NALOGA ZA LIMITO IN INTEGRAL Z DODANO MERITVIJO

Tine Golež

Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

Povzetek *- Napačno rešena naloga z državne mature je postala večplastni učni primer. Po eni strani gre za fizikalno ozadje, ki opozori na napačno reševanje. Hkrati lahko služi tudi kot srednješolski primer uporabe limite in integrala. Ker pa je fizika eksperimentalna veda, je naloga obravnavana še s poskusom, ki potrdi neustreznost uradne rešitve in govori v prid podrobnejše obravnave; ta je nadomestila poenostavljeno rešitev, za katero se praviloma odločijo dijaki ... in morda so jo imeli v mislih tudi sestavljalci.*

Abstract *- The inaccurately solved problem from the national matura examination has been transformed into a meaningful teaching moment. On one hand, it is the physical background that alerts to the flaws in the proposed solution. At the same time, the problem can be used to teach the usage of the limits and integrals in high school physics lectures. As physics is an experimental science, the problem is accompanied with an experiment that points out the inadequacy of the solution. This speaks in favor of a more detailed treatment to replace the simplified solution, usually chosen by the students... and maybe it is also what the creators of the exam had in mind.*

UVOD

Pred nekaj leti so maturanti pri fiziki kot enajsto vprašanje v izpitni poli reševali tale primer:

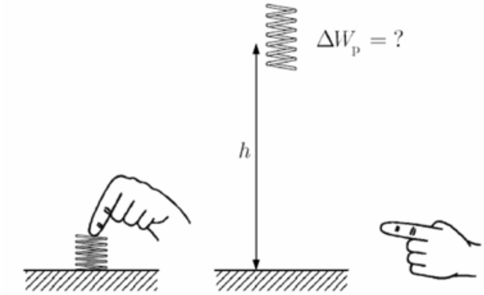
Vzmet z maso 10 g **in prožnostnim koeficientom** 2,0 N cm-1 **stisnemo za** 1,0 cm **in spustimo, da odskoči. Za koliko se največ lahko poveča potencialna energija vzmeti?**

A 0,04 J

B 0,03 J

C 0,02 J

D 0,01 J

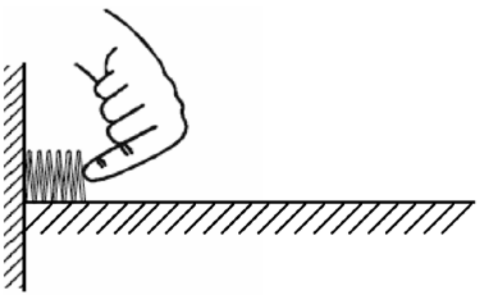


Komisija je predvidela odgovor D. Po vsej verjetnosti naj bi dijak sklepal takole: stisnjena vzmet ima le prožnostno energijo, vzmet v najvišji legi pa le potencialno energijo. Vsa prožnostna energija se (prek kinetične energije) spremeni v potencialno, kar pomeni, da je sprememba potencialne energije enaka $\Delta W_p = 0{,}5kx^2$, kar je točno 0,010 J.

Seveda rešitev ni prava. Prava rešitev je nekoliko manjša vrednost potencialne energije. Ker pri vprašanjih izbirnega tipa izberemo tisto, ki je najbližja pravi vrednosti, bi komisija lahko utemeljila, da so pravzaprav vsi odgovori med 0,005 J in 0,015 J prikazani z rešitvijo 0,01 J, saj je rešitev podana le na eno mesto. Tako so nalogo lahko rešili dijaki, ki so sklepali napačno, in morda tudi kakšen nadarjen dijak, ki jo je pravilno reševal. Podajmo se k pravi rešitvi (no, bodimo skromni – k boljšemu približku pravzaprav), ki pa zahteva nekaj več matematičnega znanja, kot je predpisanega za maturitetno fiziko.

NAJPREJ VODORAVNO

Najprej obravnavajmo vzmet v vodoravni legi. Vzmet naj bo na podlagi z zanemarljivim trenjem. Stisnemo jo ob togo steno in jo hipoma spustimo (slika 1).

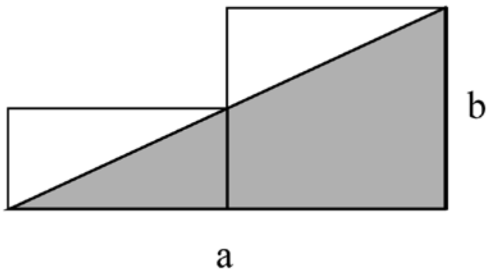


Slika 1. Vzmet stisnemo k togi steni in jo hipoma spustimo.

V mislih imamo vzmet s konstantno linearno gostoto, tako da vsaki dolžinski enoti pripada enako število ovojev oziroma enaka masa [2]. Predpostavimo tudi, da se po tem, ko vzmet spustimo, deli vzmeti gibljejo s hitrostmi, ki so premo sorazmerne z oddaljenostjo od stene. V trenutku, ko se vzmet raztegne do prvotne oblike, se krajišče vzmeti giblje s hitrostjo v, hitrost težišča vzmeti pa je ravno polovica te vrednosti: $v = 2v_T$. Od tega trenutka naprej se hitrost težišča ne spreminja več, saj ni zunanjih sil. Pravzaprav sta dve, a sta v ravnovesju. Sila teže je uravnovešena s silo podlage, ki pa zaradi odsotnosti trenja nima vodoravne komponente. Zato se hitrost težišča ne spreminja več. Po drugi strani pa ni težko uganiti, da vzmet od tega trenutka naprej ni ves čas enako dolga. Najprej se malo raztegne, nato skrči, skratka, niha v vzdolžni smeri. To pa pomeni, da se v »kinetično energijo težišča« (= hitrost težišča na kvadrat krat masa vzmeti ulomljeno z 2) ni spremenila vsa začetna prožnostna energija, pač pa le del. In kolikšen del začetne kinetične energije se je spremenil v prožnostno (ali v vmesnih trenutkih v kinetično energijo posameznih delov)? Naredimo dolg ovinek do odgovora; predvsem zato, da bodo koraki dobro utemeljeni in razumljivi, še preden dijaki obravnavajo integral. Limite pa že morajo poznati.

KORAK V STRAN: PLOŠČINA TRIKOTNIKA

Denimo, da želimo izračunati ploščino pravokotnega trikotnika s katetama *a* in *b*. To seveda ni nobena skrivnost; pomnožimo dolžini katet in produkt delimo z dve. A do ploščine lahko pridemo tudi s seštevanjem pravokotnikov, s katerimi prekrijemo trikotnik. Najprej ga pokrijmo z dvema pravokotnikoma, ki bosta pričakovano dala preveliko ploščino (slika 2).



Slika 2. Pravokotni trikotnik s katetama a in b smo prekrili z dvema pravokotnikoma.

Prvi približek ploščine trikotnika bo vsota ploščin obeh pravokotnikov, s katerima smo prekrili trikotnik:

$$S = \frac{a}{2}\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\frac{2b}{2} = ab\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right)$$

Seveda že osnovnošolci vedo, da je rezultat, ki ga tako dobimo:

$$S = \frac{3}{4}ab$$

prevelik. Prav, pa zmanjšajmo osnovnice pravokotnikov. Trikotnik pokrijmo s štirimi ožjimi pravokotniki. Tokrat je ploščina enaka:

$$S = \frac{a}{4}\frac{b}{4} + \frac{a}{4}\frac{2b}{4} + \frac{a}{4}\frac{3b}{4} + \frac{a}{4}\frac{4b}{4} = ab\left(\frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16}\right)$$

Dobljeni rezultat, $ab \cdot 5/8$, je že bliže pričakovani vrednosti, ki je $ab \cdot 1/2$. Čim več pravokotnikov bomo uporabili, tem bliže bomo pravemu rezultatu. Vzemimo jih torej *n*, pozneje pa bomo poiskali limito izraza, ko gre *n* proti neskončno. Če bomo prekrili trikotnik z neskončno pravokotniki, pričakujemo pravi rezultat.

Ker imamo zapisan izraz za pokritje s štirimi pravokotniki, ne bo težko zapisati izraza za pokritje z *n* pravokotniki.

$$S = \frac{a}{n}\frac{b}{n} + \frac{a}{n}\frac{2b}{n} + \frac{a}{n}\frac{3b}{n} + \ldots + \frac{a}{n}\frac{nb}{n} = ab\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right)$$

Ker poznamo izraz za vsoto prvih *n* naravnih števil, hitro pridemo do rezultata. Sedaj le še pošljemo *n* proti neskončnosti:

$$S = ab \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{n^2 2}\right)$$

in dobimo že iz osnovne šole znano vrednost, $S = ab1/2$.

Pokazali smo, da prekrivanje s pravokotniki postane povsem natančno, če jih je neskončno veliko. Če bi pa hoteli s končnim številom pravokotnikov priti do natančnega razultata, bi morali izbrati take, ki jih diagonala trikotnika seka na sredini zgornje stranice in ne v oglišču. Toda mi smo hoteli pokazati prav to: da z navidez površnim prekrivanjem pridemo do točnega rezultata. Cena? Potrebujemo jih neskončno veliko ... kar pa v svetu matematike ni nikakršna težava.

Podoben postopek bomo sedaj uporabili pri izračunu kinetične energije spuščene vzmeti.

SPET K VZMETI

Vzmet z maso m v mislih razdelimo na n delov. Vsak del ima maso m/n. Skrajni del vzmeti se v trenutku, ko se vzmet raztegne do prvotne lege, giblje s hitrostjo v. Hitrosti drugih delov vzmeti so manjše in se linearno zmanjšujejo, tako da je hitrost tistega dela, ki je ob steni, le v/n. Kinetična energija vzmeti je torej vsota kinetičnih energij vseh delov vzmeti. Prvi člen predstavlja kinetično energijo dela, ki je tik ob steni, zadnji pa kinetično energijo tistega, ki je najbolj oddaljen od stene:

$$W_k = \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}v\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{2}{n}v\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{3}{n}v\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{n}{n}v\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{n}\frac{v^2}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

(Podobno kot smo prej s prevelikimi pravokotniki prekrivali trikotnik, sedaj s preveliko hitrostjo pomnožimo izbrani masni del. Ker pa bomo imeli neskončno veliko delov, bo rezultat računa vseeno pravilen; to smo videli tudi pri pokritju z neskončno pravokotniki.)

Izraz za vsoto kvadratov prvih *n* naravnih števil poznamo, zato enačbo preuredimo in limitiramo:

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Ker je limita izraza v oklepaju 1/3, je kinetična energija vzmeti v tem trenutku enaka:

$$W_k = \frac{1}{3}\frac{mv^2}{2}$$

Ne pozabimo, da je v hitrost tistega konca vzmeti, ki ni ob steni. Seveda pa je za gibanje vzmeti odločilna kinetična energija težišča. Vsekakor je res, da je v trenutku, ko se vzmet raztegne do prvotne oblike, prav vsa energija v obliki kinetične energije, čisto nič energije pa ni v obliki prožnostne energije. Po drugi strani pa je tudi res, da vsa ta kinetična energija ni »kinetična energija težišča«. Zaradi izpeljane zveze pa bomo lahko ugotovili, kolikšna je »kinetična energija težišča«, saj vendar poznamo zvezo med njima: $v = 2v_T$. Izenačimo začetno prožnostno energijo in kinetično energijo vzmeti, ko se vzmet raztegne do prvotne oblike, a pri tem hitrost zadnjega dela vzmeti (v) izrazimo s hitrostjo težišča:

$$\frac{1}{3}\frac{m(2v_T)^2}{2} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$v_T = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{k}{m}}\,x$$

Hitrost težišča vzmeti je manjša od hitrosti, s katero se giblje (enako) masiven delec, ki ga odrinemo z idealno vzmetjo, katere maso lahko zanemarimo. Od tod pa sedaj lahko izračunamo kinetično energijo težišča.

IN ŽE SE VRAČAMO K MATURITETNI NALOGI

Najbrž so dijaki maturitetno nalogo reševali tako, da so v mislih najprej prožnostno energijo v celoti spremenili v »kinetično energijo težišča«, kar je seveda napačno sklepanje:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m{v_T}^2$$

in dobili za hitrost težišča:

$$v_T = \sqrt{\frac{k}{m}}x$$

ki pa je seveda večja od dejanske. (Najbrž so v resnici ta korak preskočili in se takoj lotili potencialne energije. Vsekakor pa je implicitno prisoten, tudi če ga navidez preskočimo.) Ko so potem od tod izračunali potencialno energijo, so seveda dobili preveliko vrednost. Ker pa so prav to preveliko vrednost ponudili sestavljalci kot pravilni odgovor, težav ni bilo … vsaj pri srednje učno uspešnih dijakih ne.

V resnici bo vzmet iz naloge poskočila le toliko, da bo potencialna energija samo 0,0075 J, saj se le tri četrtine začetne prožnostne energije spremeni v »kinetično energijo težišča«.

KAJ PA INTEGRAL?

Naloga je res lep primer tako za prikaz uporabnosti limite kot tudi integrala. Pa se po isti poti podajmo še z integriranjem. Dolžina vzmeti v nenapetem stanju naj bo ℓ. Os x naj poteka od stene, kjer je en konec vzmeti, proti drugemu koncu. Masa delčka vzmeti je zato: $dm = (m/\ell)dx$. Hitrost izbranega delca označimo z v_x in je enaka vx/ℓ. Spet nam hitrost v predstavlja hitrost konca vzmeti, ki ni pri steni, in to v trenutku, ko se vzmet raztegne do prvotne dolžine. Celotno kinetično energijo v trenutku, ko se vzmet raztegne do prvotne lege, dobimo kot integral:

$$\int_0^\ell \frac{1}{2} v_x{}^2 \, dm = \int_0^\ell \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} v^2 \frac{x^2}{\ell^2} \, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

Prav do istega rezultata pa smo prišli tudi z limitiranjem.

ZAKLJUČEK TEORETIČNEGA DELA

Res je fizika le model narave in priznati moramo, da je tudi pri tej izpeljavi privzeta neka predpostavka. Gre za domnevo o hitrosti posameznega dela, ki je kar sorazmerna s koordinato tega dela. Pa vendar je naloga vredna obravnave, morda celo bolj pri matematiki, saj včasih ni lahko najti dovolj realističnih primerov za integracijo ali za limite. Vsekakor se pri reševanju potrdi, kako pomembna je matematika (predvsem infinitezimalni račun) za razumevanje narave, saj šele s tem jezikom znanosti postanejo opisi narave vse bolj točni.

Prav zaradi izpeljave z limito bo učitelj fizike nalogo lahko rešil z maturanti že januarja ali februarja, medtem ko bo pot z integralom ubral mesec ali dva pozneje. Če bo on ali njegov kolega matematik imel težave, kako prepričati dijake o kinetični energiji, ki ni vselej enaka »kinetični energiji težišča«, pa predlagam naslednji primer. Zamislimo si človeka, ki sunkovito iztegne roki v nasprotnih smereh, eno v levo in hkrati drugo v desno. Med premikanjem rok se kar nekaj mase človeka giblje, tako da imamo opravka z nezanemarljivo kinetično energijo. (Skupna gibalna količina obeh rok, ki je vektor, pa bi bila v tem primeru enaka nič.) Po drugi strani pa težišče človeka miruje, tako da je hkrati »kinetična energija težišča« enaka nič. S tem smo pokazali, da pri telesu, ki ne spada v kategorijo »togo telo«, nikakor ni nujno, da je vsa kinetična energija prav »kinetična energija težišča«; natančno to smo ugotovili tudi za vzmet. In šele upoštevanje tega dejstva o kinetični energiji nas je pripeljalo do pravega razultata.

MERITEV

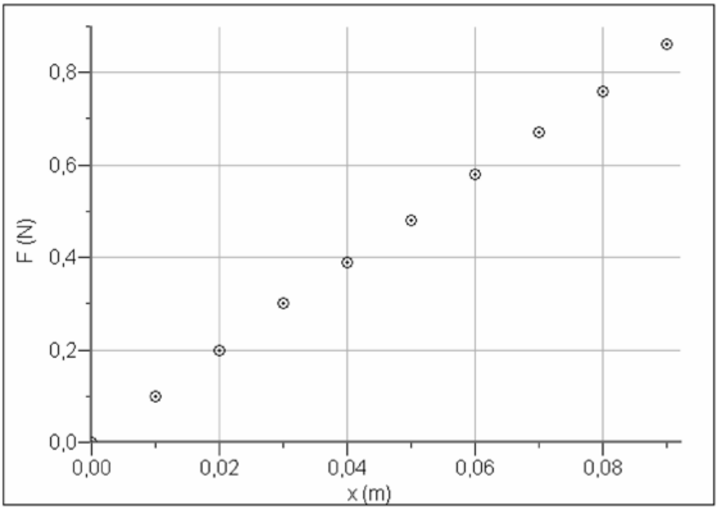
Ugotovili smo, da se bo le tri četrtine začetne prožnostne energije spremenilo v potencialno energijo, četrtina se bo prek vzdolžnega nihanja vzmeti spremenila v notranjo. Zapišimo:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = mgh$$

Z natančno tehtnico bomo izmerili maso vzmeti. Potem bomo vzmet na tehtnici stiskali po korakih in zapisali, koliko ob posameznem skrčku kaže tehtnica (slika 3).

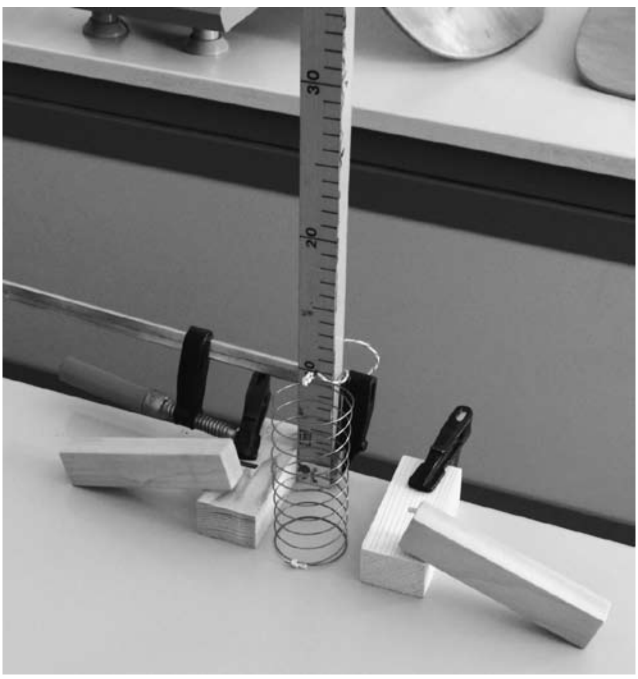
Slika 3. Vzmet in del metra, ki je pritrjen na nosilec lepilnega traku, sta na tarirani tehtnici. Vzmet stiskamo z vodoravno palico in hkrati zapisujemo maso, ki jo kaže tehtnica, ter skrček vzmeti.

Izmerke vnesemo v program za izračunavanje ploščine pod navidezno krivuljo, ki prikazuje silo v odvisnosti od raztezka vzmeti. Tak rezultat je nekoliko natančnejši od tistega, ki bi ga dobili z merjenjem koeficienta prožnosti vzmeti in njenega skrčka ter od tod izračunane prožnostne energije ($W_{pr} = kx^2$) (slika 4).



Slika 4. Meritev kaže, da za to vzmet dokaj dobro velja Hookov zakon. Ploščina pod krivuljo, ki ustreza izmerkom, je opravljeno delo (med stiskanjem) oziroma prožnostna energija vzmeti.

Vzmet nato stisnemo natančno toliko, kot je bila največ stisnjena na tehtnici. To storimo med dvema pritrjenima deščicama (slika 5). Vzmet stisnemo z dvema drugima deščicama, ki vzmet potlačita prav do pritrjenih deščic. Ko gornji deščici sunkovito potegnemo po spodnjih v levo oziroma desno, se vzmet, ki je bila stisnjena na debelino spodnjih deščic, sprosti. Višino, ki jo doseže težišče vzmeti, določimo z ogledom posnetkov, saj poskus, ki ga večkrat ponovimo, snemamo s kamero.



Slika 5. Spodnji pritrjeni deščici omogočata, da vzmet pri vseh poskusih enako stisnemo. Zgornji deščici pa omogočata, da vzmet sunkovito sprostimo, tako da odskoči. Višino premika težišča preberemo s pokončnega ravnila, ko proučujemo posnetek poskusov.

Opravljeno delo je bilo enako A = (0,0392 ± 0,0004) J. Iz več posnetkov (upoštevamo najvišje odskoke vzmeti) ugotovimo, da je višinska razlika, ki jo doseže težišče, enaka 35 cm ± 2 cm. Če upoštevamo privzeto predpostavko v teoretičnem delu tega članka, se 75 odstotkov začetne prožnostne energije spremeni v potencialno energijo. Masa vzmeti je 9,3 g. Od tod napovemo, da bi moral biti poskok težišča enak:

$$9{,}75W_{pr} = mgh$$

in zato:

$$h = 32\ cm \pm 1\ cm$$

To je zelo blizu dejansko izmerjenega poskoka težišča vzmeti, ki smo ga določili z video posnetkom. Prav ta pa je tudi nedvoumno potrdil prvotno domnevo, da vzmet med poskokom znatno niha v vzdolžni smeri, v smeri gibanja vzmeti.

SKLEP

Priznati moram, da je bila moja skrb, ko sem v neko kontrolno nalogo prepisal omenjeno nalogo, odveč. Nihče izmed mojih maturantov, ki so sicer kazali dobro razumevanje fizike in so to tudi potrdili na maturi, ni pri reševanju te naloge pomislil na preveliko idealizacijo, ki so jo zagrešili sestavljalci. Vseeno pa bi kazalo izločiti naloge, ki jih rešimo pravilno s sicer napačnim sklepanjem.

Za krožek pa bo najbrž zanimiva tudi meritev. Pri tem je nekaj težav. Če je vzmet dolga in z »redkimi navoji«, je to dobro izhodišče za natančno merjenje opravljenega dela ob stiskanju vzmeti. A po drugi strani utegne nekaj več težav povzročiti zadnji ovoj, ki pri vzmeteh z »redkimi ovoji« štrli na obeh straneh in ovira navpični odskok. Tej težavi sem se izognil tako, da sem krajišče vzmeti privezal na naslednji ovoj. Najbrž sem tudi s tem nekoliko oddaljil vzmet od teoretičnega modela.

Nazadnje pa je čas, da podvomimo o popolnosti izbranega teoretičnega modela. V resnici predpostavka, »da se po tem, ko vzmet spustimo, deli vzmeti gibljejo s hitrostmi, ki so premo sorazmerne z oddaljenostjo od stene«, ne drži povsem. Pričakovali bi, da bo vzmet poskočila malo manj, kot predvideva ta model, saj se izgubam ob stiskanju/razpenjanju vzmeti ne moremo izogniti. A vendar je vzmet poskočila nekoliko višje. Iz zagate nas lahko reši le dodatna meritev oziroma opazovanje. Uporabimo hitroslikovno kamero in posnetek, pri katerem je kamera posnela 1200 slik na sekundo, izda šibkost predpostavke. Hitrosti delov vzmeti ob odrivu niso sorazmerne z oddaljenostjo; v resnici se kaj dosti ne razlikujejo, vsi »že raztegnjeni« ovoji potujejo skoraj z enako hitrostjo. To pomeni, da nihanje same vzmeti ni tolikšno, kot je predvidela omenjena predpostavka. Prav zato se večji delež prožnostne energije spremeni v kinetično in je tako skok vzmeti večji od napovedi, ki je temeljila na opisani predpostavki. Morda pa o tem teoretičnem modelu kdaj drugič.

LITERATURA

[1] M051-411-1-1.pdf (prva junijska matura 2005, dostopna na straneh RIC)

[2] T. Golež, *Prizemljitev infinitezimalnega računa*, Zavod sv. Stanislava, Ljubljana 2012