

Mednarodna matematična olimpijada 2022



LUKA HORJAK

→ Med 6. in 16. julijem je v Oslu na Norveškem potekala 62. Mednarodna matematična olimpijada. Na tekmovanju je sodelovala tudi slovenska ekipa, in sicer Katarina Grilj (Sr. šola Slovenska Bistrica), Vid Kavčič (Gimnazija Bežigrad), Juš Kocutar, Matija Likar in Kaja Rajter (vsi II. gimnazija Maribor) ter Matija Skrt (Gimnazija Nova Gorica). Ekipo sva na tekmovanju spremljala Gregor Dolinar in Luka Horjak.

Kljub izredno visokim mejam za medalje (najvišje od leta 1981) je Matija Skrt osvojil bronasto medaljo. Ekipni uspeh so dopolnili še Katarina Grilj, Juš Kocutar in Kaja Rajter, ki so osvojili pohvalo. Slovenija je med 104 sodelujočimi državami zasedla 72. mesto. Prvo mesto je zanesljivo osvojila Kitajska – vsi tekmovalci so namreč dosegli vse možne točke. Sledili sta ji Koreja in ZDA.

Za lažjo predstavo o težavnosti nalog, ki so jih tekmovalci reševali na tekmovanju, si oglejmo 2. in 4. nalogo s tekmovanja ter njuni rešitvi:



SLIKA 1.

Slovenska ekipa po zaključni slovesnosti

Naloga 2. Označimo z $\mathbb{R}^+$ množico pozitivnih realnih števil. Poišči vse take funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $y \in \mathbb{R}^+$, tako da velja

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Rešitev 2. naloge Nalogo lahko rešimo na veliko načinov, eden elementarnejših pa je naslednji:

Po navodilu naloge vemo, da za poljuben $a \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $b \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjena neenakost

$$af(b) + bf(a) \leq 2.$$

Če si izberemo $x = b$, imamo enolično rešitev neenačbe y . Ker število a reši neenačbo, je to edina možnost. Ugotovimo, da so pozitivna realna števila razdeljena v pare, pri čemer je neenakost izpolnjena natanko tedaj, ko sta števili v paru. Naš cilj bo pokazati, da je vsako število v paru samo s seboj.

Denimo nasprotno, torej, da obstajata različni števili x in y , ki sta v paru – velja

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo

$$2 \geq xf(y) + yf(x) \geq 2\sqrt{xf(y) \cdot yf(x)},$$

kar lahko preoblikujemo v

$$1 \geq xf(x) \cdot yf(y). \quad (1)$$

Ker je x v paru z y , ni v paru sam s seboj, zato velja neenakost

$$xf(x) + xf(x) > 2$$

oziroma $xf(x) > 1$. Podobno dobimo $yf(y) > 1$, kar pa je v protislovju z enačbo (1). Taki števili x in y zato ne obstajata.





Kot smo želeli, je vsako število v paru samo s seboj. Posebej,

$$\blacksquare xf(x) \leq 1.$$

Denimo, da obstaja tako število x_0 , da je $x_0 f(x_0) < 1$. Velja torej

$$\blacksquare f(x_0) = \frac{1}{x_1},$$

kjer je $x_1 > x_0$. Ker je $x_1 \neq x_0$, števili nista v paru, zato velja

$$\blacksquare 2 < x_0 f(x_1) + x_1 f(x_0) \leq x_0 \cdot \frac{1}{x_1} + x_1 \cdot \frac{1}{x_1} < 2,$$

kar je protislovje. Sledi, da za vsak x velja $xf(x) = 1$, torej je edina možna rešitev kar funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$.

Po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino velja

$$\blacksquare \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = y$. Neenakost

$$\blacksquare \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$$

je zato res izpolnjena natanko tedaj, ko je $x = y$, zato je zgornja funkcija res rešitev naloge.

Naloga 4. Naj bo $ABCDE$ tak konveksen petkotnik, da je $|BC| = |DE|$. Privzemimo, da obstaja točka T v notranjosti petkotnika $ABCDE$, tako da je $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ in $\angle ABT = \angle TEA$. Premica AB seka premico CD v točki P in premico CT v točki Q . Privzemimo, da so točke P, B, A, Q razporejene na premici v tem vrstnem redu. Premica AE seka premico CD v točki R in premico DT v točki S . Privzemimo, da so točke R, E, A, S razporejene na premici v tem vrstnem redu. Dokaži, da točke P, S, Q in R ležijo na krožnici.

Rešitev 4. naloge Opazimo, da lahko enakosti dolžin v navodilu naloge prepisemo v pogoj, da sta trikotnika TBC in TDE skladna. To lahko preprosto uporabimo pri računanju kotov – velja namreč

$$\blacksquare \angle TCB = \angle TED, \quad \angle CBT = \angle EDT \quad \text{in} \\ \angle BTC = \angle DTE.$$

Sledi, da je

$$\blacksquare \angle TSE = 180^\circ - \angle SET - \angle TED - \angle EDT \\ = 180^\circ - \angle TBA - \angle TCB - \angle CBT \\ = \angle BQT.$$

Če definiramo točko X kot presečišče premic AB in TD , točko Y pa kot presečišče premic AE in TC , sledi, da so točke X, Y, S in Q konciklične.

Ker velja

$$\blacksquare \angle ETY = 180^\circ - \angle CTD - \angle DTE \\ = 180^\circ - \angle CTD - \angle BTC \\ = \angle XTB,$$

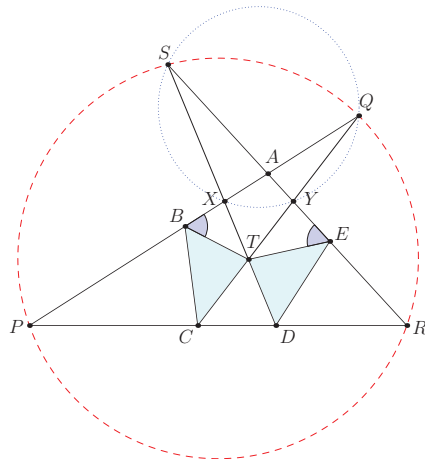
sta trikotnika TBX in TEY podobna (ujemata se v kotu pri T , kot pri B pa je enak kotu pri E). Posebej, velja

$$\blacksquare \frac{TX}{TY} = \frac{TB}{TE} = \frac{TD}{TC}.$$

Opazimo, da sta zaradi zgornjih razmerij podobna tudi trikotnika TXY in TDC . Sledi, da sta premici XY in CD vzporedni. Rešitev naloge lahko sedaj zaključimo z novim računom s koti, saj velja

$$\blacksquare \angle SQP = \angle SYX = \angle SRP,$$

torej so točke res konciklične.



SLIKA 2.

Skica za 4. nalogo

xxx