O REALNIH ŠTEVILIH

PETER ŠEMRL

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 12D99

Večina srednješolcev realna števila intuitivno dobro razume. Matematično korektno vpeljati realna števila pa še zdaleč ni enostavno. Kaj lahko o tem povemo dijakom v okviru matematičnih krožkov?

ON REAL NUMBERS

Most of secondary school pupils have a reasonable intuitive understanding of real numbers. However, introducing reals in a mathematically correct way is not an easy task. Can we discuss these problems at the secondary school level?

V zadnjih desetletjih poizkušajo šole pri nas in v primerljivih državah postati učencem bolj prijazne. Tako je tudi prav. Vsi mladostniki naj bi opravili srednješolsko izobraževanje, večina pa naj bi si pridobila tudi fakultetno izobrazbo. Tudi prizadevanja v tej smeri lahko samo pozdravimo.

Bojim pa se, da ob vseh teh hvalevrednih namenih pozabljamo na najbolj nadarjene učence in dijake. Ker dandanes mladostniki niso niti bolj pametni niti bolj delavni kot nekoč, je mogoče višjo izobrazbeno raven doseči le, če ob vseh drugih ukrepih in spremembah znižamo minimalne zahteve, ki jih morajo dijaki izpolniti za dokončanje srednje šole. Ob tako znižanih kriterijih pa nadarjeni močno izstopajo iz povprečja, ne da bi se za to kaj posebej trudili. In zato ne razvijejo svojih sposobnosti toliko, kot bi jih v bolj spodbudnem okolju.

Poleg tega na vseh nivojih izobraževanja opažamo težnjo po zmanjševanju obsega predmetov, ki so za učence in dijake težki. To je seveda najlažja pot k „zviševanju“ izobrazbene strukture prebivalstva.

Učitelji v takem okolju so seveda postavljeni pred povsem druge izzive kot učitelji v deželah s poudarjeno tekmovalnim šolskim sistemom (npr. v nekaterih azijskih državah). Dober in prizadeven učitelj se zaveda slabosti in prednosti posameznih izobraževalnih postopkov. Tako ga veselijo marsikateri pozitivni premiki v našem šolstvu, hkrati pa poizkuša zmanjševati negativne učinke sprememb, ki jih ni malo, saj so naše šole ves čas v procesu prenove ali pa reforme, kakorkoli se že pač temu v določenem času reče. In le kdo verjame, da vse vodijo v pravo smer?

Iz vsega povedanega ste seveda uganili, da imam v mislih dodatno spodbujanje najbolj nadarjenih učencev. Številni učitelji matematike in fizike, ki vodijo matematične in fizikalne krožke, opravijo delo neprecenljive vrednosti. Precej časa je namenjenega pripravi za tekmovanja iz matematike, fizike, logike in računalništva. Mnogi mentorji pa v okviru krožkov pripravijo tudi kakšno predavanje, primerno za najboljše dijake. Morda je pri pripravi takega predavanja najtežji prav prvi korak, to je izbira teme. V tem prispevku nameravam predstaviti temo, ki je primerna za matematične krožke na gimnazijah. V uredništvu si želimo več takih prispevkov, ki bi prispevali k bogatitvi vsebin pri mentorskem delu z najbolj nadarjenimi dijaki.

Kaj želimo doseči z izborom teme? V srednji šoli sem posamezna poglavja pri predmetu matematika dojemal kot zaključene zgodbe. Povedali so mi, kaj je odvod funkcije, naučili smo se ga računati in spoznali njegove uporabe. Le kaj bi tukaj lahko še kdo dodal? In podobno je bilo z integralom: nedoločeni integral, določeni integral, računanje in uporaba. Mislil sem si, da bom na študiju matematike moral računati težje integrale, o samih integralih pa se ne da povedati kaj drugega od tistega, kar sem že slišal.

Ne vidim nobenega razloga, da bi boljšim dijakom prikrivali resnico. Na kratko jim lahko povemo, da so vse to šele začetki vznemirljivo zanimivih zgodb. Na primer, povemo jim, da imamo vsepovsod opraviti s količinami, ki so odvisne od več spremenljivk. Cena izdelka je odvisna od cene vloženega dela, cene surovin, davkov, stroškov distribucije in marketinga, razmerja med ponudbo in povpraševanjem … Zato v matematiki poleg srednješolcem znanih „običajnih“ funkcij (mišljene so seveda realne funkcije ene spremenljivke) obravnavamo tudi funkcije več spremenljivk. Potem pa postane študij odvodov, naraščanja, padanja, konveksnosti … še veliko bolj zanimiv. Določeni integral definiramo z mislijo na računanje ploščin ravninskih likov. Kaj pa računanje volumnov in površin prostorskih teles? In potem lahko omenimo, da taka vprašanja vodijo od integralov, označenih z eno „integralsko kljuko“, k takim z dvema ali celo tremi.

V avgustu 2006 sem bil povabljen, da pripravim predavanje za srednješolce v okviru poletnega srečanja MARS 2006 v Kopru. Ob izbiranju teme sem se poleg zgoraj zapisanih misli spomnil še nekaterih pogovorov z znanci ob začetku mojega raziskovalnega dela v matematiki. Bilo jim je jasno, da se znanosti, kot medicina, biologija ali kemija, ves čas razvijajo. Nemalo pa jih je bilo presenečenih nad dejstvom, da se to dogaja tudi s tako „staro znanostjo“, kot je matematika. Da je v matematiki mogoče odkriti še kaj novega?

Izbiral sem torej tematiko, ki bi bila zanimiva, dostopna nadarjenim srednješolcem in bi med drugim pokazala, da tudi na prvi pogled dokončane zgodbe v matematiki skrivajo v sebi še mnogo zanimivega. Poučen primer je pojem realnih števil. Na začetku predavanja smo skupaj z dijaki „ugotovili“, da o številih vemo tako rekoč vse. Vsi „vemo“, kaj so števila in kako z njimi računamo. Le kaj bi tu lahko še dodali?

Potem pa smo opravili hiter sprehod skozi številske množice. V množici naravnih števil nimamo problemov s seštevanjem in množenjem. S primeri pokažemo, da se zatakne pri odštevanju, in se nato spomnimo, da ta problem odpravimo z vpeljavo celih števil. Problem deljenja pa odpravimo z uvedbo racionalnih števil. Je racionalno število isto kot ulomek? Ne, saj dva različna ulomka lahko predstavljata isto racionalno število. Na primer, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Na tem nivoju bo zadostovalo, če racionalna števila definiramo kot števila, ki jih je mogoče predstaviti z ulomki. Ugotovimo, da so na množici racionalnih števil izvedljive vse štiri osnovne računske operacije z edino izjemo, da deljenje z 0 ni definirano. Ali se lahko tu ustavimo? Saj smo vendar rešili vse probleme, povezane z osnovnimi računskimi operacijami! Očitno pa nam še nekaj manjka. Zakaj bi sicer govorili o realnih številih?

Na tem mestu lahko opišemo predstavitev racionalnih števil na številski premici. Potem pa pozornost usmerimo na merjenje razdalj med točkami na številski premici. Vsako razdaljo si želimo izraziti z nekim številom. Pri tem nam bo razdalja med točkama 0 in 1 služila kot enota. Vsako točko na številski premici, ki predstavlja kako racionalno število, bomo imenovali racionalna točka. Naj točka P leži desno od izhodišča na številski premici. Če je P racionalna točka, ki predstavlja racionalno število x, potem je seveda razdalja med 0 in P enaka x. Na primer, točka $\frac{5}{3}$ je za $\frac{5}{3}$ oddaljena od izhodišča. Da bi lahko merili vse razdalje, moramo vsaki točki na številski premici desno od izhodišča prirediti število, ki bo merilo razdaljo med to točko in izhodiščem.

Če bi bila vsaka točka na številski premici racionalna, potem bi lahko razdalje merili že z racionalnimi števili. Izkaže pa se, da to ni res. Nad intervalom $[0, 1]$ narišemo enotski kvadrat in dolžino njegove diagonale s šestilom prenesemo na številsko premico. Dijaki vedo, da je dolžina te diagonale enaka $\sqrt{2}$. Torej smo dobili na številski premici točko, ki predstavlja število $\sqrt{2}$. Sedaj pa razložimo postopek dokazovanja s protislovjem in podamo dokaz, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Tako smo dobili zgled števila, ki ni racionalno, a se pojavi pri merjenju razdalj. Sedaj pa opravimo še nekoliko daljši, a hkrati tudi bolj poučen razmislek, ki pove, da niso vse točke na številski premici racionalne. Najprej točke na številski premici uredimo. Za točki P in R na številski premici bomo pisali $P \leq R$, če je $P = R$ ali P leži levo od R. Zakaj ravno taka definicija urejenosti? Omejimo se na racionalne točke. Pozitivna racionalna števila merijo razdaljo od izhodišča, in ko se pomikamo v desno, postaja ta razdalja čedalje večja. Torej je relacija $\leq$ za pozitivne racionalne točke definirana na naraven način. Kako pa naj med sabo primerjamo pozitivno in negativno racionalno število ali pa dve negativni racionalni števili? Kaj je večje: 1 ali -2? -2 ali -4? Po naši definiciji urejenosti je $-2 \leq 1$ in $-4 \leq -2$, saj točka -2 leži levo od 1 in desno od -4. Da bi doumeli, da je tako definirana urejenost zares naravna, si mislimo, da racionalna števila opisujejo stanje na našem računu v banki. Smiselno je zapisati $x \leq y$, če je y za nas ugodnejše (ali enako) stanje na računu kot x. Potem pa ni več dvoma o tem, da je -2 manj kot 1 in več kot -4.

Naj bo P točka na številski premici. Tej točki bomo priredili decimalno število x. Premica je s celoštevilskimi točkami razdeljena na enotske podintervale in P bodisi leži med dvema zaporednima celoštevilskima točkama bodisi sama predstavlja eno od celih števil. V obeh primerih lahko najdemo tako celo število c_0, da velja

$$c_0 \leq P \leq c_0 + 1\,.$$

Opazimo še, da je celo število c_0 v prvem primeru enolično določeno, v drugem pa ne. Sedaj pa interval med c_0 in $c_0 + 1$ razdelimo na deset enako dolgih podintervalov. Krajišča teh intervalov so c_0, $c_0 + \frac{1}{10}$, $c_0 + \frac{2}{10}$, $\ldots$, $c_0 + \frac{9}{10}$, $c_0 + 1$. Ponovno ugotovimo, da točka P bodisi leži med dvema zaporednima krajiščema bodisi je eno od teh krajišč. V obeh primerih obstaja taka števka c_1, da je

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 \leq P \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{10}\,.$$

Točka P je sedaj locirana na intervalu dolžine $\frac{1}{10}$. S ponovno razdelitvijo tega intervala na 10 enako dolgih podintervalov dobimo tako števko c_2, da velja

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 \leq P \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 + \frac{1}{100}\,.$$

Ta postopek ponavljamo. Po n korakih imamo

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n \leq P \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}c_n + \frac{1}{10^n}\,,$$

kjer so $c_1, \ldots, c_n$ števke. S tem imamo točko P locirano na intervalu dolžine $\frac{1}{10^n}$.

Nadaljevanje tega procesa točki P priredi celo število c_0 in neskončno zaporedje števk c_1, c_2, c_3, $\ldots$ Velja pa tudi obratno. Vsakemu celemu številu c_0 in neskončnemu zaporedju števk c_1, c_2, c_3, $\ldots$ pripada natančno določena točka P na številski premici. Oglejmo si to bolj natančno. Naj bo dano celo število c_0 in neskončno zaporedje števk c_1, c_2, c_3, $\ldots$ Na številski premici označimo celoštevilski točki c_0 in $c_0 + 1$. Množico vseh točk T, za katere velja $c_0 \leq T \leq c_0 + 1$, imenujemo zaprti interval $[c_0, c_0 + 1]$. Označimo ga z I_0. Podobno zaprti interval $I_1 = \left[c_0 + \frac{1}{10}c_1, c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{10}\right]$ definiramo kot množico vseh točk T, ki zadoščajo neenakosti

$$c_0 + \frac{1}{10}c_1 \leq T \leq c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{10}\,.$$

Interval I_1 je podinterval intervala I_0. Na podoben način definiramo interval $I_2 = \left[c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2, c_0 + \frac{1}{10}c_1 + \frac{1}{100}c_2 + \frac{1}{100}\right]$ in potem še celo zaporedje vloženih intervalov I_3, I_4, ... Dolžine teh intervalov postanejo sčasoma tako majhne, kot le hočemo, in intuitivno je jasno, da obstaja natanko ena točka P na številski premici, ki leži v vsakem od teh intervalov.

Za hip se omejimo na točke na številski premici, ki ležijo desno od točke 0. Vsaki taki točki P smo priredili celo število $c_0 \geq 0$ in neskončno zaporedje števk c_1, c_2, c_3, ... Potem pa smo opravili še „obraten“ proces: celemu številu $c_0 \geq 0$ in neskončnemu zaporedju števk c_1, c_2, c_3, ... smo priredili točko P na številski premici. Če uporabimo običajni decimalni zapis, smo torej poiskali zvezo med točkami desno od 0 na številski premici in neskončnimi decimalnimi števili $c_0{,}c_1c_2c_3\ldots$

Vsaki točki desno od izhodišča smo priredili neskončno decimalno število. Tu bi bila na mestu pripomba, da nekaterim točkam ustrezajo končne decimalne reprezentacije. Na primer, točki $\frac{9}{8}$ pripada končni decimalni zapis $\frac{9}{8} = 1{,}125$. Vendar imajo tudi taka števila neskončno decimalno reprezentacijo, v kateri se pač od nekje naprej ponavlja števka 0. V našem primeru je $\frac{9}{8} = 1{,}125000\ldots$

Kaj pa točke levo od izhodišča na številski premici? Tudi vsaki taki točki smo priredili celo število c_0 in neskončno zaporedje števk c_1, c_2, c_3, ... To točko smo torej predstavili z decimalnim številom

$$c_0 + 0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

Ta zapis zlahka spremenimo v običajni decimalni zapis. Oglejmo si to na primeru. Točki $-1/3$ pripada po zgoraj opisanem postopku celo število -1 in zaporedje števk: 6, 6, 6, ... Od tod pa hitro dobimo običajni decimalni zapis tega števila:

$$-\frac{1}{3} = -1 + 0{,}666\ldots = -0{,}333\ldots$$

Intuitivno nam je sedaj jasno, da točkam na številski premici ustrezajo neskončna decimalna števila in obratno. Oglejmo si bolj podrobno decimalni zapis racionalnih števil. Začnimo z nekaj zgledi:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$$

Črta v zapisu pomeni, da se skupina števk pod njo od tam naprej ponavlja. V navedenih primerih je decimalni zapis bodisi končen ali pa je periodičen (od nekje naprej ponavljajoč se zapis). Srednješolci vedo, da imajo pozitivna racionalna števila bodisi končen bodisi periodično ponavljajoč se decimalni zapis. Vedo tudi, da če neki točki na številski premici pripada periodično ponavljajoč se decimalni zapis, potem ta točka predstavlja racionalno število.

V decimalnem številu

$$1{,}0100100010000100000100000001\ldots$$

pa se nobena skupina števk ne ponavlja periodično. Torej temu decimalnemu številu ustreza točka na številski premici, ki ni racionalna. Takim točkam pravimo iracionalne točke, ustrezna decimalna števila pa imenujemo iracionalna števila.

Skratka, če hočemo meriti razdalje, potem nam samo racionalna števila ne zadoščajo. Moramo jih razširiti z množico iracionalnih števil. S to razširitvijo dobimo množico realnih števil.

Je pa mogoče tudi zelo na hitro razložiti, da samo z racionalnimi števili v matematiki ne pridemo prav daleč. Spomnimo se cenenih kalkulatorjev, ki imajo poleg štirih osnovnih računskih operacij še tipko za računanje kvadratnega korena. Včasih smo znali tudi kvadratni koren „izračunati peš“. Je pa v primerjavi s štirimi osnovnimi računskimi operacijami kvadratni koren računska operacija, ki ni vedno izvedljiva v množici racionalnih števil (spomnimo se dokaza, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število).

Vse do te točke nam srednješolci zlahka sledijo. Večino povedanega poznajo in razumejo. Sedaj pa lahko zastavimo vprašanje, kako definirati realna števila. „Odgovor“ je na dlani. Definiramo jih kot množico decimalnih števil.

Sedaj, ko nam je „vse jasno“, pa jih vprašamo, katero število ima decimalni zapis $0{,}9999\ldots = 0{,}\overline{9}$? Skupaj ugotovimo, da je to število bližje 1 kot število 0,9. Torej je oddaljeno od 1 za manj kot $\frac{1}{10}$ in tudi za manj kot $\frac{1}{100}$ in tudi za manj kot $\frac{1}{1000}$ ... Potem pa že večina ugane, da gre za drugačen decimalni zapis števila 1. Lahko pa tudi računamo:

$$x = 0{,}99999\ldots$$

in zato

$$10x = 9{,}99999\ldots,$$

od koder dobimo $9x = 10x - x = 9{,}99999\ldots - 0{,}99999\ldots = 9$, od koder sledi, da je $x = 1$.

Tu je torej težava. Možno je, da ima neko število dve različni decimalni reprezentaciji. Na primer, število 1 ima neskončni decimalni zapis $1 = 1{,}000\ldots$ Pozorni bralec pa je opazil, da bi pri prej opisanem postopku točki 1 na številski premici lahko priredili tudi drugačen decimalni zapis $1 = 0{,}999\ldots$ Namreč, v prvem koraku bi si lahko izbrali namesto $c_0 = 1$ tudi $c_0 = 0$, saj bi bil tudi s to izbiro zahtevani pogoj $c_0 \leq 1 \leq c_0 + 1$ očitno izpolnjen. Ko bi potem v naslednjem koraku razdelili interval $[0, 1]$ na deset enako dolgih podintervalov, bi seveda opazili, da leži točka 1 na zadnjem od teh intervalov (točka 1 je celo skrajno desna točka zadnjega podintervala) in bi zato morali za prvo števko v pripadajočem zaporedju izbrati 9. To bi se ponovilo v vseh naslednjih korakih, in tako bi dobili decimalno reprezentacijo $1 = 0{,}999\ldots$

Nadarjeni srednješolci bi znali tudi sami razmisliti, katere so tiste točke na številski premici, ki imajo (dve) različni decimalni reprezentaciji (sedaj je jasno, zakaj smo uporabili narekovaje, ko smo prirejanju točke k danemu decimalnemu zapisu rekli „obraten“ proces k procesu prirejanja decimalnega števila k dani točki). In potem lahko skupaj ugotovimo, da je pač treba nekoliko več previdnosti. Množice realnih števil ne moremo definirati kot množico decimalnih števil, saj je treba nekatera različna decimalna števila identificirati, ker predstavljajo isto število.

Sedaj pa pride na vrsto vprašanje, ki nam povzroči resnične težave. S števili hočemo računati. Končni decimalni števili 0,985 in 32,451 znamo sešteti:

$$\begin{array}{r} 0{,}985 \\ +\ 32{,}451 \\ \hline =\ 33{,}436 \end{array}$$

Seštevanje smo izvedli „od zadaj naprej“. Kaj pa to pomeni, kadar imamo opravka z neskončnimi decimalnimi zapisi? Nekako v zadregi ugotovimo, da na to vprašanje ne znamo odgovoriti. Torej sploh ne vemo, kaj je vsota dveh realnih števil. Potolažimo se z mislijo, da računske operacije na realnih številih intuitivno razumemo. Saj tudi, ko računamo obseg kroga s polmerom 2, vemo, da $4 \cdot 3{,}14$ ni obseg tega kroga, ampak le približek. In da dobimo boljši približek, če namesto 3,14 vzamemo boljši približek števila π.

Pa vendar ne moremo biti zadovoljni. Pojem realnega števila bi radi vpeljali tako, da bi lahko nedvoumno povedali, kaj je vsota (produkt) dveh realnih števil.

Preden se lotimo matematično korektne vpeljave realnih števil, se moramo vprašati, kaj sploh hočemo. Na množici realnih števil hočemo imeti definirani računski operaciji seštevanje in množenje, ki zadoščata običajnim zakonitostim (komutativnost, asociativnost, distributivnost, obstoj ničelnega elementa in enote za množenje, obstoj nasprotnih in inverznih elementov). Skratka, hočemo, da množica realnih števil zadosti vsem aksiomom iz definicije polja. Hočemo pa še več; za množico realnih števil bomo zahtevali, da je urejeno polje. To pomeni, da hočemo imeti na množici realnih števil definirano še delno urejenost $\leq$ (tu seveda srednješolcem pojem delne urejenosti razložimo), ki je usklajena z algebraičnimi operacijami, kar pomeni, da za vsako trojico realnih števil a, b, c iz $a \leq b$ sledi $a+c \leq b+c$, iz $0 \leq a$ in $0 \leq b$ pa sledi $0 \leq ab$.

Vse to pa še ni dovolj. Namreč, tudi množica vseh racionalnih števil z običajnimi algebraičnimi operacijami in običajno urejenostjo je urejeno polje. Kaj je tisto, kar bo ločilo urejeno polje realnih števil od urejenega polja racionalnih števil? Odgovor se skriva v aksiomu Dedekindove polnosti.

Da bi ta aksiom razložili, potrebujemo pojem omejene množice. Najprej si bomo ogledali nekaj primerov, potem pa zapisali definicijo. Tu pa moramo biti previdni. Naš namen je matematično korektno vpeljati realna števila. Ta trenutek torej sploh še ne vemo, kaj realna števila so. Zato lahko delamo samo z racionalnimi števili in zato bomo seveda primere izbrali v množici racionalnih števil.

Oglejmo si množice racionalnih števil

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \colon 1 \leq r \leq 2\}, \quad B = \{r \in \mathbb{Q} \colon 1 < r < 2\}$$

in

$$C = \{r \in \mathbb{Q} \colon r \leq 2\}.$$

Vsi takoj uganemo, da so vse tri množice navzgor omejene, navzdol omejeni pa sta samo množici A in B. Znamo tudi povedati, zakaj so vse tri množice navzgor omejene. Zato, ker je vsak element množice A (B, C) manjši ali kvečjemu enak 2.

Definicija 1. Naj bo X neprazna podmnožica delno urejene množice $(Y, \leq)$. Element $y \in Y$ je zgornja meja množice X, če velja $x \leq y$ za vsak $x \in X$. Množica X je navzgor omejena, če ima zgornjo mejo.

Seveda je 17 zgornja meja za vsako izmed množic A, B, $C \subset \mathbb{Q}$. Vsako racionalno število ≥ 2 je zgornja meja za vsako od teh množic. Ampak izmed vseh teh zgornjih mej se nam meja 2, ki je najmanjša med njimi, seveda zdi najboljša.

Definicija 2. Naj bo X neprazna navzgor omejena podmnožica delno urejene množice $(Y, \leq)$. Element $y_0 \in Y$ je natančna zgornja meja množice X, če je y_0 zgornja meja množice X in če za vsako zgornjo mejo y množice X velja: $y_0 \leq y$.

Natančni zgornji meji množice X pravimo tudi najmanjša zgornja meja množice X ali supremum množice X. Označimo jo s simbolom $\sup X$.

Torej imamo v zgornjih treh primerih

$$\sup A = \sup B = \sup C = 2\,.$$

Sedaj pa si poglejmo množico

$$D = \{r \in \mathbb{Q}\colon\ r \leq 0 \ \text{ ali } \ r^2 \leq 2\}\,.$$

Intuitivno nam je takoj jasno, kaj so elementi te množice. „To so ravno vsa racionalna števila, ki so manjša od $\sqrt{2}$“. Zakaj narekovaji? Vemo že, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. O $\sqrt{2}$ bomo lahko govorili šele potem, ko bomo realna števila skonstruirali. Seveda pa nam nihče ne brani, da bi že sedaj, ko imamo na voljo samo racionalna števila, uporabljali intuitivno razumevanje. Tako bomo od sedaj naprej razpravljali ves čas na dveh nivojih. Na intuitivnem nivoju imamo že kar dobro predstavo o tem, kaj realna števila so, na formalnem nivoju pa lahko delamo samo z racionalnimi števili.

Množica D je navzgor omejena. Racionalno število 2 je zgornja meja te množice. Pa tudi 1,5 je zgornja meja te množice. In prav tako 1,42 ... Kaj pa je natančna zgornja meja te množice?

Intuitiven odgovor je jasen: to je $\sqrt{2}$. Ampak mi imamo za zdaj opravka samo z racionalnimi števili. Točko $\sqrt{2}$ smo na številski premici že skonstruirali in tudi ugotovili, da tej točki ne ustreza nobeno racionalno število. Vsa racionalna števila, ki leže desno od te točke, so zgornje meje množice D. Vendar pa med temi zgornjimi mejami ni najmanjše.

Zakaj ne? Intuitivno je odgovor jasen. Zato, ker nam manjka $\sqrt{2}$. Ko pa bomo skonstruirali realna števila, se nam kaj takega ne bo več zgodilo.

Rekli bomo, da urejeno polje zadošča Dedekindovemu aksiomu polnosti, če ima vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica natančno zgornjo mejo. Urejeno polje, ki zadošča temu aksiomu, se imenuje Dedekindovo urejeno polje.

Kaj bo torej sedaj naša naloga? Imamo množico racionalnih števil. Skonstruirali bomo množico realnih števil, in sicer tako, da bomo po eni strani zadovoljili našo intuitivno predstavo (vsakemu realnemu številu bo ustrezala natanko ena točka na številski premici in vsaki točki na številski premici bo ustrezalo natanko eno realno število, računske operacije in urejenost bodo definirane tako, da se bodo definicije skladale z našo intuicijo), po drugi strani pa bo skonstruirana množica skupaj z na njej definiranima računskima operacijama seštevanja in množenja in z na njej definirano relacijo delne urejenosti ustrezala vsem aksiomom iz definicije Dedekindovega urejenega polja.

Kako začeti? Idejo dobimo, če se spomnimo množice D. V tem trenutku smo na intuitivni strani. Množica D je podmnožica racionalnih števil. Intuitivno pa je jasno, da nam ta množica določa število $\sqrt{2}$. In tu je ideja! Če mislimo o realnih številih kot o točkah na številski premici in če se zgledujemo po množici D, potem je vsaka točka (= vsako realno število) določena z množico vseh racionalnih točk (= racionalnih števil), ki leže levo od te točke (= levo od tega racionalnega števila). Torej bomo predstavili vsako realno število x z množico vseh racionalnih števil r, za katera velja $r < x$. Tako množico bomo imenovali Dedekindov rez.

Ponovimo: naša naloga je skonstruirati množico realnih števil. Za zdaj imamo na voljo samo racionalna števila. Torej moramo Dedekindove reze definirati samo z racionalnimi števili. Intuitivno je Dedekindov rez, ki predstavlja število x, presek poltraka $(-\infty, x)$ z množico racionalnih števil. Kako opisati take množice? Kaj je njihova karakteristična lastnost? Po nekaj premišljevanja se nam posveti, da je Dedekindov rez α taka podmnožica racionalnih števil, da hkrati z vsakim svojim elementom r vsebuje tudi vsa racionalna števila q, ki so manjša od r. Pravkar zapisano lastnost pa imata seveda tudi prazna množica in množica $\mathbb{Q}$. Torej imamo tri lastnosti; poleg zgoraj opisane sta tu še nepraznost in različnost od $\mathbb{Q}$. Tu bi morda pomislili, da bomo Dedekindove reze definirali kar kot podmnožice racionalnih števil, ki imajo te tri lastnosti. Pa bo le treba še nekaj previdnosti! Ko intuitivno premišljujemo, kaj bi bili vsi Dedekindovi rezi ob taki definiciji, se nam kmalu posveti, da bi (intuitivno!) to bili bodisi preseki poltrakov $(-\infty, x)$ z množico racionalnih števil bodisi preseki poltrakov $(-\infty, x]$ z množico racionalnih števil.[1] Da bi izločili drugo možnost, bomo od Dedekindovega reza zahtevali še, da ne vsebuje največjega elementa (seveda je največji element podmnožice $A \subset \mathbb{Q}$ definiran kot tako racionalno število $r \in A$, da je $p \leq r$ za vsak $p \in A$). Izkaže se, da smo sedaj že na cilju! In lahko začnemo s formalnimi definicijami.

Definicija 3. Dedekindov rez je podmnožica $\alpha \subset \mathbb{Q}$, ki ima naslednje lastnosti:

1. $\alpha \neq \emptyset$,
2. $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
3. α ne vsebuje največjega elementa,
4. za vsak par r, $q \in \mathbb{Q}$ iz $r \in \alpha$ in $q < r$ sledi $q \in \alpha$.

Vsak tak Dedekindov rez nam bo predstavljal neko realno število. Torej bomo definirali:

Definicija 4. Realno število je Dedekindov rez. Množico vseh realnih števil označimo z $\mathbb{R}$.

[1] Srednješolci z dobrim intuitivnim razumevanjem bodo hitro uganili, da se tidve množici ne razlikujeta, kadar je x iracionalen.

Množico realnih števil imamo. Kako jo bomo uredili? Intuitivni razmislek je preprost. Za realni števili x, y velja $x \leq y$ natanko tedaj, ko je $(-\infty, x) \subset (-\infty, y)$. Ponovno smo razmišljali s poltraki in intervali, ki so za zdaj še nedefinirani pojmi. Ampak mi intuitivno že vemo, za kaj gre! Formalno pa zgodbo peljemo naprej takole:

Definicija 5. Za poljubni dve realni števili (za poljubna dva Dedekindova reza) α, β definiramo

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \subset \beta \,.$$

Sedaj imamo več možnosti. Ker sem imel za predavanje na voljo dve šolski uri, sem hotel pojasniti zgolj glavne ideje. Če bi vodil krožek, pa bi si za to tematiko vzel več časa in bi s srednješolci zares dokazal, da smo na ta način definirali relacijo delne urejenosti. Pri tem bi jih poizkusil zgolj usmerjati in jih na ta način učiti dokazovanja matematičnih trditev. Kar je seveda zelo težko! Tu pač ne smemo pozabiti svojih nerodnih začetkov, ko smo imeli težave celo s preverjanjem povsem preprostih trditev.

Preprosto je videti, da je izpolnjen aksiom Dedekindove polnosti. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ neprazna navzgor omejena množica. Pokazati moramo obstoj najmanjše zgornje meje. Tu si zopet pomagamo z intuicijo. Na številski premici si ponazorimo množice

$$A = \{-1, -1/2, -1/3, -1/4, \ldots\} \,,$$

$B = (-1, 0)$ in $C = [-1, 0]$. V vseh treh primerih uganemo, da je najmanjša zgornja meja enaka 0, in se pri tem spomnimo, da je število 0 predstavljeno kot množica vseh negativnih racionalnih števil. Sedaj pa si elemente množic A, B in C predstavljamo kot Dedekindove reze (poltrake, presekane s $\mathbb{Q}$). Bistri srednješolci bodo kmalu ugotovili, da je v vseh treh primerih Dedekindov rez, ki predstavlja 0, unija vseh Dedekindovih rezov, ki predstavljajo vsa števila iz A, oziroma B, oziroma C.

Trditev 1. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ neprazna navzgor omejena množica. Potem je*

$$\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

natančna zgornja meja množice A.

Tu ne bom navajal dokaza, ki ga zainteresirani bralec zlahka najde v literaturi ali na spletu. Pravzaprav verjamem, da je večina bralcev, ki so se prebili do te točke, sposobna sama dokazati gornjo trditev in jim bo literatura služila zgolj za preverjanje, da niso česa pomembnega izpustili.

Da bi končali s konstrukcijo realnih števil, moramo vpeljati obe računski operaciji, preveriti zahtevane lastnosti in usklajenost z relacijo urejenosti. Kako vpeljemo seštevanje? Intuicija pravi, da je realno število $\sqrt{2}$ predstavljeno z vsemi racionalnimi števili, ki so manjša od $\sqrt{2}$, da je realno število $\sqrt{3}$ predstavljeno z vsemi racionalnimi števili, ki so manjša od $\sqrt{3}$, in da je realno število $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ predstavljeno z vsemi racionalnimi števili, ki so manjša od $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Če seštejemo racionalni števili $p < \sqrt{2}$ in $q < \sqrt{3}$, potem naj bi bilo $p+q < \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Intuicija še pove, da lahko vsako racionalno število $r < \sqrt{2}+\sqrt{3}$ razcepimo v obliki $r = p+q$, kjer $p < \sqrt{2}$ in $q < \sqrt{3}$. Od intuitivnega gremo nazaj k formalnemu pristopu in zapišemo:

Definicija 6. Za poljubna Dedekindova reza α, β definiramo

$$\alpha + \beta = \{p + q \colon p \in \alpha \ \text{ in } \ q \in \beta\}.$$

No, sedaj ni težko preveriti, da je za vsak par α, $\beta \in \mathbb{R}$ tudi $\alpha + \beta$ Dedekindov rez in da tako definirano seštevanje izpolnjuje vse zahtevane lastnosti.

Pri definiciji množenja je treba biti nekoliko bolj previden. Tu bomo izpustili podrobnosti. Naš namen je bil opisati, kako je mogoče nadarjenim srednješolcem predstaviti zelo zahtevno matematično tematiko. Če bi kak mentor v srednji šoli izbral to tematiko za serijo predavanj v okviru krožkov, bo po do sedaj povedanem zlahka našel ustrezno literaturo ali zapise na spletu ali pa celo stare zapiske iz Analize 1, kjer se bo lahko poučil o manjkajočih detajlih in si ob pomoči tega zapisa izbral svoj koncept predstavitve te zahtevne (a hkrati intuitivno dokaj jasne) tematike.

Kaj smo počeli? Začeli smo z urejenim poljem $\mathbb{Q}$. Potem smo samo z uporabo racionalnih števil skonstruirali množico realnih števil in na njej definirali seštevanje, množenje in urejenost. Pri tem smo izpolnili vse aksiomatske zahteve in tudi intuitivno se tako definirana realna števila natanko ujemajo z našo predstavo. Seveda tu povemo še, kako je vpeljavo realnih števil običajno videti v literaturi. Tu smo (opisoval sem predavanje) imeli ves čas opravka z vzporednima zgodbama: intuitivno in strogo formalno. Na krožku, kjer lahko predavanje raztegnemo na več ur, bi se spodobilo še enkrat ponoviti zgolj povsem formalno vpeljavo realnih števil brez kakršnihkoli intuitivnih vložkov. In tu lahko spregovorimo besedo ali dve o razmerju med intuitivnim dojemanjem in matematično strogostjo. Intuitivno dojemanje je bistveno, matematična strogost pa je nujno potrebna. Razvoj vseh znanosti se včasih bere skoraj kot opis zaporedja znanstvenih zmot. Do neke mere je to res celo za matematiko. A je pri izogibanju napakam matematika uspešnejša od drugih znanosti. Tudi zato, ker sledimo pravilom matematične strogosti, kot smo storili tudi pri vpeljavi realnih števil. Zavedati se moramo, da se zgolj pri sklicevanju na intuicijo, zlasti v bolj zapletenih situacijah, napakam težko izognemo.

Sedaj pa nam je jasno, da smo se na začetku le prenaglili, ko smo „ugotovili“, da vemo vse o realnih številih. Ampak težave smo odpravili in sedaj le kaže, da je ta zgodba končana.

Pa seveda to še zdaleč ni res! Realna števila smo skonstruirali in tako dobili matematični objekt, ki zadošča vsem aksiomom za Dedekindovo urejeno polje. Vendar se tu takoj pojavi še vprašanje edinosti. Učeno rečemo, da je s temi aksiomi Dedekindovo urejeno polje do izomorfizma enolično določeno. Srednješolcem, ki so sledili razlagi do te točke, je mogoče intuitivno razložiti pomen tega stavka. In potem lahko nadaljujemo in povemo, da tudi s tem zgodbe še ni konec. Ali je mogoče realna števila skonstruirati še na kak drug naraven način? Seveda je to mogoče, na primer z napolnitvijo polja racionalnih števil. Ali zares potrebujemo vse aksiome, ki smo jih našteli? Drugače rečeno, ali lahko katerega od aksiomov izpustimo, ne da bi s tem ogrozili enolično določenost (do izomorfizma) polja $\mathbb{R}$? Ali obstaja še kakšna druga naravna aksiomatizacija realnih števil? Obstajajo, na primer Tarskijeva aksiomatizacija. Podrobnejšo razlago bo zainteresirani bralec zlahka našel na spletu (angleška izraza sta „completion of the rational numbers“ in „Tarski's axiomatization of the reals“). In še opomba čisto na koncu: realna števila smo skonstruirali z racionalnimi števili. Tu so stvari dokaj jasne. Vemo, kateri ulomki predstavljajo isto racionalno število, vemo, kako racionalna števila (ulomke) seštevamo in množimo in kako definiramo delno urejenost $\leq$. No, če hočemo imeti matematično povsem korektno teorijo številskih množic $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$, pa je tudi tu treba še marsikaj povedati.

Skupaj s srednješolci se lahko na koncu vprašamo, čemu vse to služi. Matematiko uporabljamo vsepovsod, pogosto v navezi z računalniki. Takrat seveda računamo z racionalnimi števili (končnimi decimalnimi števili). Tako je na prvi pogled videti, da bi lahko shajali brez realnih števil. Zdi se, da bi zadostovala racionalna števila. Še posebej pa se vprašanja, zastavljena v prejšnjem odstavku, marsikomu zdijo odvečna.

Del odgovora je, da je matematika zelo uporabna veda. Pri njeni uporabi se moramo zavedati, kaj je zagotovo res in kaj ne. Poznati moramo torej teorijo (izreke). Da pa bi izgradili teorijo, nujno potrebujemo matematično korektno vpeljano množico realnih števil, saj se sicer zatakne že pri najosnovnejših pojmih.

Seveda pa je v igri še vse kaj drugega. Vprašanja, ki smo se jih tu lotili, preprosto zahtevajo odgovor. Večine ljudi ta vprašanja ne zanimajo. A tako, kot se bodo vedno našli ljudje, ki bodo morali pisati pesmi, morali slikati, morali ustvarjati glasbo … se bodo vedno našli tudi taki, ki bodo preprosto morali vedeti ali vsaj iskati odgovore na taka in podobna vprašanja. Ukvarjanje s filozofijo, umetnostjo, matematiko … je pač nepogrešljivi del človeške narave.