

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 16 (1988/1989)

Številka 2

Strani 66–73

Marija Vencelj:

GLASBENA LESTVICA, 2. del

Ključne besede: matematika, teorija števil, matematična fizika, rekreacijska matematika, nihanje strune, glasbena lestvica, verižni ulomki.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/928-Vencelj.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

GLASBENA LESTVICA, 2. del

V uvodnem delu članka o glasbeni lestvici, ki je izšel v prvi letošnji številki Preseka, smo spoznali ozadje evropskega tonskega sistema. Osnovno načelo njegove izgradnje je, da hkrati z nekim tonom v glasbeno lestvico vključi tudi tone, ki skupaj z njim najlepše zvene. To so tudi delni ali alikvotni toni, katerih frekvenca je cel večkratnik frekvence danega tona. Izoblikovali smo prvi pogoj: če neki ton nastopa v skali, potem morata biti v njej tudi tona dvojne in polovične frekvence. Druga zahteva je bila, naj skala dopušča prenos vsake melodije višje ali nižje, ne da bi melodijo s tem skvarili. Ugotovili smo, da temu pogoju ustrezajo le enakorazmerne skale. To pomeni, da mora biti zaporedje frekvenc vseh tonov glasbene skale geometrijsko.

Geometrijsko zaporedje navadno podamo z začetnim členom, količnikom in številom členov. Pri glasbeni lestvici je naravneje podati namesto začetnega člena kakšen ton iz dobro slišnega območja, takšen, ki ga lahko zaigramo na večino inštrumentov in ki ga lahko zapoje večina ljudi. Po mednarodnih standardih je to ton a_1 , ki ima frekvenco 440 Hz. Legenda pripoveduje, da je v starem veku vsako jutro ob zori oddajal ta ton ogromen Memnonov steber v bližini egipčanskih Teb, tako da so po njem glasbeniki lahko uglaševali svoje inštrumente. Steber naj bi prenehal zveneti ob začetku našega štetja. Dandanašnji pa ta ton oddajajo običajno glasbene vilice, ki jih uporabljajo uglaševalci.

Od tona a_1 navzdol in navzgor je nato zgrajeno geometrijsko zaporedje – teoretično smiselno do mej našega slušnega območja.

Že v uvodnem članku smo povedali, da ustreza količnik tega zaporedja enačbi

$$q^m = 2 \quad (1)$$

kjer je m naravno število, ki pove, na koliko delov je razdeljen oktavni interval. Število m ne sme biti preveliko, ker bi bila potem tudi nekatera glasbila prevelika; prav tako ne more biti enako ena, ker bi bila glasba s samimi oktavnimi intervali revna. Število m pa je sicer lahko še poljubno, kar nam omogoča, da za glasbeno skalo postavimo še kakšno dodatno zahtevo. Lahko bi npr. v glasbeno lestvico na intervalu $(f, 2f)$ uvedli kakšen tak ton, ki bi bil lepoti glasbe posebej v prid. Sama od sebe pa se ponuja tudi misel, naj bi bil v skali razen $2f$ denimo še alikvotni ton $3f$ (ton frekvence $4f$ je kot dvakratnik $2f$ že

vklučen). Videli bomo, da si želji pravzaprav ne nasprotujeta. Poleg pogojev a) in b), ki smo ju postavili v prvem delu, postavimo torej še pogoj

c) hkrati s tonom frekvence f naj vsebuje skala tudi ton frekvence $3f$.

Ker mora zaradi pogoja a) skala z vsakim tonom vsebovati tudi ton polovične frekvence, to pomeni prisotnost tona $\frac{3}{2}f$ v skali. Ta ton pa leži med f in $2f$. Interval $(f, \frac{3}{2}f)$ se imenuje *čista kvinta*, harmoničen (sočasen) zveni posebej lepo. Dejstvo, da človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Zdi se, kot da smo pri koncu naše naloge. S pomočjo pogoja c) bomo določili še eksponent m iz enačbe (1) in delo bo opravljeno!

Pa temu ni tako! Vse skupaj se šele sedaj prav zaplete: *Čiste kvinte v enakorazmerni razdelitvi oktavnega intervala ni mogoče realizirati.*

Nobeno geometrijsko zaporedje namreč ne more hkrati vsebovati členov $f, \frac{3}{2}f$ in $2f$. Res! Za vsako geometrijsko zaporedje s količnikom q , katerega člena sta f in $2f$, velja enačba (1) za neki $m \in \mathbb{N}$. Če bi tako zaporedje vsebovalo še člen $\frac{3}{2}f$, bi to pomenilo, da obstaja tako naravno število k , za katerega je

$$fq^k = \frac{3}{2}f$$

torej

$$q^k = \frac{3}{2} \quad (2)$$

za neki $k \in \mathbb{N}$. S potenciranjem dobimo iz enačbe (1)

$$q^{km} = 2^k$$

in iz enačbe (2)

$$q^{km} = \left(\frac{3}{2}\right)^m$$

To da

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m \quad (3)$$

oziroma

$$2^{k+m} = 3^m \quad (4)$$

Enačba (4) pa je za $k, m \in \mathbb{N}$ protislovna, saj imamo na levi sodo, na desni pa liho število. Čiste kvinte torej v enakorazmerni skali ni!

Kaj sedaj? Treba se bo nečemu odpovedati. Enakorazmerni skali bi se zaradi prenosa melodij težko, lažje se odpovemo čisti kvinti. Natančneje povedano, odpovemo se njeni čistosti, kvinti sami pa pravzaprav ne. To naredimo z izbiro takega m v enačbi (1), da bo v enakorazmerni skali nastopal tudi ton, ki bo dober približek za $\frac{3}{2}f$. Dober približek pomeni to, da naše uho ne bo zaznalo razlike, torej se bo moral ta približek v slušno najbolj občutljivem območju

razlikovati od $\frac{3}{2}f$ za manj kot 1 Hz. Videli bomo, da se to res da doseči in to pri relativno majhnem m . Poglejmo!

Potrebovali bomo nekaj več matematičnega znanja kot doslej. Nadomestimo obe strani enačbe (3) z njunima logaritmoma z osnovo 2. Če nato še delimo z m , dobimo

$$\frac{k}{m} = \log_2 \frac{3}{2} \quad (5)$$

Ker ni takih naravnih števil k in m , ki bi ustrezali enačbi (3), sledi, da ni takega ulomka $\frac{k}{m}$, da bi bila izpolnjena enačba (5). Lepše povedano: $\log_2 \frac{3}{2}$ ni racionalno število. So pa racionalna števila povsod gosta v množici realnih števil. To pomeni, da lahko k vsakemu realnemu številu najdemo tak racionalen približek, da bo razlika med njima poljubno majhna. Torej obstaja tudi tak ulomek $\frac{k}{m}$, ki bo za naše potrebe dovolj blizu števila $\log_2 \frac{3}{2}$.

Za konstrukcijo racionalnih približkov iracionalnih števil so zelo dobro sredstvo tako imenovani *verižni ulomki*, to so izrazi oblike



H. Vencelj

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \dots$ naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0. Vsako pozitivno realno število lahko na en sam način razvijemo v verižni ulomek – neskončen, če je število iracionalno. Najnужnejše informacije o verižnih ulomkih, kakor tudi to, kako pridemo do razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ v verižni ulomek, boste našli v dodatku ob koncu tega sestavka. Zapišimo nekaj prvih členov tega razvoja:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}} \quad (6)$$

Vrednosti zaporednih delnih ulomkov

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} &= \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41} \text{ itd} \end{aligned}$$

so čedalje boljši racionalni približki števila $\log_2 \frac{3}{2}$. Povejmo še to, da so približki, ki jih dajejo delni ulomki verižnega ulomka, v nekem smislu najpreprostejši racionalni približki danega števila. Velja namreč, da ima vsak ulomek, ki dano število aproksimira bolje kot neki delni ulomek temu številu prirejenega verižnega ulomka, imenovalce večji od imenovalca tega delnega ulomka. Za nas je ta vidik še kako pomemben. Imenovalce ulomka $\frac{k}{m}$, ki ga bomo vzeli za približek števila $\log_2 \frac{3}{2}$, bo, kot vemo, pomenil število tonov v eni oktavi. Torej bomo dobili z verižnimi ulomki optimalno aproksimacijo kvinte glede na število tonov v eni oktavi.

Poglejmo zaporedne približke! Prva dva: 1 in $1/2$ sta pregroba že na prvi pogled. Izračunajmo, kako natančen približek čiste kvinte v prvi oktavi dajejo

naslednji ulomki. Prva oktava začenja s tonom c_1 , ki ima frekvenco 262 Hz. Torej nas zanima aproksimacija tona s frekvenco $\frac{3}{2} \cdot 262 \text{ Hz} = 393 \text{ Hz}$. Če vzamemo tretji približek, torej $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{3}{5}$, je $\frac{3}{2} \approx 2^{3/5}$. Hitro lahko izračunamo, da je $2^{3/5} \cdot 262 \text{ Hz} = 397 \text{ Hz}$. To pa je preslab približek za 393 Hz, saj je razlike kar za 4 Hz. Po teoriji mora biti naslednji približek boljši. Res dobimo za $\frac{k}{m} = \frac{7}{12}$ vrednost $2^{7/12} \cdot 262 \text{ Hz} = 392,5 \text{ Hz}$, kar pomeni aproksimacijo čiste kvinte na 0,5 Hz natančno. Zato se bomo odločili za približek $\frac{7}{12}$. To sicer pomeni, da bo napaka čiste kvinte v drugi oktavi, kjer so vse frekvence pomnožene z dva, že enaka 1 Hz. Toda raje se bomo sprijaznili s tem, kot da bi vzeli naslednji približek, ki nam ponuja kar 41 stopenj v eni oktavi.

Vidimo torej, da tako imenovana *dvanaajststopenjska enakorazmerna lestvica* uspešno reši naš problem. Omeniti pa moramo še nekaj. Iz analize narodne in umetne glasbe sledi, pa tudi teoretično lahko spoznamo, da so poleg oktave in kvinte v glasbi pomembni še nekateri intervali, npr.: *velika sekunda* ($f, \frac{9}{8}f$), *mala terca* ($f, \frac{6}{5}f$), *velika terca* ($f, \frac{5}{4}f$), *kvarta* ($f, \frac{4}{3}f$), *mala seksta* ($f, \frac{8}{5}f$), *velika seksta* ($f, \frac{5}{3}f$), *velika septima* ($f, \frac{15}{8}f$). Tudi ti intervali so v dvanaajststopenjski lestvici dokaj dobro aproksimirani, čeprav ne tako zelo dobro kot kvinta. Še najbolj moti slaba velika terca, pomemben interval, aproksimiran v prvi oktavi le z natančnostjo 2,5 Hz.

Tako smo matematični del naloge opravili. Glasbena lestvica je torej zaporedje tonov, katerih frekvence tvorijo geometrijsko zaporedje s členom a_1 , ki ima frekvenco 440 Hz, in količnikom $q = \sqrt[12]{2}$, kar za $m = 12$ izračunamo iz (1). Glasbeniki tako izbere osnovnih zidakov glasbe imenujejo tudi *dvanaajststopenjska temperirana uglasitev*.

Frekvenci dveh sosednjih tonov v skali se torej razlikujeta za faktor $\sqrt[12]{2}$. Ta najmanjši možni zvočni interval imenujemo *polton*. Interval, ki sestoji iz dveh sosednjih poltonov, se imenuje *cel ton*.

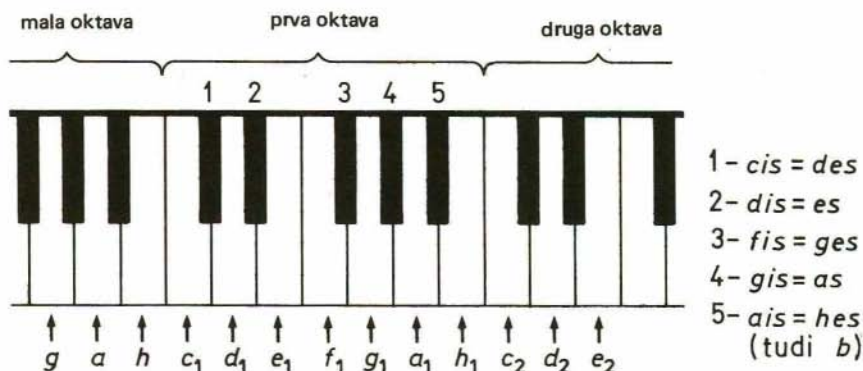
Poleg tona a_1 imajo imena tudi drugi toni glasbene lestvice. Vsa skala je razdeljena na oktave, istoležni toni v posameznih oktavah imajo isto ime. Iz katere oktave so, ločimo z indeksi ali velikostjo črke, npr. $A, a, a_1, a_2, \dots$. Razdelitev na oktave je prikazana na sliki 1.

subkontraoktava



Slika 1

Poimenujmo sedaj tone prve oktave. V njej leži tudi ton a_1 , in sicer devet poltonskih stopenj za začetnim tonom. Začetni ton se imenuje c_1 . Najprej poimenujemo osnovne tone, to so toni, ki so v naši lestvici približki za veliko sekundo, veliko terco, kvarto, kvinto, veliko seksto in veliko septimo. V razdalji celega tona od c_1 je ton d_1 , še cel ton dalje je e_1 in še pol tona višje f_1 . Ti štirje osnovni toni tvorijo tako imenovani *tetrakord*. V drugem delu oktave imamo drugi tetrakord, kot melodija identičen s prvim. Začenja z g_1 , ki tvori s c_1 kvinto, čez cel ton imamo a_1 , še čez cel ton h_1 in nato še polton do c_2 . To pa je že oktavni dvakratnik c_1 in smo ga zato spet imenovali c . To so toni, za katere smo navedli frekvence v tabeli v prvem delu sestavka o glasbeni lestvici. Zaigramo jih lahko z belimi tipkami na klavirju. Ostalo nam je še pet tonov. Tem damo imena po sosednjih osnovnih tonih z dodajanjem besedice *is* ali *es*, kar pomeni za polton višje ali za polton nižje od ustreznega osnovnega tona. Na klavirju jih predstavljajo črne tipke. Slika 2.



Slika 2

"Melodija" iz osnovnih tonov c, d, e, f, g, a, h, c se imenuje *C-durova* lestvica. Če to melodijo prenesemo nespremenjeno navzgor, z začetki na različnih mestih v oktavi, dobimo še 11 durovih lestvic. Vsaka nosi ime po svojem začetnem tonu. Obstaja pa še 12 tako imenovanih molovih lestvic. Tako ima *c-molova* lestvica melodijo: c, d, es, f, g, as, b, c . Ostale dobimo z ustreznim prenosom. Medtem ko je intervalni sestav durovih lestvic: cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton, cel ton, polton, imamo za molove lestvice: cel ton, polton, cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton. Praviloma so skladbe pisane v nekem izbranem duru ali molu, pri čemer – razen morda na redkih posamičnih mestih – uporabljajo le tone ustrezne lestvice. Drugače izbrani osnovni

toni molskih tonalitet vnašajo v melodije neko prikrito disonanco, zato imajo v molu pisane skladbe značilen mehko otožen značaj.

Za zaključek omenimo še nekaj, česar glasbena teorija doslej še ni povsem razjasnila. Naša zgornja preiščljanja nas silijo k zaključku, da vseh 12 durovih tonalitet identično zveni, podobno vseh 12 molovih. Vendar glasbeniki ugotavljajo, da imajo posamezne tonalitete individualne lastnosti. Tako npr. *C—dur* ustvarja sončne, jasne, spokojne občutke (Bethovnova "Aurora"), *E—dur* strastno napeto pričakovanje (številna Lizstova dela, Čajkovskega "Bo prevladal dan") in *Fis—dur* romantično veselje (Griegova "Pomlad"). Možato žalost oznanja *c—mol* ("Posmrtna koračnica" iz Bethovнове simfonije "Eroica"), globoko tragiko *es—mol* (arija Pauline iz Čajkovskega opere "Pikova dama"). Ni povsem jasno, ali gre pri tem za ustaljeno tradicijo ali za kako objektivno zakonitost.

DODATEK

Verižni ulomki. Verižni ulomki so bili in so še predmet številnih matematičnih raziskav. Obstajajo cele knjige, ki obravnavajo le verižne ulomke.

Če zapišemo neko pozitivno realno število a v obliki

$$(7) \quad a = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

kjer so členi $a_1, a_2, a_3, \dots$ naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0, pravimo, da smo število a *razvili v verižni ulomek*. Tako je npr.



Tomaž Domicelj

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \quad \text{in} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

kjer se člen 2 ponavlja v nedogled. Verižni ulomek je torej lahko končen ali neskončen. Ni pa nujno, da je periodičen, kot je naš drugi zgled. Končne verižne ulomke imajo racionalna števila, neskončne vsa ostala.

Verižne ulomke $a_1, a_1 + \frac{1}{a_2}, a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \dots$ imenujemo *delni ulomki*

verižnega ulomka (7). Njihove vrednosti so očitno racionalna števila. Te vrednosti konvergirajo k številu a , vsaka naslednja je bližje a od vseh prejšnjih. Kot zanimivost povejmo še, da so izmenično ena manjša, druga večja od a .

Kako poiščemo nekaj začetnih členov verižnega ulomka, če je število a iracionalno, ilustrirajmo na primeru $a = \log_2 \frac{3}{2}$. Po definiciji logaritma je

$$2^a = \frac{3}{2} \quad (8)$$

Ker je $a < 1$, je $a_1 = 0$. Člen a_2 bomo dobili kot celi del števila $x = \frac{1}{a}$. Iz (8) dobimo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \quad (9)$$

Ker je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

leži x med 1 in 2, torej je $a_2 = 1$. Zapišimo sedaj $x = 1 + \frac{1}{y}$. Izračunajmo a_3 , ki mora biti celi del števila y . V ta namen preoblikujmo enačbo (9) v

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/y} = 2$$

od koder dobimo $\left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{3}{2}$. Spet ugotovimo, da je $\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, kar pomeni, da je $a_3 = 1$. Če tako nadaljujemo, dobimo še $a_4 = a_5 = 2$ in $a_6 = 3$, tako, da je začetek razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ tak, kot ga kaže formula (6).

LITERATURA

- [1] G.E. Šilov, *Prostaja gama — Ustrojstvo muzykal'noj škaly*, Moskva, 1980.
- [2] Leksikon CZ, *Glasba*, Ljubljana 1980
- [3] H. Davenport, *The higher arithmetic*, New York, 1960
- [4] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA SRS, Ljubljana 1984 (Knjižnica Sigma ; 38)