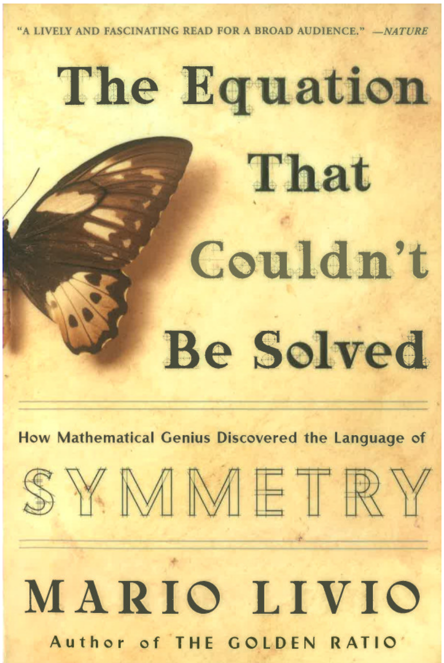
Mario Livio, The Equation That Couldn't Be Solved, Simon & Schuster Paperbacks, 2005, 353 strani.



Privlačno napisana knjiga poljudnoznanstvene narave o pojmu simetrije obravnava razne konkretne aspekte tega sicer abstraktnega pojma in bralcu predstavi zgodovinski razvoj ustrezne matematične formulacije preko iskanja rešitev polinomskih enačb. Ker se bolj osredotoča na zgodovinsko-biografski vidik kot pa na matematično vsebino, je zelo dostopna tudi humanistično usmerjenim bralcem, ki bi radi posegli po idejah iz matematičnega sveta, ne zanimajo pa jih tehnične podrobnosti. Po drugi strani pa je namenjena tudi naravoslovno usmerjenim bralcem, ki samo matematično vsebino knjige sicer že dobro poznajo, radi pa bi izvedeli več o širšem zgodovinskem ozadju nastanka s pojmom simetrije povezanih matematičnih idej in teorij.

Knjiga je posvečena enemu od mejnikov v zgodovini matematike, odkritju in hkrati že tudi prvi uporabi pojma *grupe*, ki predstavlja eno najpomembnejših matematičnih struktur. *Teorija grup* je danes nepogrešljiva ne samo v matematiki, temveč tudi v drugih znanostih, npr. fiziki in kemiji. Na grupe naletimo tudi v umetnosti (npr. grupe periodičnih tlakovanj ravnine), praktično povsod, kjer tako ali drugače nastopajo simetrije. Grupe so »naravni jezik« za proučevanje simetrij.

Do odkritja tako pomembnih in široko uporabnih struktur pa ni prišlo tako, da bi se matematiki zavestno trudili iznajti neko novo in čim širše uporabno matematično teorijo, temveč nekako mimogrede, ko so se ubadali s problemom iskanja splošne algebraične formule za enačbe 5. stopnje, kar je bil dolgo eden izmed velikih nerešenih problemov matematike.

Potem ko je matematikom v renesansi z bistroumnimi ad hoc metodami uspelo najti splošne algebraične formule za rešitve enačbe 3. in 4. stopnje, ki so bile prvič objavljene leta 1545 v slavni Cardanovi knjigi »*Ars Magna*«, je bil naslednji cilj matematikov jasen: najti podobno algebraično formulo za rešitve splošne enačbe 5. stopnje $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$, ki naj bi iz realnih koeficientov a, b, c, d, e, f takšne enačbe samo z osnovnimi operacijami – seštevanjem, odštevanjem, množenjem, deljenjem in korenjenjem – pripeljala do vsaj ene rešitve x take enačbe.

Ker tega oreha dolgo nikomur ni uspelo streti, so nekateri matematiki začeli dvomiti, ali je sploh mogoče najti splošno rešitev za enačbe pete in višjih stopenj. Tako je npr. Gauss istega leta 1799, ko je v svoji doktorski disertaciji objavil svoj prvi (in nepopolni) dokaz osnovnega izreka algebre (po katerem ima vsaka enačba n-te stopnje natanko n rešitev, ki so realna ali kompleksna števila), zapisal: »Potem ko so napori mnogih geometrov pustili le malo upanja, da bi lahko rešili splošno enačbo algebraično, se zdi bolj in bolj verjetno, da je takšna rešitev nemogoča in protislovna.« Dodal je še: »Morda ne bo tako težko dokazati, z vso strogostjo, nemogočost za peto stopnjo.« Potem pa o tem nikoli ni objavil ničesar več.

Da splošna enačba 5. stopnje dejansko ni rešljiva algebraično, sta neodvisno drug od drugega pokazala norveški matematik Abel in francoski matematik Galois. V knjigi sta predstavljeni njuni tragični življenjski zgodbi (oba sta umrla mlada, Abel reven, Galois pa nerazumljen od sodobnikov), pa tudi bistvo njunih matematičnih odkritij v zvezi s tem problemom. Galois je prodrl globlje v njegovo razumevanje, saj je odkril in pojasnil razlog, zakaj problem ni rešljiv.[1] Vsaki enačbi je priredil neko permutacijsko grupo, pokazal, da je rešljivost enačbe z algebraično formulo odvisna od strukturnih lastnosti te grupe, pokazal pa je tudi, da obstajajo enačbe pete in višjih stopenj, katerih grupe ne dopuščajo take rešitve. To so tri ključne sestavine

[1]Problem nerešljivosti enačb pete in višjih stopenj s preprosto algebraično formulo je še eden od številnih slavnih problemov iz zgodovine matematike, ki jih ni bilo mogoče rešiti s predpisanimi sredstvi (spomnite se samo na tri slavne nerešene probleme starogrške matematike: *podvojitev kocke*, *tretjinjenje kota* in *kvadratura kroga*, ali pa na brezplodne poskuse dokazati peti Evklidov postulat). Takšni problemi praviloma dolgo ostajajo nerešeni, po določenem času pa matematiki začnejo iskati rešitve zunaj predpisanega okvira. Morda tudi sami poznate kakšen odprt matematičen problem, ki ga skoraj zagotovo ni mogoče rešiti z danimi sredstvi; vztrajanje, da ne smete ali ne morete uporabiti drugih orodij, vam v bistvu zveže roke. Morda pa vam ga uspe rešiti na kakšen drug način – tako da iznajdete neka druga sredstva za njegovo rešitev; tako je npr. Aleksander Veliki z mečem presekal gordijski vozel.

Galoisovega preboja pri reševanju problema, ki je dolgo ostajal nerešen.

Čeprav je bistvo Galoisovega dokaza mogoče opisati tudi na tako shematičen način, brez tehničnih podrobnosti, bo bolj matematično in zgodovinsko radovedni bralec zagotovo pogrešal natančnejšo razlago. V tem primeru lahko poseže npr. po Rotmanovi knjigi *Galois' Theory*, kjer bo poleg moderne različice Galoisove teorije v dodatku našel tudi njeno izvorno formulacijo ter dovolj natančen opis tega, kako je Galois prišel do svojega odkritja z navezavo na dela svojih predhodnikov in sodobnikov. So pa po drugi strani v knjigi lepo in s primeri razumljivo prikazane osnovne ideje, ki so pripeljale do začetkov teorije grup. Prav tako so dobro popisane dramatične podrobnosti iz življenja Galoisa in Abela; tako npr. bralec lahko izve, kako je Galois svojo teorijo v grobih obrisih skiciral v pismu prijatelju v noči pred usodnim dvobojem. Teorija grup danes dobiva nove in nove uporabe na najrazličnejših področjih, pa čeprav tega njen tvorec Galois niti najmanj ni pričakoval. Po njegovi smrti so matematiki potrebovali kar nekaj let, da so njegove zapiske iz tega pisma razvozlali in prepoznali njihovo vrednost.

Knjigo, katere jedro predstavlja prav Galoisovo odkritje grup, uvajajo poglavja o simetriji na splošno, npr. v naravi in umetnosti, zaključujejo pa poglavja o uporabi simetrije (in teorije grup) v moderni znanosti (npr. fiziki). V tem zadnjem delu knjiga bralca popelje razmeroma daleč proti obzorju moderne znanosti, ko npr. govori, do kako velikih odkritij so prišli fiziki z upoštevanjem načela, da morajo enačbe njihovih teorij ustrezati takšnim ali drugačnim simetrijam. Tako je npr. Einstein, ko je razvijal posebno teorijo relativnosti, odkril, da iz zahteve po simetriji fizikalnih zakonov za enakomerno gibajoče se opazovalce in iz invariantnosti svetlobne hitrosti sledi, da prostora in časa ni mogoče obravnavati kot ločenih entitet (str. 202).

Od knjige, katere cilj je predstavitev odkritja pojma grupe in njegove uporabe, seveda ne moremo zahtevati, da bi bralcu predstavila fizikalne teorije, ki v zadnjih desetletjih iščejo »veliko poenotenje« fizike in temeljijo na načelu, da morajo enačbe teorij biti simetrične. Kako zelo so te teorije zapletene, se lahko zainteresirani bralec prepriča npr. ob knjigi Michael Dine, *Supersymmetries and String Theory*, Cambridge University Press 2015. Po drugi strani pa nekateri fiziki že dopuščajo tudi možnost, da narava ni tako popolno simetrična, kot bi si to želeli. O tem lahko zainteresirani bralec izve več npr. v članku *What Does Beauty Have To Do With Physics?* `www.pbs.org/wgbh/nova/article/beauty-in-physics/`, datum ogleda 17. 3. 2019.

Pojem simetrije je veliko prebogat, da bi bilo v eni sami knjigi mogoče zajeti vse njegove različne pojavne oblike v naravi, umetnosti in matematiki. Tako na primer v knjigi ni omenjena slavna Heronova formula za ploščino trikotnika, v kateri stranice a, b, c, nastopajo »simetrično«. Podobno vrsto simetrije najdemo tudi pri formuli $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ za rešitev kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$; to formulo lahko izrazimo kot simetrično funkcijo vsote x_1+x_2 in produkta x_1x_2 rešitev x_1 in x_2, in sicer takole: $\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)\pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$. Francoz Alexandre-Théophile Vandermonde (1733–96) in Anglež Edward Waring (1736–98) sta se prva domislila vprašanja, ali je tudi enačbe pete stopnje in na splošno vseh stopenj mogoče izraziti s podobnimi simetričnimi izrazi, o tej ideji pa je razmišljal tudi Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), ki ga je Napoleon Bonaparte imenoval »vzvišena piramida matematičnih znanosti« (str. 83). Potreben pa je bil genij Galoisovega kova, ki je od tega preprostega uvida zmogel storiti velikanski korak naprej v neznano.

Čeprav je knjiga slogovno nekoliko heterogena – vsa poglavja niso napisana v enotnem stilu – se jo vsekakor splača prebrati, saj lepo predstavi začetke razvoja teorije grup. Ta prikaz je lahko vsakemu dijaku ali študentu matematike dobra začetna motivacija, da se resneje posveti temu pomembnemu področju matematike. Dostopna bo tudi humanistično usmerjenemu bralcu, ki bolj matematično zahtevnega dela ne bi mogel razumeti. Učitelj matematike pa bo ob njenem prebiranju dobil boljšo predstavo o tem, kje utegnejo dijaki ali študenti imeti težave z določenimi matematičnimi koncepti – te so po navadi podobne, kot so jih imeli matematiki v zgodovini, ko so te koncepte šele uvajali.

Jurij Kovič

Robin Wilson, Euler’s Pioneering Equation, Oxford University Press, Oxford, 2018, 162 str.

»Eulerjeva pionirska enačba«

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

je zaradi svoje lepote in uporabnosti na številnih področjih matematike upravičeno deležna velike pozornosti matematikov vseh profilov, tako zgodovinarjev in popularizatorjev matematike kot tudi učiteljev in raziskovalcev.