6311	94
0,26	1,1420	60	0,59	1,3627	75	0,92	1,6405	95
0,27	1,1480	60	0,60	1,3702	76	0,93	1,6500	96
0,28	1,1540	61	0,61	1,3778	76	0,94	1,6596	96
0,29	1,1601	61	0,62	1,3854	76	0,95	1,6692	97
0,30	1,1662	61	0,63	1,3930	77	0,96	1,6789	97
0,31	1,1723	62	0,64	1,4007	78	0,97	1,6886	98
0,32	1,1785	62	0,65	1,4085	78	0,98	1,6984	0,0099
0,33	1,1847	63	0,66	1,4163	79	0,99	1,7083	0,0100
0,34	1,1910	0,0063	0,67	1,4242	0,0080	1,00	1,7183	0,0100

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
1,01	1,7283	0,0101	1,34	2,1038	0,0128	1,67	2,5821	0,0164
1,02	1,7384	102	1,35	2,1166	130	1,68	2,5985	166
1,03	1,7486	103	1,36	2,1296	130	1,69	2,6151	166
1,04	1,7589	103	1,37	2,1426	131	1,70	2,6317	168
1,05	1,7692	104	1,38	2,1557	132	1,71	2,6485	169
1,06	1,7796	105	1,39	2,1689	134	1,72	2,6654	171
1,07	1,7901	105	1,40	2,1823	134	1,73	2,6825	171
1,08	1,8006	107	1,41	2,1957	135	1,74	2,6996	173
1,09	1,8113	107	1,42	2,2092	137	1,75	2,7169	174
1,10	1,8220	108	1,43	2,2229	137	1,76	2,7343	176
1,11	1,8328	108	1,44	2,2366	138	1,77	2,7519	177
1,12	1,8436	110	1,45	2,2504	140	1,78	2,7696	178
1,13	1,8546	110	1,46	2,2644	140	1,79	2,7874	180
1,14	1,8656	111	1,47	2,2784	141	1,80	2,8054	181
1,15	1,8767	112	1,48	2,2925	143	1,81	2,8235	182
1,16	1,8879	112	1,49	2,3068	143	1,82	2,8417	183
1,17	1,8991	114	1,50	2,3211	145	1,83	2,8600	186
1,18	1,9105	114	1,51	2,3356	146	1,84	2,8786	186
1,19	1,9219	115	1,52	2,3502	146	1,85	2,8972	188
1,20	1,9334	116	1,53	2,3648	148	1,86	2,9160	189
1,21	1,9450	117	1,54	2,3796	149	1,87	2,9349	191
1,22	1,9567	118	1,55	2,3945	150	1,88	2,9540	192
1,23	1,9685	118	1,56	2,4095	151	1,89	2,9732	194
1,24	1,9803	120	1,57	2,4246	152	1,90	2,9926	195
1,25	1,9923	120	1,58	2,4398	154	1,91	3,0121	196
1,26	2,0043	121	1,59	2,4552	154	1,92	3,0317	199
1,27	2,0164	122	1,60	2,4706	156	1,93	3,0516	199
1,28	2,0286	123	1,61	2,4862	157	1,94	3,0715	201
1,29	2,0409	124	1,62	2,5019	158	1,95	3,0916	203
1,30	2,0533	125	1,63	2,5177	159	1,96	3,1119	204
1,31	2,0658	126	1,64	2,5336	161	1,97	3,1323	206
1,32	2,0784	126	1,65	2,5497	162	1,98	3,1529	207
1,33	2,0910	128	1,66	2,5659	162	1,99	3,1736	209
1,34	2,1038	0,0128	1,67	2,5821	0,0164	2,00	3,1945	0,0211

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
2,01	3,2156	0,0212	2,34	4,0090	0,0274	2,67	5,0336	0,0354
2,02	3,2368	214	2,35	4,0364	276	2,68	5,0690	357
2,03	3,2582	215	2,36	4,0640	277	2,69	5,1047	359
2,04	3,2797	217	2,37	4,0917	280	2,70	5,1406	362
2,05	3,3014	219	2,38	4,1197	282	2,71	5,1768	365
2,06	3,3233	220	2,39	4,1479	284	2,72	5,2133	368
2,07	3,3453	222	2,40	4,1763	287	2,73	5,2501	371
2,08	3,3675	224	2,41	4,2050	288	2,74	5,2872	374
2,09	3,3899	226	2,42	4,2338	291	2,75	5,3246	376
2,10	3,4125	227	2,43	4,2629	293	2,76	5,3622	380
2,11	3,4352	229	2,44	4,2922	296	2,77	5,4002	383
2,12	3,4581	231	2,45	4,3218	297	2,78	5,4385	385
2,13	3,4812	232	2,46	4,3515	300	2,79	5,4770	389
2,14	3,5044	234	2,47	4,3815	303	2,80	5,5159	392
2,15	3,5278	237	2,48	4,4118	305	2,81	5,5551	395
2,16	3,5515	237	2,49	4,4423	306	2,82	5,5946	398
2,17	3,5752	240	2,50	4,4729	310	2,83	5,6344	401
2,18	3,5992	242	2,51	4,5039	312	2,84	5,6745	405
2,19	3,6234	243	2,52	4,5351	315	2,85	5,7150	408
2,20	3,6477	246	2,53	4,5666	317	2,86	5,7558	411
2,21	3,6723	247	2,54	4,5983	319	2,87	5,7969	414
2,22	3,6970	249	2,55	4,6302	322	2,88	5,8383	417
2,23	3,7219	251	2,56	4,6624	324	2,89	5,8800	421
2,24	3,7470	253	2,57	4,6948	327	2,90	5,9221	424
2,25	3,7723	255	2,58	4,7275	330	2,91	5,9645	42
2,26	3,7978	257	2,59	4,7605	332	2,92	6,0073	43
2,27	3,8235	259	2,60	4,7937	335	2,93	6,0504	43
2,28	3,8494	261	2,61	4,8272	337	2,94	6,0938	43
2,29	3,8755	263	2,62	4,8609	340	2,95	6,1376	44
2,30	3,9018	265	2,63	4,8949	343	2,96	6,1817	44
2,31	3,9283	267	2,64	4,9292	346	2,97	6,2262	44
2,32	3,9550	269	2,65	4,9638	348	2,98	6,2710	45
2,33	3,9819	271	2,66	4,9986	350	2,99	6,3162	45
2,34	4,0090	0,0274	2,67	5,0336	0,0354	3,00	6,3618	0,046

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
3,01	6,4078	0,0463	3,34	8,1494	0,0603	3,67	10,423	0,079
3,02	6,4541	466	3,35	8,2097	609	3,68	10,502	79
3,03	6,5007	470	3,36	8,2706	613	3,69	10,581	80
3,04	6,5477	474	3,37	8,3319	618	3,70	10,661	81
3,05	6,5951	478	3,38	8,3937	623	3,71	10,742	82
3,06	6,6429	482	3,39	8,4560	628	3,72	10,824	82
3,07	6,6911	486	3,40	8,5188	634	3,73	10,906	83
3,08	6,7397	490	3,41	8,5822	638	3,74	10,989	83
3,09	6,7887	493	3,42	8,6460	643	3,75	11,072	84
3,10	6,8380	498	3,43	8,7103	649	3,76	11,156	85
3,11	6,8878	501	3,44	8,7752	654	3,77	11,241	86
3,12	6,9379	506	3,45	8,8406	660	3,78	11,327	86
3,13	6,9885	509	3,46	8,9066	665	3,79	11,413	87
3,14	7,0394	514	3,47	8,9731	670	3,80	11,500	88
3,15	7,0908	518	3,48	9,0401	676	3,81	11,588	88
3,16	7,1426	522	3,49	9,1077	681	3,82	11,676	90
3,17	7,1948	526	3,50	9,1758	687	3,83	11,766	90
3,18	7,2474	530	3,51	9,2445	692	3,84	11,856	91
3,19	7,3004	535	3,52	9,3137	699	3,85	11,947	91
3,20	7,3539	539	3,53	9,3836	703	3,86	12,038	92
3,21	7,4078	543	3,54	9,4539	709	3,87	12,130	93
3,22	7,4621	548	3,55	9,5248	716	3,88	12,223	93
3,23	7,5169	552	3,56	9,5964	721	3,89	12,316	95
3,24	7,5721	556	3,57	9,6685	727	3,90	12,411	95
3,25	7,6277	562	3,58	9,7412	733	3,91	12,506	96
3,26	7,6839	565	3,59	9,8145	739	3,92	12,602	97
3,27	7,7404	571	3,60	9,8884	745	3,93	12,699	98
3,28	7,7975	574	3,61	9,9629	0,075	3,94	12,797	98
3,29	7,8549	580	3,62	10,038	76	3,95	12,895	0,099
3,30	7,9129	584	3,63	10,114	76	3,96	12,994	0,100
3,31	7,9713	589	3,64	10,190	77	3,97	13,094	101
3,32	8,0302	594	3,65	10,267	78	3,98	13,195	102
3,33	8,0896	598	3,66	10,345	78	3,99	13,297	103
3,34	8,1494	0,0603	3,67	10,423	0,079	4,00	13,400	0,104

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ
4,01	13,503	0,104	4,34	17,444	0,137	4,67	22,633	0,181
4,02	13,607	105	4,35	17,581	138	4,68	22,814	182
4,03	13,712	106	4,36	17,719	140	4,69	22,996	184
4,04	13,818	107	4,37	17,859	141	4,70	23,180	185
4,05	13,925	108	4,38	18,000	141	4,71	23,365	187
4,06	14,033	109	4,39	18,141	143	4,72	23,552	189
4,07	14,142	109	4,40	18,284	144	4,73	23,741	190
4,08	14,251	111	4,41	18,428	145	4,74	23,931	192
4,09	14,362	111	4,42	18,573	147	4,75	24,123	193
4,10	14,473	113	4,43	18,720	148	4,76	24,316	195
4,11	14,586	113	4,44	18,868	149	4,77	24,511	197
4,12	14,699	114	4,45	19,017	150	4,78	24,708	198
4,13	14,813	115	4,46	19,167	152	4,79	24,906	200
4,14	14,928	116	4,47	19,319	153	4,80	25,106	202
4,15	15,044	117	4,48	19,472	154	4,81	25,308	203
4,16	15,161	118	4,49	19,626	155	4,82	25,511	205
4,17	15,279	120	4,50	19,781	157	4,83	25,716	207
4,18	15,399	120	4,51	19,938	158	4,84	25,923	209
4,19	15,519	121	4,52	20,096	159	4,85	26,132	210
4,20	15,640	122	4,53	20,255	161	4,86	26,342	212
4,21	15,762	123	4,54	20,416	163	4,87	26,554	214
4,22	15,885	124	4,55	20,579	163	4,88	26,768	216
4,23	16,009	125	4,56	20,742	165	4,89	26,984	218
4,24	16,134	126	4,57	20,907	166	4,90	27,202	219
4,25	16,260	127	4,58	21,073	168	4,91	27,421	221
4,26	16,387	129	4,59	21,241	169	4,92	27,642	224
4,27	16,516	129	4,60	21,410	170	4,93	27,866	225
4,28	16,645	130	4,61	21,580	172	4,94	28,091	227
4,29	16,775	132	4,62	21,752	173	4,95	28,318	229
4,30	16,907	133	4,63	21,925	175	4,96	28,547	231
4,31	17,040	133	4,64	22,100	176	4,97	28,778	233
4,32	17,173	135	4,65	22,276	178	4,98	29,011	234
4,33	17,308	136	4,66	22,454	179	4,99	29,245	237
4,34	17,444	0,137	4,67	22,633	0,181	5,00	29,482	0,239

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
5,01	29,721	0,241	5,34	38,860	0,319	5,67	50,976	0,423
5,02	29,962	243	5,35	39,179	321	5,68	51,399	427
5,03	30,205	245	5,36	39,500	325	5,69	51,826	431
5,04	30,450	247	5,37	39,825	328	5,70	52,257	434
5,05	30,697	250	5,38	40,153	330	5,71	52,691	439
5,06	30,947	251	5,39	40,483	333	5,72	53,130	442
5,07	31,198	253	5,40	40,816	336	5,73	53,572	446
5,08	31,451	256	5,41	41,152	339	5,74	54,018	450
5,09	31,707	258	5,42	41,491	341	5,75	54,468	454
5,10	31,965	260	5,43	41,832	344	5,76	54,922	457
5,11	32,225	262	5,44	42,176	348	5,77	55,379	462
5,12	32,487	264	5,45	42,524	351	5,78	55,841	465
5,13	32,751	267	5,46	42,875	354	5,79	56,306	469
5,14	33,018	269	5,47	43,229	356	5,80	56,775	474
5,15	33,287	271	5,48	43,585	359	5,81	57,249	478
5,16	33,558	274	5,49	43,944	363	5,82	57,727	482
5,17	33,832	276	5,50	44,307	366	5,83	58,209	486
5,18	34,108	279	5,51	44,673	369	5,84	58,695	490
5,19	34,387	280	5,52	45,042	372	5,85	59,185	494
5,20	34,667	283	5,53	45,414	376	5,86	59,679	499
5,21	34,950	286	5,54	45,790	379	5,87	60,178	503
5,22	35,236	288	5,55	46,169	382	5,88	60,681	508
5,23	35,524	290	5,56	46,551	385	5,89	61,189	512
5,24	35,814	293	5,57	46,936	388	5,90	61,701	516
5,25	36,107	296	5,58	47,324	392	5,91	62,217	521
5,26	36,403	298	5,59	47,716	395	5,92	62,738	526
5,27	36,701	300	5,60	48,111	399	5,93	63,264	530
5,28	37,001	304	5,61	48,510	402	5,94	63,794	534
5,29	37,305	305	5,62	48,912	406	5,95	64,328	539
5,30	37,610	308	5,63	49,318	409	5,96	64,867	544
5,31	37,918	312	5,64	49,727	413	5,97	65,411	549
5,32	38,230	314	5,65	50,140	416	5,98	65,960	553
5,33	38,544	316	5,66	50,556	420	5,99	66,513	558
5,34	38,860	0,319	5,67	50,976	0,423	6,00	67,071	0,563

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
6,01	67,634	0,568	6,34	89,242	0,757	6,67	118,05	1,01
6,02	68,202	0,573	6,35	89,999	763	6,68	119,06	1,02
6,03	68,775	0,578	6,36	90,762	770	6,69	120,08	1,03
6,04	69,353	583	6,37	91,532	776	6,70	121,11	1,04
6,05	69,936	588	6,38	92,308	784	6,71	122,14	1,05
6,06	70,524	593	6,39	93,092	790	6,72	123,19	1,05
6,07	71,117	598	6,40	93,882	797	6,73	124,24	1,07
6,08	71,715	603	6,41	94,679	804	6,74	125,31	1,07
6,09	72,318	609	6,42	95,483	811	6,75	126,38	1,08
6,10	72,927	614	6,43	96,294	818	6,76	127,46	1,09
6,11	73,541	619	6,44	97,112	826	6,77	128,55	1,11
6,12	74,160	625	6,45	97,938	833	6,78	129,66	1,11
6,13	74,785	630	6,46	98,771	840	6,79	130,77	1,12
6,14	75,415	636	6,47	99,611	0,85	6,80	131,89	1,13
6,15	76,051	641	6,48	100,46	85	6,81	133,02	1,14
6,16	76,692	647	6,49	101,31	87	6,82	134,16	1,15
6,17	77,339	653	6,50	102,18	87	6,83	135,31	1,17
6,18	77,992	658	6,51	103,05	87	6,84	136,48	1,17
6,19	78,650	664	6,52	103,92	89	6,85	137,65	1,18
6,20	79,314	670	6,53	104,81	89	6,86	138,83	1,19
6,21	79,984	676	6,54	105,70	90	6,87	140,02	1,21
6,22	80,660	681	6,55	106,60	91	6,88	141,23	1,21
6,23	81,341	687	6,56	107,51	92	6,89	142,44	1,22
6,24	82,028	694	6,57	108,43	92	6,90	143,66	1,24
6,25	82,722	700	6,58	109,35	94	6,91	144,90	1,24
6,26	83,422	705	6,59	110,29	94	6,92	146,14	1,26
6,27	84,127	712	6,60	111,23	95	6,93	147,40	1,27
6,28	84,839	718	6,61	112,18	95	6,94	148,67	1,28
6,29	85,557	724	6,62	113,13	97	6,95	149,95	1,29
6,30	86,281	731	6,63	114,10	97	6,96	151,24	1,30
6,31	87,012	737	6,64	115,07	99	6,97	152,54	1,31
6,32	87,749	743	6,65	116,06	0,99	6,98	153,85	1,33
6,33	88,492	750	6,66	117,05	1,00	6,99	155,18	1,34
6,34	89,242	0,757	6,67	118,05	1,01	7,00	156,52	1,34

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
7,01	157,86	1,36	7,34	209,77	1,82	7,67	279,28	2,44
7,02	159,22	1,38	7,35	211,59	1,84	7,68	281,72	2,46
7,03	160,60	1,38	7,36	213,43	1,85	7,69	284,18	2,48
7,04	161,98	1,40	7,37	215,28	1,87	7,70	286,66	2,51
7,05	163,38	1,41	7,38	217,15	1,89	7,71	289,17	2,53
7,06	164,79	1,42	7,39	219,04	1,90	7,72	291,70	2,56
7,07	166,21	1,44	7,40	220,94	1,92	7,73	294,26	2,57
7,08	167,65	1,45	7,41	222,86	1,94	7,74	296,83	2,60
7,09	169,10	1,46	7,42	224,80	1,96	7,75	299,43	2,62
7,10	170,56	1,47	7,43	226,76	1,97	7,76	302,05	2,64
7,11	172,03	1,48	7,44	228,73	1,99	7,77	304,69	2,67
7,12	173,51	1,50	7,45	230,72	2,01	7,78	307,36	2,69
7,13	175,01	1,52	7,46	232,73	2,02	7,79	310,05	2,72
7,14	176,53	1,52	7,47	234,75	2,04	7,80	312,77	2,74
7,15	178,05	1,54	7,48	236,79	2,06	7,81	315,51	2,76
7,16	179,59	1,56	7,49	238,85	2,09	7,82	318,27	2,79
7,17	181,15	1,56	7,50	240,94	2,10	7,83	321,06	2,82
7,18	182,71	1,58	7,51	243,04	2,12	7,84	323,88	2,84
7,19	184,29	1,60	7,52	245,16	2,13	7,85	326,72	2,86
7,20	185,89	1,62	7,53	247,29	2,15	7,86	329,58	2,89
7,21	187,51	1,62	7,54	249,44	2,18	7,87	332,47	2,92
7,22	189,13	1,63	7,55	251,62	2,19	7,88	335,39	2,94
7,23	190,76	1,65	7,56	253,81	2,21	7,89	338,33	2,97
7,24	192,41	1,67	7,57	256,02	2,24	7,90	341,30	3,00
7,25	194,08	1,68	7,58	258,26	2,26	7,91	344,30	3,02
7,26	195,76	1,69	7,59	260,52	2,27	7,92	347,32	3,05
7,27	197,45	1,72	7,60	262,79	2,29	7,93	350,37	3,08
7,28	199,17	1,73	7,61	265,08	2,32	7,94	353,45	3,10
7,29	200,90	1,74	7,62	267,40	2,33	7,95	356,55	3,13
7,30	202,64	1,76	7,63	269,73	2,35	7,96	359,68	3,16
7,31	204,40	1,77	7,64	272,08	2,38	7,97	362,84	3,19
7,32	206,17	1,79	7,65	274,46	2,40	7,98	366,03	3,21
7,33	207,96	1,81	7,66	276,86	2,42	7,99	369,24	3,25
7,34	209,77	1,82	7,67	279,28	2,44	8,00	372,49	3,28

n	$\frac{h^n - 1}{1}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
8,01	375,77	3,30	8,34	502,05	4,44	8,67	671,80	5,97
8,02	379,07	3,33	8,35	506,49	4,48	8,68	677,77	6,02
8,03	382,40	3,37	8,36	510,97	4,52	8,69	683,79	6,08
8,04	385,77	3,40	8,37	515,49	4,56	8,70	689,87	6,14
8,05	389,17	3,42	8,38	520,05	4,60	8,71	696,01	6,19
8,06	392,59	3,45	8,39	524,65	4,64	8,72	702,20	6,24
8,07	396,04	3,49	8,40	529,29	4,69	8,73	708,44	6,30
8,08	399,53	3,52	8,41	533,98	4,73	8,74	714,74	6,36
8,09	403,05	3,55	8,42	538,71	4,77	8,75	721,10	6,42
8,10	406,60	3,58	8,43	543,48	4,81	8,76	727,52	6,48
8,11	410,18	3,61	8,44	548,29	4,85	8,77	734,00	6,53
8,12	413,79	3,65	8,45	553,14	4,90	8,78	740,53	6,60
8,13	417,44	3,68	8,46	558,04	4,95	8,79	747,13	6,65
8,14	421,12	3,71	8,47	562,99	4,99	8,80	753,78	6,71
8,15	424,83	3,74	8,48	567,98	5,03	8,81	760,49	6,77
8,16	428,57	3,78	8,49	573,01	5,08	8,82	767,26	6,83
8,17	432,35	3,81	8,50	578,09	5,12	8,83	774,09	6,90
8,18	436,16	3,85	8,51	583,21	5,17	8,84	780,99	6,96
8,19	440,01	3,88	8,52	588,38	5,22	8,85	787,95	7,02
8,20	443,89	3,92	8,53	593,60	5,27	8,86	794,97	7,09
8,21	447,81	3,95	8,54	598,87	5,31	8,87	802,06	7,15
8,22	451,76	3,99	8,55	604,18	5,36	8,88	809,21	7,21
8,23	455,75	4,02	8,56	609,54	5,41	8,89	816,42	7,28
8,24	459,77	4,06	8,57	614,95	5,46	8,90	823,70	7,35
8,25	463,83	4,10	8,58	620,41	5,50	8,91	831,05	7,41
8,26	467,93	4,13	8,59	625,91	5,56	8,92	838,46	7,48
8,27	472,06	4,17	8,60	631,47	5,61	8,93	845,94	7,55
8,28	476,23	4,21	8,61	637,08	5,66	8,94	853,49	7,62
8,29	480,44	4,24	8,62	642,74	5,70	8,95	861,11	7,68
8,30	484,68	4,29	8,63	648,44	5,76	8,96	868,79	7,75
8,31	488,97	4,32	8,64	654,20	5,81	8,97	876,54	7,82
8,32	493,29	4,36	8,65	660,01	5,87	8,98	884,36	7,90
8,33	497,65	4,40	8,66	665,88	5,92	8,99	892,26	7,97
8,34	502,05	4,44	8,67	671,80	5,97	9,00	900,23	8,04

n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n - 1}{n}$	Differ.
9,01	908,27	8,11	9,34	1218,7	11,0	9,67	1637,4	14,8
9,02	916,38	8,19	9,35	1229,7	11,0	9,68	1652,2	14,9
9,03	924,57	8,26	9,36	1240,7	11,1	9,69	1667,1	15,0
9,04	932,83	8,33	9,37	1251,8	11,3	9,70	1682,1	15,2
9,05	941,16	8,41	9,38	1263,1	11,4	9,71	1697,3	15,3
9,06	949,57	8,49	9,39	1274,5	11,4	9,72	1712,6	15,4
9,07	958,06	8,56	9,40	1285,9	11,5	9,73	1728,0	15,6
9,08	966,62	8,64	9,41	1297,4	11,7	9,74	1743,6	15,7
9,09	975,26	8,73	9,42	1309,1	11,7	9,75	1759,3	15,8
9,10	983,99	8,80	9,43	1320,8	11,9	9,76	1775,1	16,0
9,11	992,79	8,91	9,44	1332,7	11,9	9,77	1791,1	16,2
9,12	1001,7	8,9	9,45	1344,6	12,1	9,78	1807,3	16,3
9,13	1010,6	9,1	9,46	1356,7	12,2	9,79	1823,6	16,4
9,14	1019,7	9,1	9,47	1368,9	12,3	9,80	1840,0	16,6
9,15	1028,8	9,2	9,48	1381,2	12,4	9,81	1856,6	16,8
9,16	1038,0	9,3	9,49	1393,6	12,5	9,82	1873,4	16,9
9,17	1047,3	9,4	9,50	1406,1	12,7	9,83	1890,3	17,1
9,18	1056,7	9,4	9,51	1418,8	12,8	9,84	1907,4	17,2
9,19	1066,1	9,6	9,52	1431,6	12,8	9,85	1924,6	17,4
9,20	1075,7	9,6	9,53	1444,4	13,0	9,86	1942,0	17,5
9,21	1085,3	9,7	9,54	1457,4	13,1	9,87	1959,5	17,7
9,22	1095,0	9,8	9,55	1470,5	13,2	9,88	1977,2	17,8
9,23	1104,8	9,9	9,56	1483,7	13,4	9,89	1995,0	18,0
9,24	1114,7	10,0	9,57	1497,1	13,4	9,90	2013,0	18,2
9,25	1124,7	10,1	9,58	1510,5	13,6	9,91	2031,2	18,4
9,26	1134,8	10,2	9,59	1524,1	13,7	9,92	2049,6	18,5
9,27	1145,0	10,2	9,60	1537,8	13,9	9,93	2068,1	18,7
9,28	1155,2	10,3	9,61	1551,7	14,0	9,94	2086,8	18,8
9,29	1165,5	10,5	9,62	1565,7	14,1	9,95	2105,6	19,0
9,30	1170,0	10,6	9,63	1579,8	14,2	9,96	2124,6	19,2
9,31	1186,6	10,6	9,64	1594,0	14,3	9,97	2143,8	19,4
9,32	1197,2	10,7	9,65	1608,3	14,5	9,98	2163,2	19,6
9,33	1207,9	10,8	9,66	1622,8	14,6	9,99	2182,8	19,8
9,34	1218,7	11,0	9,67	1637,4	14,8	10,00	2202,6	20,0

Verbesserungen.

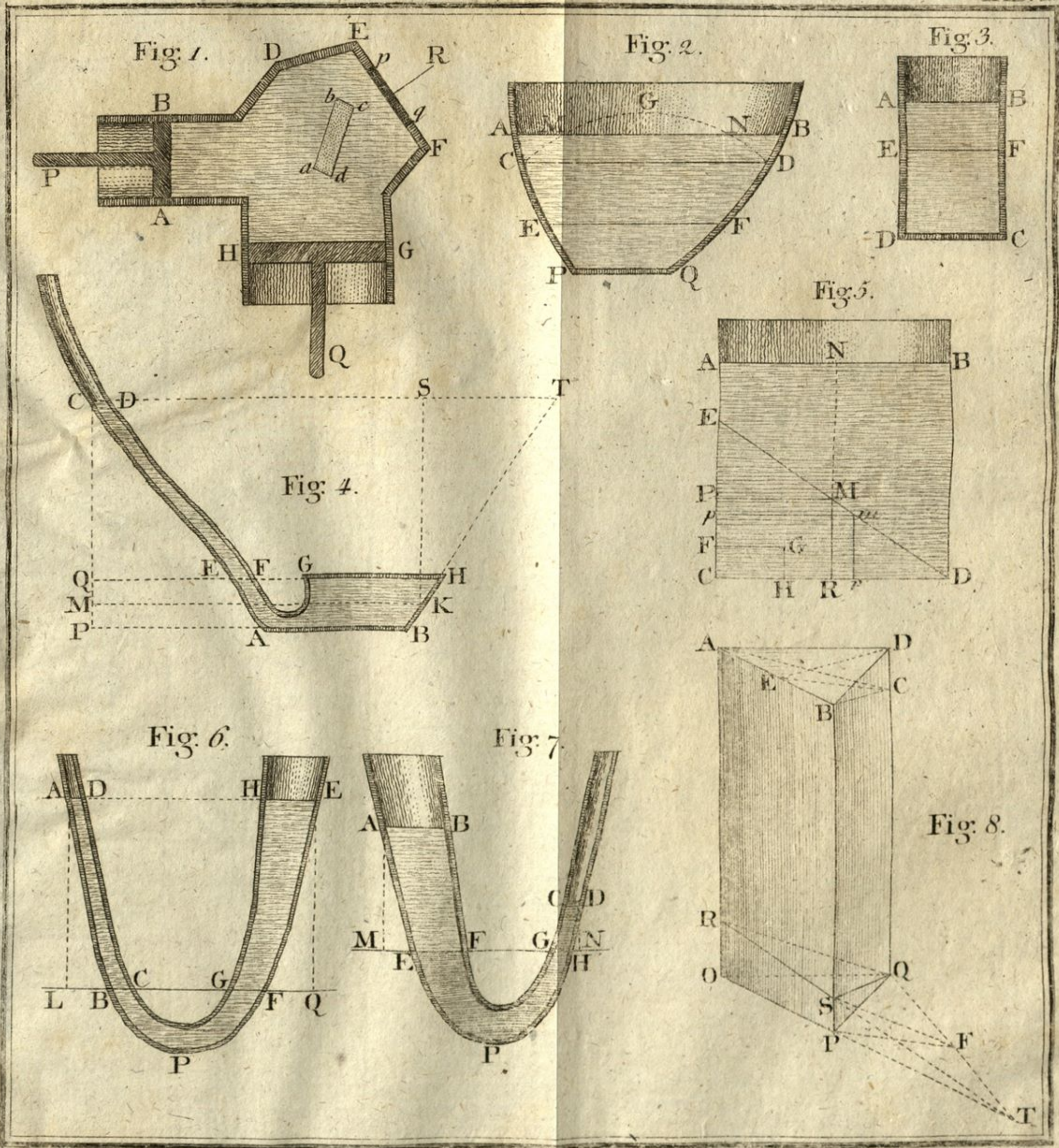
Seite	Zeile	Fehler	Verbesserung.
16	9	Druck MGN	Druck von MGN
98	33	oll	Soll
236	24	die Geschwindigkeit unausgesetzt	die Geschwindigkeit der Kugel unausgesetzt
246	2	oder auch	oder auch in
255	32	1,05	10,5
295	28	der Seele Kanone	der Seele der Kanone.

Nebst den in meiner Anleitung zur Mechanik der festen Körper angekündigten Fehlern der Fortsetzung der Primzahlen in dem II. Bande der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln von Vega sind noch folgende zu verbessern.

Die Zahlen 194107=73.2659; 232163=179.1297; 235303=167.1409; 242939=379.641; 247669=53.4673; 252651=3.84217; 273596=2.136798; 326419=191.1709; 331927=37.8971; 336467=23.14629; 339971=109.3119; 357853=449.797; 358837=281.1277; 359741=163.2207; 371269=139.2671; 397457=239.1663 sind auszustreichen, dafür aber folgende einzuschalten.

232103, 235003, 242639, 247609, 273569, 326119, 330509, 331921, 336437, 339671, 357817, 357883, 371299, 397427. Die angezeigten Fehler sind auch in der neuen Auflage aufgenommen worden.

Lindner.



Lucas Benedicti sc.

Fig. 9.

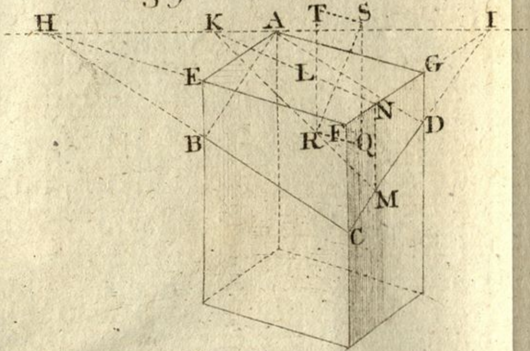


Fig. 10.

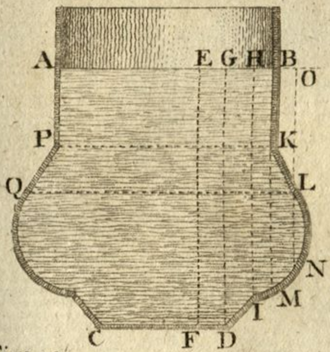


Fig. 11.

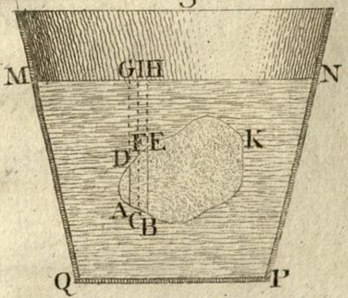


Fig. 12.

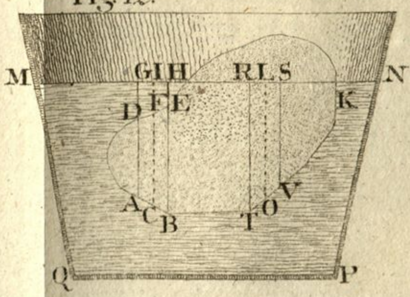


Fig. 13.

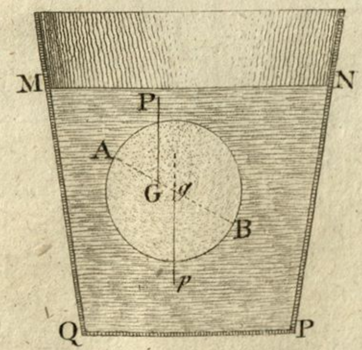
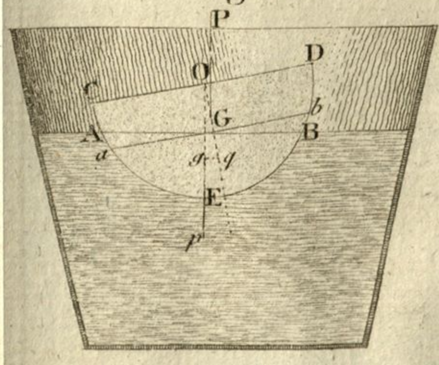


Fig. 14.



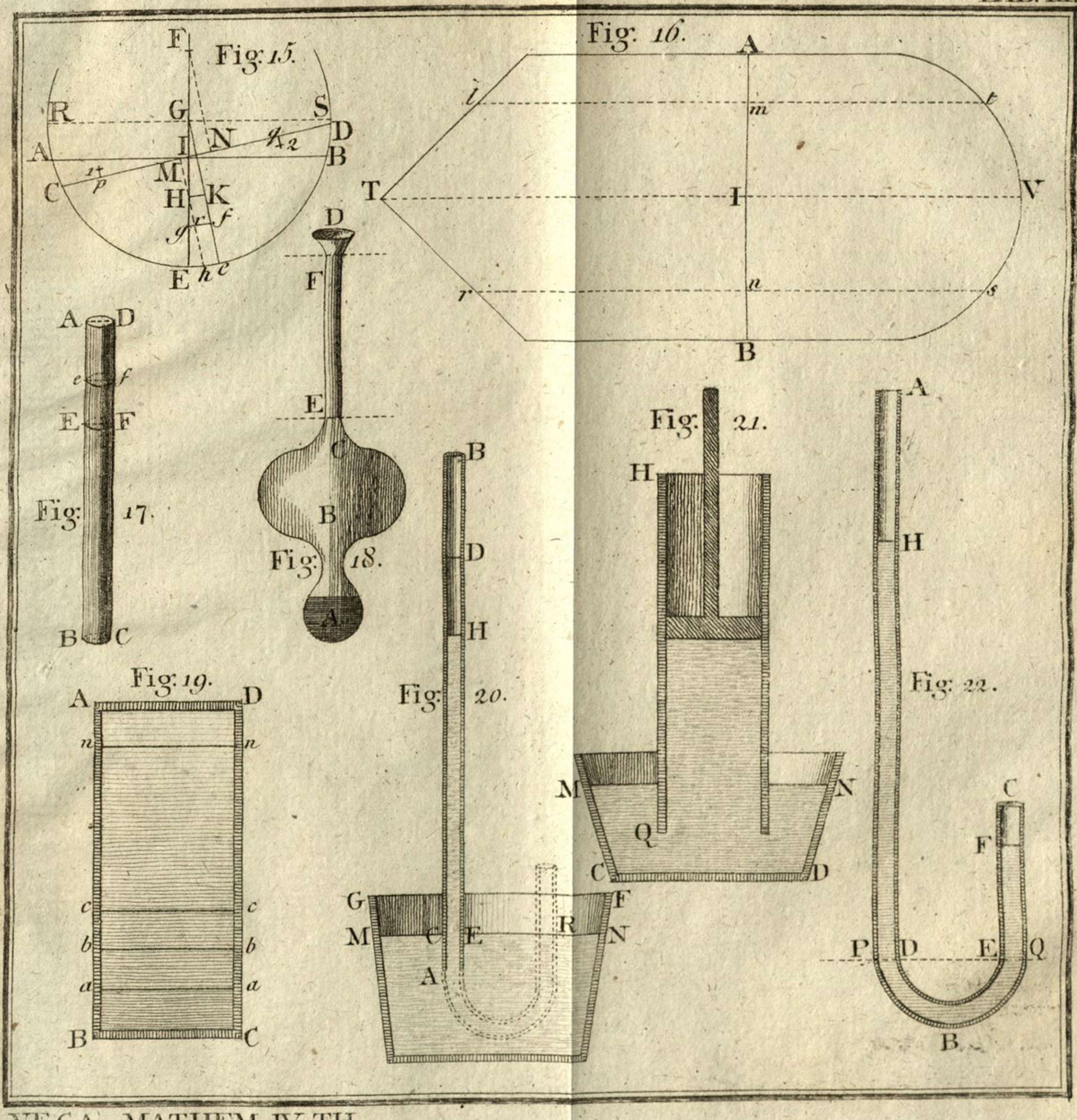


Fig: 15.
Fig: 16.
Fig: 17.
Fig: 18.
Fig: 19.
Fig: 20.
Fig: 21.
Fig: 22.

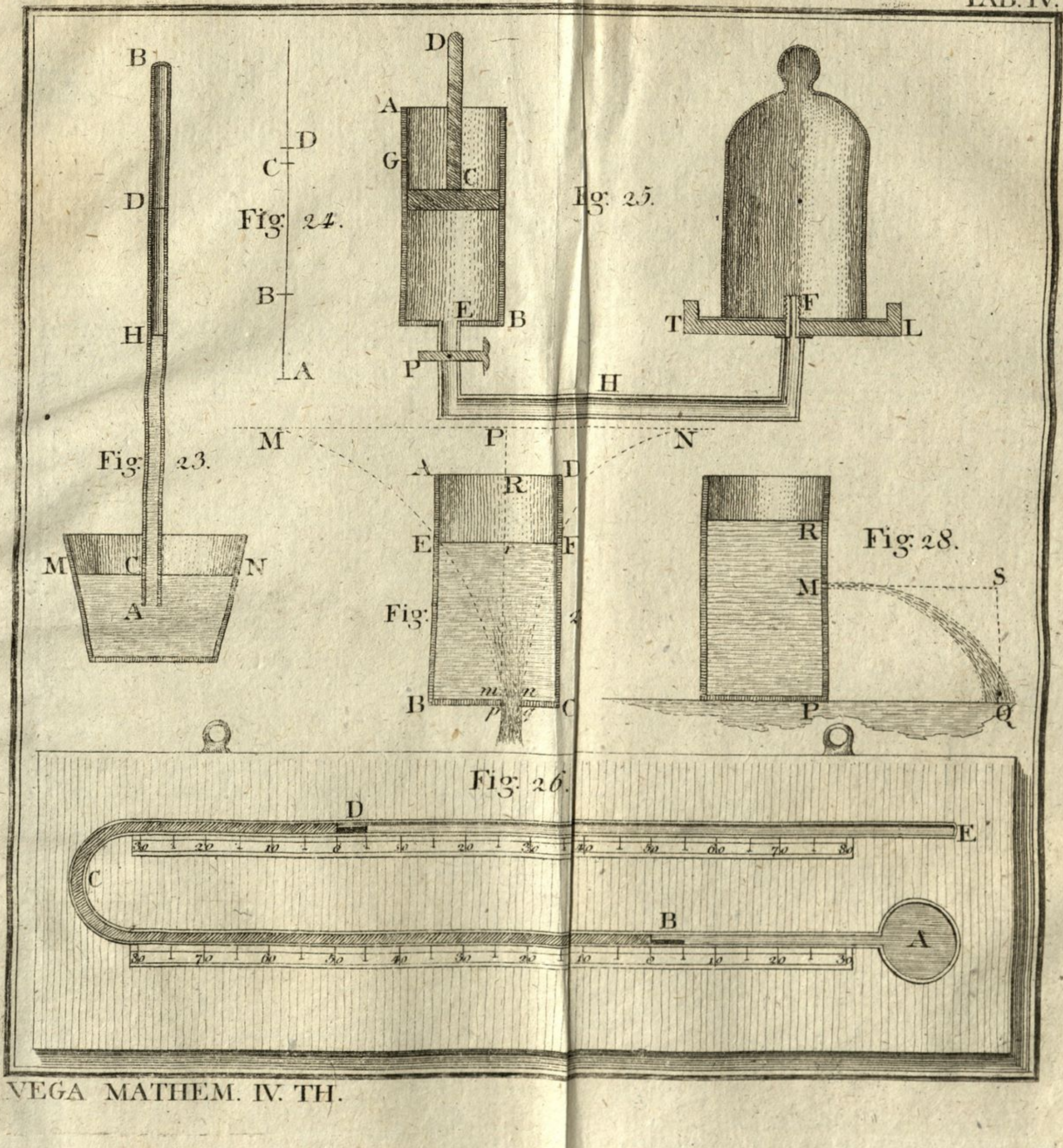


Fig. 23.
B
D
H
M
C
N
A
Fig. 24.
D
C
B
A
Fig. 25.
D
A
G
C
E
B
P
H
T
F
L
M
P
N
A
D
R
E
r
F
Fig:
B
m
n
p
C
Fig. 28.
R
M
S
P
Q
Fig. 26.
D
E
30 20 10 0 10 20 30 40 50 60 70 80
C
B
A
80 70 60 50 40 30 20 10 0 10 20 30

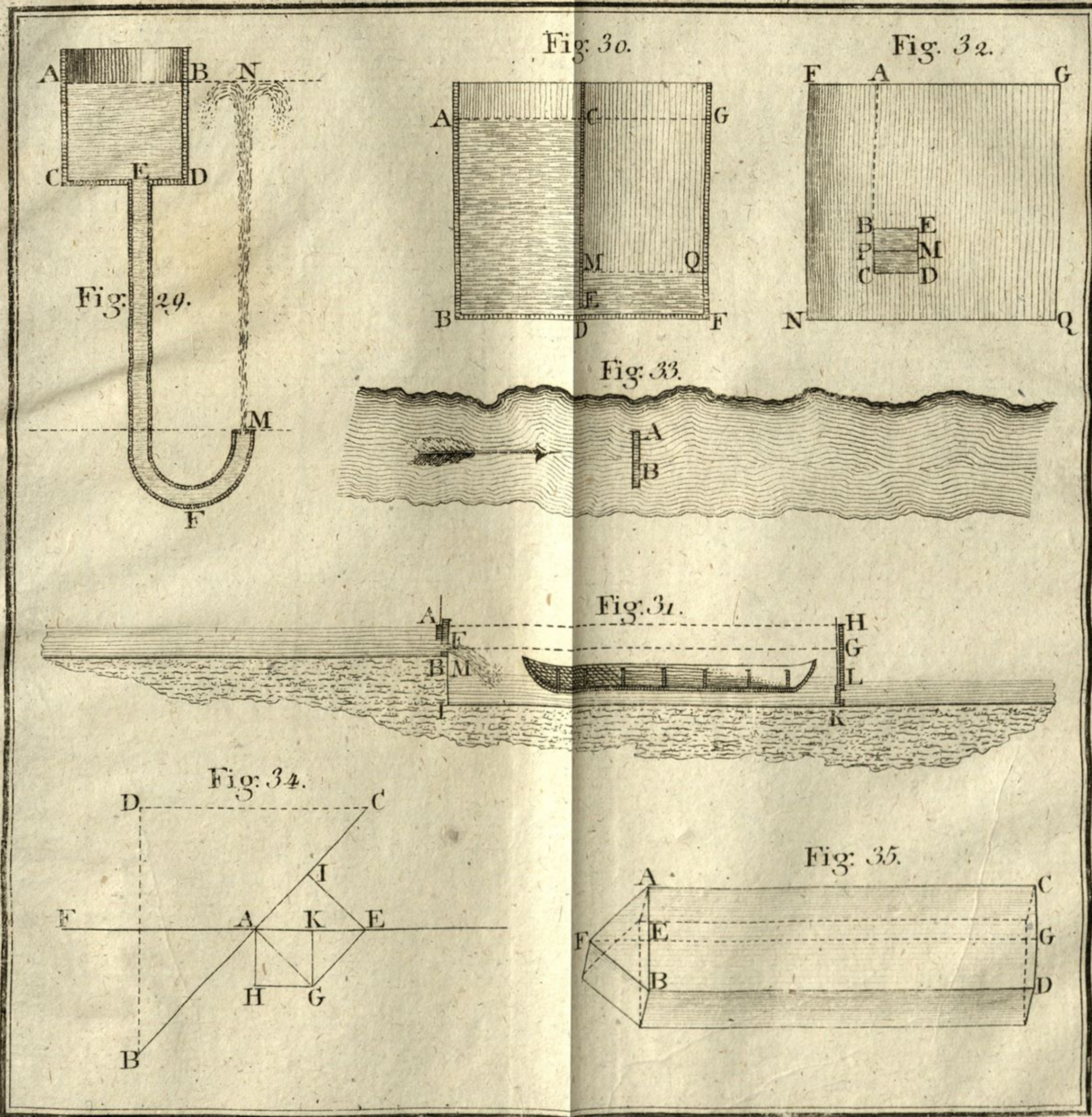


Fig: 29.
Fig: 30.
Fig. 32.
Fig: 33.
Fig: 31.
Fig: 34.
Fig: 35.

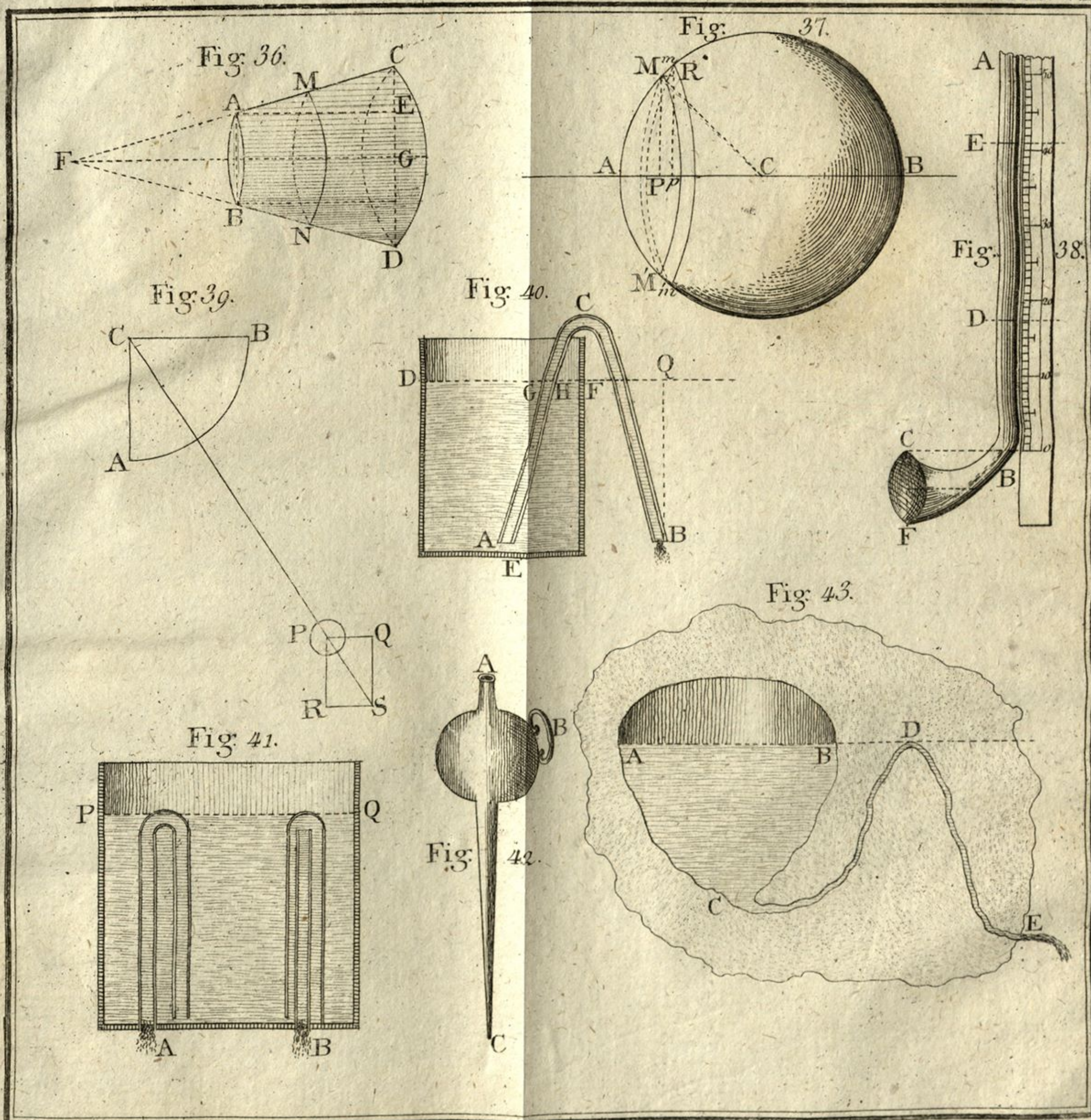


Fig: 36.
Fig: 37.
Fig. 38.
Fig: 39.
Fig: 40.
Fig: 41.
Fig: 42.
Fig: 43.

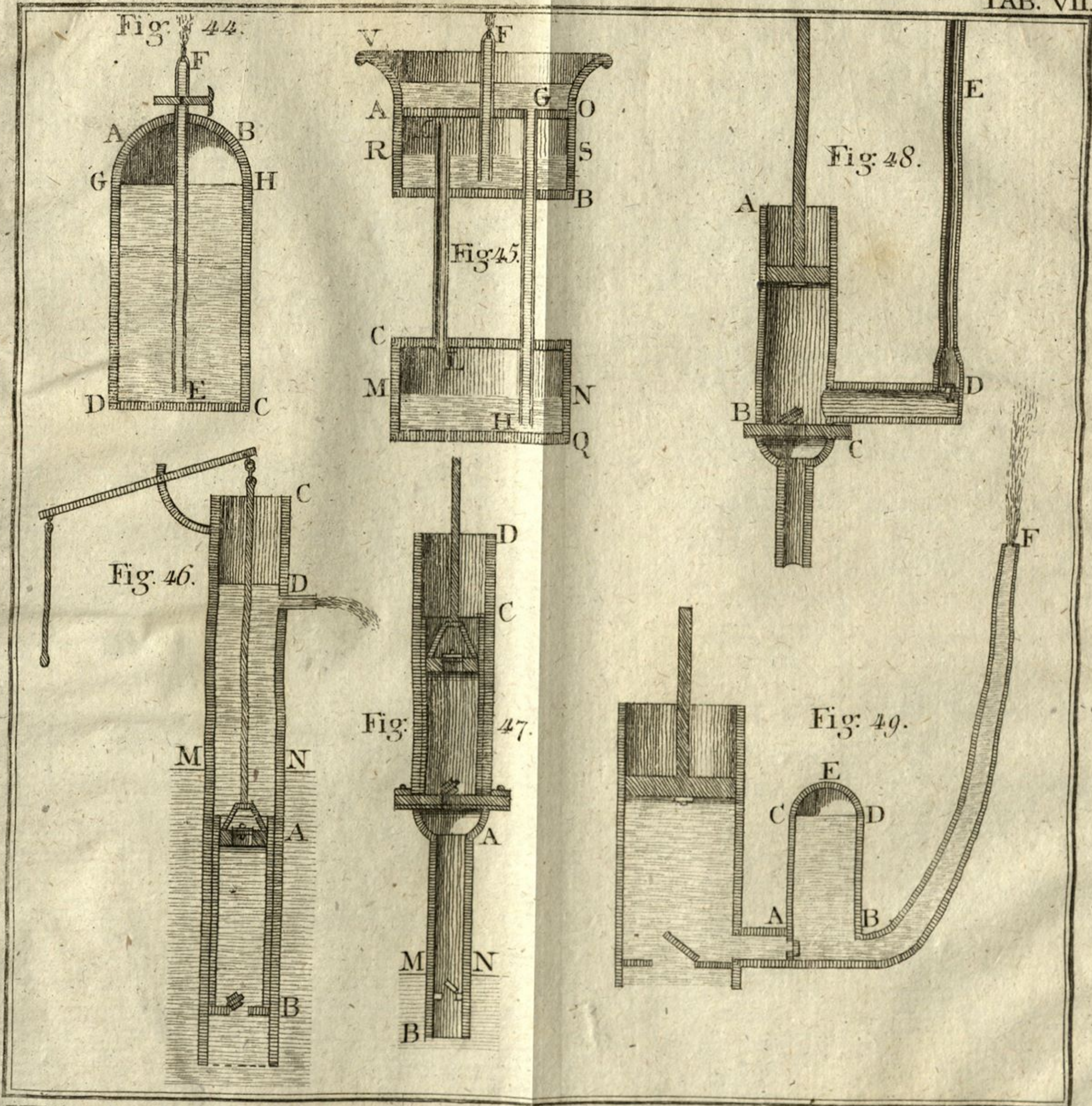
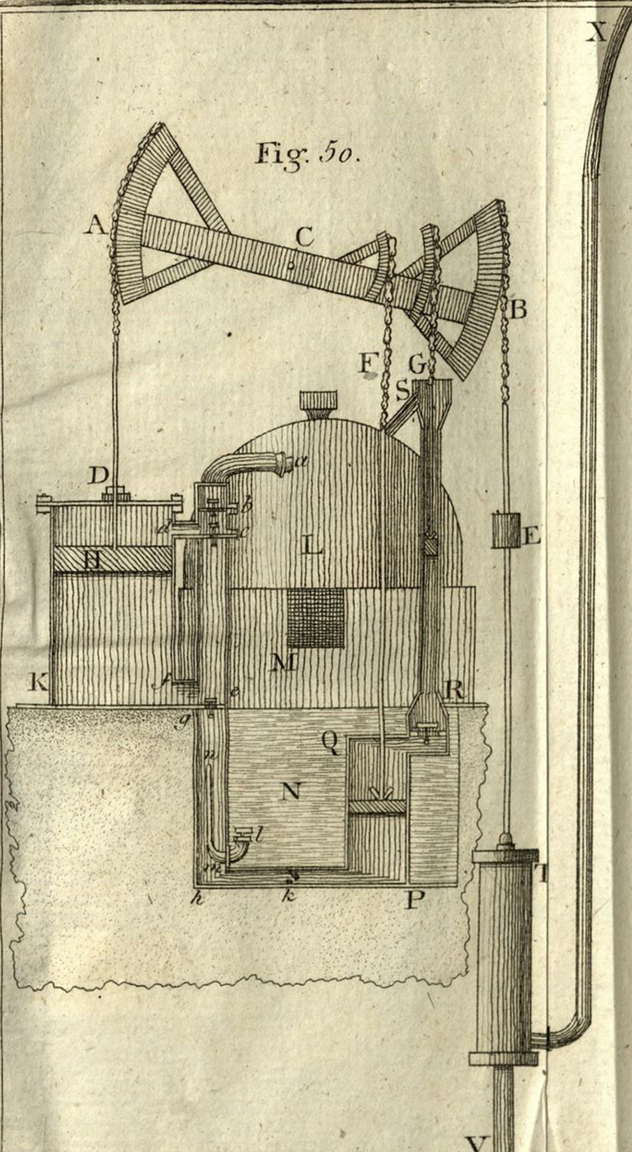


Fig. 44.
F
A B
G H
D E C
V F
A G O
R S
B
Fig. 45.
C
L
M N
H
Q
Fig. 48.
E
A
D
B
C
Fig. 46.
C
D
M N
A
B
D
C
Fig. 47.
A
M N
B
Fig. 49.
E
C D
A B
F

Fig. 50.



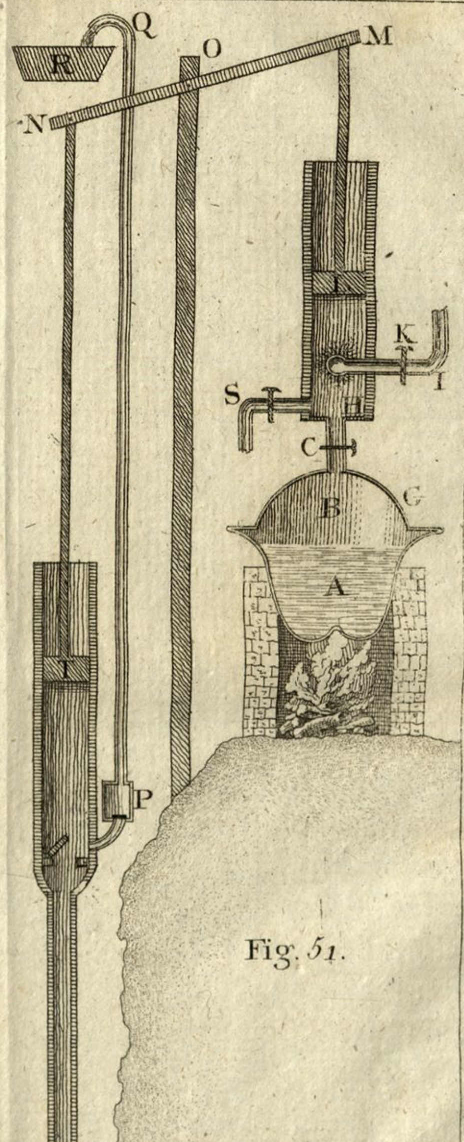


Fig. 51.

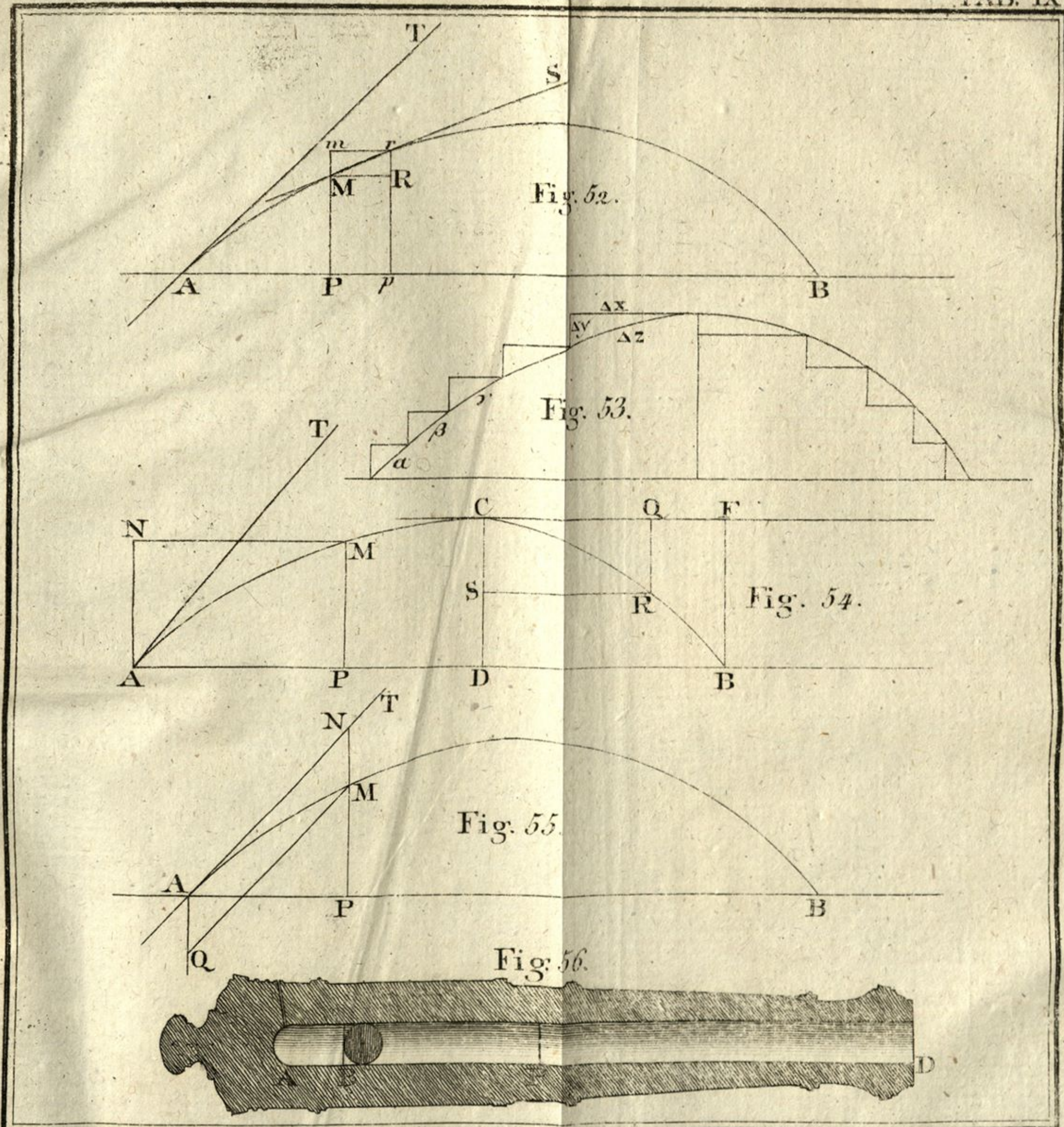


Fig. 52.
T
S
m
r
M
R
A
P
p
B
Fig. 53.
Δx
Δy
Δz
α
β
γ
T
C
Q
F
N
M
S
R
Fig. 54.
A
P
D
B
N
T
M
Fig. 55.
A
P
B
Q
Fig. 56.
A
B
P
D