Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Rešene naloge iz INŽENIRSKE MATEMATIKE II

Študijsko gradivo za študente FGG

Mojca Premuš

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Integral

1. Pod katerim kotom seka graf funkcije $F(x)=\int_1^x \sqrt{2^t t^2+1}\,dt$ abscisno os? Zapiši enačbo tangente na graf funkcije v tej točki!

Rešitev: Najprej poiščimo ničle funkcije $F(x)$. Ker je funkcija $f(t)=\sqrt{2^t t^2+1}$ povsod pozitivna, vrednost funkcije $F(x)$ za $x>1$ predstavlja ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(t)$ oklepa z abscisno osjo na intervalu $[1,x]$. To pomeni, da je $F(x)$ pozitivna za $x>1$. Pri $x<1$ pa vrednost funkcije $F(x)$ predstavljala negativno predznačeno ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(t)$ oklepa z abscisno osjo na intervalu $[x,1]$. Torej bo za $x<1$ vrednost $F(x)$ vedno negativna.

Ker je $F(1)=\int_1^1 \sqrt{2^t t^2+1}\,dt=0$, je to (očitno) edina ničelna vrednost funkcije $F(x)$.

Kot pod katerim graf funkcije seka abscisno os je enak kotu, pod katerim seka abscisno os tangenta na graf funkcije v presečišču. Smerni koeficient tangente je enak tangensu kota, ki ga tangenta oklepa z abscisno osjo. Smerni koeficient tangente na graf funkcije $F(x)$ v točki $x=1$ je $k_T=F'(1)$. Po Newton-Leibnitzevem izreku je

$$F'(x)=f(x)=\sqrt{2^x x^2+1}$$

in zato $k_T=\sqrt{2^1\cdot 1^2+1}=\sqrt{3}$. Kot pod katerim seka graf funkcije $F(x)$ abscisno os je torej $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

O enačbi tangente na graf funkcije $F(x)$ v točki $x=1$ vemo le to, da ima obliko $y=\sqrt{3}x+n$. Tangenta se grafa funkcije dotika v točki $T(1,0)$, zato morajo koordinate točke T ustrezati enačbi tangente. Tako dobimo $0=\sqrt{3}\cdot 1+n$ oziroma $n=-\sqrt{3}$. Enačba iskane tangente je $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ ali $y=\sqrt{3}(x-1)$.

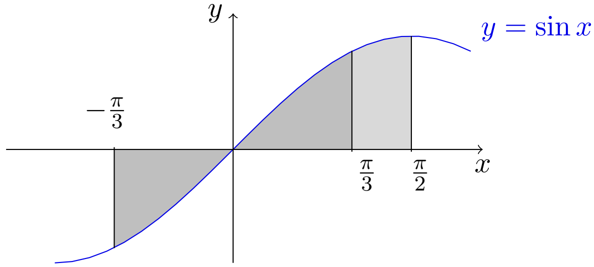
2. Izračunaj $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ in izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata graf funkcije $f(x)=\sin x$ in os x na intervalu $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

Rešitev: Ker je primitivna funkcija funkcije $\sin x$ funkcija $-\cos x$, je določeni integral enak:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\big[-\cos x\big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ker je funkcija $\sin x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{3},0\right)$ negativna, zgoraj dobljena vrednost ni enaka ploščini lika, ki ga graf funkcije $\sin x$ oklepa z osjo x na intervalu $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

Na kazalo



Iz lihosti funkcije $\sin x$ lahko sklepamo, da sta lika, ki ju oklepata graf funkcije $\sin x$ in abscisna os na intervalih $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ in $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ skladna in imata zato enako ploščino. To pa pomeni, da je vrednost integrala $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin x\, dx$ nasprotna vrednosti integrala $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx$. Zapišimo zgornji integral malo drugače

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \cancel{\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin x\, dx} + \cancel{\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx} + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$$

Ker je funkcija $\sin x$ na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ pozitivna, je torej ploščina lika, ki ga oklepata graf funkcije $\sin x$ in abscisna os na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ enaka določenemu integralu $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ in je zato enaka $\frac{1}{2}$.

Iskana ploščina lika, ki ga oklepata graf funkcije $\sin x$ in abscisna os na intervalu $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ se izračuna

$$\mathrm{pl}_{[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]} = 2\mathrm{pl}_{[0, \frac{\pi}{3}]} + \mathrm{pl}_{[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]}.$$

Izrazimo ploščino iskanega lika s pomočjo določenih integralov in jo izračunajmo.

$$\mathrm{pl}_{[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]} = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 2\big[-\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos 0\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Na kazalo

3. Integriraj.

(a) $\int\limits_0^{\pi}(2x^2+\cos x+x+1)\,dx$

(b) $\int\limits_1^{2} x(5\sqrt{x}+x^{-3})\,dx$

(c) $\int\limits_0^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

(d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \operatorname{tg}^2 x\,dx$

(e) $\int\limits_0^{1} 3^x e^x\,dx$

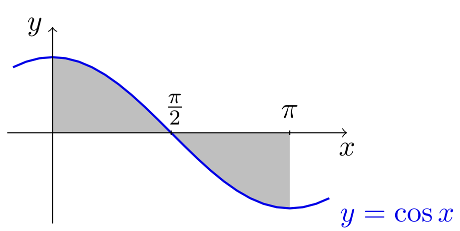
(f) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

Rešitev:

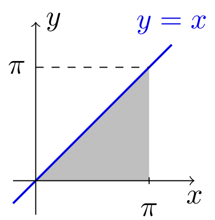
(a) Prvega primera se lotimo počasi in zapišimo vse korake.
Najprej bomo uporabili pravilo vsote (integral vsote je vsota integralov), potem bomo pisali skalarje pred integral, šele nato bomo poiskali primitivne funkcije in uporabili posledico Newton-Leibnitzevega izreka, da bomo dokončno izračunali vrednost določenega integrala.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi}(2x^2+\cos x+x+1)\,dx &= \int\limits_0^{\pi} 2x^2\,dx+\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx+\int\limits_0^{\pi} x\,dx+\int\limits_0^{\pi} 1\,dx= \\
&= 2\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx+\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx+\int\limits_0^{\pi} x\,dx+\int\limits_0^{\pi} dx= \\
&= 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}+\sin x\Big|_0^{\pi}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}+x\Big|_0^{\pi}= \\
&= 2\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+(\sin\pi-\sin 0)+\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+(\pi-0)= \\
&= \frac{2\pi^3}{3}+\frac{\pi^2}{2}+\pi
\end{aligned}$$

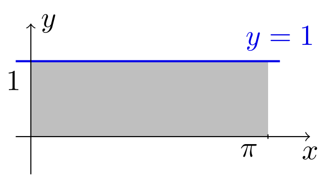
Zadnjih treh integralov se lahko lotimo tudi grafično.



Če skiciramo graf funkcije $y=\cos x$ na intervalu $[0,\pi]$, vidimo, da sta lika, ki ga oklepata graf funkcije $y=\cos x$ in abscisna os na intervalih $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ter $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ploščinsko enaka, zato je vrednost integrala $\int\limits_0^{\pi} \cos x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$ enaka 0.



Graf funkcije $y = x$ je simetrala lihih kvadrantov. Ker je na intervalu $[0, \pi]$ ta funkcija pozitivna, je vrednost integrala $\int\limits_0^{\pi} x\, dx$ enaka ploščini lika, ki ga oklepata graf funkcije $y = x$ in abscisna os na intervalu $[0, \pi]$. Ta lik je pravokotni trikotnik oziroma polovica kvadrata z osnovnico dolžine π. Njegova ploščina je polovica ploščine kvadrata, kar pa znaša $\frac{\pi^2}{2}$.



Graf funkcije $y = 1$ je premica, vzporedna abscisni osi, ki seka y os pri 1. Ker je na intervalu $[0, \pi]$ ta funkcija pozitivna, je vrednost integrala $\int\limits_0^{\pi} 1\, dx$ enaka ploščini lika, ki ga oklepata graf funkcije $y = 1$ in abscisna os na intervalu $[0, \pi]$. Ta lik je pravokotnik z osnovnico dolžine π in višino 1. Njegova ploščina je enaka dolžini osnovnice, torej π.

(b) Ker pri integriranju ne poznamo pravila produkta kot pri odvajanju, se poskusimo produkta znebiti, če se to le da. Poudarimo še dejstvo, da funkcija x^{-3} sicer ni definirana povsod, ampak na intervalu $[1, 2]$ pa je, zato v tem primeru (še) ne govorimo o izlimitiranem integralu.

$$\int_1^2 x(5\sqrt{x} + x^{-3})\, dx = \int_1^2 (5x\sqrt{x} + x^{-2})\, dx = \int_1^2 (5x^{\frac{3}{2}} + x^{-2})\, dx = \cancel{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{\cancel{5}}{2}}\Big|_1^2 + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 =$$

$$= 2\left(2^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) - (\frac{1}{2} - 1) = 2\left(\sqrt{2^5} - 1\right) + \frac{1}{2} = 2(4\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2} = 8\sqrt{2} - \frac{3}{2}$$

(c) Tudi kvocientnega pravila za integriranje ne poznamo, zato bomo ulomke preoblikovali. Pri racionalni funkciji lahko polinome preprosto zdelimo. Tokrat bomo deljenje polinomov izpeljali elegantneje: ulomek znotraj integrala bomo zapisali v vsoto dveh ulomkov po pravilu $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

$$\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^4+3x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = 1 + \frac{\pi}{4}$$

(d) Za razliko od odvajanja, pri integraciji nimamo niti pravila kompozituma, zato moramo funkcijo znotraj integrala preoblikovati do funkcije, katere integral že poznamo. Pri tem bomo uporabili definicijo funkcije tangens $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Opozorimo še na dejstvo, da funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ sicer ni povsod definirana, je pa definirana na intervalu $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \operatorname{tg} x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 - x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 0 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(e) Tudi naslednjo funkcijo preoblikujemo do funkcije, katere primitivno funkcijo lahko najdemo v tabeli nedoločenih integralov.

$$\int_0^1 3^x e^x\, dx = \int_0^1 (3e)^x\, dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)}\Big|_0^1 = \frac{3e-1}{1+\ln 3}$$

(f) Uporabimo zvezi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ter definicijo absolutne vrednosti $\sqrt{a^2} = |a|$, da preoblikujemo funkcijo znotraj integrala.

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}\, dx =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx = \int_0^\pi |\sin x + \cos x|\, dx$$

Na kazalo

Da bi lahko izračunali določeni integral se moramo znebiti absolutne vrednosti. Funkcija $\sin x + \cos x$ je zvezna funkcija z ničlo v $x = \frac{3\pi}{4}$ (saj je $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{3\pi}{4}$). Pozitivna je na intervalu $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$, zato tukaj velja $|\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x$. Negativna pa na $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ in zato je $|\sin x + \cos x| = -(\sin x + \cos x)$. Razdelimo naš integral na dva integrala, opustimo absolutni vrednosti ter vrednost integrala poračunamo.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|\ dx &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x + \cos x|\ dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} |\sin x + \cos x|\ dx = \\
&= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\ dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\ dx \\
&= \Big(-\cos x + \sin x\Big)_0^{\frac{3\pi}{4}} - \Big(-\cos x + \sin x\Big)_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \\
&= -\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \cos 0 - \sin 0 \\
&\quad - \left(-\cos\pi + \sin\pi + \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

4. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj določeni integral.

(a) $\int\limits_0^1 e^{3x} dx$

(b) $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a-x} dx$

(c) $\int\limits_{-1}^{2} e^{x^2-2x-2}(x-1)\,dx$

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\,dx$

(e) $\int\limits_1^{e} \frac{(1+\ln x)^{10}}{x} dx$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\ x\,dx$

(g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^{\ 2} x}{\cos^2 x} dx$

(h) $\int\limits_4^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

(i)* $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ (Nasvet: $t = \pi - x$.)

Rešitev: Ker funkcije iz integralov v dani nalogi niso nujno tabelarne (njihove primitivne funkcije ne najdemo v tabeli nedoločenih integralov), jih je potrebno preoblikovati. To bomo naredili s pomočjo **uvedbe nove spremenljivke**. Pri tem uporabimo naslednji izrek.

Izrek: Naj bo $f(x)$ zvezna na $[a,b]$, funkcija $x(t)$ zvezno odvedljiva na $[\alpha,\beta]$ in $x([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Potem velja

$$\int\limits_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)\,dt.$$

(a) Za prvi primer bomo za novo spremenljivko izbrali kar izraz v eksponentu, $t(x) = 3x$. Tako smo izrazili novo spremenljivko t kot funkcijo x. Funkcija $x(t)$, ki nastopa v izreku, je njena inverzna funkcija in ima predpis $x(t) = \frac{t}{3}$ (tega funkcijskega predpisa ni potrebno eksplicitno zapisati). Funkcija $x(t)$ je zvezna in zvezno odvedljiva (saj je polinom v t-ju). Novo spodnjo in novo zgornjo mejo bomo dobili iz zvez $\alpha = t(0) = 3{\cdot}0 = 0$ in $\beta = t(1) = 3{\cdot}1 = 3$. Ker velja $dx = x'(t)dt$, imamo za naš primer $dx = \frac{1}{3}\,dt$. V integral vpeljimo novo spremenljivko in integral izračunajmo.

$$\int\limits_0^1 e^{3x} dx = \int\limits_0^3 e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 e^t\,dt = \frac{1}{3} e^t\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\left(e^3 - e^0\right) = \frac{e^3-1}{3}$$

OPOMBA: Za primer, ko novo spremenljivko t uvedemo z zvezo $f(x) = g(t)$, velja $f'(x)\,dx = g'(t)\,dt$ (kjer vsako funkcijo odvajamo po njej pripadajoči spremenljivki).

(b) $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a-x} dx = *$

Nova spremenljivka: $t = a - x \quad ; \quad \alpha = a$
$dt = -dx \quad ; \quad \beta = \frac{a}{2}$
$dx = -dt$

$$* = \int\limits_a^{\frac{a}{2}} \frac{1}{t}(-dt) = -\int\limits_a^{\frac{a}{2}} \frac{1}{t}\,dt = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1}{t}\,dt = \Big(\ln|x|\Big)\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} = \ln|a| - \ln\left|\frac{a}{2}\right| = \ln\left|\frac{\cancel{a}}{\frac{\cancel{a}}{2}}\right| = \ln 2$$

(c) $\int\limits_{-1}^{2} e^{x^2-2x-2}(x-1)\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad \alpha = 1$
$dt = (2x-2)\,dx = 2(x-1)\,dx \quad ; \quad \beta = -2$
$(x-1)\,dx = \frac{dt}{2}$

$* = \int\limits_1^{-2} e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t\Big|_1^{-2} = \frac{1}{2}\left(e^{-2} - e\right) = \frac{1-e^3}{2e^2}$

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \cos x \quad ; \quad \alpha = 1$
$dt = -\sin x\,dx \quad ; \quad \beta = 0$
$\sin x\,dx = -dt$

$* = -\int\limits_1^0 t^3\,dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^0 = \frac{1}{4}$

(e) $\int\limits_1^e \frac{(1+\ln x)^{10}}{x} dx = *$

Nova spremenljivka: $t = 1 + \ln x \quad ; \quad \alpha = 1$
$dt = \frac{1}{x}dx \quad ; \quad \beta = 2$

$* = \int\limits_1^2 t^{10} dt = \frac{t^{11}}{11}\Big|_1^2 = \frac{2^{11}-1}{11}$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\ x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \cos x \quad ; \quad \alpha = 1$
$dt = -\sin x\,dx \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2}$

$* = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -\ln t\Big|_1^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$

Na kazalo

(g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \operatorname{tg} x \quad ; \quad \alpha = 0$

$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \beta = 1$

$* = \int\limits_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

(h) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = *$

Nova spremenljivka: $t = \sqrt{x} - 1 \quad ; \quad \alpha = 1$

$(t+1)^2 = x \quad ; \quad \beta = 2$

$dx = 2(t+1)\, dt$

$* = \int\limits_1^2 \frac{2(t+1)}{t} dt = 2\int\limits_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2\left(t + \ln t\right)_1^2 = 2(2 + \ln 2 - 1 - \ln 1) = 2 + \ln 4$

(i)* $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \pi - x \quad ; \quad \alpha = \pi$

$x = \pi - t \quad ; \quad \beta = 0$

$dx = -dt$

$$* = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)}(-dt) = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + (-\cos t)^2} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi \sin t - t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

Enačimo začetni in končni izraz, dobljeno enačbo malo preuredimo in izrazimo iskano vrednost.

$$I = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

$$2I = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

Dobljen integral je v primerjavi s prvotnim dosti bolj preprost. Uvedemo novo spremenljivko ($u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$) in izračunamo.

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{1}{1+u^2}(-du) = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du = \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\int_{0}^{1}\frac{1}{1+u^2}du = \pi \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 =$$

$$= \pi(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \pi\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

5. Vrednosti naslednjih integralov izračunaj s pomočjo integracije po delih.

(a) $\int\limits_0^2 x4^x\, dx$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$

(c) $\int\limits_1^e x \ln x\, dx$

(d) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$

Rešitev: Formulo za **integracijo po delih** (**integratio per partes**) si zlahka izpeljemo sami: vzemimo najprej pravilo za odvod produkta dveh funkcij

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\,.$$

Prepišimo člen $u'(x)\cdot v(x)$ na levo stran enakosti (strani enakosti potem zamenjamo) in integrirajmo levo in desno stran enakosti po spremenljivki x v mejah od a do b.

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\, dx = \int_a^b (u(x)\cdot v(x))'\, dx - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\, dx$$

Zapišimo $v'(x)\, dx = dv$, $u'(x)\, dx = du$ ter upoštevajmo, da je primitivna funkcija funkcije $(u(x)\cdot v(x))'$ ravno $u(x)\cdot v(x)$. Tako dobimo pravilo za integracijo per partes:

$$\int_a^b u\, dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\, du\,.$$

(a) $\int\limits_0^2 x4^x\, dx = *$

V prvem integralu nastopa produkt dveh funkcij. Navodilo naloge namiguje na integracijo po delih. Ta metoda od nas zahteva, da določimo u in dv, u bomo odvajali, dv pa integrirali (da izračunamo $du = u'\, dx$ in $v = \int dv = \int v\, dx$). Tako x kot 4^x znamo odvajati in integrirati (odvajanje pravzaprav nikoli ni problem). Pomislimo malo, kaj se dogaja s posamezno funkcijo, ko jo odvajamo in kaj, ko jo integriramo. Danemu polinomu x z integracijo stopnja narašča (dobimo polinom stopnje 2), z odvajanjem pa pada (dobimo polinom stopnje 0, torej le skalar). Eksponentna funkcija 4^x ostane v bistvu nespremenjena, z dodanim skalarjem $\ln 4$ (pri odvajanju je $(4^x)' = \ln 4 \cdot 4^x$, pri integriranju pa $\int 4^x\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$). Zdi se, da smo našli ugodnejšo možnost izbire u in dv.

$u = x \quad ; \quad dv = 4^x\,dx$

$du = dx \quad ; \quad v = \int 4^x\,dx = \frac{4^x}{\ln 4}$

$* = x\frac{4^x}{\ln 4}\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{4^x}{\ln 4}dx = 2\frac{4^2}{\ln 2^2} - \frac{1}{\ln 2^2}\cdot\frac{4^x}{\ln 4}\Big|_0^2 = \cancel{2}\frac{16}{\cancel{2}\ln 2} - \frac{1}{4\ln^2 2}(4^2 - 4^0) = \frac{16}{\ln 2} - \frac{15}{4\ln^2 2}$

Vsak študent naj se sam prepriča, da je ta možnost zares bolj ugodna. Torej, za integracijo po delih vzemite $u = 4^x$ in $dv = x\,dx$ in izvedite en korak integracije po delih.

(b) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = *$

V tem primeru je na prvi pogled pravzaprav vseeno, kaj izberemo za u in kaj za dv (po podobnem premisleku kot v prejšnjem primeru). V spodnjih rešitvah je izbrana ena možnost, vsak študent pa naj poskusi slediti tudi drugi možnosti.

Po delih: $u = e^x \quad ; \quad dv = \sin x\,dx$

$du = e^x dx \quad ; \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

$* = -e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\cos x)\,dx = -e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} + e^0\cos 0 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = **$

Po delih: $u = e^x \quad ; \quad dv = \cos x\,dx$

$du = e^x dx \quad ; \quad v = \int \cos x\,dx = \sin x$

$** = 1 + e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 - I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$

Enačenje skrajno leve in skrajno desne strani ter preoblikovanje dobljene enačbe nam dajo rešitev.

$$
\begin{aligned}
I &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \\
2I &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \\
I &= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}
\end{aligned}
$$

(c) $\int\limits_1^e x \ln x\,dx = *$

V tem primeru bi na prvi pogled pomislili, da je pametno izbrati za u polinom, saj bo le-temu z odvajanjem stopnja padala. Vendar se izkaže, da v tem primeru to ne bo dobra ideja. Funkcije $\ln x$ namreč (še) ne znamo integrirati, zagotovo pa je ne najdemo v naši tabeli nedoločenih integralov. Vedno se moramo torej prepričati, ali sploh znamo integrirati oba dela funkcije. V nasprotnem primeru je odločitev malce olajšana: za u izberimo tisto funkcijo, ki je ne znamo integrirati, ali pa je njen integral zahteven.

Po delih: $u = \ln x \quad ; \quad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad ; \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$* = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\cancel{x^2}}{2}\frac{1}{\cancel{x}}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

(d) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = *$

V tem primeru imamo opravka z relativno preprostim integralom. V njem nastopa ena sama funkcija, ki pa je ne najdemo v naši tabeli nedoločenih integralov. Sledimo nasvetu iz prejšnje točke: ker funkcije arctg x ne znamo integrirati, jo pač odvajamo.

Po delih: $u = \operatorname{arctg} x \quad ; \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad ; \quad v = x$

$$* = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = **$$

Nova spremenljivka: $t = 1 + x^2 \quad ; \quad \alpha = 1$

$dt = 2x\,dx \quad ; \quad \beta = 2$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$

$$** = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

6. Izračunaj s pomočjo uvedbe nove spremenljivke.

(a) $\int (ax+b)^n\,dx$, $n \neq -1$

(b) $\int (6x^2+4)\cos(x^3+2x+1)\,dx$

(c) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

(d) $\int (x^2-1)^3 x^3\,dx$

Rešitev: Nedoločeni integral funkcije $F(x)$ je družina funkcij $f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, ki jih moramo odvajati, da dobimo funkcijo $F(x)$. Konstanto C imenujemo **integracijska konstanta**. Velja torej $(f(x) + C)' = F(x)$.

Ko v nedoločeni integral uvajamo novo spremenljivko, poteka vse skupaj podobno kot pri uvedbi nove spremenljivke v določeni integral s to razliko, da pri nedoločenem integralu nimamo mej. Druga razlika med tema dvema uvedbama pa je, da moramo po integriranju pri uvedbi nove spremenljivke v nedoločeni integral, v rezultat povrniti izvirno spremenljivko. Poglejmo ta postopek na primerih.

(a) $\int (ax+b)^n\,dx = *$

Tega primera bi se seveda lahko lotili tako, da bi dvočlenik $(ax + b)$ potencirali z n (s pomočjo binomskega izreka) in potem integrirali. Naravno pa se nam tukaj ponuja nova spremenljivka, kjer vzamemo za t ravno naš (linearni) dvočlenik.

Nova spremenljivka: $t = ax + b$

$dt = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$

$* = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$

Naj opozorimo, da $\frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ ni korekten odgovor na vprašanje nedoločenega integrala. Nedoločeni integral mora biti funkcija iste spremenljivke, kot nastopa v vlogi neodvisne spremenljivke funkcije znotraj znaka $\int$ v postavljenem vprašanju. Torej: po uvedbi nove spremenljivke v nedoločeni integral in izračunu novega (poenostavljenega) integrala, vedno nadomestimo novo spremenljivko s "staro".

(b) $\int (6x^2+4)\cos(x^3+2x+1)\,dx = 2\int (3x^2+2)\cos(x^3+2x+1)\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = x^3+2x+1$
$dt = (3x^2+2)\,dx$

$* = 2\int \cos t\,dt = 2\sin t + C = 2\sin(x^3+2x+1) + C$

(c) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = *$

Nova spremenljivka: $t = x^2$
$dt = 2x\,dx$

$* = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg } t + C = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2 + C$

(d) $\int (x^2-1)^3 x^3\,dx = \int (x^2-1)^3 x^2 x\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = x^2-1$
$x^2 = t+1$
$dt = 2x\,dx$

$* = \frac{1}{2}\int t^3(t+1)\,dt = \frac{1}{2}\int (t^4+t^3)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{(x^2-1)^5}{10} + \frac{(x^2-1)^4}{8} + C$

7. Izračunaj s pomočjo integracije po delih ("per partes").

(a) $\int (2x+5)e^{-x}\,dx$

(b) $\int x\,\text{arctg } x\,dx$

(c) $\int (x^2-1)\sin x\,dx$

(d) $\int \arcsin x\,dx$

Rešitev: Tudi uporaba metode integracije po delih v nedoločeni integral je podobna metodi v določenem integralu, brez mej, seveda.

(a) Za ta primer uporabimo integracijo po delih. Pri izračunu funkcije v bomo vpeljali novo spremenljivko $t = -x$, $dx = -dt$.

$\int (2x+5)e^{-x}\,dx = *$

Po delih: $u = 2x+5$; $dv = e^{-x}\,dx$
$du = 2dx$; $v = \int e^{-x}\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{-x}$

$* = -(2x+5)e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} - 5e^{-x} - 2e^{-x} + C = -2xe^{-x} - 7e^{-x} + C$

(b) $\int x\,\text{arctg } x\,dx = *$

Po delih: $u = \text{arctg } x$; $dv = x\,dx$
$du = \frac{1}{1+x^2}dx$; $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
* &= \frac{x^2}{2}\text{arctg } x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg } x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{x^2}{2}\text{arctg } x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg } x - \frac{1}{2}\left(x - \text{arctg } x\right) + C = \\
&= \frac{x^2}{2}\text{arctg } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg } x + C = \frac{x^2+1}{2}\text{arctg } x - \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

(c) $\int (x^2-1)\sin x\, dx = *$

Po delih: $u = x^2-1 \quad ; \quad dv = \sin x\, dx$

$du = 2xdx \quad ; \quad v = \int \sin x\, dx = -\cos x$

$* = (x^2-1)(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x\, dx = (1-x^2)\cos x + 2\int x\cos x\, dx = **$

Po delih: $u = x \quad ; \quad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \quad ; \quad v = \int \cos x\, dx = \sin x$

$$\begin{aligned}
** &= (1-x^2)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\, dx\right) = \\
&= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C = (3-x^2)\cos x + 2x\sin x + C
\end{aligned}$$

(d) $\int \arcsin x\, dx = *$

Po delih: $u = \arcsin x \quad ; \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad ; \quad v = \int dx = x$

$* = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = **$

Nova spremenljivka: $t = 1-x^2$

$dt = -2x\, dx$

$** = x\arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\arcsin x + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} + C =$

$= x\arcsin x + \sqrt{t} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

8. Izračunaj:

(a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (c) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(1-x)^2}$ (e) $\int\limits_0^\infty \sin x dx$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}\, x dx$ (d) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ (f)* $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

Rešitev: V tej nalogi imamo v vseh primerih opravka z t.i. **izlimitiranimi integrali**. Poznamo dva tipa izlimitiranih integralov.

Na kazalo

1. Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kjer je f zvezna na $[a,b]\setminus\{x_0\}$ in v okolici x_0 neomejena. Če limite na desni obstajajo, potem veljajo enakosti:

$$\text{pri } x_0 = a: \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

$$\text{pri } x_0 = b: \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\text{pri } x_0 = c \in (a,b): \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\downarrow 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

2. Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ in $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$, kjer je funkcija f zvezna. Če limite na desni obstajajo, potem veljajo enakosti:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx, \quad \text{za nek } c\in\mathbb{R}.$$

(a) Funkcija $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ni definirana v $x_0 = 0$, v okolici te točke je celo neomejena, zato imamo opravka z izlimitiranim integralom.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\downarrow 0}\int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\downarrow 0}\int\limits_a^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{a\downarrow 0}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right)\Big|_a^1 = 3\lim_{a\downarrow 0}\left(\sqrt[3]{x}\right)\Big|_a^1 =$$
$$= 3\lim_{a\downarrow 0}\left(1-\sqrt[3]{a}\right) = 3$$

(b) Funkcija $\operatorname{tg} x$ ni definirana v $x_0 = \frac{\pi}{2}$, v njeni okolici je neomejena.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx = \lim_{b\uparrow\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^b \operatorname{tg} x dx = \lim_{b\uparrow\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^b \frac{\sin x}{\cos x}dx = *$$

Na kazalo

Nova spremenljivka: $t = \cos x \quad ; \quad \alpha = 1$
$dt = -\sin x\, dx \quad ; \quad \beta = \cos b$

$$* = \lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} \int_1^{\cos b} \frac{-dt}{t} = -\lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} \ln|t| \Big|_1^{\cos b} = -\lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} (\ln|\cos b| - \ln 1) = -\lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} \ln|\cos b|$$

Ker je $\lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} \cos b = 0$, je $\lim_{b \uparrow \frac{\pi}{2}} \ln|\cos b| = -\infty$ in zato izlimitiran integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$ ne konvergira. Rečemo, da integral divergira.

(c) Funcija $\frac{1}{(1-x)^2}$ ni definirana v $x_0 = 1$, kar je v notranjosti integracijskega območja. V okolici te točke je celo neomejena. Izlimitiran integral najprej razbijemo v dva izlimitirana integrala.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1-x)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

Vsakega posebej potem izrazimo s pomočjo limite:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{b \uparrow 1} \int_0^b \frac{dx}{(1-x)^2},$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{a \downarrow 1} \int_a^3 \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

Sedaj pa izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$ (s pomočjo nove spremenljivke $t = 1 - x$, $dt = -dx$). Rezultat bomo uporabili za izračun izlimitiranih integralov I_1 in I_2.

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2}\, dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{1-x} + C$$

OPOMBA: Nedoločeni integral tako preproste funkcije lahko izračunamo tudi z ugibanjem: t.j. vprašamo se, katero funkcijo je treba odvajati, da dobimo funkcijo $(1-x)^{-2}$. Odgovor je $(1-x)^{-1}$. Ker je ta funkcija zvezna, je seveda primitivna funkcija funkcije $(1-x)^{-2}$.

$$I_1 = \lim_{b \uparrow 1} \int_0^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{b \uparrow 1} \frac{1}{1-x} \Big|_0^b = \lim_{b \uparrow 1} \left(\frac{1}{1-b} - 1 \right) = \infty$$

$$I_2 = \lim_{a \downarrow 1} \int_a^3 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{a \downarrow 1} \frac{1}{1-x} \Big|_a^3 = \lim_{a \downarrow 1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1-a} \right) = \infty$$

Dan integral torej divergira.

Na kazalo

(d) Funkcija $\frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ ni definirana v $x_0 = 4$, v njeni okolici je neomejena. Ker za dano funkcijo velja, da je simetrična glede na premico $x = 4$ je dan integral enak dvakratniku integrala na območju npr. $[2, 4]$ in lahko pišemo:

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = 2\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} .$$

Upoštevajmo sedaj še dejstvo, da imamo opravka z izlimitiranim integralom, ter ga izračunajmo (z uvedbo nove spr.: $t = 4 - x$, $dt = -dx$, $\alpha = 2$, $\beta = 4 - b$).

$$2\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = 2\lim_{b\uparrow 4}\int_2^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = 2\lim_{b\uparrow 4}\int_2^{4-b} \frac{-dt}{\sqrt[3]{t^2}} = 2\lim_{b\uparrow 4}\int_{4-b}^2 t^{-\frac{2}{3}}\, dt =$$

$$= 2\lim_{b\uparrow 4} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_{4-b}^{2} dt = 6\lim_{b\uparrow 4}\left(2^{\frac{1}{3}} - (4-b)^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= 6\left(\sqrt[3]{2} - \lim_{b\uparrow 4}(4-b)^{\frac{1}{3}}\right) = 6\sqrt[3]{2}$$

(e) V tem primeru je funkcija sicer posvod definirana in omejena, ampak integracijsko območje pa je neomejeno. Gre torej za drugi tip izlimitiranega integrala.

$$\int_0^\infty \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}(-\cos x)\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}(\cos b - \cos 0) = 1 - \lim_{b\to\infty}\cos b$$

Ker limita $\lim\limits_{b\to\infty}\cos b$ ne obstaja, rečemo, da integral $\int_0^\infty \sin x$ divergira.

(f) Območje v tem primeru je neomejeno, kar pomeni, da bomo funkcijo $\frac{1}{x^2+4x+9}$ integrirali na intervalu $[a, b]$, potem pa "poslali" a proti $-\infty$, b pa proti ∞. Sama funkcija $\frac{1}{x^2+4x+9}$ ni tabelarna. Poskusimo preoblikovati njen funkcijski predpis in poglejmo, ali lahko njen imenovalec faktoriziramo (v tem primeru izvedemo t.i. razcep na parcialne ulomke, več o tem preberite v dodatku A). Naš imenovalec je kvadratni polinom z negativno diskriminanto in se torej ne da razstaviti. Dopolnimo prvi dva člena do popolnega kvadrata, da dobimo temensko obliko.

$$x^2 + 4x + 9 = x^2 + 4x + 4 + 5 = (x+2)^2 + 5 \Rightarrow \frac{1}{x^2+4x+9} = \frac{1}{(x+2)^2+5}$$

Ker imenovalca ne moremo faktorizirati, se poskusimo "približati" funkciji $\frac{1}{1+x^2}$, katere primitivna funkcija je arctg x.

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \int \frac{dx}{5\left(\frac{(x+2)^2}{5}+1\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = *$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko ($t = \frac{x+2}{\sqrt{5}}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{5}}dx \Rightarrow dx = \sqrt{5}dt$) in integral poračunamo.

$$* = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\text{arctg } t + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\text{arctg }\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Ker je funkcija $x^2+4x+9 = (x+2)^2+5$ simetrična glede na os $x=-2$, ima tudi funkcija $\frac{1}{x^2+4x+9}$ isto os simetrije. To dejstvo upoštevamo pri dokončnem izračunu našega integrala.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = 2\int\limits_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{-2}^{b} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\text{arctg }\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\right)\Bigg|_{-2}^{b} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\lim_{b\to\infty}\left(\text{arctg }\left(\frac{b+2}{\sqrt{5}}\right) - \text{arctg }\left(\frac{-2+2}{\sqrt{5}}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}$$

9. Izračunaj določene integrale.

(a) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

(c) $\int\limits_{\sqrt{5}}^3 x^3\sqrt{x^2-5}\,dx$

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx$

(f) $\int\limits_0^1 \frac{2x+1}{x^2-2x+2}\,dx$

(g) $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

(h) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+2}\,dx$

(i) $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx$

(j) $\int\limits_0^4 x|x-2|\,dx$

(k) $\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}^2 x}{x^2+1}\,dx$

(l)* $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

(m)* $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}\,dx$

(n)* $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$

Rešitev:

(a) Integral ni izlimitiran (saj je x iz intervala $[1,e]$, za te x pa sta tako ulomek kot naravni logaritem definirana).

$\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \ln x \quad ; \quad \alpha = 0$
$dt = \frac{1}{x}\,dx \quad ; \quad \beta = 1$

$* = \int\limits_0^1 \sin t\,dt = (-\cos t)_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1$

(b) V tem primeru pa gre za izlimitirani integral.

$\int\limits_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \lim\limits_{a\downarrow 0} \int\limits_a^1 \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = *$

Na primitivno funkcijo sklepamo iz prejšnjega primera (nova spodnja meja je enaka $\ln a$, zgornja pa 0).

$* = \lim\limits_{a\downarrow 0} \int\limits_{\ln a}^0 \sin t\,dt = \lim\limits_{a\downarrow 0} (-\cos 0 + \cos(\ln a)) = -1 + \lim\limits_{a\downarrow 0} \cos(\ln a) = -1 + \lim\limits_{b\downarrow -\infty} \cos b$

Integral divergira.

(c) Integral ni izlimitiran (koren je namreč definiran za vse x iz intervala $\left[\sqrt{5}, 3\right]$).

$\int\limits_{\sqrt{5}}^3 x^3\sqrt{x^2-5}\,dx = \int\limits_{\sqrt{5}}^3 x^2\sqrt{x^2-5}\,x\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = x^2 - 5 \Rightarrow x^2 = t + 5 \quad ; \quad \alpha = 0$
$dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2} \quad ; \quad \beta = 4$

$* = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (t+5)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}})\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^4 = \frac{1}{5}4^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3}4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}32 + \frac{5}{3}8 = \frac{296}{15}$

(d) Integral ni izlimitiran. Izračunamo ga s pomočjo integracije po delih ("per partes").

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = *$

Po delih: $u = x \quad ; \quad dv = \cos x\,dx$
$du = dx \quad ; \quad v = \int \cos x\,dx = \sin x$

$* = (x\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - (-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

(e) Integral ni izlimitiran. Izračunamo ga s pomočjo uvedbe nove spremenljivke. Za ta primer naredimo to na pamet.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\Big(\sin(3x)\Big)_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}$

(f) Ulomek ni definiran, ko je $x^2 - 2x + 2 = 0$. Ker je $D = 4 - 8 < 0$, je imenovalec ulomka vedno neničelen. Integral torej ni izlimitiran. Funkcijo najprej preoblikujmo in uvedimo novo spremenljivko.

$\int\limits_0^1 \frac{2x+1}{x^2-2x+2}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{2x+1}{(x-1)^2+1}\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1 \quad ; \quad \alpha = -1$
$dt = dx \quad ; \quad \beta = 0$

$* = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2(t+1)+1}{t^2+1}\,dt = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2t+3}{t^2+1}\,dt = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int\limits_{-1}^{0} \frac{3}{t^2+1}\,dt = **$

V prvi integral uvedemo novo spremenljivko ($u = t^2+1$, $du = 2t\,dt$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$), drugi integral pa je (skoraj) tabelaren.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int\limits_{2}^{1} \frac{du}{u}\,dt = \ln|u|\Big|_2^1 = -\ln 2$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{3}{t^2+1}\,dt = 3\int\limits_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = 3\,(\mathrm{arctg}\ t)_{-1}^{0} = \frac{3\pi}{4}$$

$** = \frac{3\pi}{4} - \ln 2$

(g) Ker je $x \in [0,3]$, integral ni izlimitiran. Računanja integrala se lotimo s pomočjo integracije po delih.

$\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = *$

Po delih: $u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$; $dv = dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2}dx =$; $v = x$

$= \cancel{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\cancel{2}}}dx =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$

$* = \left(x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)_0^3 - \int\limits_{0}^{3} \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx = 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx = **$

Nova spremenljivka: $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$; $\alpha = 0$

$2t\,dt = dx$; $\beta = \sqrt{3}$

$$** = 3\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t^2 2\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t^2)}dt = \pi - \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \pi - \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dt + \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= \pi - \sqrt{3} + \mathrm{arctg}\ t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi - \sqrt{3} + \mathrm{arctg}\ \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(h) Integral ni izlimitiran, saj je ulomek vedno definiran. Funkcija $\frac{x^3}{x^2+2}$ je liha, integriramo pa jo na intervalu $[-1,1]$. Vrednost integrala na intervalu $[-1,0]$ je nasprotna vrednosti integrala na intervalu $[0,1]$, zato je vrednost integrala na intervalu $[-1,1]$ enaka 0.

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+2}\,dx = 0$

(i) Integral ni izlimitiran, saj je $x \in [0,1]$ in zato je $(x+1) \in [1,2]$, naravni logaritem pa je za te vrednosti definiran. Ker integral logaritemske funkcije ni tabelaren se tega primera lotimo s pomočjo integracije po delih.

$\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx = *$

Po delih: $u = \ln(x+1) \quad ; \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \quad ; \quad v = x$

$$* = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = \ln 2 - 1 + \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$$

(j) Ker nimamo pravil za računanje integrala funkcij v absolutnih vrednostih moramo absolutno vrednost odpraviti. Ker vemo, da je izraz $x-2$ nenegativen za vse $x \geq 2$ (in je tukaj $|x-2| = x-2$) in negativen za $x < 2$ (tukaj pa je $|x-2| = -(x-2)$), razdelimo integracijski interval na dva podintervala, na katerih odpravimo absolutno vrednost.

$$\int\limits_0^4 x|x-2|\,dx = \int\limits_0^2 x|x-2|\,dx + \int\limits_2^4 x|x-2|\,dx = -\int\limits_0^2 x(x-2)\,dx + \int\limits_2^4 x(x-2)\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^2 (x^2-2x)\,dx + \int\limits_2^4 (x^2-2x)\,dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_2^4 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{4^3}{3} - 4^2 - \frac{8}{3} + 4 =$$

$$= \frac{2\cdot 4^3 - 8}{3} + 8 - 4^2 = \frac{2^6 - 2^4}{3} - 8 = 2^4 \cdot \frac{4-1}{3} - 8 = 16 - 8 = 8$$

(k) Integral ni izlimitiran, saj je ulomek vedno definiran. Tega primera se bomo lotili na dva načina: z uvedbo nove spremenljivke in integracijo po delih.

I. način: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}\,dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \operatorname{arctg} x \quad ; \quad \alpha = 0$

$dt = \frac{1}{1+x^2}dx \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{4}$

$* = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{192}$

II. način: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}\,dx = *$

Na kazalo

Po delih: $u = \text{arctg}^2 x \quad ; \quad dv = \frac{1}{x^2+1} dx$

$du = 2\text{arctg } x \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \quad ; \quad v = \text{arctg } x$

$* = \text{arctg}^3 x \Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}^2 x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi^3}{4^3} - 2\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}^2 x}{x^2+1}\, dx$

Če označimo $I = \int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}^2 x}{x^2+1}\, dx$, lahko skrajno levo in skrajno desno stran računa prepišemo v linearno enačbo in jo rešimo.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^3}{4^3} - 2I \\ 3I &= \frac{\pi^3}{4^3} \\ I &= \frac{\pi^3}{192} \end{aligned}$$

(l)* Integral ni izlimitiran. Reševanja se lotimo z uvedbo nove spremenljivke.

$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = *$

Nova spremenljivka: $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t+1 \quad ; \quad \alpha = 0$

$2t\, dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t\, dt}{e^x} = \frac{2t\, dt}{t^2+1} \quad ; \quad \beta = 1$

$$* = \int\limits_0^1 t\frac{2t\, dt}{t^2+1} = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(1 - \text{arctg } t\Big|_0^1\right) dt = 2 - \frac{\pi}{2}$$

(m)* Integral ni izlimitiran (saj je ulomek vedno definiran).

$\int\limits_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}\, dx = \int\limits_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} e^x\, dx = *$

Nova spremenljivka: $t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t+1 \quad ; \quad \alpha = 0$

$dt = e^x\, dx \quad ; \quad \beta = 4$

$* = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{t}}{t+4}\, dt = **$

Nova spremenljivka: $u = \sqrt{t} \Rightarrow u^2 = t \quad ; \quad \alpha = 0$

$2u\, du = dt \quad ; \quad \beta = 2$

$** = \int\limits_0^2 \frac{u 2u}{u^2+4}\, du = 2\int\limits_0^2 \frac{u^2+4-4}{u^2+4}\, du = 2\left(\int\limits_0^2 du - \int\limits_0^2 \frac{4}{u^2+4}\, du\right) = 2\left(2 - \int\limits_0^2 \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\, du\right) = ***$

Nova spremenljivka: $v = \frac{u}{2} \quad ; \quad \alpha = 0$

$dv = \frac{1}{2} du \Rightarrow du = 2\, dv \quad ; \quad \beta = 1$

$*** = 2\left(2 - 2\int\limits_0^1 \frac{1}{v^2+1}\, dv\right) = 2\left(2 - 2\left(\text{arctg } v\right)_0^1\right) = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi$

Na kazalo

(n)* Imenovalec ulomka je enak 0, ko je $x_0 = 0$, zato imamo opravka z izlimitiranim integralom.
$\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim\limits_{a\downarrow 0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{e^x-1}$
Izračunajmo najprej nedoločeni integral. Računanja se lotimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke.

Nova spremenljivka: $t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t+1$
$dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t+1}$

$\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = *$
Razcep ulomka $\frac{1}{t(t+1)}$ na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}$$

Ker sta imenovalca obeh ulomkov enaka, morata biti enaka tudi števca, konkretneje enaka morata biti polinoma v števcih. To nam da enačbi $1 = A$ in $A + B = 0$, iz česa pa sledi, da je $B = -1$.
$* = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x| + C = \ln|e^x - 1| - x + C$
Upoštevajmo še meje in poračunajmo (izlimitirani) integral.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{a\downarrow 0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{a\downarrow 0} \big(\ln|e^x-1| - x\big)_a^1 =$$
$$= \lim_{a\downarrow 0} \big(\ln(e-1) - 1 - \ln|a| + a\big) = \infty$$

Integral divergira.

10. Izračunaj povprečno vrednost funkcije $f(x) = \sin^2 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešitev: Povprečno vrednost $\overline{f}$ funkcije f na intervalu $[a,b]$ izračunamo s formulo:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Za integriranje funkcije $\sin^2 x$ moramo najprej znižati potenco. To naredimo s pomočjo formul $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

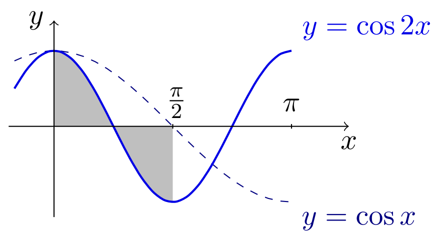
Na kazalo

Na podoben način bi lahko izpeljali tudi formulo za nižanje potence funkcije $\cos^2 x$, če bi jo potrebovali.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right).$$

$$\overline{f} = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \tfrac{\cancel{2}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{\cancel{2}}\left(1 - \cos 2x\right)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$$

Vrednost integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ je enaka dolžini intervala integracije, torej $\frac{\pi}{2}$. Za izračun vrednosti integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$ pa skicirajmo graf funkcije $\cos 2x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Vidimo, da sta vrednosti integralov $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ in $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$ nasprotni, vrednost integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$ je zato enaka 0.

OPOMBA: Vrednost drugega integrala lahko izračunamo tudi s pomočjo uvedbe nove spremenljivke $t = 2x$, $dt = 2dx$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Dokončno izračunajmo povprečno vrednost.

$$\overline{f} = \frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{\cancel{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

11. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ in $g(x) = 5x$.

Rešitev: Za izračun ploščine bomo uporabili naslednji izrek.

Izrek: Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni in naj velja $f(x) \geq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina lika

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\} \tag{1}$$

enaka

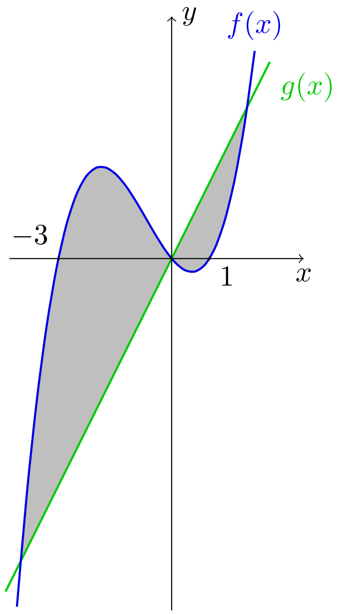
$$p(L) = \int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx.$$

Na kazalo

Vidimo, da je za naši (zvezni) funkciji f in g potrebno določiti meji a in b ter ugotoviti ali velja $g(x) \le f(x)$ ali pa $f(x) \le g(x)$. To bomo naredili na dva načina.
I. način: Izračunajmo presečišči grafov funkcij f in g.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 + 2x^2 - 3x &= 5x \\ x^3 + 2x^2 - 8x &= 0 \\ x(x+4)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Ker sta obe funkciji zvezni, očitno oklepata dva (omejena) lika. Prvi je na intervalu $[-4, 0]$, drugi pa na $[0, 2]$. Ploščina lika, ki ga oklepata funkciji, je enaka vsoti ploščin posameznih likov. Hitro ugotovimo, da je $f(x) \ge g(x)$ na prvem intervalu (saj je npr. $f(-1) \ge g(-1)$) in $f(x) \le g(x)$ na drugem intervalu (saj je npr. $f(1/2) \le g(1/2)$).
II. način: V isti koordinatni sistem skicirajmo grafa funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-3)(x+1)$ in $g(x) = 5x$.



Presečišča obeh grafov izračunamo kot pri I. načinu. Vidimo, da na intervalu od levega presečišča funkcij f in g do 0 velja $f(x) \ge g(x)$, od 0 do desnega presečišča pa $f(x) \le g(x)$.

Na kazalo

Pri obeh načinih pridemo do istega nastavka za izračun ploščin:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pl} = \mathrm{pl}_1 + \mathrm{pl}_2 &= \int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \\
&= \int_{-4}^{0} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(8x - 2x^2 - x^3\right) dx = \\
&= \int_{-4}^{0} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right) dx - \int_{0}^{2} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3} - \cancel{8}^4\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_{-4}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3} - 4x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = \\
&= -\left(\frac{4^4}{4} - 2\cdot\frac{4^3}{3} - 4\cdot 4^2\right) - \left(\frac{2^4}{4} + 2\cdot\frac{2^3}{3} - 4\cdot 2^2\right) = \frac{148}{3}
\end{aligned}
$$

OPOMBA: Ko izračunamo presečišča obeh funkcij lahko ploščino izračunamo tudi tako:

$$
\mathrm{pl} = \mathrm{pl}_1 + \mathrm{pl}_2 = \left|\int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right|.
$$

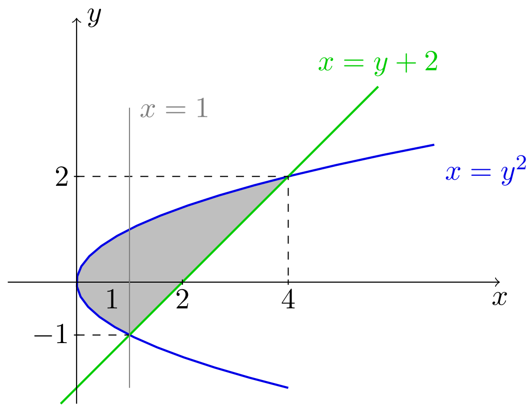
V tem primeru se ne sprašujemo po tem, katera funkcija je večja in katera manjša, ampak enostavno izračunamo vrednost integrala in spremenimo predznak, če je to potrebno. S tem pa izgubimo malo kontrole nad tem, ali je rezultat pravilen (če namreč računamo brez absolutnih vrednosti, na I. ali II. način, in dobimo za katerega izmed integralov negativno vrednost, je to znak, da smo se zagotovo zmotili).

12. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = x$ in $y + 2 = x$.

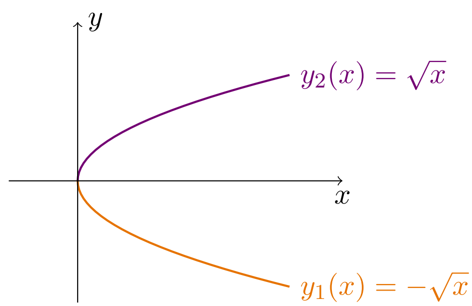
Rešitev: *I. način:* Izračunajmo presečišči krivulj.

$$
\begin{aligned}
y^2 &= y + 2 \\
y^2 - y - 2 &= 0 \\
(y-2)(y+1) &= 0
\end{aligned}
$$

Vidimo, da se sekata na višinah 2 in -1. Koordinate presečišč so $(4, 2)$ in $(1, -1)$. Skicirajmo obe krivulji v isti koordinatni sistem.



Lik razrežemo s premico $x = 1$ na dva lika in izračunajmo ploščini posameznih likov (ploščino levega lika imenujmo pl_1, ploščino desnega pa pl_2).
Levi lik: meji za integral sta 0 in 1, določimo še funkciji, katerih grafa omejujeta naš lik na intervalu $[0, 1]$. Spodnja meja za lik je spodnji del krivulje $x = y^2$, zgornja meja pa zgornji del iste krivulje. Sama krivulja ni graf nobene funkcije spremenljivke x (saj mora funkcija vsaki spremenljivki x prirediti natanko eno vrednost). Če pa izrazimo $y = \pm\sqrt{x}$, pa smo dobili dva funkcijska predpisa, katerih grafa skupaj predstavljata ravno krivuljo $y^2 = x$. Graf funkcije $y_1(x) = -\sqrt{x}$ je spodnja polovica, graf funkcije $y_2(x) = \sqrt{x}$ pa zgornja polovica krivulje $y^2 = x$.



$\mathrm{pl}_1 = \int\limits_0^1 (y_2(x) - y_1(x))\,dx = 2\int\limits_0^1 y_2(x)\,dx = 2\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2\cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$
Desni lik: meji za integral sta 1 in 4. Lik je od spodaj omejen s premico $x = y + 2$ (oz. $y = x - 2$), od zgoraj pa z grafom (prej izračunane) funkcije $y_2(x) = \sqrt{x}$. Označimo $y_3(x) = x - 2$.

Na kazalo

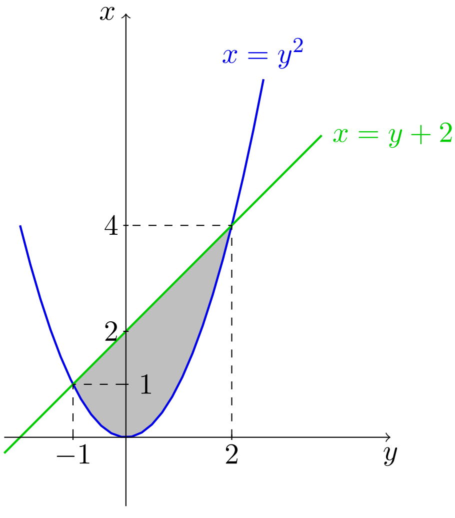
$$\mathrm{pl}_2 = \int_1^4 (y_2(x) - y_3(x))\,dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\,dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(4^2 - 1\right) + 2(4-1) = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}$$

Izračunajmo ploščino.

$$\mathrm{pl} = \mathrm{pl}_1 + \mathrm{pl}_2 = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

II. način: Na dano nalogo lahko pogledamo tudi drugače. Vlogo neodvisne spremenljivke naj prevzame y, kar pomeni, da sedaj narišemo obe krivulji v koordinatni sistem, kjer sta zamenjani vlogi osi x in y.



Tokrat bomo za izračun ploščine integrirali po y v mejah od -1 do 2. Lik od spodaj omejuje graf funkcije $x_1(y) = y^2$, od zgoraj pa $x_2(y) = y + 2$.

$$\mathrm{pl} = \int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{2} = \frac{1}{2}\left(2^2 - (-1)^2\right) + 2\left(2 - (-1)\right) - \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) =$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{9}{2}$$

Na kazalo

13. Izračunaj dolžino loka krivulje $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, za $x = 1$ do $x = e$.

Rešitev: Za izračun dolžine loka krivulje uporabimo naslednji izrek.
Izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedliva funkcija. Potem je dolžina krivulje

$$K = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a, b]\}$$

enaka

$$s(K) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Naša krivulja je graf funkcije $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ za $x \in [1, e]$. Izračunajmo vse potrebno.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{1}{\cancel{4}^{2}}\cancel{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x} \\
1 + (y'(x))^2 &= 1 + \frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} = 1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} = \frac{(x^2+1)^2}{(2x)^2} \\
s(K) &= \int\limits_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(2x)^2}}dx = \int\limits_1^e \frac{x^2+1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_1^e = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^2 - 1) + \ln e - \ln 1\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

OPOMBA: Pri izračunu integrala smo upoštevali, da je izraz $x^2 + 1$ pozitiven in je zato $\sqrt{(x^2+1)^2} = \left|x^2 + 1\right| = x^2 + 1$. Podobno velja za izraz $2x$, le ta je pozitiven za $x \in [1, e]$ in zato $\sqrt{(2x)^2} = |2x| = 2x$.

14. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo, ko rotiramo graf funkcije $y = \sin x$ na intervalu $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ okrog osi x.

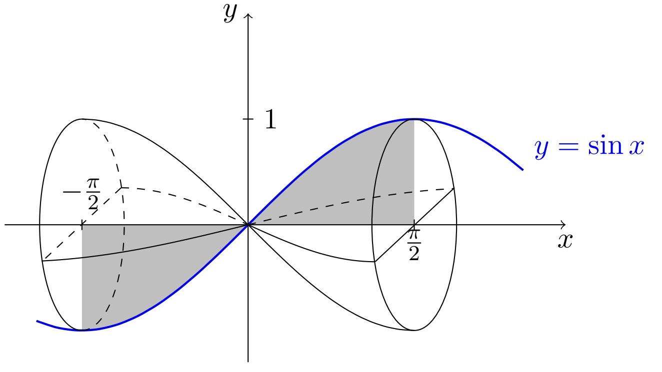
Rešitev: Prostornino vrtenine bomo izračunali s pomočjo naslednjega izreka.
Izrek: Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Naj bo G rotacijsko telo, ki ga popiše lik

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

pri rotaciji okrog x-osi. Potem je volumen telesa G enak

$$V(G) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Na kazalo



Vidimo, da je telo, ki ga dobimo, simetrično glede na izhodišče koordinatnega sistema. Njegova prostornina je dvakratnik prostornine npr. desnega dela telesa $(V(G_D))$, kar pomeni, da izračunamo integral funkcije $\sin^2 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultat bomo prepisali iz rešitve za nalogo (10).

$$V(G) = 2V(G_D) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\, dx = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2x))\, dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

15. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo, ko zavrtimo graf funkcije $y = \ln x$ na intervalu $[1, e]$ okrog osi x.

Rešitev: Pri izračunu integrala bomo dvakrat uporabili integracijo po delih (prvič: $u = \ln^2 x$, $du = 2(\ln x)\frac{1}{x}$, $dv = dx$, $v = x$, drugič: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$, $dv = dx$, $v = x$).

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 x\, dx = \pi \left(\left(x \ln^2 x \right)_1^e - 2 \int_1^e \cancel{x} (\ln x) \frac{1}{\cancel{x}} dx \right) = \pi \left(e - 2 \int_1^e \ln x\, dx \right) =$$

$$= \pi \left(e - 2 \left(\left(x \ln x \right)_1^e - \int_1^e \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} dx \right) \right) = \pi \left(e - 2 \left(e - e + 1 \right) \right) = \pi(e - 2)$$

Na kazalo

16. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo, ko rotiramo območje

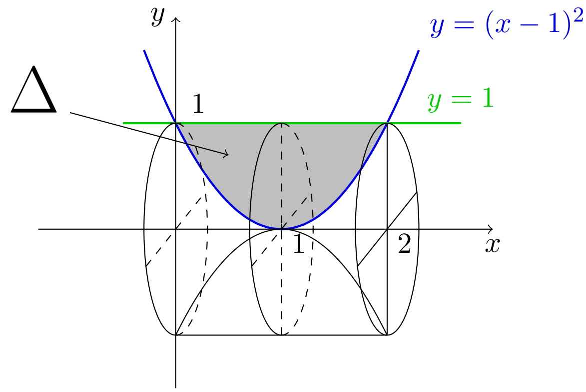
$$\Delta = \{(x, y) | (x-1)^2 \leq y \leq 1\}$$

(a) okoli osi x,

(b) okoli osi y.

Rešitev:

(a) Skicirajmo območje Δ in rotacijsko telo, ki ga dobimo z rotacijo območja Δ okoli osi x.



Vidimo, da je dobljeno telo simetrično glede na $x = 1$, zato je njegova prostornina enaka dvakratniku prostornine telesa med $x = 0$ in $x = 1$ (poimenujmo to prostornino V_L). Iskano prostornino bomo izračunali tako, da bomo prostornini valja s polmerom 1 (poimenujmo jo V_1) odšteli prostornino krivorobega stožca (poimenujmo jo V_2). Medtem, ko bomo prvo prostornino izračunali s pomočjo formule za izračun prostornine valja, bomo za drugo prostornino uporabili formulo za prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo, ko rotiramo graf funkcije $y = y(x) = (x-1)^2$ na intervalu $x \in [0, 1]$ okrog abscisne osi. V integral, ki ga dobimo, bomo vpeljali novo spremenljivko ($t = x - 1$, $dt = dx$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$).

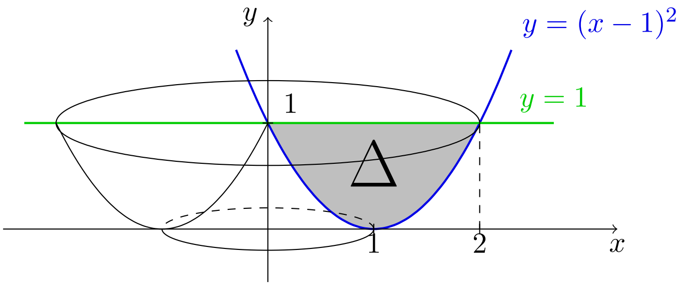
$$V = 2V_L = 2\left(V_1 - V_2\right) = 2\left(\pi \cdot 1^2 \cdot 1 - \pi \int_0^1 \left((x-1)^2\right)^2 \, dx\right) =$$

$$= 2\pi \left(1 - \int_0^1 (x-1)^4 \, dx\right) = 2\pi \left(1 - \int_{-1}^0 t^4 \, dt\right) = 2\pi \left(1 - \left(\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{0}\right) =$$

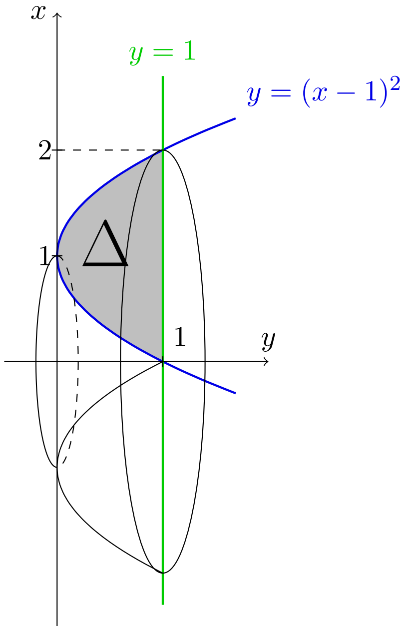
$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8\pi}{5}$$

Na kazalo

(b) Skicirajmo območje Δ in rotacijsko telo, ki ga dobimo z rotacijo območja Δ okoli osi y.



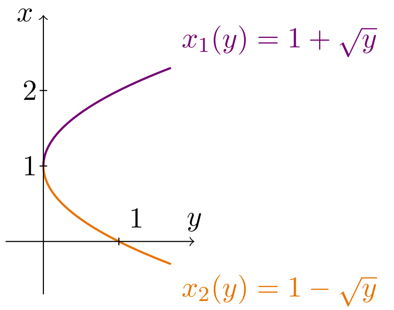
Ker nimamo formule za izračun prostornine pri rotaciji grafa funkcije okoli osi y, zamenjajmo vlogi neodvisne in odvisne spremenljivke, ter uporabimo obstoječo formulo.



Prostornino bomo tudi tokrat izračunali kot razliko prostornine "zunanjega"telesa (poimenujmo jo V_1) in "notranjega"telesa (imenujmo jo V_2). Za obe prostornini bomo uporabili obstoječo formulo. V obeh primerih bomo integrirali na intervalu $y \in [0, 1]$. Ker krivulja z enačbo $y = (x-1)^2$ ni graf nobene funkcije (ki bi bila odvisna od y), jo "razrežemo"v temenu parabole in dobimo grafa dveh funkcij. Njuna predpisa izračunamo tako, da iz enačbe $y = (x-1)^2$ izrazimo (odvisno) spremenljivko x z (neodvisno) spremenljivko y.

$$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow x = x_{1,2}(y) = 1 \pm \sqrt{y}$$

Na kazalo



Izračunajmo iskano prostornino.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 x_1^2(y)\,dy - \pi \int_0^1 x_2^2(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left(x_1^2(y) - x_2^2(y)\right)\,dy =$$

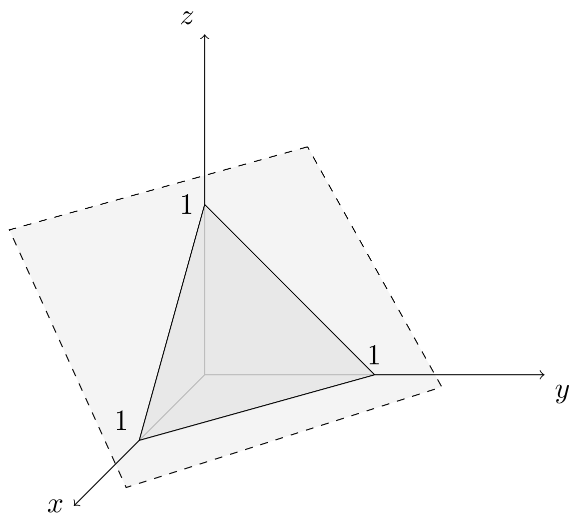
$$= \pi \int_0^1 \left((1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2\right)\,dy = \pi \int_0^1 (1 + 2\sqrt{y} + y - (1 - 2\sqrt{y} + y))\,dy =$$

$$= \pi \int_0^1 4\sqrt{y}\,dy = 4\pi \int_0^1 y^{\frac{1}{2}}\,dy = 4\pi \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

2 Funkcije več spremenljivk

1. Skiciraj graf funkcije $f(x, y) = 1 - x - y$. Ali ležita točki $A(-1, 2, 0)$ in $B(1, 2, 3)$ na grafu?

Rešitev: Graf funkcije je množica točk v prostoru s koordinatami $(x, y, f(x, y))$ oz. točke (x, y, z), ki ustrezajo enačbi $z = 1 - x - y$. Enačbo zapišemo v obliko $x + y + z = 1$ in prepoznamo, da gre za ravnino, ki koordinatne osi odreže pri $x = 1$, $y = 1$ in $z = 1$.



Točka (x, y, z) leži na grafu funkcije, če njene koordinate ustrezajo enačbi $z = 1 - x - y$. Ker to velja za koordinate točke A $(0 = 1 + 1 - 2)$, točka A leži na grafu. Koordinate točke B omenjeni enačbi ne ustrezajo $(3 \neq 1 - 1 - 2)$, točka B torej ne leži na grafu.

2. Skiciraj graf funkcije $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Kaj je zaloga vrednosti funkcije $f : [0, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$, ki slika s podanim predpisom?

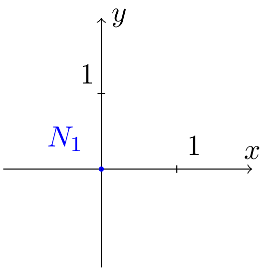
Rešitev: Za skico grafa si bomo pomagali z nivojnicami (prerezi z ravninami, vzporednimi koordinatni ravnini O_{xy} na različnih višinah) in prerezi po koordinatnih ravninah O_{xz} in O_{yz}.
Nivojnice: ker je funkcijski predpis sestavljen iz korena, ki ga odštejemo od števila 1, bomo dosegli zgolj funkcijske vrednosti, ki so manjše ali enake 1. Za nivojnice nad višino 1 bomo torej dobili prazno množico.
Nivojnice:

- N_1: Iščemo točke (x, y) v definicijskem območju (torej v $\mathbb{R}^2$), za katere je $f(x, y) = 1$.

Na kazalo

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 \\
1-\sqrt{x^2+y^2} &= 1 \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 0
\end{aligned}
$$

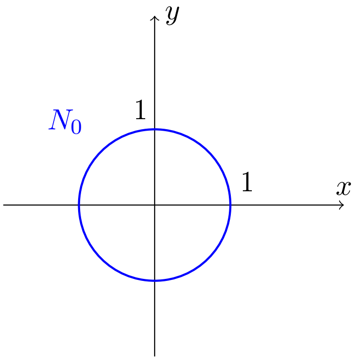
Dobljeno enačbo reši le točka $(0,0)$.



- N_0:

$$
\begin{aligned}
1-\sqrt{x^2+y^2} &= 0 \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 1 \\
x^2+y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

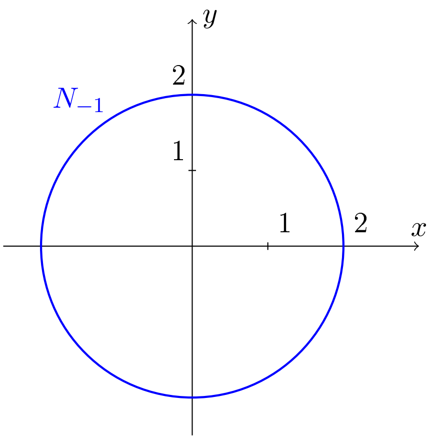
Dobljena enačba predstavlja krožnico s središčem v (0,0) in s polmerom 1.



- N_{-1}:

$$
\begin{aligned}
1-\sqrt{x^2+y^2} &= -1 \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 2 \\
x^2+y^2 &= 4
\end{aligned}
$$

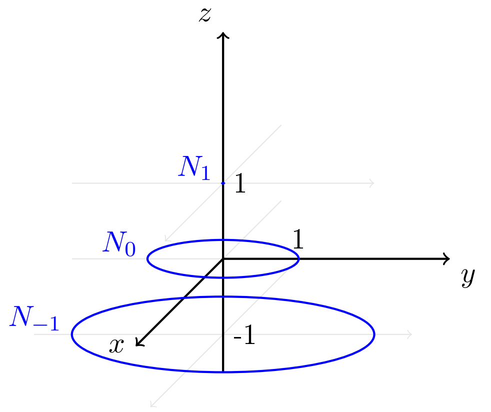
Dobljena enačba predstavlja krožnico s središčem v (0,0) in s polmerom 2.



- Vidimo, da so vse nivojnice krožnice s središčem v (0,0) in polmerom, ki se veča, ko nižamo višino nivojnice (na višini z_0 je enak $1-z_0$).

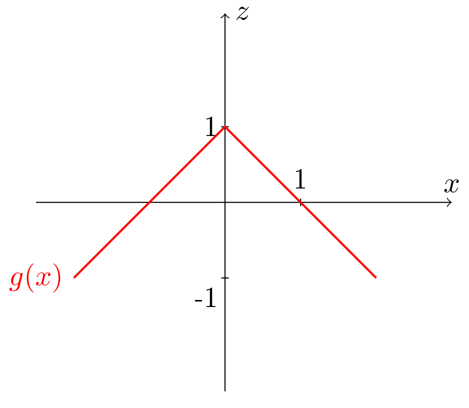
Če vstavimo vse dobljene slike v tri dimenzionalni koordinatni sistem, dobimo:

Na kazalo

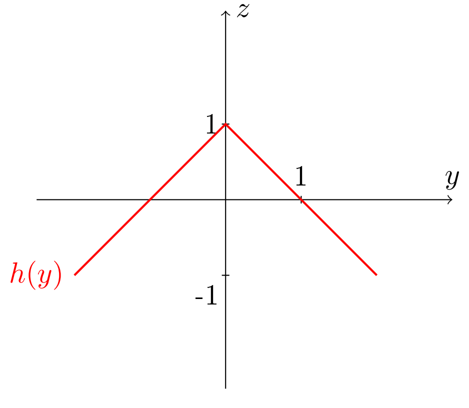


Ker nimamo informacije kako so te nivojnice povezane si pomagamo še s prerezoma po koordinatnih ravninah O_{xz} in O_{yz}.
Prerezi po koordinatnih ravninah:

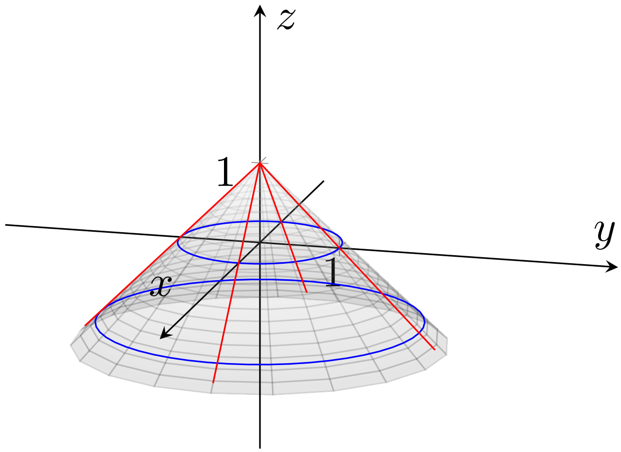
- O_{xz}: Za vse točke na tej ravnini velja $y = 0$. Zanimajo nas torej le funkcijske vrednosti v točkah $(x, 0)$: $f(x,0) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x| = g(x)$.



- O_{yz}: $f(0, y) = 1 - \sqrt{y^2} = 1 - |y| = h(y)$.



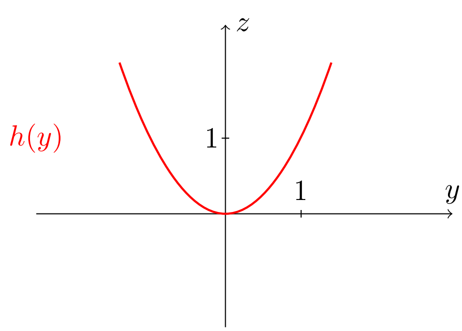
Ko naši tridimenzionalni skici dodamo še skici prerezov, dobimo:



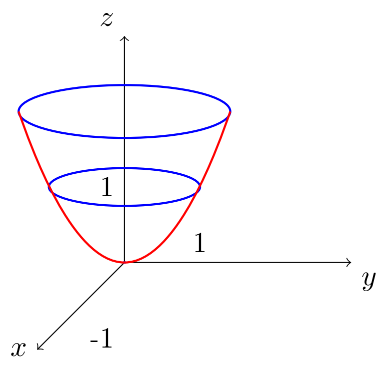
Graf funkcije je stožec z vrhom v točki (0,0,1), z os je njegova os simetrije, odpira pa se v smeri negativnega dela osi z.
Graf zožitve funkcije na območje $D = [0,1] \times [0,2]$ je tisti del stožca, ki ima za tloris ravno pravokotnik D. Kot vidimo na zgornji skici, je najvišja višina, ki jo na tem delu dosežemo 1 (dosežemo jo v točki $(0,0)$). Najnižjo višino pa dosežemo v točki $(1,2)$, t.j. $f(1,2) = 1 - \sqrt{1+4} = 1 - \sqrt{5}$. Tako je $Z_f = \left[1-\sqrt{5}, 1\right]$.

3. Skiciraj graf funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Rešitev: Nivojnica na višini z_0 ($z_0 \geq 0$) je krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom $\sqrt{z_0}$. Prerez z ravnino O_{yz} je enak prerezu z ravnino O_{xz} (saj je $f(x,y) = f(y,x)$), prav tako pa je enak prerezu z vsako ravnino, ki vsebuje os z in je pravokotna na ravnino O_{xy}. Zadnja opazka je posledica dejstva, da je funkcijska vrednost funkcije odvisna zgolj od kvadrata razdalje točke (x,y) od izhodišča koordinatnega sistema (t.j. od x^2+y^2).
O_{yz}: $f(0,y) = y^2 = h(y)$



Graf funkcije je t.i. rotacijski paraboloid s temenom v izhodišču koordinatnega sistema, z os je njegova os simetrije, odprt je v pozitivni smeri osi z.



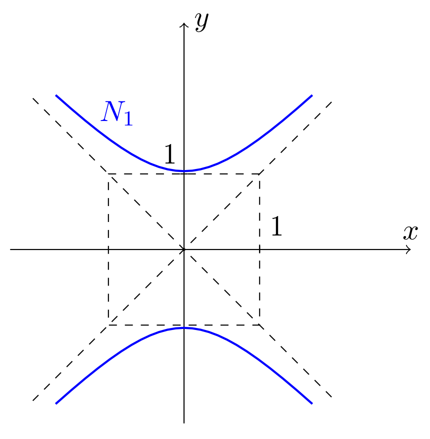
4. Skiciraj graf funkcije $f(x) = x^2 - y^2$.

Rešitev: Tokrat graf funkcije ni rotacijska ploskev (t.j. ploskev, ki jo dobimo z rotacijo krivulje okrog premice). Zopet si bomo pomagali z nivojnicami in prerezi.

- N_{-1}:

$$x^2 - y^2 = -1$$

Dobljena enačba predstavlja hiperbolo.

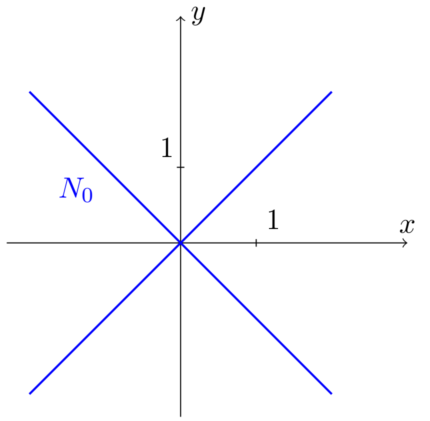


Na kazalo

- N_0:

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$x^2 = y^2$$
$$|x| = |y|$$

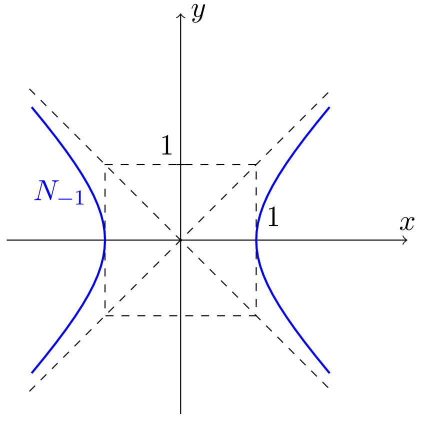
Dobljena enačba predstavlja premici $y = \pm x$.



- N_1:

$$x^2 - y^2 = 1$$

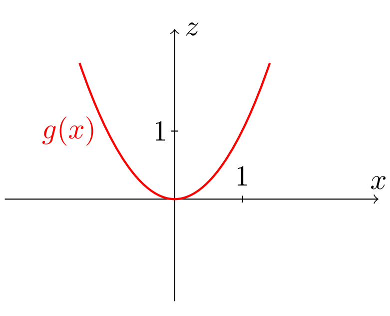
Dobljena enačba predstavlja hiperbolo.



- Vidimo, da so vse nivojnice, razen nivojnice na višini 0, hiperbole. Ko po absolutni vrednosti povečamo višino nivojnice, se večata tudi mala in velika polos hiperbole. Asimptoti hiperbol sta vedno simetrali lihih in sodih kvadrantov (torej $y = \pm x$).

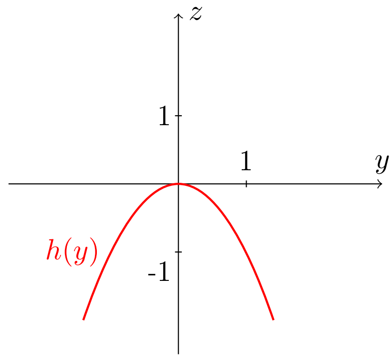
Poglejmo še prereze s koordinatnima ravninama O_{xz} in O_{yz}.

- O_{xz}: $f(x, 0) = x^2 = g(x)$.

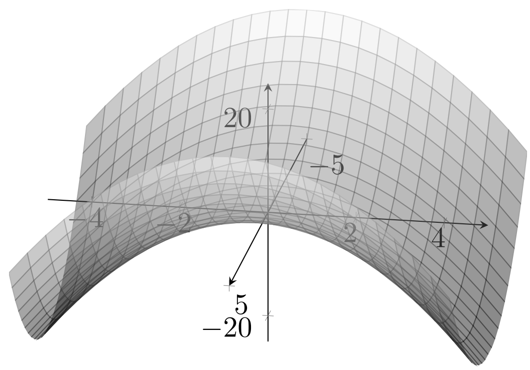


Na kazalo

- O_{yz}: $f(0,y) = -y^2 = h(y)$.



Če vse dobljene slike narišemo v tridimenzionalni koordinatni sistem, dobimo:

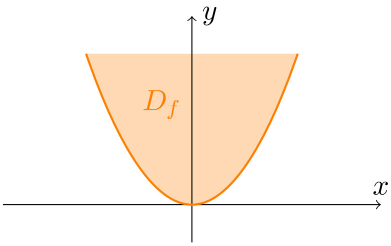


> 5. Določi definicijsko območje, ga skiciraj, določi zalogo vrednosti, ničle funkcije ter skiciraj njene preseke s koordinatnimi ravninami.
>
>   (a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$,
>
>   (b) $f(x,y) = \ln(y^2 - x + 1)$,
>
>   (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$,
>
>   (d) $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$,
>
>   (e) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.

Rešitev: Pod pojmom definicijsko območje razumemo naravno definicijsko območje, t.j. največja možna podmnožica v $\mathbb{R}^2$, za katero je funkcijski predpis definiran.

(a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$
- **Definicijsko območje:** Funkcija bo definirana natanko tedaj, ko bo definiran

koren, torej $y - x^2 \geq 0$ oz. $y \geq x^2$. Krivulja $y = x^2$ v ravnini xy predstavlja kvadratno parabolo in je meja definicijskega območja naše funkcije. Z neenačbo $y \geq x^2$ pa so določene točke nad parabolo (saj je njihova ordinata večja od ordinat točk na paraboli). Tako je naravno definicijsko območje naše funkcije $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq x^2\}$. Skicirajmo ga v ravnino O_{xy}.

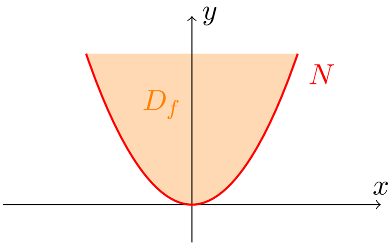


Zaloga vrednosti naše funkcije je enaka množici višin točk na grafu. Ker nimamo grafa in lahko po samem funkcijskem predpisu sklepamo le na to, da so funkcijske vrednosti zmeraj nenegativne (saj ima funkcijski predpis obliko korena), pustimo razmislek o zalogi vrednosti za na konec naloge, ko bomo našo funkcijo malce bolj raziskali. Lotimo se najprej presekov grafa s koordinatnimi ravninami, da dobimo več občutka za samo funkcijo.

• **Ničle:** Iščemo tiste točke v koordinatni ravnini O_{xy}, za katere velja $\sqrt{y - x^2} = 0$ oz. $y - x^2 = 0$. Te točke tvorijo parabolo $y = x^2$, ki predstavlja rob D_f.

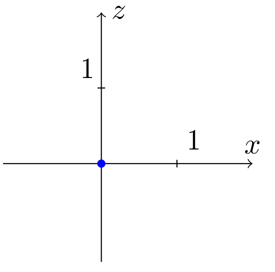
$$N = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xy}}$:** Presek predstavljajo ničle funkcije. Skicirajmo jih v rdeči barvi (na skici označimo tudi D_f, da si lažje predstavljamo obliko grafa funkcije).

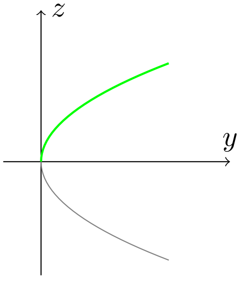


Pri tem razmisleku smo se naučili tudi nekaj o zalogi vrednosti naše funkcije: vrednost 0 je v zalogi vrednosti.

• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xz}}$:** Tale presek je rahlo dolgočasen, saj iz razmisleka o definicijskem območju vidimo, da je od vseh točk na osi x funkcija definirana le v $x = 0$. Ob razmisleku o ničlah vidimo, da je vrednost v $x = 0$ ravno 0. Presek grafa naše funkcije s koordinatno ravnino O_{xz} je torej zgolj točka $(0, 0)$. Računsko to vidimo tako: vse točke na koordinatni ravnini O_{xz} opišemo z enačbo $y = 0$. Zanimajo nas torej samo funkcijske vrednosti $f(x, 0) = \sqrt{-x^2}$. Dobljen koren je definiran zgolj pri vrednosti $x = 0$, njegova vrednost je 0. Prerez s koordinatno ravnino O_{xz} skicirajmo v modri barvi.

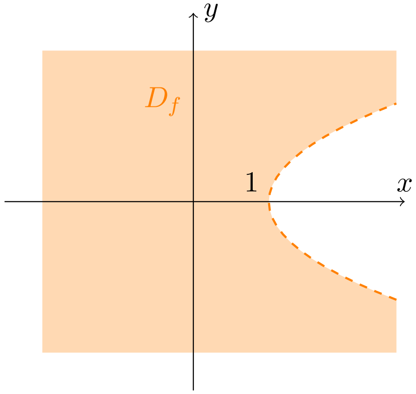


• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{yz}}$:** Zanimajo nas zgolj vrednosti $f(0, y) = \sqrt{y}$. Skicirajmo krivuljo $z = \sqrt{y}$ (kar je zgornja polovica parabole $y = z^2$), ki je presek grafa naše funkcije s koordinatno ravnino O_{yz}, v zeleni barvi.



• **Zaloga vrednosti:** Končno imamo dovolj podatkov za razmislek o zalogi vrednosti. Razmislili smo že, da funkcija ne doseže negativnih vrednosti, hkrati pa iz razmisleka o preseku grafa s koordinatno ravnino O_{yz} vidimo, da doseže vse vrednosti od 0 navzgor. Torej je $Z_f = [0, \infty)$.

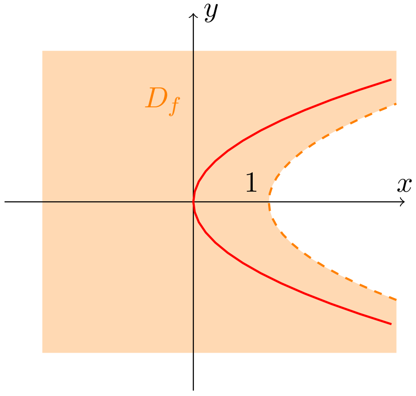
(b) $f(x, y) = \ln(y^2 - x + 1)$
• **Definicijsko območje:** Funkcija bo definirana natanko tedaj, ko bo definiran naravni logaritem, t.j. ko bo $y^2 - x + 1 > 0$ oz. $y^2 + 1 > x$. Krivulja $x = y^2 + 1$ v ravnini xy predstavlja kvadratno parabolo, ki je odprta v pozitivni smeri abscisne osi, in je meja definicijskega območja naše funkcije. Z neenačbo $y^2 + 1 > x$ so določene točke levo od parabole (saj je njihova abscisa manjša od abscise točk na paraboli). Tako je naravno definicijsko območje naše funkcije $D_f = \{(x, y) \mid y^2 + 1 > x\}$. Skicirajmo ga v ravnino O_{xy}.



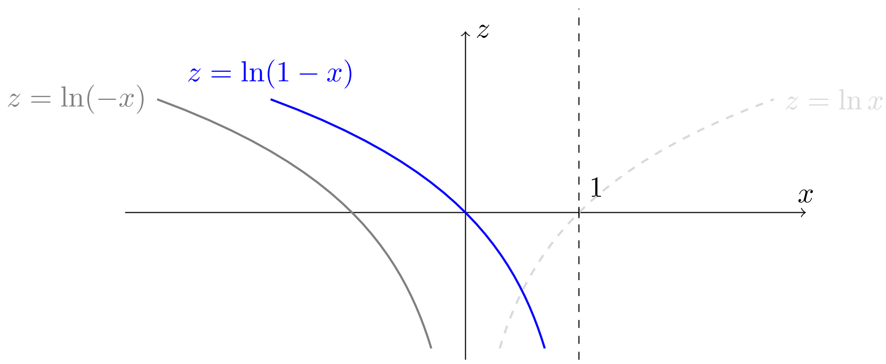
Tudi tokrat se bomo pred razmislekom o zalogi vrednosti lotili presekov grafa s koordinatnimi ravninami, saj imamo o samih funkcijskih vrednostih premalo informacij.
• **Ničle:** Iščemo tiste točke v koordinatni ravnini O_{xy}, za katere velja $\ln(y^2-x+1)=0$ oz. $y^2-x+1=1$. Rešitve te enačbe ležijo na paraboli z enačbo $x=y^2$.

$$N=\{(x,y)\mid x=y^2\}$$

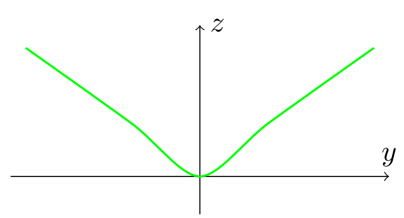
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xy}}$:** Skica preseka je krivulja rdeče barve.



Pri tem razmisleku smo se naučili tudi nekaj o zalogi vrednosti naše funkcije: vrednost 0 je v zalogi vrednosti.
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xz}}$:** Zanimajo nas torej samo funkcijske vrednosti $f(x,0)=\ln(-x+1)=\ln(1-x)$. Krivuljo $z=\ln(1-x)$ (na skici pobarvana z modro) skiciramo tako, da najprej skiciramo krivuljo $z=\ln x$, jo zrcalimo preko ordinatne osi, da dobimo $z=\ln(-x)$ in jo nato premaknemo za 1 enoto v desno.



• **Zaloga vrednosti:** Vidimo, da funkcija doseže vse realne vrednosti, torej $Z_f = \mathbb{R}$.
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{yz}}$:** Zanimajo nas zgolj vrednosti $f(0, y) = \ln(y^2 + 1)$. Krivuljo $z = \ln(y^2 + 1)$ bomo skicirali tako, da bomo razmislili o njenih vrednostih. Pri $y = 0$ je $z = \ln 1 = 0$. Krivulja torej poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema. Vidimo, da je soda, kar pomeni, da je simetrična glede na ordinatno os, torej je dovolj razmisliti kaj se dogaja s pozitivnimi y. Ko y narašča (od 0) proti ∞, tudi $y^2 + 1$ narašča proti ∞ (vmes nikoli ne pada). Isto velja za vrednosti $z = \ln(y^2 + 1)$ naraščajo proti ∞. Krivulja je narisana[1] v zeleni barvi.



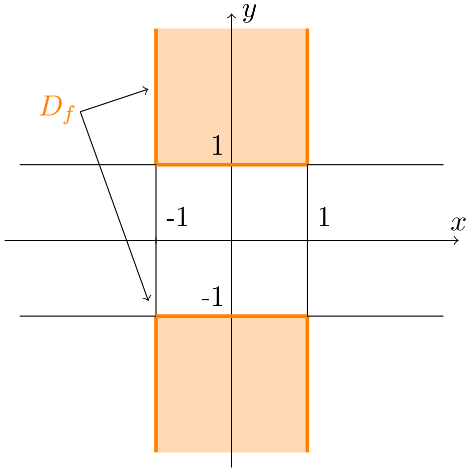
(c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$
• **Definicijsko območje:** Da bo definirana funkcija $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$, morata biti definirana oba korena, ki nastopata v njenem funkcijskem predpisu.

$$\sqrt{1 - x^2} \text{ je definiran } \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq 1$$
$$\sqrt{y^2 - 1} \text{ je definiran } \Leftrightarrow y^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 1 \Leftrightarrow |y| \geq 1$$

Naravno definicijsko območje je tako $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ in } |y| \geq\}$. Skicirajmo ga.

[1] Seveda bi se naloge lahko lotili malo bolj "resno" (z uporabo prvega in drugega odvoda), če bi želeli bolj natančno skico, kar pa v tem primeru ni potrebno.

Na kazalo



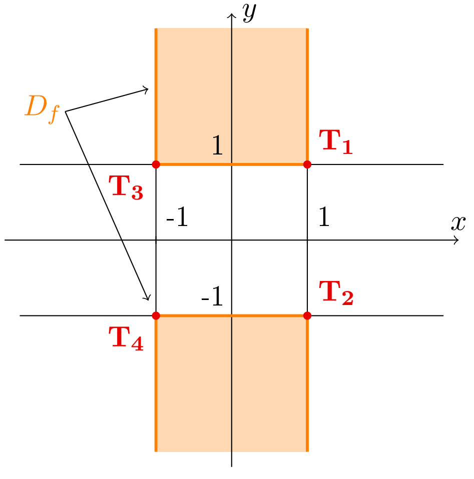
• **Ničle:** Iščemo množico točk, za katero velja $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}=0$. Vsota dveh korenov je enaka 0 natanko tedaj, ko je vsak izmed korenov enak nič.

$$\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$
$$\sqrt{y^2-1}=0 \Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Točke iz $\mathbb{R}^2$, ki zadoščajo obema pogojema so $T_1(1,1)$, $T_2(1,-1)$, $T_3(-1,1)$ in $T_4(-1,-1)$.

$$N=\{T_1(1,1),\, T_2(1,-1),\, T_3(-1,1),\, T_4(-1,-1)\}$$

• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xy}}$:** Točke, ki so v preseku so označene z rdečo barvo.



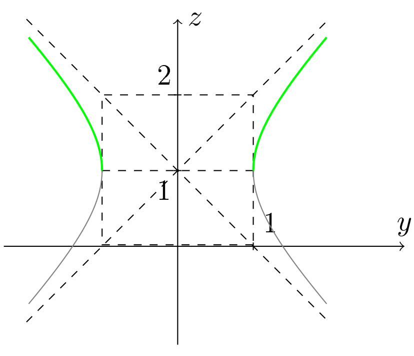
Tale skica nam da malo več informacij o grafu funkcije. Ploskev, ki predstavlja graf dane funkcije očitno leži nad koordinatno ravnino O_{xy}, Dotakne pa se je v štirih ničlah. S tem smo izvedeli tudi nekaj dodatnega o zalogi vrednosti naše funkcije: število 0 je zagotovo v Z_f.

• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xz}}$:** Presek je prazna množica, saj je os x izven definicijskega območja. Računsko to vidimo tako, da v funkcijski predpis vstavimo pogoj $y = 0$ (vsaka točka na ravnini O_{xz} ima drugo koordinato enako 0) in dobimo $f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{-1}$, kar pa ni realno število.

• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{yz}}$:** Zanimajo nas funkcijske vrednosti točk, za katere je $x = 0$ in dobimo $f(0, y) = \sqrt{1} + \sqrt{y^2 - 1} = 1 + \sqrt{y^2 - 1}$. V ravnini O_{yz} moramo skicirati krivuljo z enačbo $z = 1 + \sqrt{y^2 - 1}$. Enačno najprej malo preoblikujemo, potem kvadriramo levo in desno stran enačbe (pri tem se zavedamo, da smo mogoče kako rešitev pridobili).

$$\begin{aligned} z &= 1 + \sqrt{y^2 - 1} \\ z - 1 &= \sqrt{y^2 - 1} \\ (z-1)^2 &= y^2 - 1 \\ y^2 - (z-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

V dobljeni enačbi prepoznamo enačbo hiperbole[2] v ravnini O_{yz} s "središčem" v točki $(0, 1)$, malo in veliko os enake dolžine t.j. dolžine 1. Dobljena krivulja ni graf nobene funkcije (saj za nekatere y dobimo kar dve vrednosti z). Tukaj se lepo, geometrijsko, vidi, kaj smo pridobili s kvadriranjem leve in desne strani enačbe $z - 1 = \sqrt{y^2 - 1}$: pridobili smo tudi rešitve enačbe $z - 1 = -\sqrt{y^2 - 1}$. Zgornja polovica hiperbole predstavlja krivuljo $z = 1 + \sqrt{y^2 - 1}$, spodnja polovica pa krivuljo $z = 1 - \sqrt{y^2 - 1}$. Iskani presek grafa funkcije $f(x, y)$ in koordinatne ravnine O_{yz} je na skici označen z zeleno barvo.



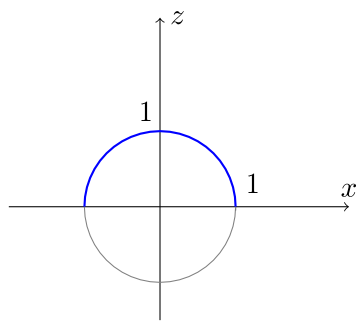
• **Zaloga vrednosti:** Do zdaj smo razmislili že, da v zalogi vrednosti zagotovo ni negativnih števil ter da dosežemo vrednost 0. Z razmislekom o preseku grafa naše funkcije s koordinatno ravnino O_{yz} pa smo dobili dodatne informacije v zvezi z zalogo vrednosti: vidimo, da funkcija doseže tudi vrednosti iz intervala $[1, \infty)$. Če narišemo še prerez po ravnini $y = 1$, bomo videli, da funkcija doseže tudi višine med 0 in 1. Za

[2] O enačbah krožnice, elipse in hiperbole je več napisano v dodatku B.

ta prerez nas zanimajo funkcijske vrednosti v $f(x,1) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-1} = \sqrt{1-x^2}$. Vzemimo enačbo $z = \sqrt{1-x^2}$, kvadrirajmo njeno levo in desno stran (pozor, spet bomo pridobili še rešitve enačbe $z = -\sqrt{1-x^2}$) ter enačbo malce preoblikujmo.

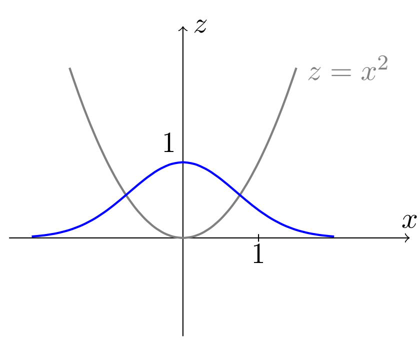
$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1-x^2} \\ z^2 &= 1-x^2 \\ x^2+z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dobljena enačba v ravnini xz predstavlja krožnico v izhodiščni legi, s polmerom 1. Krivuljo, ki ni graf nobene funkcije, spet "prerežemo" v levem in desnem temenu, za naš prerez pa vzamemo le zgornjo polovico krožnice (ta je namreč graf funkcije $z = z(x) = z = \sqrt{1-x^2}$). Na skici jo narišemo z modro barvo.

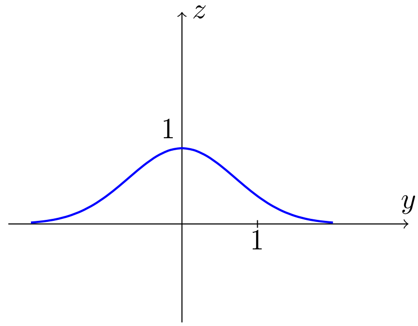


Očitno naša funkcija doseže vse vrednosti od 0 navzgor, torej je $Z_f = [0, \infty)$.

(d) • **Definicijsko območje:** Funkcija $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ je vedno definirana, tako je $D_f = \mathbb{R}^2$.
• **Ničle:** Iščemo množico točk, za katero velja $e^{-x^2-y^2} = 0$. Očitno dana funkcija nima ničel.
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xy}}$:** Je prazna množica.
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xz}}$:** Zanimajo nas funkcijske vrednosti $f(x,0) = e^{-x^2}$. V ravnini O_{yz} skicirajmo krivuljo z enačbo $z = x^2$ s sivo (le-ta nam pove kako se obnaša eksponent funkcije), z modro pa skicirajmo krivuljo z enačbo $z = e^{-x^2}$.

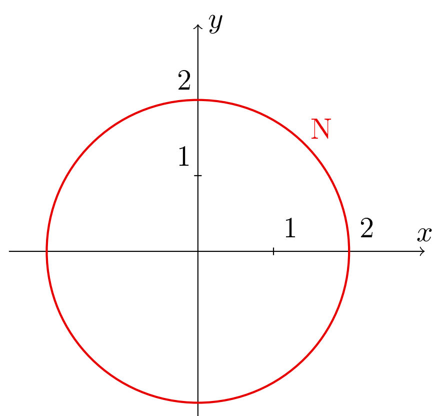


• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{yz}}$:** Zanimajo nas funkcijske vrednosti $f(0,y) = e^{-y^2}$. Krivulja z enačbo $z = e^{-y^2}$ je identična prej narisani krivulji, le da je ta v ravnini O_{yz}. Na skici je narisana z modro barvo.

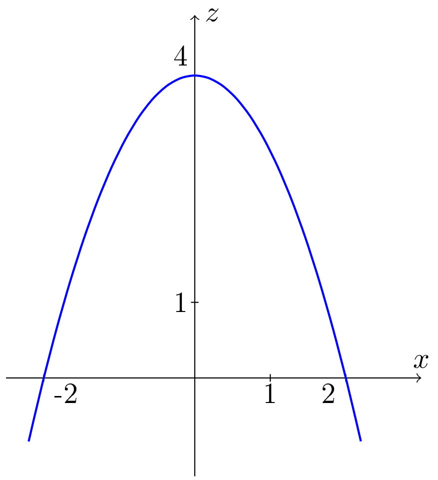


• **Zaloga vrednosti:** Funkcija $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ lahko doseže le pozitivne vrednosti. Graf funkcije $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ je rotacijska ploskev, saj vidimo, da lahko enačbo vsake nivojnice $e^{-x^2-y^2} = A(>0)$ prepišemo v $x^2+y^2 = -\ln A$, kar nam predstavlja krožnico v izhodiščni legi s polmerom $-\ln A$ (kadar je $-\ln A$ pozitiven). To pomeni, da dobimo graf funkcije $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ tako, da rotiramo npr. krivuljo $z = e^{-x^2}$ (t.j. prerez grafa z koordinatno ravnino O_{xz}) okrog osi z. Očitno lahko dosežemo zgolj višine večje od 0 ter manjše ali enake 1. Tako je $Z_f = (0,1]$.

(e) • **Definicijsko območje:** Funkcija $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ je vedno definirana, tako je $D_f = \mathbb{R}^2$.
• **Ničle:** Iščemo množico točk, za katero velja $4 - x^2 - y^2 = 0$. Dobimo $N = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4\}$, kar je krožnica v izhodiščni legi, s polmerom 2.
• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xy}}$:**



• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{xz}}$:** Zanimajo nas funkcijske vrednosti $f(x,0) = 4 - x^2$. Krivuljo $z = 4 - x^2$ narišimo z modro barvo.



• **Presek s koordinatno ravnino $\mathbf{O_{yz}}$:** Zanimajo nas funkcijske vrednosti $f(0,y) = 4-y^2$. Krivulja $z = 4-y^2$ je identična zgoraj narisani, le da se nahaja v ravnini O_{yz}.
• **Zaloga vrednosti:** Funkcija $f(x,y) = 4-x^2-y^2$ lahko doseže le vrednosti manjše ali enake 4. Tako je $Z_f = (-\infty, 4]$.

6. Pokaži, da je funkcija

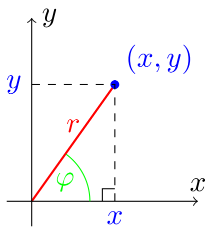
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

v točki $(0,0)$ nezvezna, funkciji $f(x,0)$ in $f(0,y)$ pa zvezni (v $x=0$ in $y=0$).

Rešitev: Funkcija dveh spremenljivk je zvezna v točki (a,b) natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)\,.$$

Medtem ko znamo izračunati limite funkcije ene spremenljivke, je pri limitah funkcije dveh spremenljivk problem bolj kompleksen. Če želimo npr. izračunati limito, kjer $(x,y) \to (0,0)$, ni dovolj poskrbeti, da $x \to 0$ in $y \to 0$. Limita funkcije dveh spremenljivk je namreč vrednost, h kateri se bližajo funkcijske vrednosti funkcije $f(x,y)$ kadar je točka (x,y) "blizu" točke $(0,0)$. To pomeni, da je vseeno po kateri poti in na kak način se bližamo točki $(0,0)$, limita mora biti neodvisna od poti, upošteva le oddaljenost od točke.
Za poljubno točko (x,y) je pomen prve in druge koordinate označen na spodnji sliki. Hkrati lahko položaj točke (x,y) opišemo s pomočjo kota φ (t.j. kot, ki ga oklepata daljica, ki povezuje točko (x,y) z izhodiščem koordinatnega sistema ter pozitivni del abscisne osi) in oddaljenosti r točke (x,y) od izhodišča koordinatnega sistema.



V dobljenem pravokotnem trikotniku se kosinus kota φ izračuna kot $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ (dolžina priležne katete ulomljena z dolžino hipotenuze), iz česar izrazimo $x = r\cos\varphi$. Sinus kota izrazimo podobno $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, iz te enakosti pa izrazimo $y = r\sin\varphi$.

Zdaj znamo izraziti limito funkcije dveh spremenljivk z limito funkcije ene spremenljivke (kar bomo pa znali izračunati). Pri izračunu limite bomo najprej upoštevali, da, ko $r \to 0$, točka $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (še) ni enaka $(0, 0)$ in za njene funkcijske vrednosti uporabimo prvo vrstico v nalogi definiranega funkcijskega predpisa.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos\varphi\,\sin\varphi}{\cancel{r^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} \cos\varphi\,\sin\varphi = \cos\varphi\,\sin\varphi$$

Ker izraz $\cos\varphi\,\sin\varphi$ ni odvisen od spremenljivke r, je limita naše funkcije. To pa pomeni, da je vrednost, ki jo dobimo, odvisna od smeri, po kateri se približujemo izhodišču. Torej nimamo ene same vrednosti, h kateri se funkcijske vrednosti približujejo, ko se točka bliža izhodišču, in limita zato ne obstaja. Naša funkcija ni zvezna v točki $(0, 0)$.

Poglejmo sedaj, kako je z zveznostjo funkcije $f(x, 0)$ v $x = 0$. Najprej zapišimo funkcijski predpis za opazovano funkcijo.

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} & ; \quad x^2 + 0 \neq 0 \\ 0 & ; \quad x^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

Ker sta predpisa v obeh vrsticah enaka 0, je funkcija $f(x, 0)$ ničelna, torej zvezna povsod (tudi v $x = 0$).

Podobno razmislimo, da je tudi funkcija $f(0, y)$ ničelna in tako zvezna povsod (tudi v $y = 0$).

7. Izračunaj odvode po vseh spremenljivkah dane funkcije.

   (a) $f(x,y) = x^2 \sin y$,

   (b) $f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{x}}$,

   (c) $f(x,y) = e^{xy^2}$,

   (d) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$,

   (e) $f(x,y) = \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{y}))$,

Rešitev: Pri izračunu odvodov uporabimo pravila za odvajanje ter tabelo odvodov.

(a) Funkcija $f(x,y) = x^2 \sin y$ je produkt funkcij $g(x) = x^2$ (odvisna le od spremenljivke x in kot taka konstanta, ko odvajamo po y) in $h(y) = \sin y$ (odvisna le od spremenljivke y in kot taka konstanta, ko odvajamo po x).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$$

(b) Za funkcijo $f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{x}}$ uporabimo pravilo kvocienta. Najprej to zapišemo simbolno, potem poračunamo.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(xy-1)}{\partial x}\sqrt{x} - (xy-1)\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{y\sqrt{x} - (xy-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2xy-(xy-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{xy+1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{x}}y - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

(c) Funkcija $f(x,y) = e^{xy^2}$ je kompozitum eksponentne funkcije $g(t) = e^t$ (katere odvod je $g'(t) = e^t$) in polinoma (dveh spremenljivk) $p(x,y) = xy^2$ (z odvodoma $\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = y^2$ in $\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 2xy$). Pri odvajanju uporabimo pravilo kompozituma.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(xy^2)\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = e^{xy^2}y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(xy^2)\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = e^{xy^2}2xy$$

(d) Tudi $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ je kompozitum, tokrat imamo opravka s funkcijama $g(t) = \operatorname{arctg} t$ (z odvodom $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$) in $h(x,y) = \frac{x}{y}$ (z odvodoma $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}$ in

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

(e)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\cancel{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}}}\cdot\frac{1}{\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2}{2\cdot y\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{2}{y\sin\left(\frac{2x}{y}\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sin\left(\frac{2x}{y}\right)}\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{2}{\sin\left(\frac{2x}{y}\right)}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2\sin\left(\frac{2x}{y}\right)}$$

8. Zapiši gradient dane funkcije ter izračunaj $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, če je

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy + xy^2 + y^3$,

   (b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

Rešitev: **Gradient** funcije dveh spremenljivk je

$$(\text{grad } f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2xy + 3y^2$$

$$(\text{grad } f)(x,y) = \left(3x^2+3y+y^2, 3x+2xy+3y^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3+2y\Big(= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ - saj je } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ zvezna}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 6y$$

Na kazalo

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$
$$(\text{grad } f)(x,y) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\cdot\frac{-(x+y)^2+2x(x+y)}{(x+y)^4} = 2\cdot\frac{\cancel{(x+y)}(-(x+y)+2x)}{(x+y)^{\cancel{4}3}} = 2\cdot\frac{-x-y+2x}{(x+y)^3} =$$
$$= 2\cdot\frac{x-y}{(x+y)^3}\left(= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ - saj je } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ zvezna}\right)$$

9. Pokaži, da za $f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$ velja $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

Rešitev: Izračunajmo vse parcialne odvode funkcije in preverimo ali velja enakost v podani (funkcijski) enačbi. Za vsakega izmed parcialnih odvodov smo funkcijski predpis preoblikovali tako, da je najlaže odvajati.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(x + \frac{x}{y-z} - \frac{y}{y-z}\right)}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(x + \frac{x-y}{y-z}\right)}{\partial y} = \frac{(x-y)'_y(y-z)-(x-y)(y-z)'_y}{(y-z)^2} = \frac{-y+z-x+y}{(y-z)^2} = \frac{z-x}{(y-z)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\left(x + (x-y)(y-z)^{-1}\right)}{\partial z} = -(x-y)(y-z)^{-2}(-1) = \frac{x-y}{(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z} = 1+\frac{1\cdot(y-z)}{(y-z)\cdot(y-z)}+\frac{z-x}{(y-z)^2}+\frac{x-y}{(y-z)^2} = 1+\frac{(y-z)+(z-x)+(x-y)}{(y-z)^2} = 1$$

Na kazalo

10. Za funkcije $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$, $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t - 4$, izračunaj $g'(t)$, kjer je $g(t) = f(x(t), y(t))$, direktno in s pomočjo verižnega pravila.

Rešitev: • **Direktno:** Pri tem načinu eksplicitno zapišemo funkcijski predpis za $g(t) = f(x(t), y(t))$ in šele potem odvajamo.

$$\begin{aligned} g(t) = f(x(t), y(t)) = f(t^2+1, t-4) &= 2(t^2+1)^2 + (t^2+1)(t-4) + (t-4)^2 = \\ &= 2(t^4 + 2t^2 + 1) + t^3 - 4t^2 + t - 4 + t^2 - 8t + 16 = 2t^4 + t^3 + t^2 - 7t + 14 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 8t^3 + 3t^2 + 2t - 7$$

• **Z verižnim pravilom:** Uporabimo verižno pravilo

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t).$$

Najprej izračunajmo posamezne (parcialne) odvode ter vstavimo dobljene rezultate v nastavek.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2+1, t-4) = 4(t^2+1) + (t-4) = 4t^2 + t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+1, t-4) = (t^2+1) + 2(t-4) = t^2 + 2t - 3$$

$$x'(t) = 2t$$

$$y'(t) = 1$$

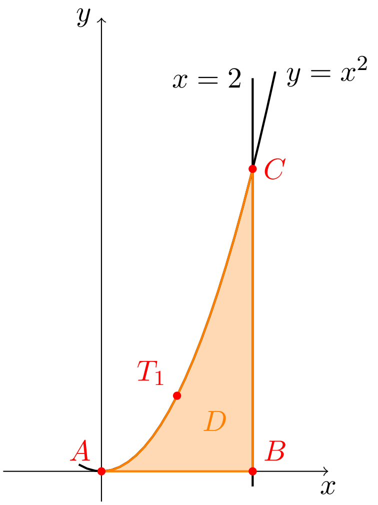
$$\Rightarrow g'(t) = (4t^2 + t)2t + (t^2 + 2t - 3)1 = 8t^3 + 3t^2 + 2t - 7$$

11. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xe^{x-y}$ na območju, ki ga omejujejo krivulje $y = x^2$, $y = 0$ in $x = 2$.

Rešitev: Za iskanje globalnih ekstremov uporabimo naslednji izrek.
Izrek: Naj bo Δ zaprta omejena podmnožica $\mathbb{R}^2$ in $f : \Delta \to \mathbb{R}$ zvezna na Δ. Potem funkcija f na Δ doseže svoj globalni maksimum in svoj globalni minimum.
Če je f tudi parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah v notranjosti Δ, potem ekstremne vrednosti doseže bodisi v notranjih stacionarnih točkah bodisi v robnih točkah območja.

Podana funkcija je produkt polinoma x in kompozituma eksponentne funkcije e^t in polinoma dveh spremenljivk $x - y$. Vse te funkcije so povsod zvezne in odvedljive, zato za naš primer uporabimo izrek.

Najprej skicirajmo območje na katerem iščemo ekstremne vrednosti dane funkcije. Dobimo krivočrti trikotnik omejen s premicama $y = 0$ (abscisna os), $x = 2$ ter parabolo $y = x^2$, ki ga poimenujmo D.



Problem iskanja globalnega ekstrema zvezne in parcialno odvedljive funkcije na kompaktnem območju D razdelimo na dva koraka. Najprej poiščimo stacionarne točke, potem pa raziščimo meje kompaktnega območja. Meje preučimo tako, da izrazimo točke na krivulji, ki predstavlja mejo, kot graf funkcije ene spremenljivke. Geometrijsko gledano, režemo graf funkcije $f(x, y)$ s ploskvijo, ki je pravokotna na ravnino O_{xy} in je "napeta" na opazovano krivuljo. Potem pa iščemo globalne ekstreme funkcije ene spremenljivke, ki jo tako dobimo. Ker jih iščemo na zaprtem intervalu, spadata krajišči te krivulje med *kandidate za ekstreme.* V našem primeru so to točke $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ in $C(2, 4)$, označene na skici. Na koncu le še preverimo kateri izmed kandidatov je zares maksimum oz. minimum naše funkcije (t.j. v kateri izmed dobljenih točk doseže naša funkcija največjo oz. najmanjšo vrednost).

• **Stacionarne točke:** Funkcija ima stacionarno točko v (a, b), če je grad $(f)(a, b) = 0$. Izračunajmo parcialna odvoda in ju zapišimo v faktorizirani obliki, da bomo lažje odčitali njuni ničli.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-y} + xe^{x-y} = (1 + x)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xe^{x-y}$$

Prvi odvod je ničelen natanko tedaj, ko je $x = -1$ (saj eksponentna funkcija nikoli ne doseže ničelne vrednosti), drugi pa v primeru, ko je $x = 0$. Kar pomeni, da v ravnini ni točke (x, y), za katero sta oba odvoda hkrati enaka 0.

• **Meje:**

- **AB**: Daljico opišemo s pogojema $y = 0$ in $x \in [0, 2]$. Izmed funkcijskih vrednosti vseh točk na ravnini nas zanimajo le $f(x, 0) = xe^x = g_1(x)$. Dobili smo funkcijski predpis funkcije ene spremenljivke, ki jo poimenujemo $g_1(x)$ (graf te funkcije dobimo kot presečišče grafa funkcije $f(x, y)$ z ravnino $y = 0$). Stacionarne točke funkcije $g_1(x)$ izračunamo: $g_1'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x = 0$ oz. $x = -1$. Ker $-1 \notin [0, 2]$, ta stacionarna točka ni zanimiva za našo nalogo.
- **BC**: $x = 2$, $y \in [0, 4]$; $f(2, y) = 2e^{2-y} = g_2(y)$
  Stacionarne točke[3]: $g_2'(y) = -2e^{2-y} \neq 0$, funkcija $g_2(y)$ nima stacionarnih točk.
- **AC**: $y = x^2$, $x \in [0, 2]$; $f(x, x^2) = xe^{x-x^2} = g_3(x)$
  Stacionarne točke: $g_3'(x) = e^{x-x^2} + xe^{x-x^2}(1 - 2x) = (1 + x(1 - 2x))e^{x-x^2} = 0 \Leftrightarrow$

[3]Funkcija $g_2(y)$ je padajoča funkcija in zato nima stacionarnih točk. To lahko vidimo tudi brez izračuna odvoda.

Na kazalo

$-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \Leftrightarrow x_1 = 1 \ (y_1 = 1^2 = 1)$ in $x_2 = -\frac{1}{2} \notin [0,2]$; stacionarna točka $T_1(1,1)$.

- **Kandidati za ekstreme:**

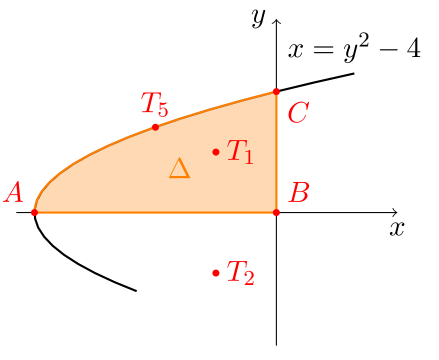
$$\begin{aligned} A(0,0) &\to f(0,0) = 0 \\ B(2,0) &\to f(2,0) = 2e^2 \\ C(2,4) &\to f(2,4) = 2e^{2-4} = \frac{2}{e^2} \\ T_1(1,1) &\to f(1,1) = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Globalni maksimum, ki znaša $2e^2$, naša funkcija doseže v točki $B(2,0)$, globalni minimum, ki znaša 0, pa v točki $A(0,0)$.

12. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xy^2 - x + y^2$ na območju

$$\Delta = \{(x,y);\ 0 \le y \le 2, y^2 - 4 \le x \le 0\}.$$

Rešitev: Tudi funkcija v drugem primeru je zvezna in odvedljiva po obeh spremenljivkah.



- **Stacionarne točke:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - 1 = (y-1)(y+1) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$$

Rešitvi prve enačbe sta $y = \pm 1$, rešitvi druge pa $y = 0$ ali $x = -1$. Sistem rešita točki $T_1(-1,1)$ in $T_2(-1,-1)$. Točka T_2 ne leži v Δ, zato je ne uvrstimo med kandidate za ekstreme.

- **Meje:**

- **AB**: $y = 0$, $x \in [-4, 0]$; $f(x, 0) = -x = g_1(x)$ - nima stacionarnih točk.
- **BC**: $x = 0$, $y \in [0, 2]$; $f(0, y) = y^2 = g_2(y)$
  Stacionarne točke doseže funkcija g_2 v temenu t.j. v $y = 0 \Rightarrow T_3 = B$.
- **AC**: $x = y^2-4$, $y \in [0, 2]$; $f(y^2-4, y) = (y^2-4)y^2-(y^2-4)+y^2 = y^4-4y^2+4 = g_3(y)$
  Stacionarne točke: $g_3'(y) = 4y^3 - 8y = 4y(y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ali $y = \pm\sqrt{2}$;
  (a) $y = 0 \Rightarrow x = -4$: $T_4 = A$,
  (b) $y = \sqrt{2} \Rightarrow x = -2$: $T_5\left(-2, \sqrt{2}\right)$,
  (c) $y = -\sqrt{2} \notin [0, 2]$ - ta možnost odpade.

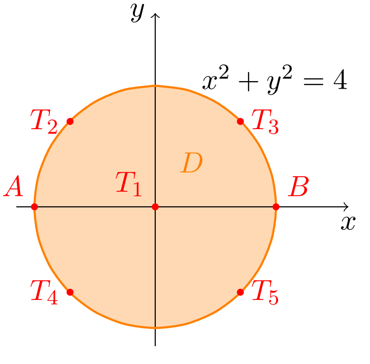
- **Kandidati za ekstreme:**

$$\begin{aligned}
&A(-4, 0) \ \to\ f(-4, 0) = 4\\
&B(0, 0) \ \to\ f(0, 0) = 0\\
&C(0, 2) \ \to\ f(0, 2) = 4\\
&T_1(-1, 1) \ \to\ f(-1, 1) = 1\\
&T_5\left(-2, \sqrt{2}\right) \ \to\ f\left(-2, \sqrt{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Globalni minimum, ki znaša 0, naša funkcija doseže v točkah $B(0, 0)$ in $T_5\left(-2, \sqrt{2}\right)$, globalni maksimum, ki znaša 4, pa v točkah $A(-4, 0)$ in $C(0, 2)$.

13. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ na krogu $x^2 + y^2 \leq 4$.

Rešitev:



- **Stacionarne točke:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 6x - 2y = 2(3x - y) = 0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2x + 6y = -2(x - 3y) = 0
\end{aligned}$$

Na kazalo

Rešitev prve enačbe so točke na premici $y = 3x$, rešitve druge enačbe pa točke na premici $x = 3y$ (oz. $y = \frac{x}{3}$). Premici se sekata v izhodišču zato je edina stacionarna točka $T_1(0,0)$.
• **Meje:** Krožnico, ki je meja našega območja, ne moremo predstaviti kot graf funkcije. Lahko pa jo "razrežemo" npr. na zgornjo in spodnjo polovico krožnice, ti dve pa lahko predstavimo kot grafa dveh funkcij. Računsko izpeljemo to tako, da iz enačbe krožnice $x^2 + y^2 = 4$ izrazimo spremenljivko y s spremenljivko x.

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Predpis $y = y(x) = +\sqrt{4 - x^2}$ je predpis funkcije, katere graf je zgornja polovica krožnice (saj so ordinate točk na grafu pozitivne). Graf funkcije $y = y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ pa je spodnja polovica krožnice (ordinate točk so negativne). Ker smo krožnico "prerezali" v dveh točkah, imamo sedaj dve točki, kjer "lepimo" robove območja in kot taki že sami po sebi kandidatki za ekstreme. Poimenujmo ju $A(-2,0)$ in $B(2,0)$.

- **AB-zgornji lok**: $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$;

  $$f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 3x^2 - 2x\sqrt{4 - x^2} + 3(4 - x^2) = 12 - 2x\sqrt{4 - x^2} = g_1(x)$$

  Stacionarne točke: $g_1'(x) = -2\left(\sqrt{4 - x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\right) = -2\cdot\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = -4\cdot\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ($y = \sqrt{4 - (\pm\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$). Stacionarni točki sta $T_2\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ in $T_3\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.
- **AB-spodnji lok**: $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$;

  $$f(x, -\sqrt{4 - x^2}) = 3x^2 + 2x\sqrt{4 - x^2} + 3(4 - x^2) = 12 + 2x\sqrt{4 - x^2} = g_2(x)$$

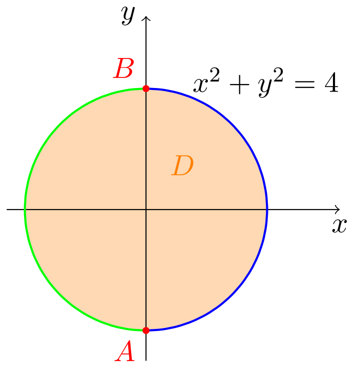
  Vidimo, da se odvod funkcije $g_2(x)$ od odvoda funkcije $g_1(x)$ razlikuje le po predznaku, in je $g_2'(x) = 4\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$. Ničli tega odvoda sta $x = \pm\sqrt{2}$ ($y = -\sqrt{4 - (\pm\sqrt{2})^2} = -\sqrt{2}$), stacionarni točki na tem robu pa $T_4\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ in $T_5\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

• **Kandidati za ekstreme:**

$$A(-2,0) \;\rightarrow\; f(-2,0) = 12$$
$$B(2,0) \;\rightarrow\; f(2,0) = 12$$
$$T_1(0,0) \;\rightarrow\; f(0,0) = 0$$
$$T_2\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \;\rightarrow\; f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 6 + 4 + 6 = 16$$
$$T_3\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \;\rightarrow\; f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 6 - 4 + 6 = 8$$
$$T_4\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \;\rightarrow\; f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 6 + 4 + 6 = 16$$
$$T_5\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \;\rightarrow\; f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 6 - 4 + 6 = 8$$

Na kazalo

Globalna maksimuma, ki znašata 16, naša funkcija doseže v točkah $T_{2,4}\left(-\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$, globalni minimum, ki znaša 0, pa v točki $T_1(0,0)$.
OPOMBA: Iskanja ekstremov na mejah se lahko lotimo tudi drugače.
II. način: Namesto, da krožnico $x^2+y^2=4$ "razrežemo" na zgornjo in spodnjo polovico, jo lahko "razrežemo" na levo in desno polovico. V jeziku funkcij: krivuljo predstavimo kot grafa dveh funkcij spremenljivke y. Računsko gledano iz enačbe $x^2+y^2=4$ izrazimo spremenljivko x s spremenljivko y: $x = \pm\sqrt{4-y^2}$.



Pri izbiri $x = x(y) = -\sqrt{4-y^2}$ govorimo o levi polovici krožnice, pri $x = x(y) = \sqrt{4-y^2}$ pa o desni polovici. Pri tem v seznam kandidatov za ekstreme funkcije $f(x,y)$ dodamo točki $A(0,-2)$ in $B(0,2)$. Izbira, kdaj izbrati ta način in kdaj način, na katerega je rešena naloga, je odvisna od funkcijskega predpisa same funkcije. Če npr. v funkcijskem predpisu nastopa spremenljivka x samo s sodimi potencami, potem za reševanje uporabimo II. način (da se v računanju izognemo korenom). V našem primeru je vseeno na kateri način računamo, saj tako x kot y nastopata le linearno.
III. način: Krožnico lahko predstavimo tudi s pomočjo polarnih koordinat s konstantnim polmerom $r=2$. Vsako točko na krožnici lahko potem izrazimo s kotom φ: $(x,y) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$. Če postavimo $\varphi \in [0, 2\pi]$, to pomeni, da krožnico "režemo" v eni sami točki, $A(2,0)$. Za iskanje ekstremov na krožnici opazujemo funkcijo $g(\varphi) = f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$. Vsak študent naj nalogo samostojno izpelje do konca.

3 Dvojni integral

1. Izračunaj dvojni integral $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, kjer sta

   (a) $D=[0,2]\times[0,1]$ ter $f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}$,

   (b) $D=[0,1]\times[1,2]$ ter $f(x,y)=x+y$,

   (c) $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq 2\}$ ter $f(x,y)=x^2y\cos(xy^2)$.

Rešitev:

(a) Ker je območje $D=[0,2]\times[0,1]$ pravokotnik s stranicami vzporednimi koordinatnima osema, lahko preidemo iz dvojnega na dvakratni integral na dva načina.

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^2 \frac{x^2}{1+y^2}dx$$

Pri obeh načinih bomo uporabili dejstvo, da lahko funkcijo $f(x,y)$ zapišemo kot produkt dveh funkcij $f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}=g(x)\cdot h(y)$, kjer je $g(x)=x^2$ in $h(y)=\frac{1}{1+y^2}$. Zato lahko dvakratni integral zapišemo kot produkt dveh enojnih integralov.

$\int_0^2 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy=\int_0^2 dx\int_0^1 g(x)\cdot h(y)\,dy=\int_0^2 g(x)dx\cdot\int_0^1 h(y)\,dy=\int_0^2 x^2\,dx\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy=$

$$=\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2\cdot(\operatorname{arctg} y)_0^1=\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}$$

(b) Za pravokotno območje $D=[0,1]\times[1,2]$ poteka prehod iz dvojnega v dvakratni integral v poljubnem vrstnem redu, vendar se funkcija $f(x,y)=x+y$ ne da zapisati kot produkt dveh funkcij, pri čemer je ena odvisna le od spremenljivke x druga pa le od spremenljivke y. To pomeni, da dvakratnega integrala ne moremo zapisati kot produkt dveh enojnih integralov.

$$\iint\limits_D (x+y)dx\,dy=\int_0^1 dx\int_1^2 (x+y)dy=\int_1^2 dy\int_0^1 (x+y)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{x=0}^1 dy=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{4-1}{2}=2$$

Vsak študent naj samostojno izračuna vrednost dvakratnega integrala z drugim vrstnim redom integriranja $\int_0^1 dx\int_1^2 (x+y)dy$.

Na kazalo

(c) Tudi sedaj je območje $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2]$ pravokotno, vendar se funkcija $f(x,y) = x^2 y\cos(xy^2)$ ne da zapisati kot produkt dveh funkcij. Zaradi oblike območja D je vseeno v kakšnem vrstnem redu zapišemo dvakratni integral.

$$\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2y\cos(xy^2)dy}_{I.} = \underbrace{\int_0^2 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2y\cos(xy^2)dx}_{II.}$$

Nalogo izračunajmo na prvi način. Vsak študent naj samostojno izračuna dvakratni integral še na drugi način.

V desnem integralu dvakratnega integrala I. uvedemo novo spremenljivko $(t(y) =)\, t = xy^2$, $dt = 2xy\,dy$ (oz. $xy\,dy = \frac{dt}{2}$), $\alpha = 0$, $\beta = 2^2x = 4x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2y\cos(xy^2)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{4x} x\cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \int_0^{4x} \cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin t\right)_{t=0}^{4x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(4x)dx = *$$

Zadnji integral izračunamo z integracijo "po delih", kjer izberemo $u = x$, $dv = \sin(4x)\,dx$ in izračunamo $du = dx$ ter $v = \int \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(4x) + C$ (ta integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = 4x$, kar pa lahko naredimo tudi na pamet).

$$* = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}x\cos(4x)\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)dx\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cos(2\pi) + \frac{1}{4^2}\left(\sin(4x)\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{16}$$

Na kazalo

2. Izračunaj dvakratni integral. Nariši integracijsko območje, zamenjaj vrstni red integracije in izračunaj integral v novem vrstnem redu.

(a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y x^2 y\, dx$

(b) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} x^2 y\, dy$

(c) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_y^{5-y} (x+y)^{-2}\, dx$

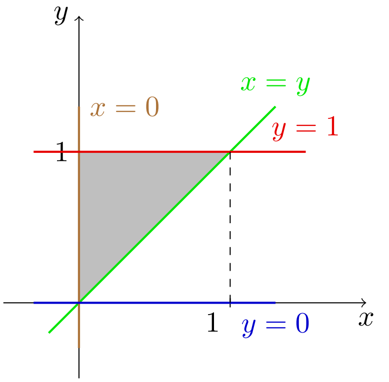
Rešitev:

(a) Najprej izračunajmo dvakratni integral v podanem vrstnem redu. Poudarimo, da podani dvakratni integral ni produkt dveh enojnih integralov, saj integracijsko območje ni pravokotno (v meji integrala po x nastopa funkcija spremenljivke y).

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y x^2 y\, dx = \int\limits_0^1 y\, dy \int\limits_0^y x^2\, dx = \int\limits_0^1 y \left(\frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{y} dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 y\left(y^3 - 0\right)\, dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 y^4\, dy = \frac{1}{3}\left(\frac{y^5}{5}\right)_0^1 = \frac{1}{15}$$

Skicirati moramo območje $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Spodnja meja tega območja je premica $y = 0$ (os x), zgornja meja pa $y = 1$. Leva meja območja je premica $x = 0$ (os y), desna pa $x = y$ (simetrala lihih kvadrantov).



Ko zamenjamo vrstni red, razmišljamo ravno obratno: najprej ugotovimo kaj sta leva in desna meja, šele potem kaj sta spodnja in zgornja. Abscise točk, ki ležijo na integracijskem območju so iz intervala $[0, 1]$, torej je leva meja $x = 0$, desna pa $x = 1$. Za vsak tak x potem integriramo (po y) od simetrale lihih kvadrantov do višine 1. Spodnja meja je tako $y = x$ (tokrat izražena kot funkcija x), zgornja meja pa $y = 1$.

Na kazalo

Zamenjajmo vrstni red integracije (pri tem se funkcijski predpis integrirane funkcije ne spremeni) ter izračunajmo dobljeni dvakratni integral.

$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 y\, dx = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 y\, dy = \int_0^1 x^2\, dx \int_x^1 y\, dy = \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)_x^1 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{1}{15}$$

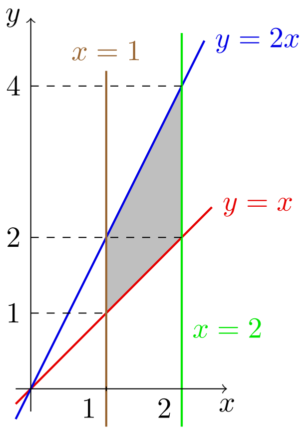
Vidimo, da je količina dela pri obeh vrstnih redih integriranja približno enaka. Temu ne bo vedno tako.

(b) Tokrat bomo isto funkcijo integrirali na drugem integracijskem območju.

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} x^2 y\, dy = \int_1^2 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 (4x^2 - x^2)\, dx = \frac{3}{2}\int_1^2 x^4\, dx = \frac{93}{10}$$

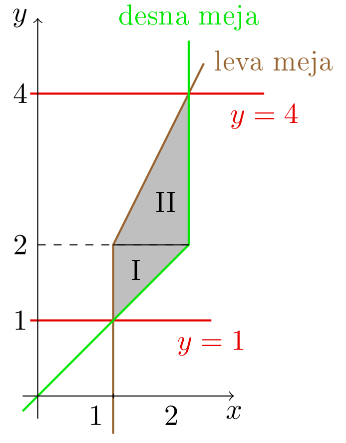
Določimo meje integracijskega območja in jih skicirajmo v koordinatni sistem.

leva meja: $x = 1$,
desna meja: $x = 2$,
spodnja meja: $y = x$,
zgornja meja: $y = 2x$



Ko zamenjamo vrstni red integracije, najprej razmislimo, kaj sta zgornja in spodnja meja, šele potem kaj sta leva in desna meja.

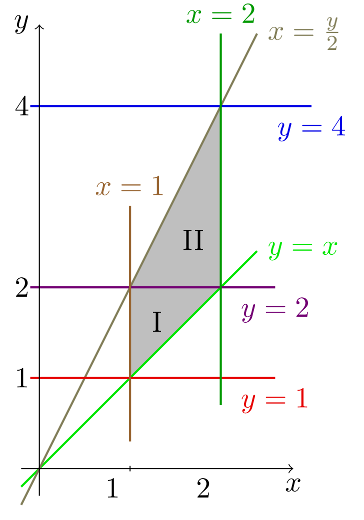
Na kazalo



Ker levega in desnega roba ne moremo opisati ”v enem grižljaju”, razdelimo integracijsko območje na dve območji, pri katerih pa bomo levo in desno mejo zlahka opisali.

Območje I:
spodnja meja: $y = 1$,
zgornja meja: $y = 2$,
leva meja: $x = 1$,
desna meja: $(y(x) =) y = x$
oz. $(x(y) =)\ x = y$

Območje II:
spodnja meja: $y = 2$,
zgornja meja: $y = 4$,
leva meja: $y = 2x$
oz. $x = \frac{y}{2}$,
desna meja: $x = 2$



$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} x^2 y\,dy = \int_1^2 dy \int_1^y x^2 y\,dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 x^2 y\,dx = \int_1^2 y \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^y dy + \int_2^4 y \left(\frac{x^3}{3}\right)_{\frac{y}{2}}^2 dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 y\left(y^3 - 1\right) dy + \frac{1}{3}\int_2^4 y\left(8 - \frac{y^3}{8}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)_1^2 + \left(8\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{40}\right)_2^4\right) = \frac{93}{10}$$

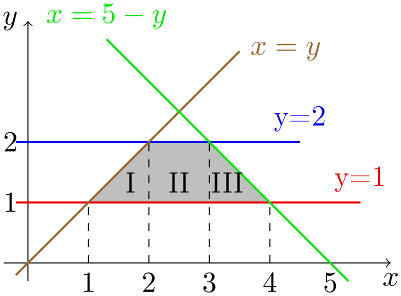
(c) Ko se lotimo računanja dvakratnega integrala v podanem vrstnem redu, vidimo, da je treba najprej uvesti novo spremenljivko (v enojni integral). Ko uvajamo novo spremenljivko, se zavedamo, da je treba integrirati po x in, da je spremenljivka y zato zgolj konstanta. Za uvedbo nove spremenljivke potrebujemo nastavke $t = x + y$, $dt = dx$, $\alpha = 2y$ in $\beta = 5$.

$$\int_1^2 dy \int_y^{5-y} (x+y)^{-2}\, dx = \int_1^2 dy \int_{2y}^{5} t^{-2}\, dt = \int_1^2 \left(\frac{t^{-1}}{-1}\right)_{t=2y}^{5} dy = -\int_1^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2y}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{5}$$

Narišimo integracijsko območje.

spodnja meja: $y = 1$,
zgornja meja: $y = 2$
leva meja: $x = y$ oz. $y = \frac{x}{2}$,
desna meja: $x = 5 - y$ oz. $y = 5 - x$



Območje bo očitno treba "rezati" pri $x = 2$ in $x = 3$. Dobljena območja označimo z I, II in III.

I:	leva meja: $x = 1$	II:	leva meja: $x = 2$	III:	leva meja: $x = 3$
	desna meja: $x = 2$		desna meja: $x = 3$		desna meja: $x = 4$
	spodnja meja: $y = 1$		spodnja meja: $y = 1$		spodnja meja: $y = 1$
	zgornja meja: $y = x$		zgornja meja: $y = 2$		zgornja meja: $y = 5 - x$

Zamenjajmo vrstni red integriranja in izračunajmo dobljene dvakratne integrale. Pri tem spet uvajamo novo spremenljivko $t = x + y$, le da je tokrat y spremenljivka, po kateri integriramo, x pa zato zgolj konstanta. Tako dobimo nastavke: $t = x + y$, $dt = dy$, (območje I) $\alpha_I = 1 + x$, $\beta_I = 2x$, (območje II) $\alpha_{II} = 1 + x$, $\beta_{II} = 2 + x$,

Na kazalo

(območje III) $\alpha_{III} = 1 + x$, $\beta_{III} = 5$.

$$\int\limits_1^2 dy \int\limits_y^{5-y} (x+y)^{-2}\, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_1^2 dx \int\limits_1^x (x+y)^{-2}\, dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 (x+y)^{-2}\, dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_1^{5-x} (x+y)^{-2}\, dy = \\
&= \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1+x}^{2x} t^{-2}\, dt + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{1+x}^{2+x} t^{-2}\, dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_{1+x}^{5} t^{-2}\, dy = \\
&= \int\limits_1^2 \Big(-t^{-1} \Big)_{t=1+x}^{2x} dx + \int\limits_2^3 \Big(-t^{-1} \Big)_{t=1+x}^{2+x} dx + \int\limits_3^4 \Big(-t^{-1} \Big)_{t=1+x}^{5} dx = \\
&= -\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{1+x} \right) dx - \int\limits_2^3 \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{1+x} \right) dx - \int\limits_3^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \\
&= \int\limits_1^4 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\, dx - \int\limits_2^3 \frac{1}{2+x}\, dx - \frac{1}{5} \int\limits_3^4 dx = \\
&= \ln(1+x)\Big|_1^4 - \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^2 - \ln(2+x)\Big|_2^3 - \frac{1}{5} = \\
&= \ln 5 - \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) - (\ln 5 - \ln 4) - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Vidimo, da je po zamenjavi vrstnega reda integracije več dela z integriranjem. Je pa v tem primeru težavnost računanja posameznih dvakratnih integralov primerljiva.

3. Nariši integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integracije.

(a) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)\,dx$

(b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$

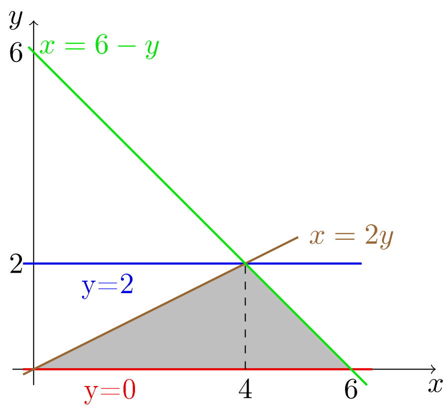
(c) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy$

(d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{\arcsin x} f(x,y)\,dy$

Rešitev:

(a) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)\,dx$

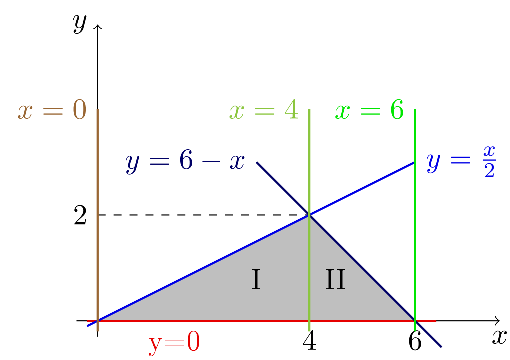
spodnja meja: $y = 0$,
zgornja meja: $y = 2$
leva meja: $x = 2y$ oz. $y = \frac{x}{2}$,
desna meja: $x = 6 - y$ oz. $y = 6 - x$



Ko želimo zamenjati vrstni red integracije, vidimo, da se "zgornja meja" spet ne da opisati v "enem grižljaju", kar pomeni, da moramo integracijsko območje razdeliti na dva dela (I in II).

Območje I:
leva meja: $x = 0$
desna meja: $x = 4$
spodnja meja: $y = 0$
zgornja meja: $y = \frac{x}{2}$

Območje II:
leva meja: $x = 4$
desna meja: $x = 6$
spodnja meja: $y = 0$
zgornja meja: $y = 6 - x$

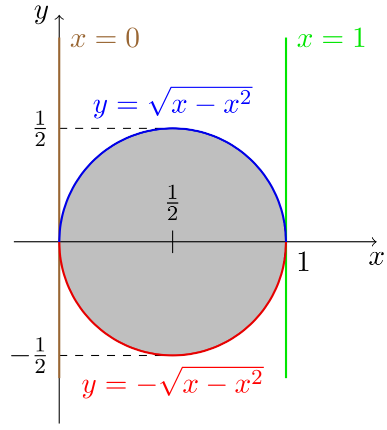


$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)\,dy$$

Na kazalo

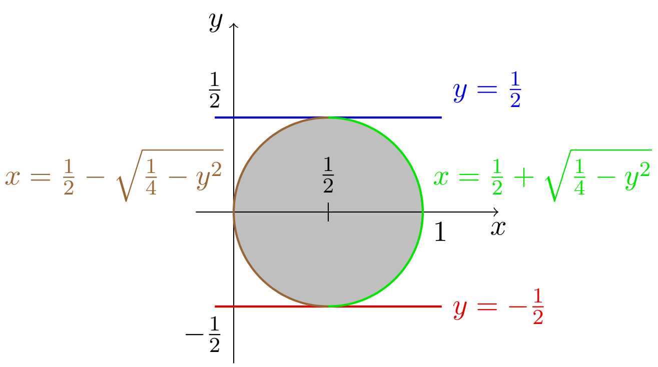
(b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\, dy$

leva meja: $x = 0$
desna meja: $x = 1$
spodnja meja: $y = -\sqrt{x - x^2}$
zgornja meja: $y = \sqrt{x - x^2}$



Če kvadriramo levo in desno stran v enakosti $y = -\sqrt{x - x^2}$ (ali tudi $y = \sqrt{x - x^2}$) dobimo $y^2 = x - x^2$. Preuredimo jo s pomočjo dopolnjevanja do popolnega kvadrata in dobimo $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, torej enačbo krožice s središčem v $S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ in polmerom $\frac{1}{2}$.
Ko zamenjamo vrstni red integracije, sta leva in desna meja lika leva in desna polovica krožnice z enačbo $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Na to krivuljo lahko gledamo kot na grafa dveh funkcij v odvisnosti od y, t.j. $\Big(x_{1,2}(y) = \Big) x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$.

spodnja meja: $y = -\frac{1}{2}$
zgornja meja: $y = \frac{1}{2}$
leva meja:
$x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$
desna meja:
$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$

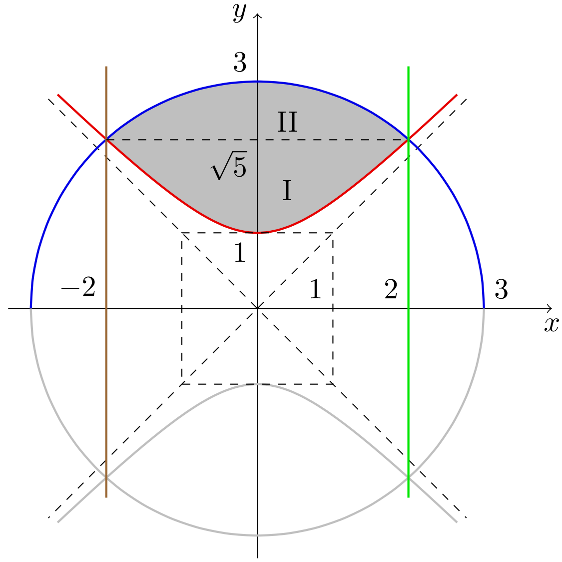


$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\, dy = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)\, dx$$

(c) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\, dy$

Na kazalo

leva meja: $x = -2$
desna meja: $x = 2$
spodnja meja:
$y = \sqrt{1+x^2}$
zgornja meja:
$y = \sqrt{9-x^2}$



Pri kvadriranju enakosti $y = \sqrt{1+x^2}$ dobimo $y^2 = 1 + x^2$ oz. $x^2 - y^2 = -1$, kjer prepoznamo hiperbolo v izhodiščni legi, z malo in veliko pol-osjo $a = b = 1$. Enačba $y = \sqrt{1+x^2}$ predstavlja zgornjo polovico hiperbole[4]. Na isto hiperbolo lahko gledamo kot na grafa (dveh) funkcij, odvisnih od spremenljivke y: $x = \pm\sqrt{y^2-1}$. Leva polovica hiperbole ima enačbo $x = -\sqrt{y^2-1}$, desna pa $x = \sqrt{y^2-1}$.
Pri kvadriranju enakosti $y = \sqrt{9-x^2}$ dobimo $y^2 = 9 - x^2$ oz. $x^2 + y^2 = 9$, kjer prepoznamo krožnico v izhodiščni legi, s polmerom 9. Enačba $y = \sqrt{9-x^2}$ predstavlja zgornjo polovico krožnice[5]. Na isto krožnico lahko gledamo tudi kot na (dva) grafa funkcij odvisnih od y: $x = \pm\sqrt{9-y^2}$. Leva polovica krožnice ima enačbo $x = -\sqrt{9-y^2}$, desna pa $x = \sqrt{9-y^2}$.
Presečišči hiperbole in parabole imata absciso x, ki je rešitev enačbe $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{9-x^2}$. Ko enačbo kvadriramo dobimo $2x^2 = 8$ oz. $x = \pm 2$ (v tem primeru s kvadriranjem enačbe nismo pridobili navideznih rešitev). Višina presečišča je $y = \sqrt{5}$.
Pri zamenjavi vrstnega reda integriranja moramo integracijsko območje razdeliti na dva dela. Lik I (za $y \in \left[1, \sqrt{5}\right]$) na levo omejuje leva polovica hiperbole, na desno pa desna. Lik II (za $y \in \left[\sqrt{5}, 3\right]$) pa na levo omejuje leva polovica krožnice, na desno pa desna polovica.

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{5}}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$$

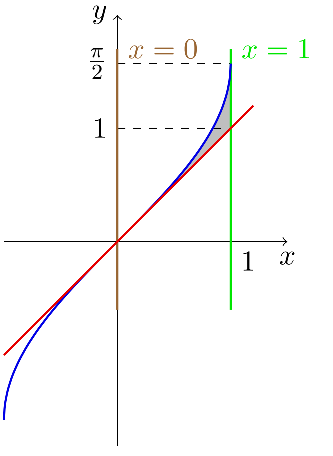
[4] S kvadriranjem enakosti lahko pridobimo navidezne rešitve. V našem primeru smo pridobili celoten spodnji krak hiperbole z enačbo $y = -\sqrt{1+x^2}$, saj če kvadriramo to enakost, dobimo enačbo iste hiperbole.

[5] Spet smo s kvadriranjem pridobili navidezne rešitve. V tem primeru smo pridobili celoten spodnji del krožnice z enačbo $y = -\sqrt{1+x^2}$, saj če kvadriramo to enakost, dobimo enačbo iste krožnice.

Na kazalo

(d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\arcsin x} f(x,y)\, dy$

leva meja: $x = 0$
desna meja: $x = 1$
spodnja meja: $y = x$
zgornja meja: $y = \arcsin x$



Pri zamenjavi vrstnega reda integracije moramo integracijsko območje spet razdeliti na dva lika. Prvi lik ($y \in [0,1]$) je iz leve strani omejen s krivuljo $y = \arcsin x$ oz. $x = \sin y$, iz desne pa s simetralo lihih kvadrantov, $x = y$. Drugi lik ($y \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$) pa je na levo omejen z $x = \sin y$, na desno pa z $x = 1$.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\arcsin x} f(x,y)\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sin y}^{y} f(x,y)\, dx + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{\sin y}^{1} f(x,y)\, dx$$

4. Nariši integracijsko območje, zamenjaj vrstni red integracije in izračunaj integral

   (a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 xe^y\, dx$,

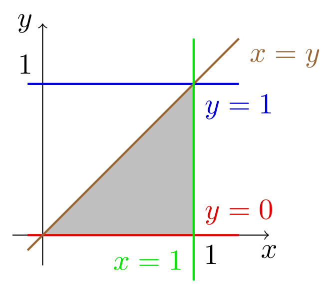
   (b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \frac{y}{x+1}\, dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{y}{x+1}\, dx$,

   (c) $\int\limits_0^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx$.

Rešitev:

(a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 xe^y\, dx = *$

spodnja meja: $y = 0$
zgornja meja: $y = 1$
leva meja: $x = y$
desna meja: $x = 1$



$$* = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xe^y\, dy = \int\limits_0^1 x\, dx \int\limits_0^x e^y\, dy = \int\limits_0^1 x\, (e^y)_0^x\, dx = \int\limits_0^1 x\left(e^x - e^0\right)\, dx =$$
$$= \int\limits_0^1 xe^x\, dx - \int\limits_0^1 x\, dx = (xe^x)_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\, dx - \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = e - (e^x)_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

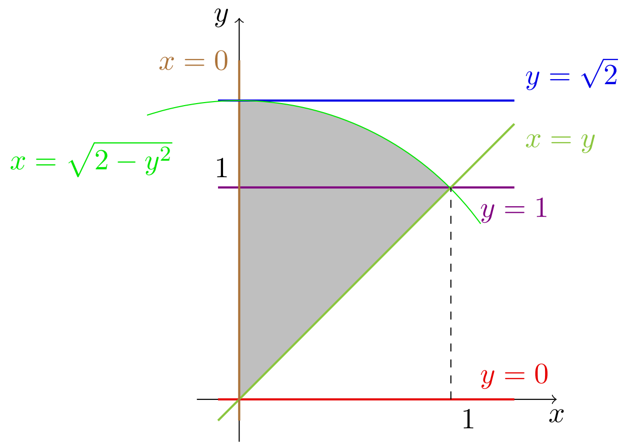
Integral $\int\limits_0^1 xe^x\, dx$ smo izračunali z integracijo "po delih" ($u = x$, $du = dx$, $dv = e^x\, dx$, $v = e^x$).

(b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \frac{y}{x+1}\, dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{y}{x+1}\, dx = *$

Na kazalo

Območje I:
spodnja meja: $y=0$
zgornja meja: $y=1$
leva meja: $x=0$
desna meja: $x=y$

Območje II:
spodnja meja: $y=1$
zgornja meja: $y=\sqrt{2}$
leva meja: $x=0$
desna meja: $x=\sqrt{2-y^2}$

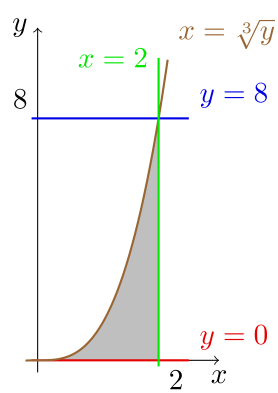


$$*=\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{y}{x+1}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\left(2-x^2-x^2\right)dx = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 \frac{\cancel{2}\left(1-x^2\right)}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{\cancel{(1+x)}\,(1-x)}{\cancel{x+1}}dx = \frac{1}{2}$$

Zadnji integral lahko izračunamo na pamet, saj je vrednost integrala $\int_0^1 (1-x)\,dx$ enaka ploščini trikotnika, ki ga tvorijo premica $y=1-x$ ter koordinatni osi, t.j. ploščini pravokotnega trikotnika s katetama dolžine 1.

(c) $\int_0^8 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx = *$



spodnja meja: $y=0$
zgornja meja: $y=8$
leva meja: $x=\sqrt[3]{y}$
t.j. $y=x^3$
desna meja: $x=2$

$$*=\int_0^2 dx \int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy = \int_0^2 e^{x^4}dx \int_0^{x^3} dy = \int_0^2 e^{x^4}x^3dx = \tfrac{1}{4}\int_0^{16} e^t dt = \tfrac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$$

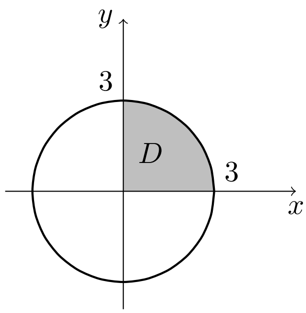
Na koncu smo uvedli novo spremenljivko ($t=x^4$, $dt=4x^3dx$, $\alpha=0$, $\beta=16$).

5. Izračunaj dvojni integral

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy,$$

kjer je D del kroga $x^2+y^2 \leq 9$, ki leži v prvem kvadrantu.

Rešitev: $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy = *$



Polarne koordinate:

$x = r\cos\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = r\sin\varphi \qquad r \in [0,3]$

$J = r \qquad f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$

$= \sqrt{1+r^2}$

Označimo območje $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $r \in [0,3]$ z Δ, uvedemo polarne koordinate, preidemo na dvakratni integral in ga izračunamo. V dobljeni enojni integral, v katerem integriramo po r, uvedemo novo spremenljivko $t = 1+r^2$, $dt = 2r\, dr$ oz. $r\, dr = \frac{dt}{2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 10$.

$* = \iint\limits_\Delta r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 r\sqrt{1+r^2}\, dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int\limits_1^{10} \frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{\cancel{4}_2} \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}_1}}\right)\Bigg|_1^{10} = \frac{\pi}{6}\left(10\sqrt{10}-1\right)$

6. V dvojni integral $\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy$ uvedite polarne koordinate, če je:

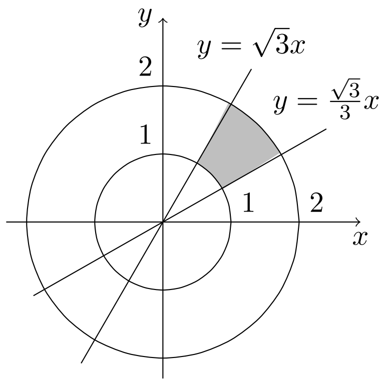
(a) $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$,

(b) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4x\}$,

(c) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2y,\ x \leq 0\}$.

Rešitev: Pri vsakem primeru bomo integracijsko območje najprej skicirali, potem pa določili (ali izračunali) meje za r in φ.

(a) Premica z enačbo $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ oklepa z osjo x kot $\frac{\pi}{6}$, premica $y = \sqrt{3}x$ pa kot $\frac{\pi}{3}$.



Polarne koordinate:

$x = r\cos\varphi \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

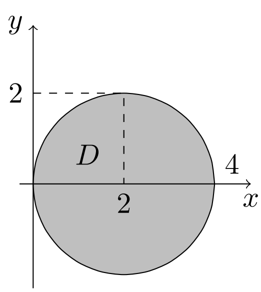
$y = r\sin\varphi \qquad r \in [1, 2]$

$J = r$

Označimo območje $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, $r \in [1, 2]$ z Δ.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

(b) Preoblikujmo enačbo $x^2 + y^2 = 4x$ v $x^2 - 4x + y^2 = 0$. Če dopolnimo prva dva člena do popolnega kvadrata dobimo $(x-2)^2 + y^2 = 4$, kar je enačba krožnice s središčem v $S(2, 0)$ s polmerom 2.



Polarne koordinate:

$x = r\cos\varphi \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = r\sin\varphi \qquad r \in [0, ??]$

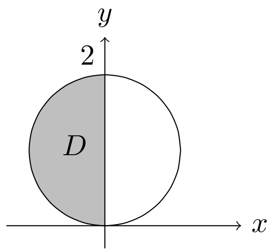
$J = r$

Vidimo, da je zgornja meja za r odvisna od izbire φ in ni konstantna kot v prejšnjem primeru. Zgornjo mejo za r lahko določimo tako, da se vprašamo kakšna je oddaljenost r točke na krožnici $x^2 + y^2 = 4x$ od izhodišča koordinatnega sistema. Če v enačbo krožnice vstavimo polarne koordinate (in upoštevamo, da je $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$) dobimo $r^2 = 4r\cos\varphi$. Ker nas izhodišče ne zanima je $r \neq 0$ in smemo enačbo deliti z r. Tako dobimo $r = 4\cos\varphi$.

Označimo območje $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $r \in [0, 4\cos\varphi]$ z Δ.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

(c) Preoblikujmo enačbo $x^2 + y^2 = 2y$ v $x^2 + (y-1)^2 = 1$, kar je enačba krožnice s središčem v točki $(0, 1)$ in s polmerom 1.



Polarne koordinate:
$x = r\cos\varphi \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$y = r\sin\varphi \qquad r \in [0, ??]$
$J = r$

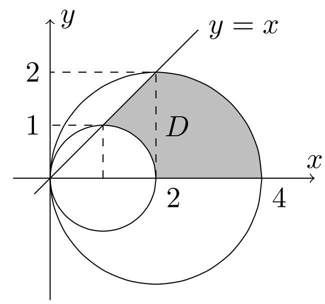
Tudi tokrat je zgornja meja za r odvisna od vrednosti φ. Ponovimo postopek, ko polarne koordinate vstavimo v enačbo, ki predstavlja mejo, $x^2 + y^2 = 2y$, in dobimo $r^2 = 2\sin\varphi$ oz. $r = \sin\varphi$ (saj nas zanimajo le $r \neq 0$).
Označimo območje $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $r \in [0, 2\sin\varphi]$ z Δ.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

7. Poišči ploščino območja omejenega s krivuljami $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$ in $y=0$.

Rešitev:

Enačbo prve krivulje $x^2+y^2=2x$ preoblikujemo v enačbo $(x-1)^2+y^2=1$ in prepoznamo, da gre za krožnico s središčem v točki $(1,0)$ in polmerom 1. Enačbo druge krivulje $x^2+y^2=4x$ prepišemo v $(x-2)^2+y^2=4$ in prepoznamo krožnico s središčem $(2,0)$ in polmerom 2. Preostali dve krivulji predstavljata simetralo lihih kvadrantov ($y=x$) in os x ($y=0$). Območje, ki je omejeno s temi štirimi krivuljami poimenujemo D.



Ploščino območja D izračunamo z dvojnim integralom (konstantne funkcije 1) po območju D. Ko razmišljamo o vrstnem redu, po katerem bi prešli iz dvojnega na dvakratni integral, vidimo, da zna biti zapleteno (vsak študent naj za sebe razmisli kako bi prešli na dvakratni integral). Zaradi same oblike integracijskega območja (ujeto je med dve krožnici) pomislimo na polarne koordinate.

Polarne koordinate:

$x = r\cos\varphi \qquad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$y = r\sin\varphi \qquad r\in[r_{min}, r_{max}]$

$J = r \qquad f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=1$

Za izračun r_{min} (oz. r_{max}) izračunamo oddaljenost točke na manjši krožnici (oz. na večji krožnici) od izhodišča koordinatnega sistema, t.j. vstavimo polarne koordinate v enačbo $x^2+y^2=2x$ (oz. $x^2+y^2=4x$). Dobimo $r_{min}=2\cos\varphi$ (oz. $r_{max}=4\cos\varphi$). Označimo območje $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ in $r\in[2\cos\varphi, 4\cos\varphi]$ z Δ ter izračunajmo dobljen dvojni integral. V izračunu dobljenega enojnega integrala (kjer integriramo po φ) uporabimo formulo za nižanje potence kosinusa, $\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))$, ter uvedemo novo spremenljivko $t=2\varphi$, $dt=2\,d\varphi$ (oz. $d\varphi=\frac{dt}{2}$), $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$.

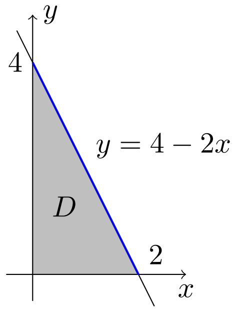
$$\text{pl }(D)=\iint\limits_D 1\,dx\,dy=\iint\limits_\Delta r d\varphi\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

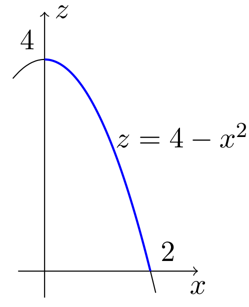
$$=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos(2\varphi))d\varphi=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right)=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{3(\pi+2)}{4}$$

Na kazalo

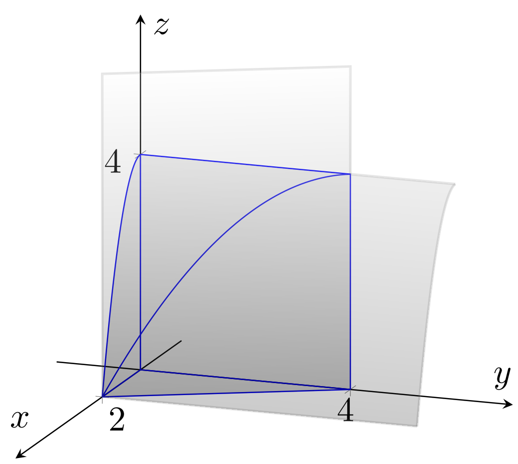
8. Izračunaj volumen telesa, ki leži v prvem oktantu in je omejen s ploskvami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 4 - 2x$ in $z = 4 - x^2$.

Rešitev: Ploskve z enačbami $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$ so vse tri koordinatne ravnine. Ploskev z enačbo $y = 4 - 2x$ je ravnina, ki je vzporedna osi z, ploskev z enačbo $z = 4 - x^2$ pa je vzporedna osi y. Za zadnji dve ploskvi narišimo presečišče ploskve s koordinatnima ravninama O_{xy} (za prvo) in O_{xz} (za drugo ploskev).





Obe sliki združimo v tri dimenzionalno sliko. Na sliki je s sivo osenčena ravnina (oz. del ravnine v prvem oktantu) $y = 4 - 2x$, ki jo dobimo tako, da "raztegnemo" graf premice z isto enačbo iz ravnine O_{xy} v smeri osi z. S sivo je osenčena tudi ploskev (oz. del ploskve v prvem oktantu) $z = 4 - x^2$, ki jo dobimo tako, da krivuljo z isto enačbo iz ravnine O_{xz} "raztegnemo" v smeri osi y.



Robovi telesa, katerega prostornino moramo izračunati, so na tri dimenzionalni sliki označeni z modro barvo. Sprednja stena (glede na pogled na tri dimenzionalni sliki) telesa je del ravnine $y = 4 - 2x$, ki je pravokotna na ravnino O_{xy}. Leva stena telesa je del ravnine O_{xz}, ki je pravokotna na ravnino O_{xy}. Zadnja stran telesa je del ravnine O_{yz}, ki je prav tako pravokotna na ravnino O_{xy}. Dano telo lahko torej opišemo kot del prostora $\mathbb{R}^3$, ki je omejen s grafoma funkcij $z_1(x,y)=0$ (dno telesa) in $z_2(x,y)=4-x^2$ (pokrov telesa), nad območjem D (osenčenem na sliki premice $y=4-2x$ v ravnini O_{xy}). Iskano prostornino izračunamo po formuli $V=\iint\limits_D (z_2(x,y)-z_1(x,y))\,dx\,dy$.

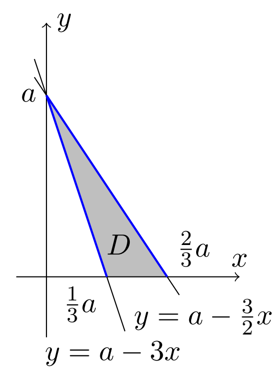
$$V=\iint\limits_D \left(4-x^2\right)dx\,dy=\int\limits_0^2 (4-x^2)dx\int\limits_0^{4-2x} dy=\int\limits_0^2 (4-x^2)(4-2x)dx=$$

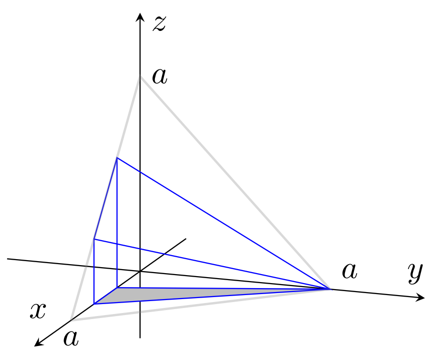
$$=\int\limits_0^2 (16-8x-4x^2+2x^3)dx=16\cdot 2-8\frac{x^2}{2}\Big|_0^2-4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+2\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{40}{3}$$

9. Izračunaj volumen telesa, ki ga omejujejo ravnine $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $3x + y = a$ in $3x + 2y = 2a$, $a > 0$.

Rešitev:

Ravnini $y = 0$ in $z = 0$ sta koordinatni ravnini (O_{xz} in O_{xy}). Ravnini $3x + y = a$ (oz. $y = a - 3x$) in $3x + 2y = 2a$ (oz. $y = a - \frac{3}{2}x$) sekata ravnino O_{xy} v premicah z istima enačbama. Na desni sliki je s sivo osenčeno območje med obema omenjenima premicama, poimenovali smo ga D.





Ravnini $3x + y = a$ in $3x + 2y = 2a$ sta pravokotni na ravnino O_{xy}. Od piramide, ki jo omejuje ravnina $z = a - x - y$ v prvem oktantu, odrežeta del, ki je na tri dimenzionalni sliki obrobljen z modro. Območje D, označeno na sliki premic v ravnini O_{xy} je osenčeno tudi na tridimenzionalni sliki.

Dno telesa je (osenčen) lik D v ravnini O_{xy}, sprednja stena telesa je del ravnine $3x + y = a$ (in je pravokotna na O_{xy}), zadnja stena telesa je del ravnine $3x + 2y = 2a$ (in je tudi pravokotna na O_{xy}), leva stena telesa je štirikotnik v ravnini O_{xz} (prav tako pravokotna na O_{xy}). Pokrov telesa je del ravnine $z = a - x - y$. Prostornino telesa izračunamo z dvojnim integralom po območju D funkcije $z_2(x, y) - z_1(x, y) = a - x - y - 0 = a - x - y$. Za prehod iz dvojnega v dvakratni integral uporabimo vrstni red, ko najprej integriramo po spremenljivki x (v mejah od $\frac{a-y}{3}$ do $\frac{2(a-y)}{3}$), šele potem po spremenljivki y (v mejah od 0 do a). Pri računanju enojnega integrala lahko vpeljemo novo spremenljivko ($t = a - y$,

$dt = -dy$, $\alpha = a$, $\beta = 0$).

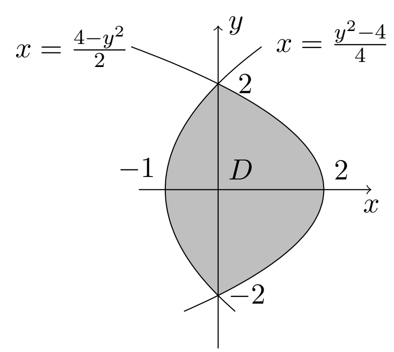
$$V = \iint\limits_D (a-x-y)dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} (a-x-y)dx = \int_0^a \left(ax - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Big|_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} dy =$$

$$= \int_0^a \left(a\left(\frac{2(a-y)}{3} - \frac{a-y}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4(a-y)^2}{9} - \frac{(a-y)^2}{9}\right) - \left(\frac{2(a-y)}{3} - \frac{a-y}{3}\right)y\right)dy =$$

$$= \int_0^a \left((a-y)\cdot\frac{a-y}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(a-y)^2}{3}\right)dy = \frac{1}{6}\int_0^a (a-y)^2 dy = -\frac{1}{6}\int_a^0 t^2 dt = \frac{1}{18}a^2$$

10. Poišči ploščino in geometrijsko središče lika, ki ga omejujeta krivulji: $y^2 = 4x + 4$ in $y^2 = -2x + 4$.

Rešitev: Krivuljo $y^2 = 4x+4$ zapišimo v obliki $x = \frac{y^2-4}{4}$. Prepoznamo kvadratno parabolo, odprto v pozitivni smeri x osi, s temenom pri $x = -1$ in presečiščima osi y pri $y = \pm 2$. Krivuljo $y^2 = -2x + 4$ zapišimo v obliki $x = \frac{4-y^2}{2}$. Prepoznamo kvadratno parabolo, odprto v negativni smeri x osi, s temenom pri $x = 2$ in presečiščima osi y pri $y = \pm 2$.



$$\text{pl }(D) = \iint\limits_D dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right) dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{12-3y^2}{4}\right) dy = \frac{3}{2}\int_0^2 \left(4-y^2\right) dy = \frac{3}{2}\left(4\cdot 2 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right) = 8$$

Na kazalo

Geometrijsko središče lika sovpada s težiščem lika, kjer lahko privzamemo, da je gostota konstantna in enaka 1. Koordinati težišča $T(x_T, y_T)$ ploščice D sta enaki $x_T(D) = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D x\,\rho(x,y)\;dx\,dy$ in $y_T(D) = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D y\,\rho(x,y)\;dx\,dy$, kjer je $m(D) = \iint\limits_D \rho(x,y)\;dx\,dy$ in $\rho(x,y)$ gostota v točki (x,y). Če torej privzamemo, da je $\rho(x,y) = 1$, dobimo formuli za koordinati geometrijskega središča $T_0(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{1}{\text{pl }(D)} \iint\limits_D x\,dx\,dy \quad \text{in} \quad y_0 = \frac{1}{\text{pl }(D)} \iint\limits_D y\,dx\,dy\,.$$

Geometrijsko središče našega lika je zagotovo na osi x, saj je lik simetričen glede na os x (vidimo celo, da leži desno od osi y). Torej je $y_0 = 0$ in ga ni treba računati. Izračunajmo x_0, kjer za prehod iz dvojnega integrala na dvakratni integral uporabimo isti vrstni red kot pri izračunu ploščine.

$$x_0 = \frac{1}{8} \iint\limits_D x dx\,dy = \frac{1}{8} \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x\,dx = 2 \cdot \frac{1}{8} \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^2 \frac{1}{2} \left(\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16} \right) dy = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \int\limits_0^2 3(4-y^2)^2 dy =$$

$$= \frac{3}{2^7} \int\limits_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy = \frac{3}{2^7} \left(16y - 8\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{2^7} \left(2^5 - \frac{2^6}{3} + \frac{2^5}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

Geometrijsko središče našega lika je $T_0\left(\frac{2}{5}, 0\right)$.

4 Diferencialne enačbe

1. Določi red diferencialne enačbe (DE) in preveri, če so dane funkcije njihove rešitve
   (a) $y' + y = x^2 - 2$; $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$,
   (b) $y'' + y = 0$; $y = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$,
   (c) $y''' = e^x$; $y = e^x + Ax^2 + Bx + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$,
   (d) $y' + y = 0$; $y = x^2$.

Rešitev: Pri DE gre za funkcijske enačbe, t.j. enačbe, v katerih je neznanka funkcija. Ponavadi je y funkcija spremenljivke x. Rešitev DE je tista funkcija, za katero bosta funkciji na levi in desni strani dane DE enaki[6]. Če zapišemo npr. DE $y' + y = x^2 - 2$ s polnim imenom, dobimo $y'(x) + y(x) \equiv x^2 - 2$, kjer je neznanka funkcija $y(x)$, simbol $\equiv$ pa pomeni enakost funkcij. Po navadi uporabljamo kompaktnejšo obliko, kot je podana v besedilu naloge.

(a) DE $y' + y = x^2 - 2$ je prvega reda (saj se pojavi le prvi odvod funkcije y). Če je $y(x) = y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$ rešitev dane DE, mora ustrezati pogoju iz DE.
Izračunajmo y' in preverimo, ali dobljena enakost drži (za vsak x iz definicijskega območja).

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-x} + x^2 - 2x \\ y' &= -Ce^{-x} + 2x - 2 \\ y' + y &= -Ce^{-x} + 2x - 2 + Ce^{-x} + x^2 - 2x = x^2 - 2 \end{aligned}$$

Predlagana funkcija je rešitev naše DE.

(b) DE $y'' + y = 0$ je drugega reda. Preverimo, ali je $y = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$ rešitev dane DE.

$$\begin{aligned} y &= A\cos x + B\sin x \\ y' &= -A\sin x + B\cos x \\ y'' &= -A\cos x - B\sin x \\ y'' + y &= -A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 0 \end{aligned}$$

Predlagana funkcija je rešitev naše DE.

[6]Funkciji sta enaki natanko tedaj, ko imata isto definicijsko območjo, isto kodomeno in slikata z istim predpisom.

Na kazalo

(c) DE $y''' = e^x$ je tretjega reda. Preverimo še, ali je $y = e^x + Ax^2 + Bx + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$ njena rešitev.

$$\begin{aligned} y &= e^x + Ax^2 + Bx + C \\ y' &= e^x + 2Ax + B \\ y'' &= e^x + 2A \\ y''' &= e^x \end{aligned}$$

Predlagana funkcija je rešitev naše DE.

(d) DE $y' + y = 0$ je prvega reda. Preverimo, ali je $y = x^2$ njena rešitev.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y' &= 2x \\ y' + y &= x^2 + 2x \neq 0 \end{aligned}$$

Predlagana funkcija ni rešitev dane DE.
OPOMBA: Rešitvi (algebrske) enačbe $x^2 + 2x = 0$ oz. $x(x+2) = 0$ sta $x = 0$ in $x = -2$. Za funkcijsko enačbo, ki jo obravnavamo, to pomeni, da funkciji na levi in desni strani dane DE slikata na enak način zgolj za $x = 0$ in $x = -2$, definirani pa sta za vse realne x. Torej nista enaki.

2. Reši diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami:

   (a) $y' + 2xy = 4x$,

   (b) $y' = \frac{2y+1}{x^2+x}$,

   (c) $y' + xy = xy^2$,

Rešitev:

(a) V enačbi $y' + 2xy = 4x$ zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$, "ločimo" spremenljivki (enačbo uredimo tako, da je vsaka neznanka na svoji strani enačbe) ter izračunamo y s pomočjo inte-

Na kazalo

griranja.

$$
\begin{aligned}
y' + 2xy &= 4x \\
\frac{dy}{dx} + 2xy &= 4x \\
\frac{dy}{dx} &= 4x - 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= 2x(2-y) \\
\frac{dy}{2-y} &= 2x\,dx \qquad (\text{če je } 2-y \neq 0) \\
\int \frac{dy}{2-y} &= \int 2x\,dx \\
-\ln|2-y| &= \frac{2x^2}{2} + C \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Rešitev naše DE je podana v implicitni obliki, vendar se da y izraziti tudi eksplicitno. Najprej zapišemo $\ln|2-y| = -x^2 - C$ in namesto $-C$ zapišemo D, ki je prav tako poljubno realno število. Dobimo $\ln|2-y| = -x^2 + D$, $D \in \mathbb{R}$. Eksponirajmo levo in desno stran enačbe, da dobimo $|2-y| = e^{-x^2+D} = e^{-x^2}e^D$, kjer namesto e^D zapišemo E, ki je poljubno pozitivno realno število. Dobimo $|2-y| = Ee^{-x^2}$, $E \in \mathbb{R}^+$. Če opustimo absolutno vrednost, dobimo $2-y = \pm Ee^{-x^2} = Fe^{-x^2}$, kjer je $F \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Izrazimo y in dobimo rešitev (oz. družino rešitev) $y = 2 - Fe^{-x^2}$, $F \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
K razmisleku dodajo še možnost $2-y=0$ oz. $y=2$. Če vstavimo to funkcijo v prvotno DE, vidimo, da je tudi $y=2$ rešitev DE. Končna rešitev je torej $y_S = 2 - Fe^{-x^2}$, $F \in \mathbb{R}$. To je t.i. **splošna rešitev DE**.
Ta postopek po navadi izpeljemo dosti bolj elegantno. Namesto, da spreminjamo imena konstant (C, D, E in F), vedno znova uporabimo ime C, kjer zapišemo zgolj pogoj za C (torej $C \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}^+$ ali $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), ko se vloga konstante C spremeni. Naš postopek reševanja od enačbe $-\ln|2-y| = \frac{2x^2}{2} + C$ zdaj zapišimo elegantneje.

$$
\begin{aligned}
\ln|2-y| &= -x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\
|2-y| &= e^{-x^2}e^C \\
|2-y| &= Ce^{-x^2} \quad \left(C \in \mathbb{R}^+\right) \\
2-y &= Ce^{-x^2} \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
y &= 2 - Ce^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Na koncu preverimo še možnost $C=0$, oz. $y=2$ in ugotovimo, da tudi $C=0$ vrne rešitev DE. Splošna rešitev dane DE je torej $y_S = 2 - Fe^{-x^2}$, $F \in \mathbb{R}$.

Na kazalo

(b)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2y+1}{x^2+x}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2y+1}{x^2+x}\\
\frac{dy}{2y+1} &= \frac{dx}{x^2+x}\\
\int \frac{dy}{2y+1} &= \int \frac{dx}{x^2+x} \qquad \left(\text{če } 2y+1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Pri integralu na levi strani enakosti uvedemo novo spremenljivko $t = 2y+1$, $dt = 2dy$ (oz. $dy = \frac{dt}{2}$). Pri integralu na levi strani razcepimo[7] ulomek $\frac{1}{x^2+x}$ na parcialna ulomka $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{2y+1} &= \int \frac{dx}{x^2+x}\\
\frac{1}{2}\ln|2y+1| &= \ln|x| - \ln|x+1| + \ln C \qquad (C \in \mathbb{R}^+)\\
\ln|2y+1| &= 2\ln\frac{C|x|}{|x+1|} = \ln\frac{Cx^2}{(x+1)^2} \qquad (C \in \mathbb{R}^+)\\
|2y+1| &= \frac{Cx^2}{(x+1)^2}\\
2y+1 &= \frac{Cx^2}{(x+1)^2} \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\\
y &= \frac{Cx^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Preverimo še možnost $C = 0$ oz. $y = -\frac{1}{2}$ (kar se je v postopku reševanja izkazalo za poseben primer) in ugotovimo, da je tudi $C = 0$ konstanta, ki nam da rešitev DE. Splošna rešitev dane DE je torej $y_S = \frac{Cx^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.

[7]Razcep ulomka $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)}$ na parcialne ulomke poteka po naslednjem postopku.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{x(A+B)+Ax}{x(x+1)}$$

Ulomek na skrajni levi strani bo enak ulomku na skrajni desni strani enakosti natanko tedaj, ko bosta prosta člena ulomkov v števcu (na levi strani 1, na desni A) enaka ter ko bosta linearna koeficienta polinomov (na levi 0, na desni $A+B$) enaka. Ta dva pogoja rešita $A = 1$ in $B = -1$, kar pomeni, da lahko pišemo $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Več o razcepu na parcialne ulomke lahko preberete v dodatku A.

Na kazalo

(c) Pri naslednjem izračunu razstavimo ulomek $\frac{1}{y(y-1)}$ na parcialne ulomke: $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$.

$$\begin{aligned}
y' + xy &= xy^2 \\
\frac{dy}{dx} &= xy^2 - xy \\
\frac{dy}{dx} &= x(y^2 - y) \\
\frac{dy}{y^2 - y} &= x\,dx \qquad \big(\text{če } y^2 - y \neq 0 \Leftrightarrow y(y-1) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0 \text{ in } y \neq 1\big) \\
\int \frac{dy}{y(y-1)} &= \int x\,dx \\
\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy &= \frac{x^2}{2} + C \qquad (C \in \mathbb{R}) \\
\ln|y-1| - \ln|y| &= \frac{x^2}{2} + \ln C \qquad (C \in \mathbb{R}^+) \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \frac{x^2}{2} + \ln C \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= Ce^{\frac{x^2}{2}} \\
\frac{y-1}{y} &= Ce^{\frac{x^2}{2}} \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
1 - \frac{1}{y} &= Ce^{\frac{x^2}{2}} \\
\frac{1}{y} &= 1 - Ce^{\frac{x^2}{2}} \\
y &= \frac{1}{1 - Ce^{\frac{x^2}{2}}}
\end{aligned}$$

Izberimo $C = 0$ in ugotovimo, da je $y = 1$ (poseben primer iz postopka) tudi rešitev dane DE. Drug poseben primer je $y = 0$, ki pa je (zlahka preverimo) tudi rešitev dane DE. Splošna rešitev y_S naše DE je družina $y = 0$ in $y = \frac{1}{1-Ce^{\frac{x^2}{2}}}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Reši začetni problem:

   (a) $y' = \frac{y}{x}$, $y(-2) = 4$,

   (b) $y - y' + x^2 y = 0$, $y(0) = -2$,

   (c) $x^3 y' = y^2$, $y(1) = 2$,

   (d) $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e) = 1$.

Rešitev:

(a) Začetni problem je DE $y' = \frac{y}{x}$ z začetnim pogojem $y(-2) = 4$, kar pomeni, da izmed vseh funkcij, ki so rešitev dane DE izberemo tisto, ki ustreza pogoju $y(-2) = 4$. Najprej poiščimo splošno rešitev DE.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln|y| &= \ln|x| + \ln C \qquad \left(C \in \mathbb{R}^+\right) \\
\ln|y| &= \ln C|x| \\
|y| &= C|x| \\
y &= Cx \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})
\end{aligned}$$

Preverimo še možnost $C = 0$ oz. $y = 0$ in vidimo, da je tudi to rešitev dane DE. Splošna rešitev DE je torej $y_S = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.
Izmed vseh funkcij v družini splošnih rešitev določimo C tako, da je $y(-2) = 4$.

$$4 = y = C(-2) \Leftrightarrow C = -2$$

Rešitev začetnega problema je $y = -2x$.

(b) Najprej poiščimo splošno rešitev.

$$\begin{aligned}
y - y' + x^2 y &= 0 \\
y' &= y(1 + x^2) \\
\int \frac{dy}{y} &= \int (1 + x^2)dx \\
\ln|y| &= x + \frac{x^3}{3} + \ln C \quad (C \in \mathbb{R}^+) \\
y_s &= Ce^{x + \frac{x^3}{3}} \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Če upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = -2$ in rešitev $y = -2e^{x+\frac{x^3}{3}}$.

(c)

$$\begin{aligned} x^3 y' &= y^2 \\ \int y^{-2} dy &= \int x^{-3} dx \\ y_s &= \frac{2x^2}{1+2Cx^2} \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ko upoštevamo začetni pogoj dobimo $C = 0$ in rešitev $y = 2x^2$.

(d)

$$\begin{aligned} y' &= 2\sqrt{y}\ln \\ \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} &= \int \ln x\, dx \\ \sqrt{y} &= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Upoštevamo začetni pogoj, da dobimo $C = 1$ in $y = (x\ln x - x + 1)^2$.

4. Reši homogeno enačbo:

   (a) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$,

   (b) $y' = \frac{x+2y}{x}$,

   (c) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$.

Rešitev: Homogeno enačbo prepoznamo po tem, da x in y v DE nastopata v zvezi $\frac{y}{x}$. V tem primeru uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{y}{x}$. Pri uvedbi nove spremenljivke v DE moramo izraziti y in y' z novo spremenljivko u. Zavedati se je treba, da je nova neznanka u pravzaprav neznana funkcija $u(x)$. S polnim imenom zapišemo nastavka $y(x) = u(x)x$ in $y'(x) = u'(x)x + u(x)$, pri računanju pa uporabljamo kompaktnejši obliki:

$$y = ux \qquad \text{in} \qquad y' = u'x + u.$$

(a) Naša DE $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ se po uvedbi nove spremenljivke glasi $u'x + u = e^u + u$ oz. $u'x = e^u$. Poiščimo rešitev te nove DE.

$$\begin{aligned}
u'x &= e^u \\
\frac{du}{dx}x &= e^u \\
\frac{du}{e^u} &= \frac{dx}{x} \\
\int e^{-u}du &= \int \frac{dx}{x} \\
-e^{-u} &= \ln|x| + \ln C \qquad \big(C \in \mathbb{R}^+\big) \\
e^{-u} &= -\ln C|x| \\
e^{-u} &= \ln \frac{C}{|x|} \qquad \big(C \in \mathbb{R}^+\big) \\
-u &= \ln\left(\ln \frac{C}{|x|}\right) \\
u &= -\ln\left(\ln \frac{C}{|x|}\right)
\end{aligned}$$

To je šele rešitev nove DE, rešitev izvirne enačbe izračunamo s pomočjo nastavka $y = ux$, torej $y_S = -x\ln\left(\ln \frac{C}{|x|}\right)$, $C \in \mathbb{R}^+$.

(b) Dano enačbo najprej malo preoblikujmo, preden uvedemo novo spremenljivko in izračunamo rešitev.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x+2y}{x} \\
y' &= 1 + 2\frac{y}{x} \\
u'x + u &= 1 + 2u \\
u'x &= 1 + u \\
\int \frac{du}{1+u} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln|1+u| &= \ln|x| + \ln C = \ln C|x| \qquad (C \in \mathbb{R}^+) \\
|1+u| &= C|x| \\
u &= Cx - 1 \qquad (C \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow y_S &= Cx^2 - x \qquad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

(c) Tudi tokrat enačbo najprej preoblikujemo v obliko iz katere je razvidno, da gre res za homogeno enačbo.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \\
u'x + u &= \frac{1}{2u} + u \\
u'x &= \frac{1}{2u} \\
2\int u\,du &= \int \frac{dx}{x} \\
u^2 &= \ln|x| + \ln C = \ln C|x| \qquad (C \in \mathbb{R}^+) \\
u &= \sqrt{\ln C|x|} \\
\Rightarrow y &= x\sqrt{\ln C|x|}
\end{aligned}$$

5. Reši linearno DE:

   (a) $y' + 2xy = e^{-x^2}$,

   (b) $y' + 2xy = 4x$,

   (c) $xy' + y = \ln x + 1$, $x > 0$,

   (d) $y' - y\tan x = \cos x$.

Rešitev: Linearne enačbe rešujemo podobno kot homogene enačbe, t.j. z novo spremenljivko. Nastavek za novo spremenljivko pa poiščemo vedno znova s pomočjo rešitve t.i. pripadajoče homogene enačbe, ki jo dobimo tako, da iz izvirne DE odstranimo člene, ki ne vsebujejo niti y niti y'. Rešitev dobljene DE je družina funkcij $y = Cf(x)$ odvisna od kontante $C \in \mathbb{R}$. Izkaže se, da ima rešitev linearne DE enako obliko, pri čemer pa je C dejansko funkcija $C(x)$. Ta postopek imenujemo **variacija konstante**.

(a) Za DE $y' + 2xy = e^{-x^2}$ je pripadajoča homogena enačba DE $y' + 2xy = 0$. Rešimo jo.

$$\begin{aligned}
y' + 2xy &= 0\\
\frac{dy}{dx} &= -2xy\\
\frac{dy}{y} &= -2x\,dx\\
\int \frac{dy}{y} &= -2\int x\,dx\\
\ln|y| &= -2\frac{x^2}{2} + \ln C = -x^2 + \ln C \qquad \left(C \in \mathbb{R}^+\right)\\
|y| &= Ce^{-x^2}\\
y &= Ce^{-x^2} \qquad (C \in \mathbb{R}\setminus\{0\})
\end{aligned}$$

Hitro preverimo, da je y rešitev tudi za izbiro $C = 0$. Torej je splošna rešitev DE $y' + 2xy = 0$ družina $y_H = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. To je hkrati t.i. **homogena rešitev** (izvirne) **DE** $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Dobljena rešitev je ideja za nastavek za novo spremenljivko. Zapišimo nastavka s polnima imenoma $y(x) = C(x)e^{-x^2}$ in $y'(x) = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$. Po navadi zapišemo kar v kompaktni obliki $y = Ce^{-x^2}$ in $y' = C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$. Vstavimo nastavka v izvirno DE in rešimo dobljeno DE (za neznanko $C(x)$).

$$\begin{aligned}
C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} &= e^{-x^2}\\
C' &= 1\\
C &= x + D \qquad (D \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Na kazalo

Dobljeno rešitev vstavimo v DE $y = Ce^{-x^2}$ in dobimo $y_S = (x+D)e^{-x^2} = xe^{-x^2} + De^{-x^2}$, $D \in \mathbb{R}$.
OPOMBA: Iz rešitve $y = xe^{-x^2} + De^{-x^2} = y_P + y_H$ se zlahka vidi struktura rešitev (vsake) linearne diferencialne enačbe prvega reda: rešitev je namreč vsota t.i. **partikularne rešitve** $y_P = xe^{-x^2}$ in homogene rešitve $y_H = De^{-x^2}$, $D \in \mathbb{R}$.

(b) Pri DE $y' + 2xy = 4x$ lahko ugibamo rešitev $y_P = 2$, to je t.i. partikularna rešitev. Za splošno rešitev naše DE je dovolj izračunati le še homogeno rešitev, t.j. rešitev DE pripadajoče homogene enačbe $y' + 2xy = 0$. To pa je natanko ista homogena enačba kot v prejšnjem primeru, njena rešitev je $y_H = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Splošna rešitev je potem $y_S = 2 + De^{-x^2}$, $D \in \mathbb{R}$.
OPOMBA: Seveda ne moremo pri vsakem primeru kar "uganiti" partikularne rešitve. V takem primeru, jo preprosto izračunamo s pomočjo variacije konstante.

(c) Tudi tokrat se da partikularno rešitev uganiti ($y = \ln x$), vendar bomo nalogo rešili kot, da te rešitve ne vidimo. Rešimo najprej pripadajočo homogeno enačbo

$$\begin{aligned}
xy' + y &= 0 \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\
\ln|y| &= -\ln|x| + \ln C = \ln\frac{C}{|x|} \quad (C \in \mathbb{R}^+) \\
|y| &= \frac{C}{|x|} \\
y_H &= \frac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Izvedimo variacijo konstante. Pri integriranju uporabimo integracijo po delih ($u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, $v = x$).

$$\begin{aligned}
y &= \frac{C}{x} \\
y' &= \frac{C'x - C}{x^2} \\
\Rightarrow x \cdot \frac{C'x - C}{x^2} + \frac{C}{x} &= \ln x + 1 \\
C' &= \ln x + 1 \\
C &= \int (\ln x + 1) = x\ln x - \int dx + x = x\ln x - x + x + D = \\
&= x\ln x + D \quad (D \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow y_S &= \frac{x\ln x + D}{x} = \ln x + \frac{D}{x} \quad (D \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Na kazalo

(d) Poiščimo homogeno rešitev. Pri integriranju uvedemo novo spremenljivko ($t = \cos x$, $dt = -\sin x$).

$$\begin{aligned} y' - y\tan x &= 0 \\ y' &= y\tan x \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ \ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln C = \ln\frac{C}{|\cos x|} \qquad (C \in \mathbb{R}^+) \\ y_H &= \frac{C}{\cos x} \end{aligned}$$

Izvedemo variacijo konstante ter poiščemo splošno rešitev.

$$\begin{aligned} y &= \frac{C}{\cos x} \\ y' &= \frac{C'\cos x + C\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{C'\cos x + C\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C}{\cos x}\tan x &= \cos x \\ \frac{C'}{\cos x} + C\frac{\tan x}{\cos x} - C\frac{\tan x}{\cos} &= \cos x \\ C' &= \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + D = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + D \qquad (D \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow y_S &= \frac{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + D}{\cos x} = \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{D}{\cos x} \qquad (D \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Na kazalo

Dodatek

A Razcep na parcialne ulomke

Pri integralih se pogosto srečujemo z racionalnimi funkcijami, kjer nam pride prav, če znamo racionalno funkcijo zapisati v obliki vsote ulomkov, pri katerih v imenovalcu nastopa polinom nižje stopnje kot v originalnem ulomku. Preden si pogledamo postopek **razcepa na parcialne ulomke**, si moramo najprej pogledati osnovni izrek algebre in njegove posledice, ki nam zagotavljajo, da se poljubni polinom da faktorizirati z linearnimi in kvadratnimi polinomi z realnimi koeficienti.

Izrek: Vsak nekonstanten polinom z realnimi koeficienti ima vsaj eno ničlo.

Posledica: Za vsak polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (kjer so $a_i \in \mathbb{R}$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) veljajo naslednje trditve.

- Polinom $p(x)$ ima natanko n kompleksnih ničel. Ničle, ki nastopajo k-kratno pri tem štejemo k-krat.

- Če so ničle polinoma $p(x)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lahko polinom zapišemo v faktorizirani obliki $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

- Če je $y \in \mathbb{C}$ ničla polinoma $p(x)$, potem je tudi $\overline{y}$ ničla polinoma $p(x)$.

- Polinom $p(x)$ lahko zapišemo v faktorizirani obliki

  $$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_l)(x^2 + b_1 x + c1)(x^2 + b_2 x + c_2)\cdots(x^2 + b_k x + c_k),$$

  kjer so $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, diskriminante vseh kvadratnih polinomov $x^2 + b_i x + c_i$, $i = \{1, 2, \ldots, k\}$ negativne in je $l + 2k = n$.

Primer: Polinom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ ima natanko štiri ničle: $x_1 = i$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 2$. Lahko ga zapišemo v faktorizirani obliki s kompleksnimi koeficienti $p(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)^2$, ali pa z realnimi koeficienti $p(x) = (x^2 + 1)(x - 2)^2$. Diskriminanta kvadratnega polinoma $x^2 + 1$ je negativna.

Pri integriranju racionalne funkcije $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ najprej zdelimo polinoma, če je stopnja polinoma $q(x)$ večja ali enaka stopnji polinoma $p(x)$. Racionalno funkcijo zapišemo v obliko $f(x) = k(x) + \frac{o(x)}{p(x)}$.

Na kazalo

Primer: Zdelimo polinoma v racionalni funkciji $f(x)=\frac{x^3+2x-1}{x+2}$.

$$
\begin{array}{l}
\big(\;x^3 \qquad\quad + 2x \;\; - 1\big) : \big(x+2\big) = x^2-2x+6+\dfrac{-13}{x+2}\\
\underline{-x^3-2x^2}\\
\qquad -2x^2+2x\\
\qquad\quad \underline{2x^2+4x}\\
\qquad\qquad\quad 6x\;\;-1\\
\qquad\qquad \underline{-6x-12}\\
\qquad\qquad\qquad -13
\end{array}
$$

Izrek A.1. (Razcep na parcialne ulomke) *Podana je racionalna funkcija* $f(x)=\frac{q(x)}{p(x)}$*, kjer sta* $q(x)$ *in* $p(x)$ *polinoma z realnimi koeficienti, pri katerih je stopnja polinoma* $q(x)$ *manjša od stopnje polinoma* $p(x)$*. Naj bo faktorizirana oblika polinoma* $p(x)$

$$p(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_l)^{m_l}(x^2+b_1x+c_1)^{j_1}(x^2+b_2x+c_2)^{j_2}\cdots(x^2+b_kx+c_k)^{j_k},$$

kjer je $m_1+m_2+\ldots+m_l+2(j_1+j_2+\ldots+j_k)=n$*. Potem obstajajo taki skalarji* $A_{i,j}\in\mathbb{R}$*,* $i\in\{1,2,\ldots,l\}$*,* $j\in\{1,2,\ldots,m_i\}$*,* $B_{i,j},C_{i,j}\in\mathbb{R}$*,* $i\in\{1,2,\ldots,k\}$*,* $j\in\{1,2,\ldots,j_i\}$*, da je:*

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\frac{A_{1,1}}{x-x_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}\\
&+\frac{A_{2,1}}{x-x_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2,m_2}}{(x-x_2)^{m_2}}\\
&\vdots\\
&+\frac{A_{l,1}}{x-x_l}+\frac{A_{l,2}}{(x-x_l)^2}+\ldots+\frac{A_{l,m_l}}{(x-x_l)^{m_l}}\\
&+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1,j_1}x+C_{1,j_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{j_1}}\\
&+\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+c_2}+\frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+c_2)^2}+\ldots+\frac{B_{2,j_2}x+C_{2,j_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{j_2}}\\
&\vdots\\
&+\frac{B_{k,1}x+C_{k,1}}{x^2+b_kx+c_k}+\frac{B_{k,2}x+C_{k,2}}{(x^2+b_kx+c_k)^2}+\ldots+\frac{B_{k,j_k}x+C_{k,j_k}}{(x^2+b_kx+c_k)^{j_k}}.
\end{aligned}
$$

Ta zapis imenujemo **razcep na parcialne ulomke**.

Primer: Razcepi na parcialne ulomke funkcije

$$f_1(x)=\frac{2x+3}{x^2-3x+2},\quad f_2(x)=\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)},$$
$$f_3(x)=\frac{x}{(x^2+4)(x^2-2x+2)}\ \text{ in }\ f_4(x)=\frac{x+3}{(x^2+1)(x+1)}.$$

Na kazalo

- Najprej faktoriziramo polinom v imenovalcu.

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-1)}$$

Obstajata parametra A in B, da je

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}.$$

Seštejmo ulomka na desni strani in potem upoštevamo, da imamo enakost ulomkov, ki imajo enaka imenovalca. Potem morata imeti tudi enaka števca, t.j. polinoma v števcu morata biti enaka. Le-ta bosta enaka, ko bodo enaki istoležni koeficienti.

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A-2B)}{(x-2)(x-1)}$$

Ko enačimo istoležne koeficiente polinomov $2x+3$ in $(A+B)x+(-A-2B)$, dobimo sistem enačb:

$$2 = A+B,\ 3 = -A-2B.$$

Rešitev sistema je $A=-3$, $B=5$. Tako je razcep na parcialne ulomke enak

$$f_1(x) = \frac{-3}{x-2} + \frac{5}{x-1} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{x-1}.$$

- V tem primeru ni potrebno faktorizirati polinoma v imenovalcu, ker je že faktoriziran.

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} =$$
$$= \frac{x^2(A+C)+x(-A+B+2C)+(-2A-2B+C)}{(x+1)^2(x-2)}$$

Dobimo sistem $A+C=1$, $-A+B+2C=1$, $-2A-2B+C$, katerega rešitev je $A=\frac{2}{9}$, $B=-\frac{1}{3}$ in $C=\frac{7}{9}$. Razcep na parcialne ulomke je enak

$$f_2(x) = \frac{2}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{7}{9(x-2)}.$$

- Diskriminanti polinomov x^2+4 in x^2-2x+2 sta negativni, torej polinoma nimata realnih ničel.

$$\frac{x}{(x^2+4)(x^2-2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} =$$
$$= \frac{x^3(A+C)+x^2(-2A+B+D)+x(2A-2B+4C)+2B+4D}{(x^2+4)(x^2-2x+2)}$$

Na kazalo

Dobimo sistem

$$A+C=0, \quad -2A+B+D=0, \quad 2A-2B+4C=1, \quad 2B+4D=0,$$

katerega rešitev je $A=-\frac{1}{10}$, $B=-\frac{2}{5}$, $C=\frac{1}{10}$ in $D=\frac{1}{5}$. Razcep na parcialne ulomke je enak

$$f_3(x)=-\frac{x+4}{10(x^2+4)}+\frac{x+2}{10(x^2-2x+2)}.$$

- Diskriminanta polinoma x^2+1 je negativna, torej polinom nima realnih ničel.

$$\frac{x+3}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{x^2(A+C)+x(A+B)+B+C}{(x^2+1)(x+1)}$$

Dobimo sistem

$$A+C=0, \quad A+B=1, \quad B+C=3,$$

katerega rešitev je $A=-1$, $B=2$ in $C=1$. Razcep na parcialne ulomke je enak

$$f_4(x)=\frac{2-x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}.$$

Opomba: Ko zapišemo ulomek v faktorizirani obliki lahko izračunamo primitivno funkcijo s pomočjo integralov $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|$ in $\int \frac{dx}{1+x^2}$, po potrebi uvedemo še novo spremenljivko.

Primer: Izračunajmo $\int \frac{x+3}{(x^2+1)(x+1)}dx$. Ko zapišemo ulomek v parcialne ulomke, zapišimo še $\frac{2-x}{x^2+1}=\frac{2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$ integral zapišimo v vsoto treh integralov.

$$\int \frac{x+3}{(x^2+1)(x+1)}dx=2\int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{x\,dx}{x^2+1}+\int \frac{dx}{x+1}=*$$

V drugi in tretji integral uvedemo novi spremenljivi (drugi: $t=x^2+1$, $dt=2x\,dx$, tretji: $t=x+1$, $dt=dx$) in integral izračunamo.

$$*=2\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\ln|x+1|+C$$

Na kazalo

B Enačbe krožnice, elipse in hiperbole

Kadar imamo opravka s funkcijami dveh (ali več) spremenljivk se pogosto srečamo s krivuljami, ki jih imenujemo **stožnice** ali **krivulje drugega reda**[8]. Med njih spadajo krožnice, elipse, hiperbole in parabole. Ker obravnava srednješolska matematika kvadratne parabole zelo podrobno, si v tem dodatku poglejmo zgolj enačbe preostalih treh krivulj. Enačbe so podane za krivulje v premaknjeni legi, le pri krožnici imamo zapisano tudi enačbo v izhodiščni legi. Enačbe teh krivulj v rotiranem položaju lahko vsak zvedav študent poišče na spletu.

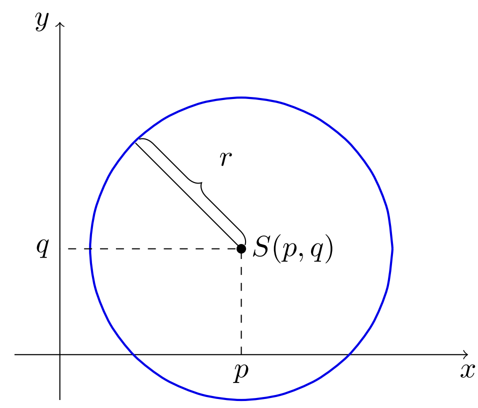
B.1 Krožnica

Enačba krožnice s polmerom r v izhodiščni legi (t.j. središče krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema):

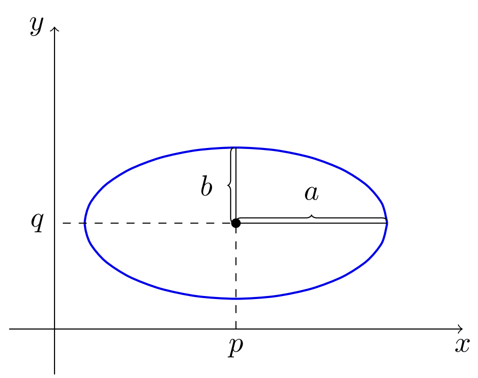
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Enačba krožnice s polmerom r in središčem v točki $S(p, q)$ (slika desno):

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$



B.2 Elipsa



Enačba elipse z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p, q)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

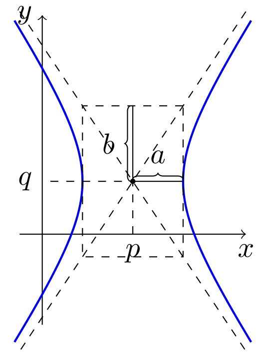
[8] Ime stožnica izhaja iz dejstva, da lahko te krivulje dobimo s sekanjem ravnine in plaščev dveh stožcev, ki se stikata v vrhovih in se simetrično raztezata od tega presečišča vsaka na svojo stran. Ime krivulje drugega reda izhaja iz dejstva, da v enačbah teh krivulj spremenljivki x in y nastopata polinomsko in sicer največ s kvadratno potenco.

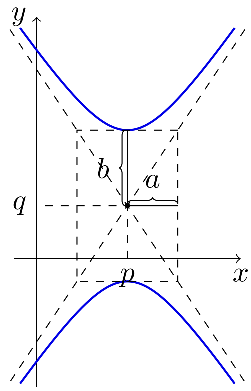
Na kazalo

B.3 Hiperbola

Enačba hiperbole z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p,q)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \text{ (slika desno) ali}$$





$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1 \text{ (slika levo).}$$

Primer: Ali je krivulja z enačbo $x^2+x = 2-y^2$ krožnica, elipsa ali hiperbola? Določite njeno središče.

Najprej dopolnimo izraz x^2+x do popolnega kvadrata. Pri tem se naslonimo na formulo $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Če je v našem izrazu x enak a, potem je b enak $\frac{1}{2}$, zato računamo

$$x^2 + x = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Enačba naše krivulje se zdaj glasi

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 2 - y^2, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Prepoznamo, da gre za krožnico s središčem v točki $S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (s polmerom $r = \frac{3}{2}$).

Na kazalo

Literatura

[1] V. Lampret, *Matematika 1, prvi del, preslikave, števila in vektorski prostori*, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 2012.

[2] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Prvi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[3] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Drugi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1997.

[4] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 1, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2015.

[5] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 2, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2016.

[6] N. Hren, *Integrali racionalnih funkcij, diplomsko delo*, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2013.

[7] M. Premuš, *Priporočeno predznanje iz srednješolske matematike*, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2021.

Na kazalo

Rešene naloge iz inženirske matematike II:
študijsko gradivo za študente FGG

Avtorica: Mojca Premuš

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023
Prva e-izdaja
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612972691

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 186875139
ISBN 978-961-297-269-1 (PDF)