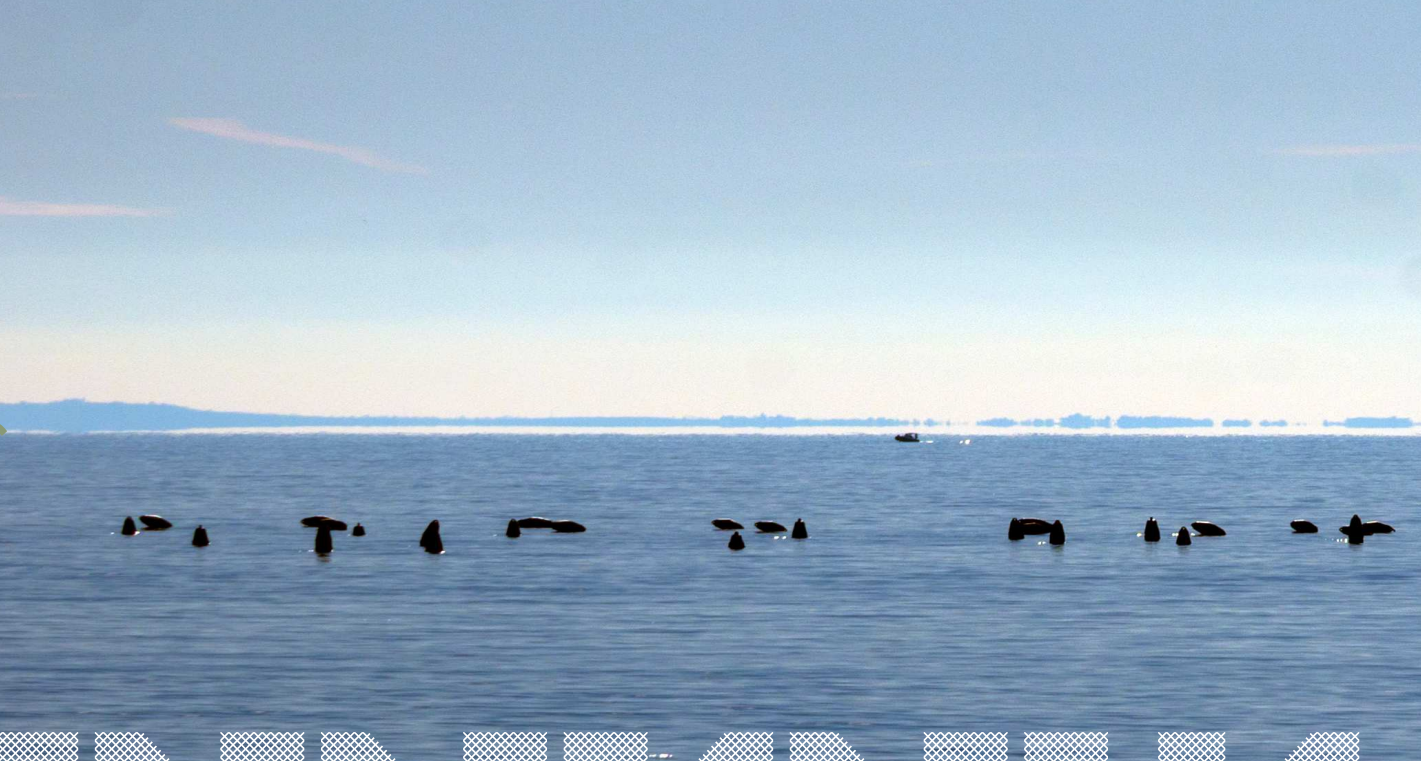
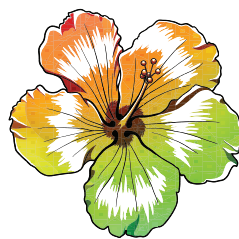




PRESEK



- PLOŠČICE TANTRIX
- KAKO DALEČ JE OBZORJE?
- ESTONSKO SPLETNO TEKMOVANJE
- PRIPOROČANJE Z ALGORITMOM SLOPE ONE



Odkrivanje globokih prevar

↓↓↓

→ Če pogledate sliko na strani 10, vas bo najbrž zelo začudilo, da igralec Steve Buscemi nosi rdečo žensko obleko brez rokavov. Seveda je slika ponarejena. Izrezana je iz videa, ki ga je ustvaril računalniški program z metodo globoke prevare (angl. deepfake). Ker so se računalniške zmogljivosti povečale in je zelo napredovalo tudi strojno učenje, je takšen video sedaj lažje ustvariti in prevaro težje odkriti. Na srečo nam ni treba obupati. Računalniki lahko po eni strani s pomočjo človeških navodil ustvarijo globoke prevare, po drugi strani pa lahko takšne prevare tudi odkrijejo. Trenutni pristopi za odkrivanje lažnih videov uporabljajo različne tehnike, med drugim geometrijo (za premikanje glave in ustnic), linearno algebro (za odkrivanje napak, ki nastanejo med prehodom iz enega obraza v drugega) in verjetnostni račun (ki meri verjetnost, da je video ponarejen). Še najmočnejše orožje v bitki proti prevaram pa je zavedanje, da vsemu, kar vidimo, ne moremo takoj verjeti.

Raziskovalci trenutno izboljšujejo novo, bolj trepžno metodo za preprečevanje prevar. Metoda z analizo bitov v videu priredi datoteki matematično zašifrirano število in tako datoteko opremi z digitalnim podpisom. Podobno kot pri digitalnih valutah podpis postane del verige blokov (angl. blockchain) in omogoči overjanje ter odkrivanje manipulacij. V predelanem videu so biti iz pravega videa spremenjeni, zato se nov digitalni podpis ne bo ujema z originalnim. Takšno overjanje bo omogočilo takojšnje opozorilo gledalcu, podobno tistim, ki kar skočijo iz ekrana, ko poskušamo dostopati do nevarne spletne strani.

Več o tem si lahko preberete v prispevku *Protecting World Leaders Against Deep Fakes*, ki so ga Agarwal, Farid, Gu, He, Nagano in Li leta 2019 predstavili na konferenci o računalniškem vidu CVPR2019.

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2020 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2115

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Odkrivanje globokih prevar

MATEMATIKA

- 4-10** Ploščice Tantrix
(*Nada Razpet*)

FIZIKA

- 11-15** Kako daleč je obzorje?
(*Iztok Tiselj*)

ASTRONOMIJA

- 18-21** Estonsko spletno tekmovanje iz znanja astronomije
(*Andrej Guštin*)

RAČUNALNIŠTVO

- 22-24** Priporočanje z algoritmom Slope One
(*Mladen Borovič*)

RAZVEDRILO

- 10** Križne vsote
16-17 Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
25-27 Rezultati natčaja ob Mednarodnem dnevu matematike
(*Boštjan Kuzman, Marjeta Kramar-Fijavž in Sandra Cigula*)
28 Rešitev nagradne križanke Presek 47/5
(*Marko Bokalič*)
29-31 Naravoslovna fotografija - Privid
(*Aleš Mohorič*)

TEKMOVANJA

- priloga** 17. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike - državno tekmovanje
priloga 29. tekmovanje iz razvedrilne matematike - državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Fotografija na naslovnici kaže morski zaliv, katerega nasprotna obala na videz lebdi na obzorju. To je posledica privida, ko se svetlobni žarki v toplejši plasti zraka nad vodno gladino ukrivljajo navzgor. Privid lahko nastane tudi z ukrivljanjem žarkov navzdol, če je voda hladna in je tik nad njo zrak hladnejši od ozračja. Takrat lahko vidimo tudi telesa za obzorjem. Med privide pa štejemo tudi fatamorgano, ki pa nastane s kompleksnim ukrivljanjem žarkov v toplih in hladnih plasteh nad obzorjem. (Foto: Andrej Guštin)

Ploščice Tantrix



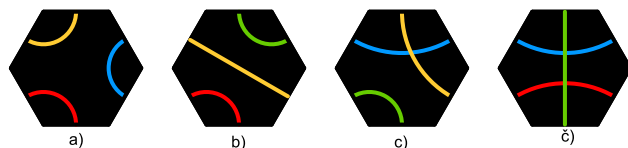
NADA RAZPET

→ Nekatere družabne igre, ki so bile priljubljene v 90-letih prejšnjega stoletja, se vračajo v novi preobleki, predvsem zaradi možnosti igranja tako na klasičen način kot z računalnikom. Ena od takih iger je TANTRIX. Izumil jo je Mike McManaway leta 1987 med okrevanjem po poškodbi, ki jo je dobil pri plezanju [1]. Osnovni komplet je imel 56 šestkotnih ploščic, povezave na ploščicah pa so bile le dveh barv. Igrali so jo na šestkotni igralni deski. Nova različica iz leta 1991 ima povezave štirih barv. Za igro so izdelani tudi računalniški programi, s katerimi ne le igramo Tantrix, ampak z njimi rešujemo tudi nekatere uganke in sestavljanke.

Igra je priljubljena po vsem svetu. Obstaja slovensko društvo in spletna stran (www.tantrix.si), ki je posvečena Tantrixu. Udeležite se lahko številnih tekmovanj v igranju te igre, če boste uspešni, celo svetovnega prvenstva. Nas bodo zanimale predvsem lastnosti ploščic, eno od možnih iger pa bomo omenili na koncu prispevka.

Ploščice

Črne bakelitne ploščice so pravilni šestkotniki. Po dve stranici vsakega šestkotnika sta med seboj po-



SLIKA 1.

Možne črte na ploščicah z različnim izborom barv

vezani. Povezave bomo poimenovali drugače, kot je to v navodilih [1], da bo izrazoslovje matematično pravilno. Na vsaki ploščici so tri povezave, tri črte, vsaka v drugi barvi.

Črte so treh oblik:

- povezava razpolovišč dveh sosednjih stranic je krožni lok, s središčem v oglišču šestkotnika, polmer pa je polovična dolžina stranice. To povezavo bomo poimenovali *lok*;
- povezava razpolovišč dveh nasprotnih stranic z ravno črto, to je *daljica*,
- povezava razpolovišč dveh stranic, med katerima je ena prosta (ne sosednjih stranic in ne nasprotnih stranic), je *krivulja*. Pri naši natančnosti lahko vzamemo, da je to krožni lok, ki pripada kotu 60° in ima polmer $3a/2$, če je a stranica šestkotnika. Središče tega kroga je na presečišču podaljškov nesosednjih stranic šestkotnika. Ta krožni lok bomo označili kot *v-lok*, kar pomeni večji lok.

Vse ploščice so na hrbtni strani oštevilčene (slika 2). Številke so lahko rdeče, modre, rumene, zelene ali bele. Dve ploščici sta enaki, če lahko eno zavrtimo v drugo.

Možne kombinacije črt na ploščicah

Dogovorjeno je, da je na ploščici

- kvečjemu ena daljica (nobena ali ena *daljica*),
- en, dva ali trije *loki*,
- natanko dva *v-loka*.

Možne kombinacije črt na ploščicah kaže slika 1.

Preštejmo ploščice

Črte na ploščicah so različnih barv. Na voljo imamo rdečo, zeleno, modro in rumeno barvo. Za vsako ploščico moramo izbrati po tri različne barve, kar pomeni, da imamo štiri ploščice z enako razporejenimi črtami, le da so te različno obarvane. Slika 1 kaže vse možne kombinacije črt na posamezni ploščici, pri čemer ima vsaka ploščica drugačno barvno trojico.

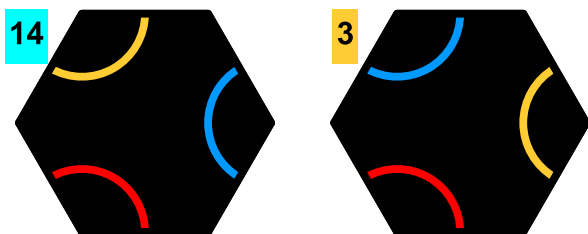


SLIKA 2.

Na hrbtnih straneh ploščic so barvne številke. Sliko smo osvetlili zato, da so številke vidnejše.

Zdaj pa se omejimo na ploščice, na katerih so osnovne barve rdeča, modra in rumena, ter jih preštejmo.

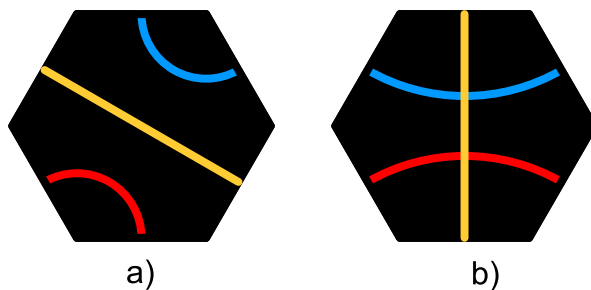
1. Dve ploščici imata tri loka. Sta zrcalno simetrični (slika 3), os simetrije je simetrala enega od kotov, v našem primeru »rdečega« kota.
2. Preštejmo ploščice z *daljico*. Imamo dve možnosti: dva loka in *daljica* ali pa dva *v-loka* in



SLIKA 3.

Dve ploščici imata tri loka.

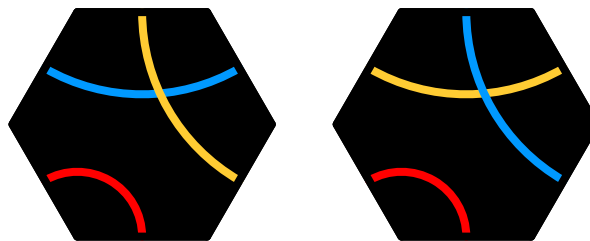
daljica. Z zasukom ali zrcaljenjem teh ploščic (na slikah 4a in 4b) ne dobimo novih razporeditev črt na ploščicah (zakaj že?). Lahko pa seveda drugače porazdelimo barve posameznih črt, kar pa pomeni, da imamo tri ploščice s črtami oblike 4a in tri ploščice oblike 4b; skupaj šest ploščic.



SLIKA 4.

Z zasuki in zrcaljenji teh dveh ploščic ne dobimo novih ploščic. Lahko pa drugače razporedimo barve črt.

3. Ostale so nam še ploščice z dvema *v-lokoma* in *lok* (slika 5). Črte prezrcalimo čez simetralo »rdečega« kota. Dobimo novo razporeditev črt. Torej imamo dve ploščici z enakimi barvami črt. *Lok* je lahko rdeče, modre ali rumene barve (ustrezno spremenimo potem tudi barve *v-lokov*), torej imamo za vsako od teh dveh ploščic po tri možnosti. Dobili smo še šest novih ploščic.



SLIKA 5.

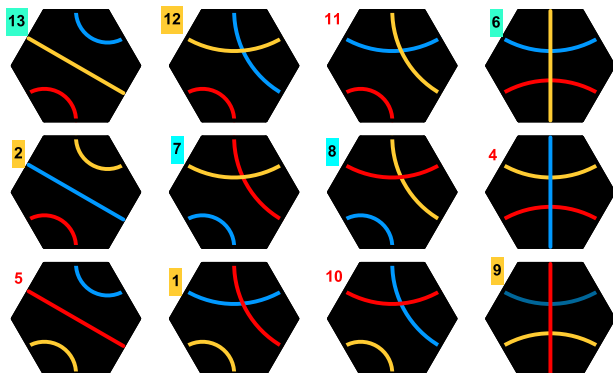
Ploščica z dvema *v-lokoma* in *lok* ter njena zrcalna slika



Če seštejemo vse možnosti, dobimo

$$\blacksquare 2 + 6 + 6 = 14.$$

Vseh ploščic z izbranimi tremi barvami je torej 14. Ker lahko barve izbiramo na štiri načine, je vseh ploščic $4 \cdot 14 = 56$ (sliki 3 in 6).



SLIKA 6.

Dvanajst Tantrixovih ploščic. Na hrbtnih straneh ploščic so barvne številke; mi smo jih zapisali ob ploščicah.

Dolžine črt na ploščicah

Vse črte na ploščicah povezujejo razpolovišča dveh stranic, zato lahko hitro izračunamo njihove dolžine. Označimo osnovnico šestkotnika z a .

Dolžina *daljice* je razdalja med nasprotnima stranicama šestkotnika, torej dvojna višini enakostraničnega trikotnika z osnovnico a

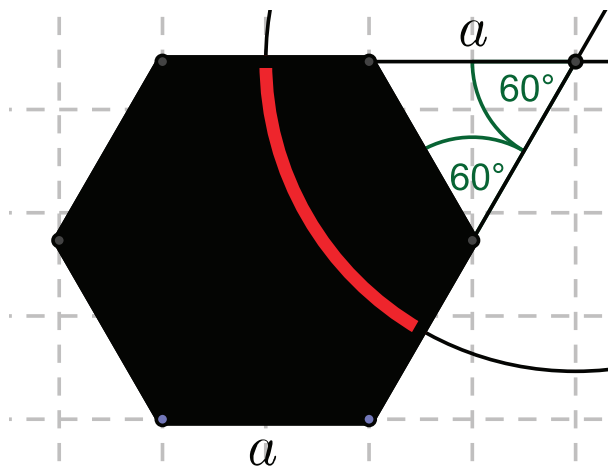
$$\blacksquare s_{\text{daljica}} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Polmer krožnega loka, ki določa *lok*, je $a/2$, notranji koti šestkotnika merijo 120° , torej je dolžina tega loka tretjina krožnice s polmerom $a/2$

$$\blacksquare s_{\text{lok}} = \frac{2\pi a}{2 \cdot 3} = \frac{\pi a}{3}.$$

Dolžina *v-loka* je šestina krožnice s polmerom $3a/2$ (slika 7):

$$\blacksquare s_{v-\text{lok}} = \frac{2\pi \cdot 3a}{2 \cdot 6} = \frac{\pi a}{2}.$$



SLIKA 7.

Polmer krožnice je $3a/2$

Najdaljša je *daljica*, sledi ji *v-lok*, najkrajši je *lok*. Najdaljšo dolžino vseh treh črt na ploščici imajo ploščice z *daljico* in dvema *v-lokoma*, sledi ploščica z dvema *v-lokoma* in *lokom*, potem z dvema *lokom* in *daljico*, najkrajšo skupno dolžino črt na ploščici pa ima ploščica s tremi *loki*.

Zakaj smo računali dolžine črt? Nekatere naloge zahtevajo, da je potrebno ploščice sestaviti tako, da je dolžina sestavljenih krivulj najdaljša.

Kot domino

Igro lahko igra eden ali več igralcev. Kompleti, ki jih lahko kupimo, so sestavljeni iz različnega števila ploščic; tisti za začetnike imajo le deset ploščic. Čim več je ploščic, tem zahtevnejša je igra.

Najenostavnejša igra je podobna domini. Ploščice postavljamo tako, da se stikajo po stranicah in da se vse stične črte ujemajo po barvi. To pomeni, da se modra črta ene ploščice lahko stika le z modro črto druge ploščice (slika 8). Med ploščicami ne sme biti praznih prostorov, z drugimi besedami, ne sme biti vmesnih lukenj.

Stikajoče se črte iste barve tvorijo *pot*. Pot se torej razteza čez več ploščic. Na sliki 8 imamo rdeče, modre in rumene poti. Če se začetna točka in končna točka poti ujemata, dobimo sklenjeno pot ali *zanko*. Na sliki 8 ni zank. Na sliki 9 sta rdeča zanka in modra pot.



SLIKA 8.

Zgoraj: črte na sosednjih ploščicah se morajo ujemati po barvi. Spodaj: napačno sestavljanje ploščic.

Igra Odkrivanje

V navodilih priporočajo začetnikom, da začnejo z igro *Odkrivanja*, namenjena enemu igralcu, ki začne s prvimi desetimi ploščicami. Igralec mora sestaviti *zanko* iz črt iste barve. Na začetku so vse ploščice obrnjene tako, da je hrbtna stran s številkami vidna. Naprej igralec izbere ploščice s številkami 1, 2 in 3 in jih obrne. Vse tri ploščice imajo rumeno obarvane številke. Ko igralec sestavi rumeno zanko, sestavo razdre in doda ploščico s številko 4 in tako naprej vse do ploščice številka 10. Barva številke ploščice, ki jo dodajamo, določa barvo zanke, ki jo moramo sestaviti. Seveda pa v nekaterih primerih obstaja več



SLIKA 9.

Rdeča zanka iz prvih petih ploščic in modra pot

rešitev, to pomeni, da lahko sestavimo tudi zanko drugačne barve. Če so številke na hrbtni strani bele, moramo sami ugotoviti, katero barvo zanke lahko sestavimo.

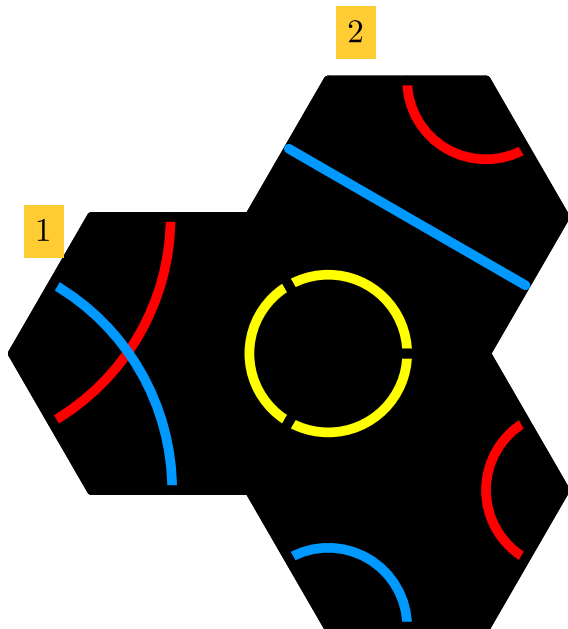
Oglejmo si nekatere primere podrobneje.

Rumena zanka

Dane so ploščice s številkami 1, 2 in 3, ki imajo vse rumeno obarvane številke. Sestaviti moramo rumeno zanko. Zanka, v našem primeru krožnica, ima obseg πa . Možni sta dve postavitvi (slika 10).

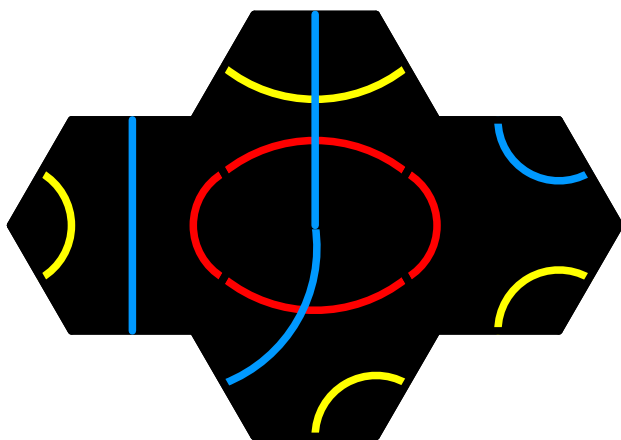
Rdeča zanka

Dane so prve štiri ploščice. Sestaviti moramo rdečo zanko. Rešitev je na sliki 11. Dolžina zanke je $5\pi a/3$.



SLIKA 10.

Rumena zanka iz prvih treh ploščic. Drugo rešitev dobimo, če zamenjamo ploščici 1 in 2.



SLIKA 11.

Rdeča zanka iz prvih štirih ploščic. Drugačno rešitev dobimo, če med seboj zamenjamo legi dveh nasprotnih ploščic.

Zanke iz prvih desetih ploščic

Zanka iz vseh desetih ploščic je lahko rdeče, modre ali rumene barve (slika 12). Ugotovite, katere barve zanka je najdaljša.



SLIKA 12.

Modra, rumena in rdeča zanka iz prvih desetih ploščic

Kdaj lahko iz danega števila ploščic sestavimo zanko?

Ali lahko sami napovemo, katere barve zanko lahko sestavimo? Poglejmo si nekaj konkretnih primerov.

Zanka iz prvih treh ploščic. Vsota kotov, treh stanjenih ploščic v skupnem oglišču je 360° , to pa lahko dosežemo le z rumenimi črtami. Rdeči loki nimajo skupnega vrha v eni točki.

Zanka iz prvih štirih ploščic. Rdeča zanka je edina možna (povezava dveh nesosednjih in dveh sosednjih stranic). Rumene zanke nimajo skupnega vrha v eni točki.

Za sestavo zanke potrebujemo sodo število v -lokov na ploščicah, seveda v izbrani barvi. Vendar to za sestavo zanke ni dovolj, saj npr. iz dveh v -lokov in *daljice* ne moremo sestaviti zanke. Pa to še dokažimo na primeru sestavljanja rdeče zanke iz prvih desetih ploščic.

Rdeča zanka na sliki 13 naj predstavlja testno dirkališče za avtomobile. Ko voznik pelje po zanki, mora zavijati. Ko naredi en obhod v nasprotni smeri urinega kazalca, se mora avto zavrteti za $+360^\circ$, če to smer štejemo pozitivno. Pri tem ga *lok* lahko zavrti za 120° v levo ali desno, v -lok pa za 60° v levo ali desno. Naj bodo obrati v levo pozitivni, obrati v desno pa negativni. Obrate po v -loku označimo z L_l in L_d , obrate po *loku* pa z l_l in l_d . Vsota vseh kotov mora biti 360° . Torej velja:

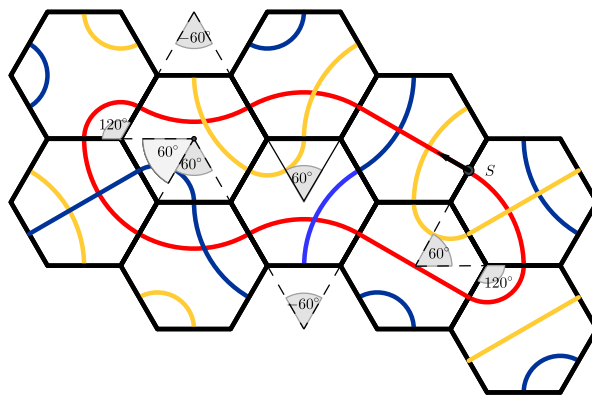
- $L_l \cdot 60^\circ + L_d \cdot (-60^\circ) + l_l \cdot 120^\circ + l_d \cdot (-120^\circ) = 360^\circ$,
- $(L_l - L_d) \cdot 60^\circ + (l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

Trditev. Za zanko v neki barvi potrebujemo sodo število v -lokov v tej barvi.

Trditev dokažemo s protislovjem. Privzamemo, da imamo liho število v -lokov. Vzemimo, da se peljemo po zanki v nasprotni smeri urinega kazalca. Potem je vsota kotov $+360^\circ$, zasuki v levo so pozitivni, zasuki v desno pa negativni. Torej mora biti

- $L_l - L_d = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z};$
 $(2k + 1) \cdot 60^\circ + (l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ,$
 $(k + l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ - 60^\circ,$
 $2(k + l_l - l_d) = 5^\circ.$

Ampak 5 je praštevilo, torej ne moremo najti takega števila k , da bi imel dvakratnik števila $(k + l_l - l_d)$ vrednost 5.



SLIKA 13.

Rdeča zanka iz prvih desetih ploščic z označenimi koti. Start je v točki S , smer obhoda označuje puščica. Zasuk v levo je pozitiven, zasuk v desno pa negativen. Vsota vseh zasukov je 360° .

Kaj pa, če gremo v smeri urinega kazalca? Potem pa štejemo desne obrate pozitivno, leve pa negativno in pridemo do enakega zaključka.

Iz opisanega sledi, da ne moremo vedno sestaviti zanke v poljubno izbrani barvi. Kdaj je možno in kdaj ne, je odvisno od izbranih ploščic.

Nekaj nalog za bralce

Izmed 14-ih ploščic na sliki 6 izberite toliko zaporednih ploščic, da bosta na sestavljenih ploščicah hkrati modra in rdeča zanka. Ali lahko ploščice sestavite tako, da bodo na njej hkrati zanke treh barv, kot je to na sliki 14? Koliko najmanj zaporednih ploščic morate izbrati? Sestavite ploščice v obliki enakostraničnega trikotnika tako, da bo v sestavu vsaj ena zanka.

In kako naprej?

Na spletnih straneh in v navodilih najdete še nekaj drugih možnosti, lahko pa se spopadete tudi še z nalogami, ki so objavljene na [2].

Nekateri kompleti vsebujejo tudi kvadratne ploščice, katerih stranice so enako dolge kot stranice šestkotnika. Ugotovite, kateri črte so lahko na ploščicah in koliko je takih ploščic, če izbiramo med štirimi barvami.





SLIKA 14.
Iz kompleta 56-ih ploščic smo izbrali 15 ploščic in sestavili trikotnik. Na njem so tri zanke.

Pravila igranja s ploščicami Tantrix in različne naloge lahko najdete na spletni strani slovenskega društva [1]. Ploščice pa lahko izdelate tudi sami.

Literatura

- [1] Tantrix, Navodila, dostopno na www.tantrix.si/, ogled 3. 12.2019.
- [2] Jaap Scherphius, dostopno na www.jaapsch.net/puzzles/tantrix.htm, ogled 3. 12. 2019.



SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	12					
10						14	9
3			10		20	8	
	4			22			
		19		7			
			10				



REŠITEV KRIŽNE VSOTE

		6	1	10			
		4	9	6	19		
9	6	7	7	1	3	4	
3	5	20		10	2	1	3
	9	14			7	3	10
				12	4		

Kako daleč je obzorje?

↓↓↓

IZTOK TISELJ

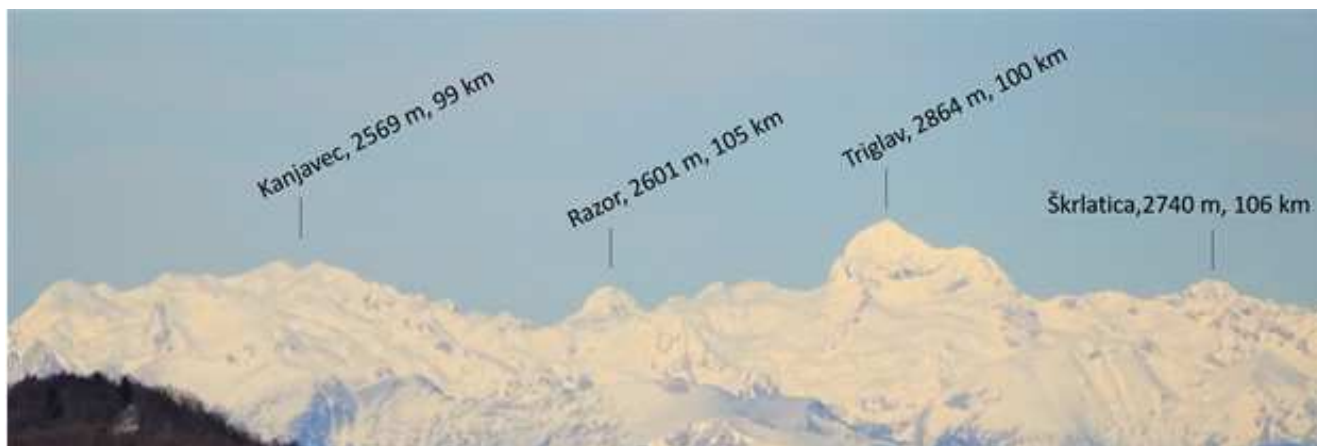
→ V tem sestavku bomo pogledali, kako daleč je v Sloveniji in njeni okolici najbolj oddaljen vrh na obzorju. Za izhodiščno točko si izberem Snežnik. Na spletni strani www.peakfinder.org kot razgledno točko vpišemo Veliki Snežnik in na zaslonu se pojavi skica 360 stopinjske panorame.

Na severu poiščemo Triglav in ugotovimo, da je od Snežnika oddaljen natančno 100 km (morda le par sto metrov manj). Razdalja med Snežnikom in Triglavom tako služi kot uporabna ocena za vidljivost, ki jo lahko preverimo tudi brez planinarjenja s pomočjo jugo-vzhodno usmerjene spletne kamere na Kredarici pod Triglavom, za katero skrbijo meteorologi. Če nad zahodno Slovenijo ni oblakov, se v daljavi skoraj zagotovo vidi Snežnik, izjema so morda le soparni poletni dnevi, ko kljub jasnemu vremenu vidljivost pade pod 100 km. Na sliki 1 je tipičen zim-

ski pogled na Triglav in njegove sosede s poti med Sviščaki in Snežnikom. Fotografija na sliki 1 je narejena 24. decembra 2019 z drobnim žepnim fotoaparatom, ki zmore 20-kratno povečavo. Na sliki so višine označenih gora v metrih ter razdalje do njih v kilometrih. Snežnik in Triglav sta označena tudi na zemljevidu Slovenije in okolice na sliki 4.

Kaj pa večje razdalje? Za 200 kilometrske razglede s Snežnika so primerne predvsem zime. Vzhodno od Triglava in levo od Nanosa na sliki 2 štrlijo v nebo vršaci italijanskih Dolomitov. Poleti jih, celo ob jasnem vremenu, preko dneva vidimo bolj poredko. Pozimi pa jih pogosto opazimo že podnevi, posebej izrazite pa postanejo njihove silhuete po sončnem zahodu, ko se zimsko sonce sprehaja pod njihovim obzorjem. Fotografija na sliki 2 je narejena konec decembra 2018 s polprofesionalnim fotoaparatom.

Če na spletni strani www.peakfinder.org podrobneje pogledamo še razgled s Snežnika na jug,



SLIKA 1.

100 kilometrski pogled. Triglav s poti Sviščaki-Snežnik z nadmorske višine okoli 1400 m





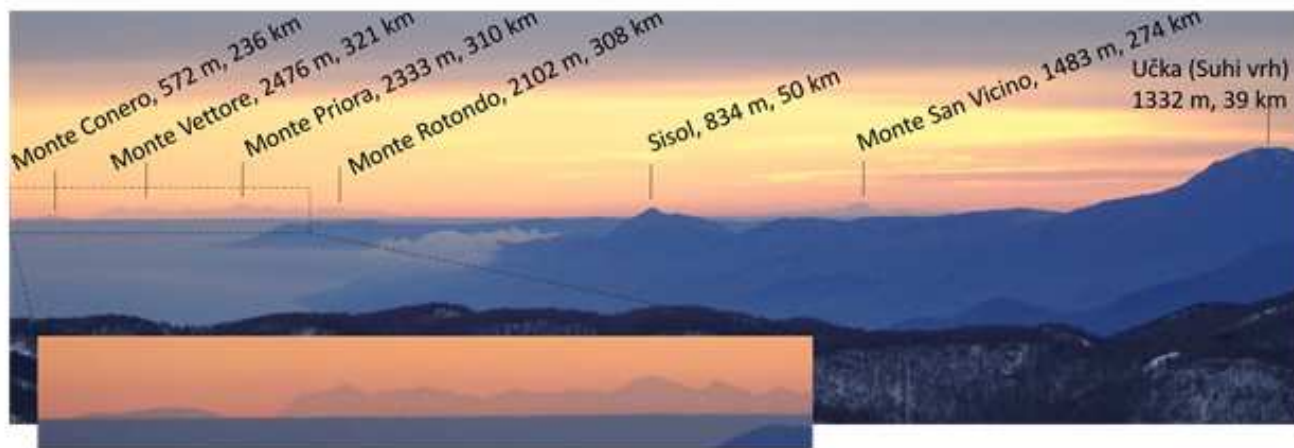
ugotovimo, da nam spletna stran obljublja pogled preko Jadranskega morja na hribe na Apeninskem polotoku, ki so oddaljeni več kot 300 km. Da pa sem obljubljeni pogled prek Jadranskega morja dočakal tudi v živo, sem v zadnjih treh zimah potreboval šest večernih vzponov na Snežnik – vse v dneh, ko so meteorologi tako nad Slovenijo kot tudi nad Jadranom in srednjo Italijo napovedali jasno vreme. Verjetno bi meteorologi lahko pojasnili, zakaj sem bil

24. decembra 2019 nagrajen s pogledom na Apenine in v čem se je ta večer razlikoval od preostalih, ko med otokom Cresom in vzhodno obalo Istre kljub jasnemu vremenu nisem videl ničesar. Na sliki 3 sem s pomočjo peakfinder-ja označil nekaj vrhov na drugi strani Jadrana oddaljenih od 230 do 320 km ter dva vrhova v hrvaški Istri. Fotografiji sta narejeni z žepnim fotoaparatom. Iz zemljevida na sliki 4 je razvidno, da skoraj 2500 metrov visoko goro Monte Vet-



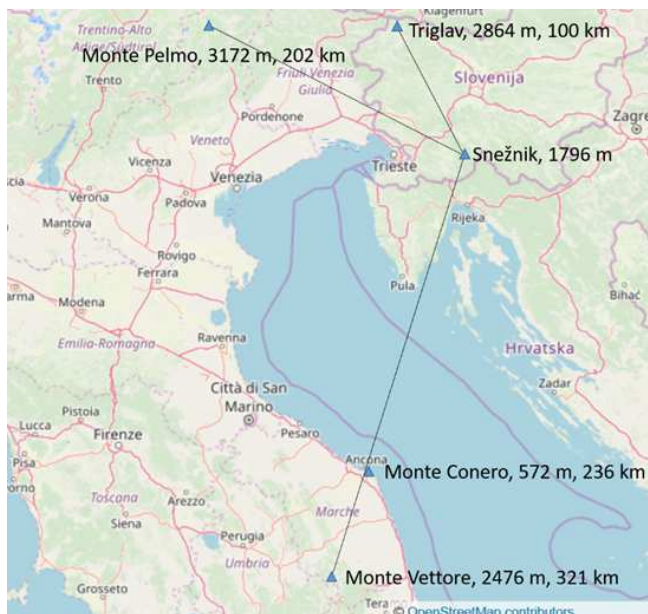
SLIKA 2.

200 kilometrski pogled s Snežnika na italijanske Dolomite (foto: T. Kastelic)



SLIKA 3.

300 kilometrski pogled na Apenine izpod Srednjega Snežnika z višine okoli 1700 m

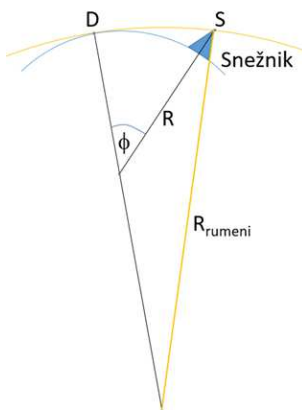
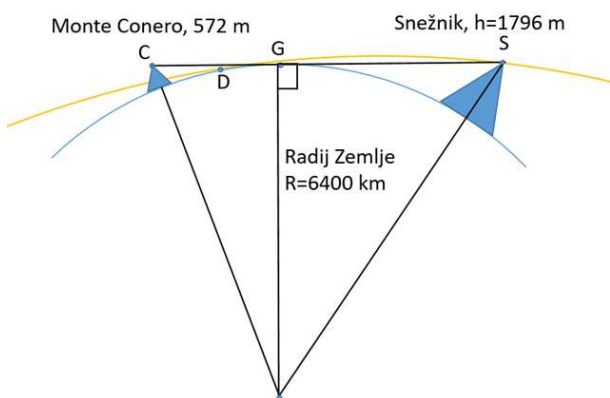


SLIKA 4.

Razgledi s Snežnika, smeri fotografij s slik 1, 2, in 3. (zemljevid: www.openstreetmap.org)

tore gledamo praktično čez pristaniško mesto Ancona, nad katerim se nahaja 572 m visok hrib Monte Conero, ki je označen na levem robu fotografije na sliki 3.

Zdaj pa je na vrsti nekaj matematike in nato še nekaj fizike. S pomočjo skice na sliki 5 s Pitagorovim izrekom izračunamo geometrijsko oddaljenost obzorja za razgled s Snežnika na Jadransko morje.



SLIKA 5.

Daljica SG – geometrijsko obzorje s Snežnika, krožni lok SD – dejansko obzorje.

Na skici je ta razdalja dolžina daljice med točkama S in G. Po Pitagorovem izreku bo plavalec na 0 metrih nadmorske višine, ki bo iz Ancone plaval v smeri Snežnika, zagledal vrh, ko se mu bo približal na razdaljo

$$\overline{SG} = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} = 152 \text{ km.} \quad (1)$$

Za Monte Conero, ki je visok 572 m, je geometrijsko obzorje (dolžina daljice CG na sliki 5) oddaljeno 85 kilometrov. Višini obeh hribov na sliki 5 sta seveda močno povečani v primerjavi s polmerom Zemlje.

Če obe razdalji do obzorja seštejemo, dobimo vsoto $\overline{CG} + \overline{SG} = 237$ kilometrov, kar je le kilometer več od izmerjene razdalje med obema vrhoma, zapisane na sliki 3. To pomeni, da bi bil po Pitagorovem izreku z vrha Snežnika hrib Monte Conero neviden, saj daljici CG in SG ležita praktično na isti tangenti na zemeljsko krožnico. Nad obzorje bi morala štrleti kvečjemu drobna pika, ki bi jo morda videli s kakšnim teleskopom. Če pa pogledamo spodnjo fotografijo na sliki 3, je Monte Conero precej dobro viden in nad obzorje štrli kar precejšen del hriba. Da bo zadeva še bolj sumljiva, je potrebno povedati, da sta fotografiji na sliki 3 posneta pod vrhom Snežnika s kakšnih 1700 metrov nadmorske višine. Veter na vrhu je bil namreč tako močan in moji prsti tako premrli, da kljub vnetemu pritiskanju na moj mali fotoaparat s samega vrha nisem prinesel nobene uporabne fotografije. Je torej kaj narobe z radijem Zemlje ali morda celo s Pitagorovim izrekom?

Pojasnilo tega pojava bo verjetno razočaralo tiste, ki bi želeli s fotografijama na sliki 3 dokazovati teorijo o ploščati Zemlji. Prav nič ni narobe z radi-



jem Zemlje in še manj s Pitagorovim izrekom. Lom svetlobe v ozračju je kriv, da je dejanska oddaljenost obzorja nekoliko večja od geometrijske razdalje, ki jo napove Pitagorov izrek. Pri fiziki smo zrak največkrat obravnavali kot sredstvo z lomnim količnikom 1, kar pa ni čisto res: lomni količnik zraka n je nekoliko večji od 1 in se zmanjšuje z nadmorsko višino, ko se gostota zraka manjša. Za spodnjih nekaj kilometrov atmosfere lahko brez prevelike izgube natančnosti predpostavimo, da gostota zraka z višino h pada linearno, zato linearno pada tudi lomni količnik. Namesto računanja gostote iz enačb adiabatne atmosfere sem vrednosti gostote ob morju $1,225 \text{ kg/m}^3$ in na 2 km nadmorske višine $1,007 \text{ kg/m}^3$ prebral kar s spletne strani www.engineeringtoolbox.com/standard-atmosphere-d_604.html. Od tod sledi približek

$$n = 1 + 2,9 \cdot 10^{-4} (1 - h(\text{km})/11,5 \text{ km}). \quad (2)$$

Tako je lomni količnik zraka ob morju $n = 1,00029$ in na Snežniku 1,00025. Zato se žarek svetlobe, ki začne svojo pot nekje na pobočju hriba Monte Conero pod geometrijskim obzorjem opazovalca na Snežniku, lomi na optično redkejšem zraku na višjih nadmorskih višinah. Žarek potuje po ukrivljeni poti, ki jo približno nakazuje rumeni lok na sliki 5, ter konča svojo pot na vrhu Snežnika. Tudi žarek, ki potuje v nasprotni smeri, ubira popolnoma enako pot.

Bralci, ki še ne poznajo diferencialnega računa, in tisti, ki niso razpoloženi za predolge izpeljave, lahko spodnji del besedila preskočijo in nadaljujejo branje pri enačbi (4). Za ostale pa izpeljimo približni polmer rumenega loka na sliki 5.

Izhajamo iz lomnega zakona, ki ga poznamo v obliki

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

ko obravnavamo prehod svetlobe iz ene gostote v drugo. V ozračju, kjer se lomni količnik spreminja zvezno, pa zato velja, da je vzdolž poti žarka

$$n \sin \alpha = \text{konst.}$$

Namesto kota α glede na normalo na (bolj ali manj horizontalne) zračne plasti raje obravnavajmo strmino žarka, to je kot β glede na horizontalo, ki ga kaže slika 6. Torej velja

$$n \cos \beta = \text{konst.}$$

Zanima nas, kako se spreminjata n in β , ko žarek preide iz plasti z lomnim količnikom n v plast s količnikom $n + dn$ na sliki 6. Kdor zna izračunati diferencial te enačbe, hitro ugotovi, da je

$$dn \cos \beta - n \sin \beta d\beta = 0 \quad \text{ali} \quad dn = n \tan \beta d\beta.$$

Recimo, da gre iz neke točke žarek navzdol pod kotom β , kot kaže slika 6. Vzdolž poti s se n poveča za dn/ds , zato iz zgornjega diferenciala sledi

$$\frac{dn}{ds} = n \tan \beta \frac{d\beta}{ds}. \quad (3)$$

Iz slike 6 je razvidno tudi, da je $d\beta/ds$ v enačbi (3) povezan z radijem rumene krožnice, po kateri potuje žarek na sliki 5. Velja

$$ds = R_{\text{rumeni}} d\beta \quad \text{oziroma} \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R_{\text{rumeni}}}.$$

Če upoštevamo še zvezo med diferencialom poti ds in diferencialom višine dh , ki jo tudi razberemo s slike 6: $dh = \sin \beta ds$, lahko ta radij iz enačbe (3) tudi izračunamo:

$$R_{\text{rumeni}} = n \cdot \tan \beta / \frac{dn}{ds} = \frac{n}{\cos \beta} / \frac{dn}{dh}.$$

Za žarke v tem prispevku velja, da je $\beta \approx 0$. Lomni količnik se z višino spreminja po enačbi (2), iz katere sledi $dn/dh = 2,9 \cdot 10^{-4}/11,5 \text{ km}$. Iz teh podatkov izračunamo, da žarki v spodnjih kilometrih atmosfere potujejo približno po krožnicah z radijem okoli sedemkrat večjim od radija Zemlje $R_{\text{rumeni}} = 44\,000 \text{ km}$. Zgornja izpeljava je podobna opisu loma zvočnih valov v ozračju v Preseku 29 (2001/2002), 40–46, podrobno izpeljavo pa je mogoče najti tudi na spletni strani www.mathscinotes.com pod iskalnim pojmom »distance to horizon«.

Z nekaj truda iz znanega radija R_{rumeni} lahko izračunamo še razdaljo do obzorja. Če za trikotnik, ki ga oklepajo središče Zemlje, središče rumene krožnice in vrh Snežnika na sliki 5 desno zapišemo kosinusni izrek

$$R_{\text{rumeni}}^2 = (R_{\text{rumeni}} - R)^2 + (R + h)^2 - 2(R_{\text{rumeni}} - R)(R + h) \cos(\pi - \phi),$$

lahko od tu izračunamo velikost kota ϕ . Če pri tem upoštevamo, da je kot ϕ zelo majhen in zato velja

$\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$, ter $R_{\text{rumeni}} \gg h$ in $R \gg h$, pri-
demo do približne enačbe (izpeljava je prepuščena
bralcu) za razdaljo do obzorja.

Za pogled z vrha Snežnika je razdalja do dejan-
skega obzorja (točka D na skici 5)

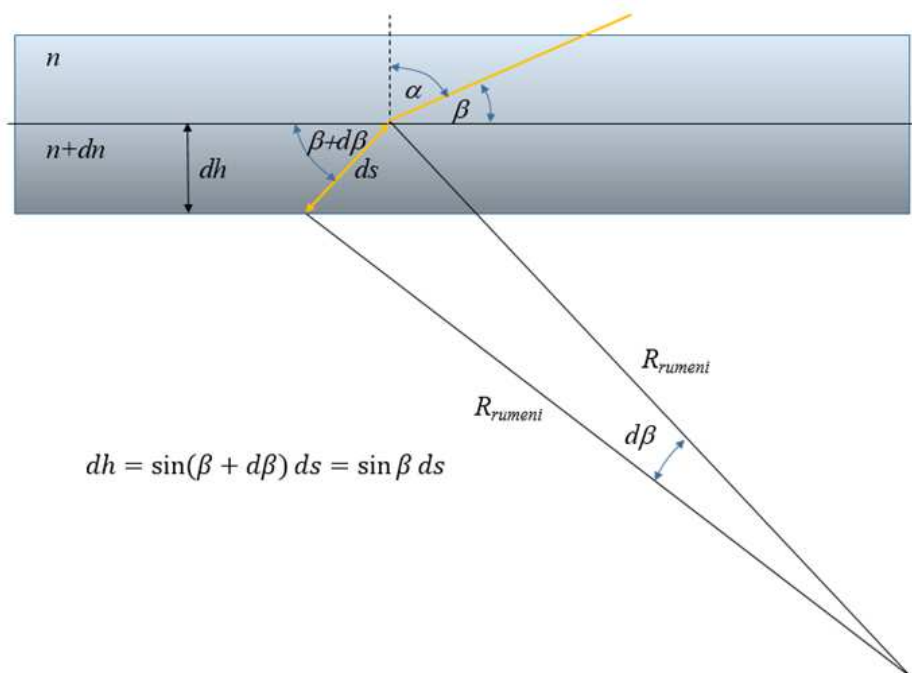
$$\overline{SD} = \sqrt{\frac{2Rh}{1 - \frac{R}{R_{\text{rumeni}}}}}. \quad (4)$$

Vidimo, da je enačba podobna enačbi (1), popravek
pod ulomkom pa je nekoliko odvisen od vremena.
Faktor $R/R_{\text{rumeni}} = 1/7$ velja za t. i. standardno at-
mosfero, v kateri temperatura pada za 11 °C na vsak
kilometer nadmorske višine. Približno tolikšen po-
pravek upošteva tudi spletna stran [www.peakfin-
der.org](http://www.peakfinder.org).

S tem popravkom se razdalja s Snežnika do ob-
zorja poveča iz $SG = 152$ km na $SD = 164$ km, z
Monte Conero pa na 94 km. S pomočjo popravljene
enačbe lahko ocenim tudi, da je prek Jadranskega
morja videti približno zgornjih 200 metrov vrha hri-
ba Monte Conero ter zgornjih 700 do 800 metrov
gore Monte Vettore. Te številke se kar dobro ujemajo
z ročnim merjenjem razdalj na fotografijah slike 3,
kjer sem iz znanih horizontalnih razdalj med vrhovi

ocenil vidno višino obeh vrhov. Fotografiji sem torej
posnel v vremenskih pogojih, ki približno ustrezajo
standardni atmosferi.

Za konec še kazalec na menda najdaljšo fotogra-
firano razdaljo na planetu. Z vrha Pic de Finistrelles
(2826 m) v Pirinejih med Francijo in Španijo se tik
pred sončnim vzhodom na vzhodu lahko vidi okoli
400 kilometrov oddaljene alpske vrhove nad Greno-
blom blizu francosko-italijanske meje. Fotografijo
sem zadnji dan leta 2019 našel na spletnem naslovu
9gag.com/gag/a7Mxmez. Naj omenim, da pri tako
ekstremnih oddaljenostih »peakfinder«
odpove. Po pogovoru z avtorjem programa sem dobil informa-
cijo, da je njegov trenutni domet nastavljen na pribli-
žno 320 km, povečevanje dometa po njegovih bese-
dah zelo hitro (eksponentno) povečuje računsko zah-
tevnost programa. Na spletu sem nato našel še stran
www.udeuschle.de, na kateri lahko generiramo pa-
noramo z izbrane točke s poljubno nastavljenim do-
metom. Ta spletna stran pravi, da je najbolj oddaljen
vrh, ki ga s Snežnika lahko vidimo ob izjemni vidljivi-
vosti, 354 km oddaljeni in 2912 metrov visoki Corno
Grande, najvišji vrh Apeninov. Njegova fotografija s
Snežnika pa naj ostane izziv za prihodnje planince
in fotografe.



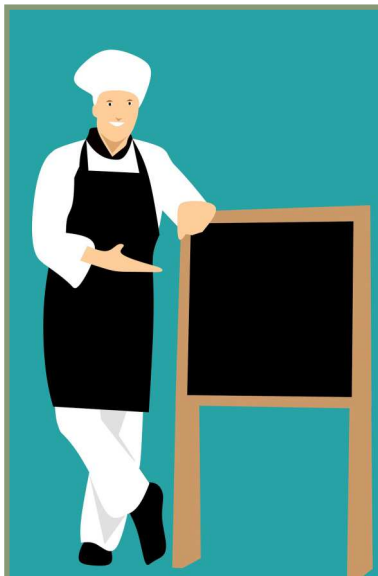
SLIKA 6.

Lom svetlobe pri pre-
hodu iz plasti z lomnim
količnikom n v plast s
količnikom $n + dn$.

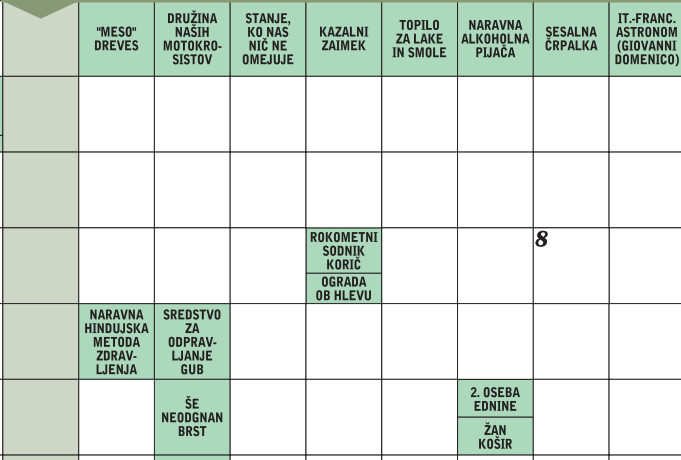
× × ×



Nagradna križanka



											AVTOR MARKO BOKALIČ	DETECE	VICE-SAMPION	GRŠKI BOG VOJNE	
											UMETNOST. SMER, KI TEMELJI NA OPTIČ. UČINKIH				
											KOLOBAR-JASTO ROTACIJSKO TELO			5	
											OTROŠKA NALEZ-LJIVA BOLEZEN				
											RIMSKA BOGINJA RODOVITNOSTI				
											"ZAČETEK" IN "KONEC" ČEBRA			NAŠA NEKD. GLASBENA SKUPINA KOTANJA Z VODO	
											ZALJIVO SMEŠENJE				
				OKOLJSKA RAZLIČICA RASTLINSKE ALI ŽIVALSKES VRSTE	NAŠ UST-VARJALEC RISANIH FILMOV (MILAN)	POUČEVANJE VEROUKA	PRITOK DONAVE IZ OSREDNJE ROMUNIJE	TITAN	NAŠE OBALNO MESTO	MIMO, KONČANO	POVZRO-CITELJ PLJUČNICE				
				RUŠKA DOLŽINSKA MERA							POSLOVNI PROSTOR NEKD. BELG. POLITIK (LEO)				
SPOJINA, KI NASTANE PRI REAKCIJI KISLINE IN BAZE				HIPER-KOMPLEK-SNO ŠTEVILO	NAPRAVA ZA OHROMITEV NAPADALCA DUHOVITOST							TKANINA IZ ČESANE PREJE			
												LIKOVNICA VOGELNIK			
AMERIŠKI IGRALEC (TOM; OSMI POTNIK)					6			TOČKA, OKOLI KATERE SE TELO VRTI					PROSTOR ZA PEVCE V CERKVI		
NJIVA, POSEJANA Z OVŠOM							IGRALKA FURLAN	NAŠ JEZIKOSLOVEC (RADO) PASCUAL JORDAN					DODATEK K AKTU JUŽNOIT. VELE-MESTO		
FINSKO POIMENOVANJE ZA LAPONSKO						TROBLJA				BLAZINJAK BREZ STRANIC, ZOFA				PISKA CHRISTIE STAR IZRAZ ZA KVADRAT	
NAŠ POKOJNI METEOROLOG (MIRAN)				7					GORA V VZH. KARA-VANKAH				NEKD. IZR. PREMIER (LEVI)		
IZVEDENSKO, JAVNO, LOČENO, DRUGO ?									PORCELANSKA GLINA				ZVITEK GAZE		
NEKDANJA IZRAELSKA DRŽAVNICA (GOLDA)						I ZORMAN-DRAGA MOJA ?	RAZLAGALEC, POJASNJEVALEC LESTVICA								
						KMET (LJUDSKO)									
NOVA REVILJA				NAPETA MEMBRANA, KI MORE NIHATI ZADNJK			ŠIBKEJŠI VETER				MLAD SNOBOVSKI POVPZPETNIK	1			
							BRENCELJ		4						
MATE-MATIČNI ZNAK						NAŠ FILMSKI REZISER (MITJA)					NAŠA IGRALCA (BOJAN IN GASPER)				
STARO-VEŠKA ASIRSKA PRES-TOLNICA						ODVEČNO BREME						ORGAN ZA DIHANJE			
						PREDLOG						RIMSKA 6			
ENOTA ZA DELO IN ENERGIJO						ZAJEDA MÖRJA V KOPNO					NAŠ NEKDANJ I HOKEJIST, ZDAJ TRENER				
BELGIJSKI SLIKAR (JAMES)						VELEMESTO V JUŽNI TURČIJI					ČASTNIŠKA STOPNJA			KOMAN-DITNA DRUŽBA	

DRŽAJ	PONAVLJAJOČ GLAS URNEGA MEHANIZMA	dMFA	PRIDOBITNA GOSPODARSKA DEJAVNOST	OB STRANI POBRITA PRICESKA Z GREBENOM PO SREDI	POLJSKI PISEC ZANANSTV. FANTASTIKE (STANISLAW)	POLOVICA CETRTINE	ZELO TRDA ZLITINA KOBALTA, KROMA IN VOLFRAMA										
		NAŠ POKOJNI TENORIST (ANTON)	ANTIČNO OBMORSKO MESTO NA JZ PELO-PONEZA														
			ELEKTRIN IN IFIGENIJIN BRAT														
			REKA IN DEPARTMA V SEVERNI FRANCIJI NEPRID		9												
RIBIŠKI KAVELJČEK						SPLETNA DOMENA IZRAELA											
KNOCKOUT						GOJITELJ OLJK											
				DRAGA KOVINA													
				NAŠA PESNICA (MAJDA)													
KNEŽEVINA NA AZURNI OBALI	SORTNO BELO VINO NAŠ METEOROLOG (BRANE)					ZVEZDA, KI JE VEČJA OD SONCA	MAJHEN KRAPOVEC BISTRH VODA ODTENEK		"MESO" DREVES	DRUŽINA NAŠIH MOTOKROSISTOV	STANJE, KO NAS NIČ NE OMEJUJE	KAZALNI ZAIEMK	TOPILO ZA LAKE IN SMOLE	NARAVNA ALKOHOLNA PIJACA	SESALNA ČRPALKA	IT.-FRANC. ASTRONOM (GIOVANNI DOMENICO)	
					POSTOPEK TRAJNEJŠEGA SHRANJEVANJA ŽIVIL												
		3. IN 2. SAMO-GLASNIK			IT. KOMEDIOGRAF (LUDOVICO)										8		
		ZAMETEK			BALETKA, BALERINA												
				PLESNI ODER NA PROSTEM REŽISER ASHBY					NARAVNA HINDUJSKA METODA ZDRAVLJENJA	SREDSTVO ZA ODPRVLJANJE GUB							
3						VIOLINISTKA BUKOVEC BAKRENA DOBA				ŠE NEODGNAN BRST				2. OSEBA EDNINE			
			GROF VRONSKI IZ ANE KARENINE												ŽAN KOŠIR		
			TUJA IN NAŠA ČRKA							OSREDNJI STOLP SREDNJEV. GRADU TEPTALNIK							
		PEVKA ZOBEC							RUS. REKA IN POGORJE								
		STAROSTA, NESTOR							NAŠA IGRALKA (MOJCA)				TELESNA TEKOCINA				
NAŠ LITER. KRITIK (MATIJA) NEUMETNIŠKA DELA							REDOVNIK, FRATER (OKRAJSANO)										
			STEBRU PODOBEN IZ STENE IZSTOPAJOČ PAS		VELIK PTIČ TEKAČ PREDZADNJA GRŠKA ČRKA		POLJE ZA MEJNO CRTO IGRISČA SREBLJAJ										
						2											
			OSVOBODILNA FRONTA														
	TRI ZVEZDE, KI TVORILJO PAS ORIONA						SUROVINA ZA PRIDOBIVANJE KOVINE										
	GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	ITALIJAN. TOVARNA AVTOMOBILOV					POLTRAK, KI OMEJUJE KOT										

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite osebni podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra** 2014. Bodo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2020**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Estonsko spletno tekmovanje iz znanja astronomije

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ V času karantene zaradi razglašene pandemije koronavirusa je bila izvedba tekmovanj iz znanja močno prizadeta, saj so bile šole zaprte. Marsikatero tekmovanje je odpadlo, druga pa so bila izvedena le delno. Tekmovanje iz znanja astronomije za Dominikova priznanja za šolsko leto 2019/20 je bilo uspešno zaključeno, saj je potekalo že na začetku leta. Prav tako smo uspešno opravili izbirni postopek za olimpijsko ekipo za 14. mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (MOAA), ki je načrtovana za september 2020. V ekipo so se uvrstili Vid Kavčič, Srednja šola Črnomelj, Simon Bukovšek, Gimnazija Kranj, Urban Razpotnik, Domen Lisjak in Urša Mati Djuraki, vsi Gimnazija Bežigrad.

V teh zapletenih časih so nekatere države organizirale spletna tekmovanja. Tak poskus je bilo tudi estonsko državno tekmovanje iz znanja astronomije, na katerega so organizatorji povabili tudi tekmovalce iz drugih držav. Tako se je tekmovanja udeležilo več kot 800 tekmovalcev iz 21-ih držav, tudi 12 slovenskih dijakin in dijakov, ki so tudi sicer sodelovali v izbirnem postopku za olimpijsko ekipo. V času pisanja tega prispevka rezultati estonskega astronomskega tekmovanja še niso znani, predstavljamo pa vam naloge za enotno srednješolsko skupino.



SLIKA 1.

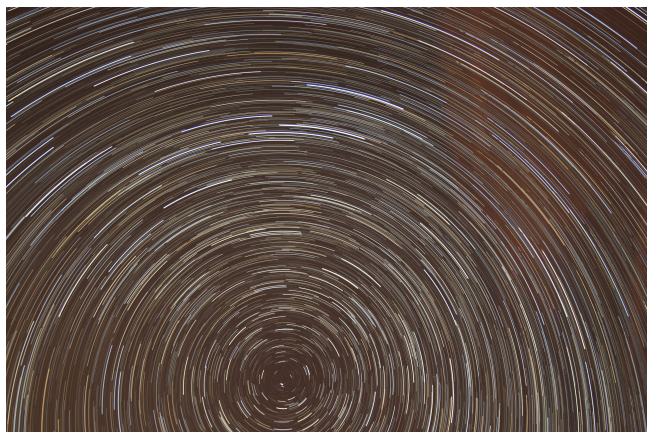
Udeleženci končnega izbirnega testa za 14. MOAA v Peterloughu na Goričkem

Kratke naloge

Severnica

Na katerih zemljepisnih širinah je Severnica vidna ($\alpha = 02^{\text{h}}31^{\text{m}}49^{\text{s}}$, $\delta = +89^{\circ}15'51''$),

- če bi bila Zemlja brez ozračja;
- če upoštevamo, da ima Zemlja ozračje? Refrakcija na obzorju je 35,4 kotnih minut.



SLIKA 2.

Zvezdne sledi in severni nebesni pol

Kje je Sonce?

Nekega dne opolnoči je siderski čas 18,0 ur.

- Kolikšna je takrat rektascenzija Sonca?
- V katerem ozvezdju je takrat Sonce?
- Kateri datum je (z natančnostjo ± 1 dan)?

Zunajzemeljski astronom

Zunajzemeljski astronom živi v središču Andromedine galaksije in preučuje vrtenje naše Galaksije z meritvami Dopplerjevega premika v svetlobi. Kolikšni sta vrednosti rdečega premika, ki ju izmeri na obeh robovih naše Galaksije? Predpostavi, da je vrtilna doba naše Galaksije 225 milijonov let, njen polmer 52850 svetlobnih let, razdalja med našo in Andromedino galaksijo je 778 kpc in da se galaksiji približujeta s hitrostjo 110 km/s. Galaktična latituda Andromedine galaksije je $-21,3^{\circ}$. Predpostavi, da se naša Galaksija vrti kot togi disk.

Dolge naloge

Vesoljsko pokopališče

Ko velik umetni satelit iz kateregakoli razloga neha delovati, sta zanj možni dve končni usodi:

- Satelit nadzorovane pade na t. i. vesoljsko pokopališče, katerega lega je označena na sliki.
- Satelit premaknejo na t.i. pokopališko orbito, ki je 36050 km nad površjem Zemlje.

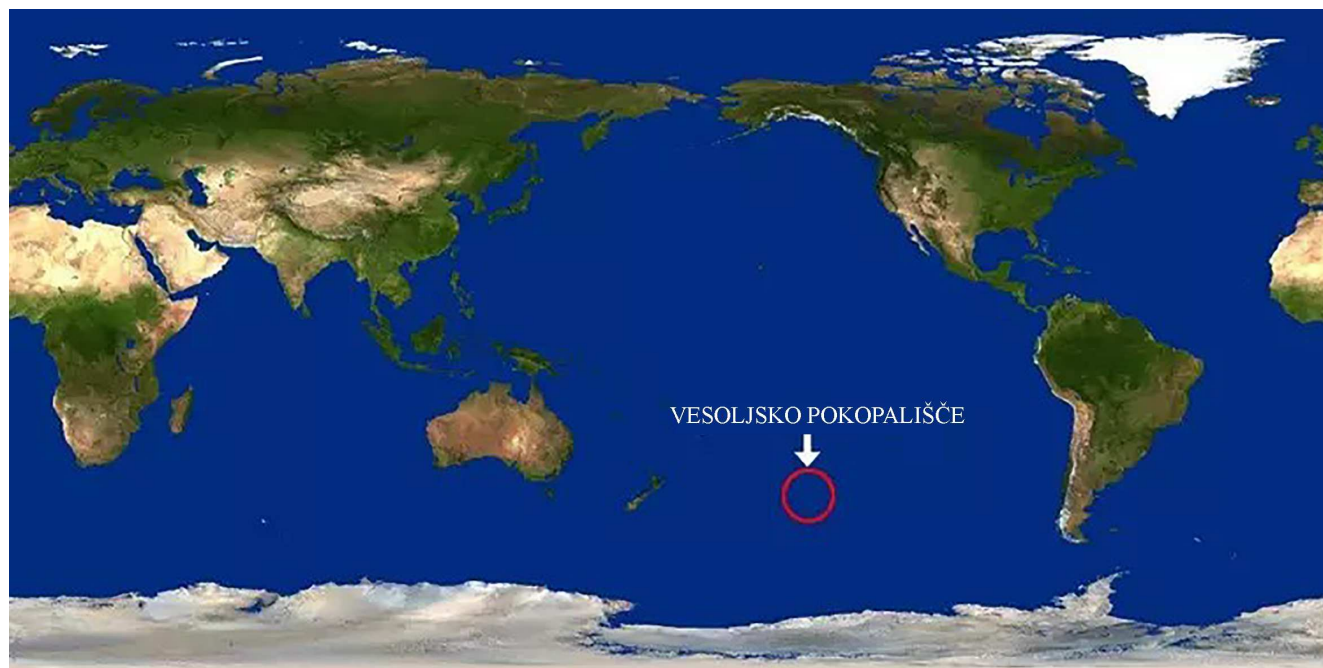
Predpostavi, da je eden od geostacionarnih satelitov prenehal delovati. Preuči, koliko energije potrebuje satelit za padec na vesoljsko pokopališče v primerjavi z njegovo premestitvijo na pokopališko orbito (iz te orbite bo satelit v nekaj sto letih spet padel na geostacionarno orbito). Predpostavi, da so spremembe hitrosti satelita hipne. Določi:

- višino geostacionarne orbite.
- Pod predpostavko, da je masa satelita zanemarljiva v primerjavi z maso Zemlje, uporabi zakon o ohranitvi energije in izpelji t. i. »vis-viva« enačbo. Enačba »vis-viva« opisuje hitrost satelita v odvisnosti od oddaljenosti od Zemlje in velike polosi satelitove orbite.
- Hohmannov transfer je metoda za prenos satelitov iz orbite 1 na orbito 3, kar je prikazano na sliki 4. Poišči enačbe za zahtevane spremembe hitrosti pri Hohmannovem transferu in izpelji izraz za celotno spremembo hitrosti satelita.
- Izračunaj spremembo hitrosti, ki je potrebna za premestitev satelita na pokopališko orbito.
- Izračunaj spremembo hitrosti, ki je potrebna, da satelit pade na vesoljsko pokopališče. Vplive ozračja zanemari in predpostavi, da satelit pade na vesoljsko pokopališče iz Hohmannove transferne orbite.
- Izračunaj mejno višino, s katere je energijsko ugodneje poslati satelit na vesoljsko pokopališče na Zemlji.

Vroča Betelgeza

Oceni povprečno temperaturo na površju Zemlje, če bi bila na mestu Sonca zvezda Betelgeza in bi bila ta velika kot Sonce. Predpostavi, da se orbita Zemlje ne





SLIKA 3.

bi spremenila, da je Zemlja idealno črno telo in da je učinek tople grede zanemarljiv. Povprečna navidezna vizualna magnituda Betelgeze $m_V = 0,5$, bolometrični popravek $BC = M_{bol} - M_V = -1,8$, njena oddaljenost $D = 220$ pc.

Konstante:

Navidezni bolometrični sij Sonca $m_{bol} = -26,83$.

Izsev Sonca $L = 3,83 \cdot 10^{26}$ W.

Razdalja Zemlja-Sonce $a = 1,50 \cdot 10^{11}$ m.

Stefan-Boltzmannova konstanta je

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

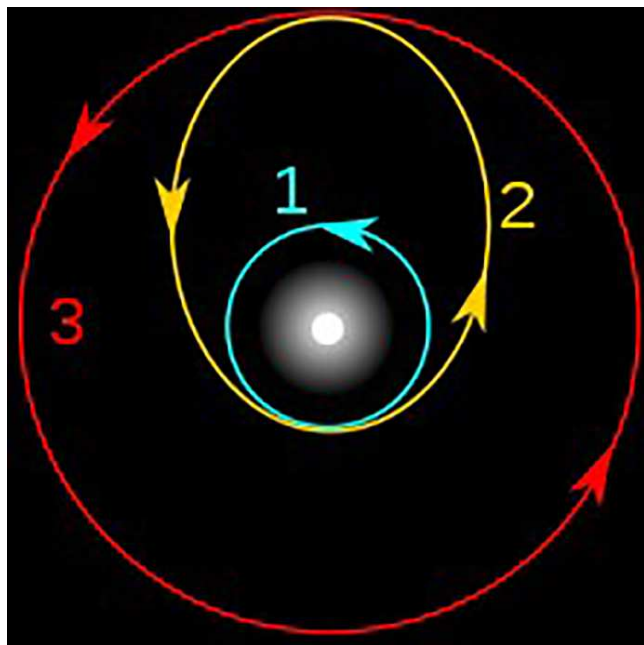
Meteorski roj

Meteorski roj je nebesni pojav, pri katerem večje število utrinkov prileti iz ene točke (radianta) na nebu. Utrinki nastanejo ob interakciji potoka prašnatih delcev (meteoroidov) kometa z ozračjem. Prašnati delci navadno izletijo iz jedra kometa zaradi izhajajoče vodne pare, ki sublimira zaradi Sončevega obsevanja ledenega jedra. Prašnati delci so porazdeljeni vzdolž prašnatega repa kometa in so posledično posejani po vsej orbiti kometa. Meteorski roji so zato periodični

letni pojavi, ki se zgodijo, ko Zemlja prečka orbito kometa, ki je svojo orbito posul s prašnatimi delci.

Eta Akvaridi in Orionidi sta meteorska roja; prvi je vsako leto viden maja, drugi pa oktobra. Ta meteorska roja sta povezana s Halleyjevim kometom. Oba roja sta šibka (majno število utrinkov), a dolgotrajna (trajata več kot mesec dni). V nadaljevanju lahko predpostaviš, da se Zemlja giblje po krožni orbiti s hitrostjo $v_{\oplus} = 29,8$ km/s.

- Kolikšna je hitrost meteoroidov roja Eta Akvaridi, s katero priletijo v ozračje Zemlje, v referenčnem koordinatnem sistemu s središčem v mirujočem Soncu? Lahko predpostaviš, da vsi meteoroidi približno sledijo orbiti Halleyjevega kometa. Velika polos orbite Halleyjevega kometa $a = 17,8$ a e, ekscentričnost orbite $e = 0,967$. Halleyjev komet je edinstven tudi po tem, da se po orbiti giblje v nasprotni smeri urinega kazalca, torej v nasprotni smeri kot planeti.
- Izpelji enačbo za celotno vrtilno količino na enoto mase I posameznega meteoroida. Količina naj bo izražena z a , e , G in $M_{\odot}$.



SLIKA 4.

- Isto kot pri prvi nalogi, le da hitrost meteoroidov izrazi v referenčnem koordinatnem sistemu s središčem v mirujoči Zemlji.
- Izračunaj število utrinkov na časovno enoto, ki v ozračju zasvetijo ob višku meteorskega roja Eta Akvaridov. Gostota meteoroidov, ki ob višku ustvarijo vidne utrinke, je enakomerna in znaša $n = 74 \cdot 10^{-9} \text{ km}^{-3}$. Lahko predpostaviš, da se meteoroidi gibljejo tako hitro, da težnost Zemlje zanemarljivo malo spremeni njihovo hitrost in da meteoroidi »izgorijo« $H = 100 \text{ km}$ nad tlemi. Polmer Zemlje $r_{\oplus} = 6370 \text{ km}$.

Nevtronska zvezda

Nevtronska zvezda je zgoščeno telo, skoraj v celoti sestavljeno iz nevtronov. Masa nevtronskih zvezd je med 1,4 in 3 masami Sonca. Naredili bomo aproksimacijo polmera in največje kotne hitrosti nevtronske zvezde z maso $M = 1,5M_{\odot}$ na podlagi enostavnega modela.

Predpostavimo, da so nevtronske zvezde toga telesa, ki jih sestavljajo samo nevtroni. Število nevtronov v zvezdi lahko dobimo iz Paulijevega izključitve-

nega načela, kar opiše sledeča enačba:

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi n_F^3}{3},$$

kjer je n_F največje zasedeno kvantno število nevtronov v nevtronski zvezdi. Energijo nevtrona dobimo iz enačbe

$$E(n) = \frac{h^2 n^2}{8mV^{2/3}},$$

kjer je n kvantno število nevtrona, h Planckova konstanta in V prostornina nevtronske zvezde. Povprečna energijska gostota nevtronske zvezde, ki je posledica energije nevtrona na najvišjem energijskem nivoju, je

$$\rho_E = \frac{9}{20\pi} \frac{N}{R^3} E(n_F),$$

kjer je R polmer nevtronske zvezde.

- Izračunaj degenerirani tlak nevtronov (notranji tlak, ki je posledica energije nevtronov) v nevtronski zvezdi.
- Izračunaj gravitacijsko energijo nevtronske zvezde, če predpostaviš, da ima povsod enako gostoto.
- Predpostavi, da nevtronska zvezda nima drugih vrst notranje energije, razen od nevtronov, in izračunaj njen polmer. Masa nevtronske zvezde $M = 1,5M_{\odot}$.
- Izračunaj gostoto nevtronske zvezde s predhodnimi predpostavkami in predpostavko, da je togo (trdno) telo.
- Izračunaj največjo kotno hitrost nevtronske zvezde pod predpostavkami, da sta notranja energija in oblika nevtronske zvezde, kar je bilo privzeto pri predhodnih vprašanjih, konstantni.

Namig. Pri računanju tlaka pri notranji energiji U in prostornini V si lahko pomagaš s

$$P = \frac{\partial U}{\partial V}.$$

× × ×

Priporočanje z algoritmom Slope One



MLADEN BOROVIČ

→ Priporočilni sistemi se v zadnjem desetletju vse bolj uporabljajo v različne namene. Najpogosteje jih najdemo v spletnih trgovinah, socialnih omrežjih, iskalknikih in tudi v storitvah za pretočnost video in avdio vsebin. V tem prispevku opisujemo pristop sodelovalnega priporočanja Slope One, ki deluje na podlagi povratnih informacij, pridobljenih s strani drugih uporabnikov.

Denimo, da se odpravljate na morje in želite na plaži prebrati dobro knjigo. Da bi izbrali knjigo, ki bi jo res z veseljem brali, omejite izbiro na žanre, avtorje ali pa tudi dolžino knjige. Velika možnost je, da bo po začetni omejitvi izbire na voljo še vedno preveč knjig in potrebujete še nekaj več informacij, da bi izbrali tisto pravo knjigo, ki vam bo ustrezala na plaži. Velikokrat se v takšnih primerih obrnemo na prijatelje oziroma pregledamo mnenja in recenzije knjig na spletu. Ker se mnenja velikokrat razlikujejo, saj smo ljudje različni, želimo ugotoviti, kateri ljudje imajo podoben okus kot mi.

V opisani situaciji hitro vidimo, da izvajamo neke vrste filtriranje med veliko množico knjig. V svetu priporočilnih sistemov (*recommender systems*) poznamo dva osnovna pristopa k pridobivanju ustreznega rezultata. Prvi pristop je vsebinsko filtriranje (*content-based filtering*). Pri tem pristopu nastopa računalniški sistem, ki mu podamo potrebne informacije (npr. tematiko knjige), vrne pa nam seznam priporočil, ki jih računalniški sistem izračuna s pomočjo metrike vsebinske podobnosti. Drugi pristop je sodelovalno filtriranje (*collaborative filtering*), kjer pa računalniškemu sistemu podamo le naše pretekle stike (npr. oceno knjige na lestvici med 1 in 5), dobimo pa seznam priporočil, ki jih računalniški sistem izračuna s pomočjo metrike podobnosti. Pri tem računalniški sistem upošteva tudi ostale bralce istih knjig. V nadaljevanju prispevka bomo predstavili algoritem sodelovalnega filtriranja Slope One, ki bo znal glede na pretekle ocene knjig priporočati najustreznejšo knjigo, ki je še nismo prebrali.

Algoritem Slope One

Področje sodelovalnega filtriranja pozna veliko algoritmov, ki se samostojno ali kot skupek večih algoritmov uporabljajo še danes v zelo razširjenih spletnih storitvah, kot sta YouTube in Amazon. Algoritem Slope One se prvič pojavi leta 2005 kot nov, preprost in hiter način za priporočanje s sodelujočim filtriranjem. Prednosti algoritma sta natančnost priporočil in možnost enostavne paralelizacije.

Algoritem Slope One deluje tako, da na podlagi kombinacije uporabnikov in njihovih že obstoječih ocen poskuša predvidevati, kako bi drugi uporabniki ocenili tiste elemente, ki si jih še niso ogledali. V našem primeru so elementi priporočanja knjige, ki so jih bralci že ocenili, z algoritmom Slope One pa želimo predvideti našo oceno za vse knjige, ki jih še nismo ocenili. Ideja algoritma Slope One je ustvarjanje linearne relacije med elementi priporočanja in uporabniki, ki je podobna linearni funkciji $f(x) = ax + b$. Gre za linearno funkcijo, kjer je smerni koeficient oz. naklon a enak 1; od tod izvira tudi ime algoritma Slope One. Prvi korak algoritma je torej ustrezna predstavitev uporabniških ocen in knjig. Le-to zelo elegantno predstavimo z matriko, kjer vrstice predstavljajo uporabnike, stolpci predstavljajo knjige, številčne vrednosti pa oceno med 1 in 5, s katero je uporabnik ocenil knjigo. Oznaka – pomeni, da oseba še ni ocenila knjige.

	K_A	K_B	K_C
Marko	5	2	3
Mateja	3	4	–
Tina	–	3	4

Iz takšne predstavitve lahko tvorimo vektorje, ki jih uporabimo v naslednjih korakih algoritma. Recimo, da želimo izračunati, kako bi Tina ocenila knjigo K_A . Najprej izračunamo povprečni razdalji med K_A in K_B ter med K_A in K_C . To storimo z operacijo odštevanja vektorjev, kjer v primeru, da za knjigo

nimamo podane ocene (oznaka $-$), razlike med ocenami ne bo mogoče izračunati. V tem primeru izločimo pripadajočo vrstico v vektorjih (enačba 1):

$$\blacksquare d_{i,j} = K_i - K_j. \quad (1)$$

Rezultat odštevanja dveh vektorjev, kjer ni podane ocene (oznaka $-$), je nov vektor, kjer izločitev vrstice (in s tem tudi knjige) ponazorimo z oznako $-$, pri nadaljnjih izračunih pa uporabimo ustrezno preoblikovan vektor (v tem primeru je to vektor $[4 \ 0]^T$):

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ - \end{bmatrix}$$

Hkrati si beležimo število ocenjenih skupnih knjig $N_{i,j}$, saj želimo izračunati povprečno razliko med ocenami za obravnavane knjige. $N_{i,j}$ ustreza številu nemanjkajočih komponent vektorja. Če delamo v prostoru z dimenzijo D , potem povprečno razliko med ocenami izračunamo po enačbi 2. Pri tem velja, da ocena obstaja ($d_{i,j}^k \neq -$):

$$\blacksquare \bar{d}_{i,j} = \frac{1}{N_{i,j}} \sum_{k=0}^D d_{i,j}^k \quad (2)$$

V tem koraku izračunamo povprečne razlike v ocenah:

$$\blacksquare d_{A,B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ - \end{bmatrix}; N_{A,B} = 2$$

$$d_{A,C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ - \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ - \\ - \end{bmatrix}; N_{A,C} = 1$$

$$\blacksquare \bar{d}_{A,B} = \frac{(3 + (-1))}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\bar{d}_{A,C} = \frac{2}{1} = 2$$

Zadnji korak je izračun vrednosti sprememb ocen r , kjer upoštevamo povprečno razliko v ocenah $\bar{d}_{i,j}$ in oceno uporabnika y (enačba 3). Vrednosti sprememb ocen za uporabnika in knjige $r(y)_{i,j}$ uporabimo v izračunu predvidene ocene, ki pove, kako bi uporabnik y ocenil knjigo x . To izračunamo z enačbo 4, ki predpostavlja linearno relacijo med uporabnikom y in njegovo oceno knjige x na podlagi ocen

preostalih uporabnikov, ki so preostale knjige ocenili podobno kot uporabnik x :

$$\blacksquare r(y)_{i,j} = \text{ocena}(y)_j + \bar{d}_{i,j} \quad (3)$$

$$\blacksquare \text{SlopeOne}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{x,i} \cdot r(y)_{x,i}}{\sum_{i=1}^n N_{x,i}} \quad (4)$$

Za Tino in knjigo A je izračun v zadnjem koraku sledeč:

$$\blacksquare r(\text{Tina})_{A,B} = \text{ocena}(\text{Tina})_B + \bar{d}_{A,B} = 3 + 1 = 4$$

$$r(\text{Tina})_{A,C} = \text{ocena}(\text{Tina})_C + \bar{d}_{A,C} = 4 + 2 = 6$$

$$\blacksquare \text{SlopeOne}(A, \text{Tina}) =$$

$$= \frac{N_{A,B} \cdot r(\text{Tina})_{A,B} + N_{A,C} \cdot r(\text{Tina})_{A,C}}{N_{A,B} + N_{A,C}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{2 + 1} = \frac{14}{3} = 4,667$$

Z algoritmom Slope One predvidevamo, da bi Tina ocenila knjigo A z oceno 4,667, kar je zelo blizu Markovi oceni za knjigo A. Če primerjamo njune ocene ostalih knjig, opazimo, da so tudi te zelo podobne. Iz tega lahko sklepamo, da imata Tina in Marko zelo podoben okus. Vidimo tudi, kako je na Tinino predvideno oceno knjige A vplivala nižja ocena Mateje.

Prikazan postopek v praksi izvedemo za vsako neocenjeno knjigo. Tako dobimo predvidene ocene neocenjenih knjig, ki jih lahko uredimo po velikosti padajoče. S tem tvorimo seznam priporočil, ki ga lahko omejimo s številom zadetkov na izhodu θ . Seznam priporočil ponavadi omejimo na 3 do 5 zadetkov.

Zgled

Priporočanje z algoritmom Slope One prikažimo še na praktičnem zgledu, kjer imamo pet oseb (Luka, Jakob, Nika, Sara in Anja) in osem knjig (označimo jih s $K_1 - K_8$). Tvorimo tabelo ocen, kjer oznaka $-$ pomeni, da oseba še ni ocenila knjige, številčna vrednost pa predstavlja oceno med 1 (zelo slabo) in 5 (odlično).

Ustvarili bomo priporočila za Jakoba, ki je relativno kritičen in nov bralec, kot je razvidno iz tabele ocen. Izračunali bomo predvidene ocene za K_1 , K_3 , K_5 , K_6 , K_7 in K_8 . Oglejmo si postopek izračuna predvidenih ocen.





	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
Luka	3	–	–	2	–	4	5	5
Jakob	–	1	–	3	–	–	–	–
Nika	5	4	5	–	2	–	4	–
Sara	2	2	–	–	5	–	–	–
Anja	–	–	4	4	–	–	–	4

Najprej z enačbo 1 izračunajmo razliko med ocenami knjig, ki jih je Jakob že ocenil ($K_2 = 1$, $K_4 = 3$), in ocenami knjig, ki jih želimo priporočati. V primeru, da za knjigo nimamo podane ocene (oznaka –), razlike med ocenami ne bo možno izračunati:

$$\begin{aligned} d_{1,2} = K_1 - K_2 &= \begin{bmatrix} 3 \\ - \\ 5 \\ 2 \\ - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} - \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ 1 \\ 0 \\ - \end{bmatrix}; N_{1,2} = 2 \\ d_{1,4} = K_1 - K_4 &= \begin{bmatrix} 3 \\ - \\ 5 \\ 2 \\ - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ - \\ - \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}; N_{1,4} = 1 \end{aligned}$$

Hkrati si beležimo tudi število ocenjenih skupnih knjig $N_{i,j}$, ki ga bomo potrebovali za izračun povprečne razlike med ocenami za obravnavane knjige (enačba 2):

$$\bar{d}_{1,2} = \frac{1}{N_{1,2}} \cdot \sum_{d_k \in d_{1,2}} d_k = 0.5$$

$$\bar{d}_{1,4} = \frac{1}{N_{1,4}} \cdot \sum_{d_k \in d_{1,4}} d_k = 1$$

Sledi izračun predvidene ocene za knjigo K_1 z enačbama 3 in 4:

$$\begin{aligned} r(\text{Jakob})_{1,2} &= \text{ocena}(\text{Jakob})_2 + \bar{d}_{1,2} = 1,5 \\ r(\text{Jakob})_{1,4} &= \text{ocena}(\text{Jakob})_4 + \bar{d}_{1,4} = 4 \\ \text{SlopeOne}(1, \text{Jakob}) &= \frac{\sum_{i=1}^n N_{1,i} \cdot r(\text{Jakob})_{1,i}}{\sum_{i=1}^n N_{1,i}} \\ &= \frac{N_{1,2} \cdot r(\text{Jakob})_{1,2} + N_{1,4} \cdot r(\text{Jakob})_{1,4}}{N_{1,2} + N_{1,4}} \\ &= 2,333 \end{aligned}$$

Z izračunom vrednosti Slope One predvidevamo, da bi Jakob knjigo K_1 ocenil z oceno 2,333. Na enak način pridobimo še vrednosti za preostale knjige:

$$R_{\text{Jakob}} = \left\langle \begin{matrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 & K_7 & K_8 \\ 2,333 & 1 & 2 & 3 & 1,5 & 5 & 4 & 4,5 \end{matrix} \right\rangle.$$

Knjige s pripadajočimi predvidenimi ocenami zapišemo v seznam, ki ga uredimo po velikosti ocene padajoče. Seznam lahko omejimo na pet zadetkov (npr. $\theta = 5$), ki ga nato posredujemo Jakobu.

$$R_{\text{Jakob}}^{\theta} = \left\langle \begin{matrix} K_6 & K_8 & K_7 & K_1 & K_3 \\ 5 & 4,5 & 4 & 2,333 & 2 \end{matrix} \right\rangle.$$

V tem prispevku opisan algoritem sodelovalnega priporočanja lahko uporabimo tudi za priporočanje filmov, pesmi, ljudi, izdelkov v trgovinah in drugih izdelkov, ki jih uporabniki lahko ocenijo. Iz tega sledi tudi glavna pomanjkljivost vsakega algoritma sodelovalnega priporočanja. To je t. i. problem hladnega začetka (*cold-start problem*), saj bomo na začetku vedno potrebovali množico ocen, da bomo sploh lahko izvedli priporočanje. Vsebinsko filtriranje rešuje ta problem, vendar gre za kompleksnejše metode računanja podobnosti, hkrati pa se lahko po določenem času priporočila začnejo ponavljati. Iz tega razloga se sodobni priporočilni sistemi poslužujejo tako vsebinskega kot sodelovalnega filtriranja. To so hibridni priporočilni sistemi (*hybrid recommender systems*), ki vedno bolj uporabljajo pristope globokega učenja in se tudi že uporabljajo v praksi.

Literatura

- [1] D. Lemire in A. Maclachlan, *Slope One Predictors for Online Rating-Based Collaborative Filtering*, Proceedings of the 2005 SIAM International Conference on Data Mining, 471–475, 2005.
- [2] P. Melville in V. Sindhwani, *Recommender Systems*, Encyclopedia of Machine Learning, Springer, 829–838, 2010.
- [3] F. Ricci, L. Rokach in B. Shapira, *Introduction to Recommender Systems Handbook*, Recommender Systems Handbook, Springer, 1–35, 2011.
- [4] R. Burke, *Hybrid Recommender Systems: Survey and Experiments*, User Modeling and User-Adapted Interaction, 12(4), 331–370, 2002.

× × ×

Rezultati natečaja ob Mednarodnem dnevu matematike

↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN, MARJETA KRAMAR-FIJAVŽ IN SANDRA CIGULA

→ V zadnjem desetletju se je marsikje po svetu razširila navada, da se 14. marca (3.14) obeleži dan števila Pi z raznovrstnimi, pogosto nekoliko šaljivimi, aktivnostmi za popularizacijo matematike, kot so npr. peka Pit, recitiranje decimalk števila Pi in pisanje matematične poezije ali Pi-ezije. To je navdihnilo mednarodno organizacijo UNESCO, ki je skupaj z največjim svetovnim matematičnim združenjem IMU (International Mathematical Union) novembra 2019 razglasila 14. marec za Mednarodni dan matematike in objavila spletno stran www.idm314.org/. Pod okriljem IMU bodo od letošnjega leta dalje vsako leto po vsem svetu potekali matematično obarvani natečaji in drugi dogodki na izbrano skupno temo.

Tema za letošnji mednarodni dan je bila **Matematika je povsod okoli nas**, koordinator aktivnosti v Sloveniji pa DMFA Slovenije. Mentorje in mentorice na osnovnih in srednjih šolah smo povabili, da učence spodbudijo k ustvarjanju plakatov, videoposnetkov, poezije ali drugih del, ki na izviren na-

čin prikazujejo prisotnost matematike v vsakdanjem življenju, in te izdelke predstavijo na svojih šolah 13. marca 2020. Na natečaju so tako dobili svojo priložnost tudi učenci, ki morda niso tekmovalci ali odlični v matematiki, imajo pa veselje do ustvarjanja in jim lahko matematiko na ta način približamo z drugega zornega kota. Do 1. aprila smo zbirali poslane izdelke na krovnem natečaju DMFA Slovenije. Predstavitev izdelkov smo načrtovali na prireditvi **Bistroumi 2020**, žal pa nam je to preprečila pandemija koronavirusa, ki je ustavila tudi številne načrtovane aktivnosti v slovenskih šolah.

Kljub temu se je v našem nabiralniku znašla obilica zanimivih in simpatičnih izdelkov. Nekaj izbranih izdelkov predstavljamo v nadaljevanju, **celotno galerijo poslanih izdelkov** pa si lahko ogledate na spletni povezavi photos.app.goo.gl/TSXJNSwZcx23mAxZ9, ki jo najdete tudi med novicami na spletni strani www.dmfa.si.



Začnimo z najmlajšimi. Učenci 1. a in 1. b **OŠ Stična** (mentorice Maja Berčon, Katarina Pajk, Petra Kermelj, Barbara Polajžer) so pripravili vsak svoj plakat o živalih z zlogom Pi v imenu, tisti prvošolci, ki obiskujejo tudi podaljšano bivanje pa so v Pliskrček zbrali še predmete, povezane s tem zlogom (mentorica Maja Godec). Učenci 1. razreda **OŠ 8 talcev v Logatcu** (mentorica Simona Nagode) so nam poslali fotografijo, ki je nastala med njihovimi matematičnimi aktivnostmi pri obisku gozda v naravi, učenci 2. razreda **OŠ Košana** (mentorica Marija Mršnik) pa so s pomočjo lesenih blokov na domiselni način spoznali števila do 100.

MATEMATIKA JE ZAKON

Pri matematiki se rad učim,
množim, delim in se veselim.
Ko domačo nalogo dobim,
z lahkoto vse naredim.

Pi števila nekaj znam,
vsega pa ne, priznam.
Celo Aristotela poznam
in se z njegovimi pravili rad igram.

Ko pa je čas za ocenjevanje,
mora vsak pokazati svoje znanje.
Ko dobimo ocene,
ni panike nobene.

Zadovoljni smo vsi,
ker matematika nas zaposli.

Učenci **OŠ Stična** so nam poleg že omenjenih poslali še dva skupinska izdelka. Učenci 4. b razreda so izdelali kartonasto Plco velikanko (mentorica Tina Štupar). Učenci 5. a razreda pa so napisali duhovito pesem PESMO π S, ki vsebuje veliko število zlogov Pi (mentorica Bernarda Kunstelj Lepojič).

Na **OŠ Stična** so skupaj s **PŠ Višnja Gora** in **PŠ Zagradec** matematiki posvetili vse mesec marec (koordinatorji: Jaka Keše, Jožica Knez, Lucija Medimur, Barbara Pavovec, Magdalena Pirman, Darja Strah

in Dragica Šteh). Ustvarjali so matematične rebuse, likovne, pesniške in kuharske mojstrovine na temo števila π ter pripravili matematično čajanko za nekdanje in sedanje učiteljice in učitelje matematike.

Veliko število izdelkov smo prejeli tudi iz **OŠ Dob**. Najmlajši, tretješolci, so pripravili plakat na temo simetrije (mentorica Nina Buerger). Petošolci so poslali 5 pesmi, navdihnjenih z matematiko v šoli ali okolici (mentorica Metka Dimnik Vilar). Šestošolci so izdelali 4 zanimive matematične igre in veliko maketo, ki prikazuje vsakodnevno srečevanje z matematiko (mentorica Ksenija Božak).

Iz **OŠ 8 talcev v Logatcu** smo prejeli 3 fotografije skupinskih izdelkov učencev 6., 8. in 9. razreda (mentorja U. Župec Mele in R. Štemberger), na katerih so učenci znanje geometrije uporabili pri izdelavi mandal, risanju svojih imen in tlakovanju zemljevida Slovenije. Iz **OŠ Bistrica pri Trziču** smo prav tako prejeli tri plakate, pri katerih je sodelovalo več učencev (mentorica Sonja Sedej). Plakati prikazujejo matematično veselje ter matematiko in računanje v vsakdanjem življenju.

Učenci predmetne stopnje **OŠ II Murska Sobota** (mentorica Helena Nemec) so pripravili 4 zanimive predstavitve na teme matematike kraljice znanosti (Lana Cigut), matematičnega vsakdanjika (David Rituper), števila Pi (Roko Kolmanič) ter zgodovine matematike (Evelina Balaško). Ob ogledu predstavitev si zlahka predstavljamo njihove duhovite in domiselne nastope v živo.

Učenci predmetne stopnje **OŠ Apače** Rebeka Drev, Nina Šebjanič, Žiga Lah so nam poslali 3 matematične pesmi in še videoposnetek o tem, kako nas matematika spremlja vsak dan (mentorica Barbara Kováč).

Največje število posameznih izdelkov izmed vseh sodelujočih šol smo prejeli iz **OŠ Žetale**, kar 14. Izdelki so res raznovrstni: dva stripa, plakat in 11 pesmi, med njimi 3 z akrostihom in 1 lepo ilustrirana, svoje izdelke pa so prispevali posamezni učenci in učenke od 2. do 9. razreda (mentorici Saša Peršoh in dr. Iris Merkač).

Nekaj posamičnih izdelkov smo prejeli še iz drugih osnovnih šol. Nina Čadež iz **OŠ Braslovče** je izdelala imeniten plakat, Tanisa Potočnik Marčič iz **Waldorfske šole Maribor** pa plakat, ilustracijo in pesem.

Edina Srednja šola, ki se je na naš natečaj odzvala s poslanimi izdelki, je **SŠ Josipa Jurčiča Ivančna gorica**. Poslali so nam 7 umetniških ilustracij in fotografij, navdahnjenih z matematičnimi temami: fraktali, tlakovanja, šahovnice, umetna inteligenca, simetrija, vzorci, delovanje možganov (mentor Matko Peteh). Izdelki naj bi postali del razstave ob praznovanju 70-letnice šole. Ob tem imenitnem jubileju čestitamo tako učiteljem kot učencem!

Posebej omenimo še 4 prejete **videoposnetke**. Prvi film z naslovom Matematika me spremlja vsak dan je pripravil Žiga Lah, **OŠ Apače**. Drugi film z naslovom Matematika v vsakdanjem življenju so pripravili Armando Hočevar, Tajda Dolgan, Miha Morelj iz **OŠ Košana** (mentorica Alenka Valenčič). Tretji posnetek ima naslov Manj je več, gre za humoristični film, ki naj bi ga pripravili člani društva anonimnih matematikov iz **OŠ Hruševac Šentjur** (mentorici Mateja Rezar Ulaga in Katja Gajšek). Najbolj pa nas je pritegnil film Matematika je povsod okoli nas skupine učencev **OŠ Gradec, Litija** (mentorica Astrid Žibert), ki so prikazali nekaj nerodnih vsakodnevnih situacij, ki se nam lahko pripetijo brez zadostnega znanja matematike. Bralcem toplo priporočamo ogled vseh štirih filmov na spletni strani DMFA!



Za konec omenimo še številne aktivnosti, ki ste jih slovenski učitelji z učenci načrtovali za 13. marec 2020, pa so bile zaradi pandemije okrnjene. Na **OŠ Prule** so načrtovali Matematični dan 4 osnovnih šol (OŠ Prule, OŠ Brinje Grosuplje, OŠ Oskarja Kovačiča in Waldorfske šole Ljubljana) z ustvarjanjem učencev na temo števila Pi (glasbena, besedna, likovna umetnost, kulinarika, ...), delavnico Pijevi iracionalni prijatelji in tekmovanjem učencev v recitiranju števila Pi. Kljub odpovedi ostalih aktivnosti so na OŠ Prule 14. 3. po medmrežju predvajali že prej posneti

matematični šolski radio, v katerem so nastopili številni učenci z zelo domiselnimi glasbenimi točkami.

Matematična avantura z razstavo in potepom bi morala potekati na **OŠ Olge Meglič Ptuj**, različne aktivnosti ob matematičnem dnevu na **OŠ in vrtec Apače**, matematični dan z matematično dirko in sestavljanjem Rubikove $2 \times 2 \times 2$ kocke na **OŠ Toneta Pavčka**. Nekatero načrtovane aktivnosti so na teh šolah vseeno izvedli v skromnejši obliki in nastale izdelke poslali tudi na naš natečaj. Med srednjimi šolami pa so različne aktivnosti načrtovali še na **ŠC Novo Mesto, Gimnaziji Vič** in **SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica**.

Pa nagrajenci? Komisija v sestavi mag. Sandra Cigula, dr. Marjeta Kramar Fijavž in dr. Boštjan Kuzman je imela zelo težko delo. Med zelo raznolikimi izdelki se je na koncu odločila izpostaviti naslednje:

- Posebno π -nagrado za številne π -aktivnosti prejme **OŠ Stična PŠ Višnja gora**.
- Nagrado za najmlajše udeležence so si prislužili učenci 1. razreda **OŠ Logatec**.
- Kot filmski ustvarjalci so se izkazali učenci višjih razredov **OŠ Gradec, Litija**.
- Umetniško so se z literarnimi in likovnimi izdelki posebej lepo izrazili naslednji učenci: **Pia Ilija (OŠ Dob)**, **Ana Plajnšek (OŠ Žetale)**, **Anja Bukšek (OŠ Žetale)**, **Nuša Plajnšek (OŠ Žetale)**, **Brina Ros (OŠ Žetale)**, **Neža Bregar (SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica)**.
- Posebej pohvaljeni mentorji so: **Metka Dimnik Vilar (OŠ Dob)**, **Iris Merkač (OŠ Žetale)**, **Helena Nemec (OŠ II Murska Sobota)** in **Matko Peteh (SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica)**.

Izpostavljenim bomo poslali simbolične nagrade, ostalim pa priznanja za sodelovanje. Vsem sodelujočim se iskreno zahvaljujemo za njihov trud in delo, za nagrade pa se lepo zahvaljujemo **Izidorju Hafnerju** in podjetju Logika, d. o. o., ter DMFA Slovenije.

Pa še čisto za konec

Na spletni strani www.idm314.org si lahko ogledate skupni mednarodni videoposnetek, ki je nastal v sodelovanju udeležencev iz različnih držav in je doživel spletno premiero 14. marca, 2020, ter številne videoposnetke posamičnih sodelujočih.

× × ×

Astronomska literatura



Govert Schilling,
Lars Lindberg Christensen

OČI, ZAZRTE V NEBO
400 let odkritij s teleskopi

136 strani
format 17 × 24 cm
trda vezava, barvni tisk

24,99 EUR



Dintinjana Fabjan,
Mikuž, Zwitter

NAŠE NEBO 2020
Astronomske efemeride

80 strani
format 16 × 23 cm
mehka vezava

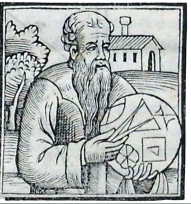
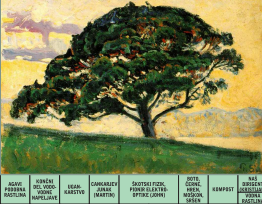
10,00 EUR

Ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitve so na naslovu:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene. Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



																													
K A P S U L A										H E R O N																			
I P S I L O N										O M A R E																			
K S I N O R D										V I D A V																			
L E S V I R										E N O T A																			
O R A L J E										D R E V O																			
A P O L O N I J										U K M A R																			
M I N U T A										Č A P E K																			
N I H A N J E										K E P L E R																			
A S I M E T R I J A										N I C																			
D A L I N										J O P A																			
G A L I L E O										P A R S O N S																			
L C M A R A K U J A										I V A N H O E																			
A N H O V O										C F O R E L																			
V E Č N O S T										H A B I M A																			
I W E I N R I J A										Z L E T D A N																			
Š T R K U H A N J E																													
Č O K A T O S T																													
E N A U S T A																													
E K S P R E S																													
A K S I O M																													
A T I K A																													

REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 47/5

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz prve
številke Preseka je **Ze-
leni gaj**. Izmed pravilnih
rešitev so bili izžrebani
VID KAVČIČ iz Črnomlja,
MOJCA ŽERDIN iz Mari-
bora in MARTIN MAH iz
Šmartnega pri Litiji, ki
bodo razpisane nagrade
prejeli po pošti.

× × ×

Privid

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Fotografija na naslovnici kaže pojav privida nad morskim zalivom, daleč na obzorju. Privid lahko opazimo tudi na cesti. Slika 1 kaže avtocesto na dan, ko ni bilo padavin in so bila tla suha. In vendar je cesta v daljavi videti mokra, kot da bi stale na njej luže, v katerih se zrcalita rdeč in moder avto. Ko se pripeljemo do tja, luž seveda ni. Kako nastane ta pojav?

Svetloba se lomi, ko prehaja med snovema z različnima lomnima količnikoma ali pa skozi snov, ki se ji lomni količnik spreminja zaradi okoliščin. Običajno zrak obravnavamo kot snov z lomnim količnikom 1; v večini primerov to popolnoma zadošča. Pravzaprav pa je lomni količnik zraka za malenkost večji od 1 in odvisen od temperature, tlaka, vlažnosti ter drugih manj pomembnih lastnosti. Opiše ga Ciddorjeva enačba [1]; na spletu najdemo nekaj strani, ki nam omogočajo izračun količnika pri različnih pogojih [2]. V prispevku o oddaljenosti obzorja je opisan primer ukrivljanja žarka navzdol, ker svetloba potuje skozi plasti ozračja z različno gostoto, ki je predvsem posledica padanja tlaka z višino. V primeru privida je pomembno spreminjanje lomnega količnika zaradi temperature. Če nas zanima zgolj odvisnost od temperature, tlak pa poznamo, lahko

Ciddorjevo enačbo približno nadomestimo z enačbo

$$n = 1 + a_1 \frac{p}{T},$$

ki velja za svetlobo z valovno dolžino 633 nm, 50-odstotno relativno vlažnost in $a_1 = 7,86 \cdot 10^{-7} \frac{\text{K}}{\text{Pa}}$. Vidimo, da se lomni količnik zraka manjša proti 1, ko temperatura narašča.

Privid je posledica ukrivljanja žarkov svetlobe v zraku, v katerem sta temperatura in s tem lomni količnik odvisna od višine. Temnejši asfalt se zaradi sončne svetlobe segreje bolj kot ozračje in ob njem nastane plast toplejšega zraka; hladno morje ali jezero pa lahko plast ozračja nad gladino ohladi. V prvem primeru lomni količnik z višino narašča, v drugem pa pada; zato se v prvem primeru žarki ukrivljajo navzgor, v drugem pa navzdol, kakor kaže slika 2. Če je oko opazovalca O na pravem mestu, ga dosežeta snopa žarkov od osvetljenega telesa iz dveh smeri. Opazovalec vidi predmet neposredno in tudi sliko predmeta, ki se nahaja pod ali nad predmetom, kot da bi se predmet zrcalil na zračni plasti.

Opis privida s pravim potekom žarkov je preveč zapleten, da bi se ga lotili tukaj, lahko si pa zamislimo preprost model, ki nam bo dal podobne rezultate. Pojav privida bomo obravnavali v približku, da je plast vročega zraka nad asfaltom tanka in ravna, meja med toplim in hladnim zrakom pa ostra. Slika 3



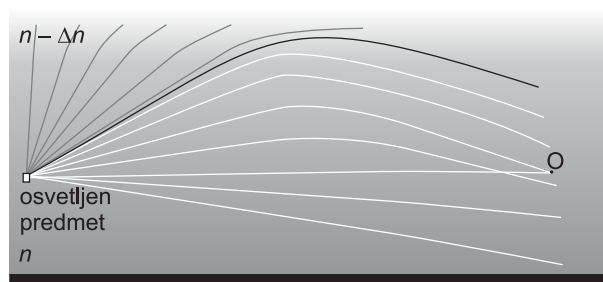
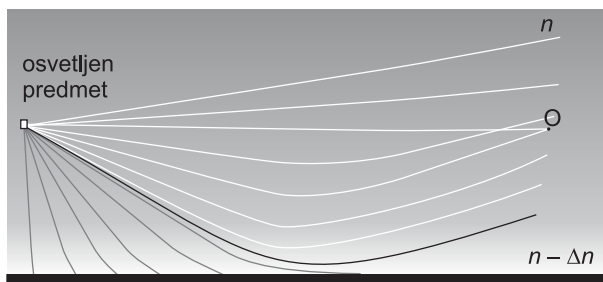
SLIKA 1.

zgoraj kaže nekaj žarkov svetlobe, ki od osvetljenega točkastega telesa potujejo v različne smeri. Žarki, označeni sivo, potujejo proti tlom v taki smeri, da je njihov vpadni kot (kot med žarkom in vpadno pravokotnico) na mejo med vročo in hladno plastjo dovolj majhen, da se zlomijo v toplejšo plast in končajo svojo pot v temnem asfaltu, kjer se absorbirajo in se ne odbijejo. Beli žarki vpadajo na mejno plast pod tako velikim vpadnim kotom, da se od mejne plasti popolnoma odbijejo - podobno, kot bi se od zrcala. Črni žarek med enimi in drugimi kaže mejni primer, torej najbolj strm žarek, za katerega se odboj zgodi. Opazovalec v točki O opazi snop žarkov le neposredno iz telesa, opazovalec O' pa opazi dva snopa, enega od predmeta in drugega od odboja, ki ga pripiše sliki predmeta. Do opazovalca O je na sliki 3 zgoraj sicer narisano še črtkan žarek, ki bi nastal, če bi bilo namesto mejne plasti zares zrcalo, ki bi odbilo prav vse žarke.

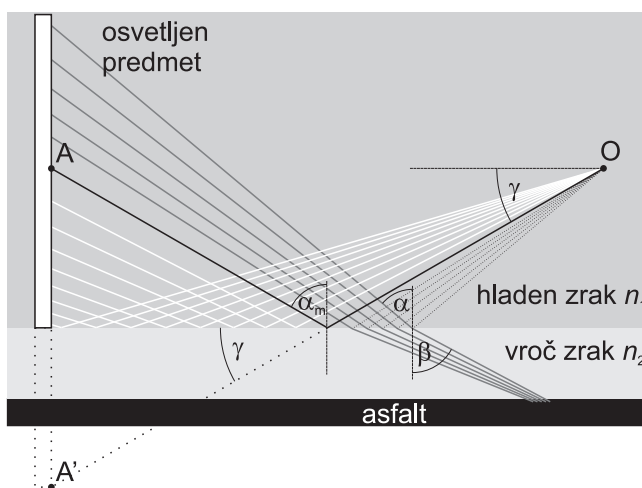
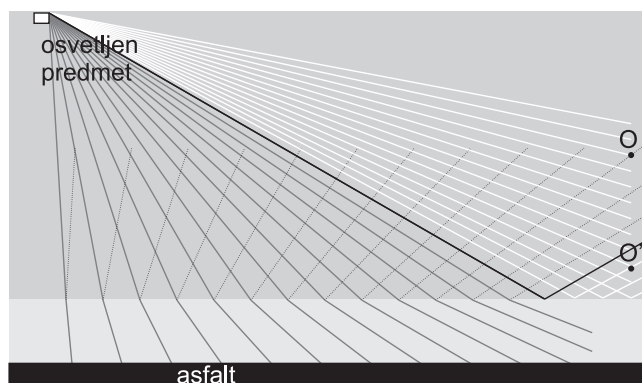
Oglejmo si še, kako opazovalec O vidi sliko podolgovatega, pokončnega predmeta (slika 3 spodaj). Opazovalec vidi predmet neposredno in ti žarki zaradi preglednosti niso vrisani. Ali vidi sliko točke predmeta, pa je odvisno od tega, kje se nahaja točka na predmetu. Žarki iz točke predmeta, ki se nahajajo nad točko A, bi dosegli opazovalca, če bi bilo na meji med plastema zrcalo (siv in črtkan žarek). Vendar na meji ne pride do odboja (oziroma je ta tako šibek, da

ga ne zaznamo) ampak do loma, tako da se svetloba absorbira v asfaltu. Žarek iz točke na predmetu pod točko A je narisano z belo; tak žarek se na meji popolnoma odbije. Pogoji za popolni odboj svetlobe je, da vpadni kot žarka presega mejni kot, ki je podan z enačbo $\sin \alpha_m = n_2/n_1$. Z n_2 smo označili lomni količnik v toplejši plasti zraka, z n_1 pa lomni količnik hladnejšega ozračja. Razlika lomnih količnikov je zelo majhna, zato je kot α_m skoraj enak $\pi/2$. Zapišimo $n_2 = n_1 - \Delta n$ in upoštevajmo približni izraz za majhne kote $\sin \alpha_m = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_m \right) = \cos \gamma \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}$. Torej velja $\Delta n = \frac{\gamma^2}{2}$, če za n_1 vzamemo kar 1. γ je zorni kot, pod katerim vidimo daljico AA' (višina zrcalne slike in dela telesa, ki to sliko ustvarja). Tu privzamemo, da je točka O na isti višini kot točka A. Vsi ti približki veljajo; slika 3 kaže razmere pretirano, pravo predstavo bi dobili, če bi jo v vodoravni smeri raztegnili za kakih petdesetkrat.

Ocenimo razliko lomnih količnikov za naš primer. Slika 1 kaže izsek fotografije, narejene s teleobjektivom z goriščno razdaljo 157 mm. Višina slike na fotoaparatu je 24 mm, slika pa ima v navpični smeri 3264 slikovnih elementov. V povečavi na sliki 4 lahko preštajemo 94 slikovnih elementov, ki ustrezajo sliki daljice AA' na tipalu fotoaparata. Torej je slika daljice AA' na tipalu kamere dolga $s = \frac{94}{3264} 24 \text{ mm} = 0,69 \text{ mm}$.


SLIKA 2.

Levo zgoraj. Svetlobni žarki se ukrivljajo navzgor, ko vstopajo v bolj vročo plast zraka pri tleh, saj se lomni količnik manjša. Desno zgoraj. Svetlobni žarki se v plasti, kjer temperatura narašča z višino, ukrivljajo navzdol. Opazovalec O vidi dva snopa žarkov, enega neposredno od osvetljenega telesa, drugega pa od ukrivljanja svetlobe, v primeru levo od spodaj, v desnem pa od zgoraj. Obe zgornji sliki sta raztegnjeni v navpični smeri zaradi preglednosti. Žarki, ki pri tem pojavu v resnici nastopajo, so vsi skoraj vodoravni (spodaj).

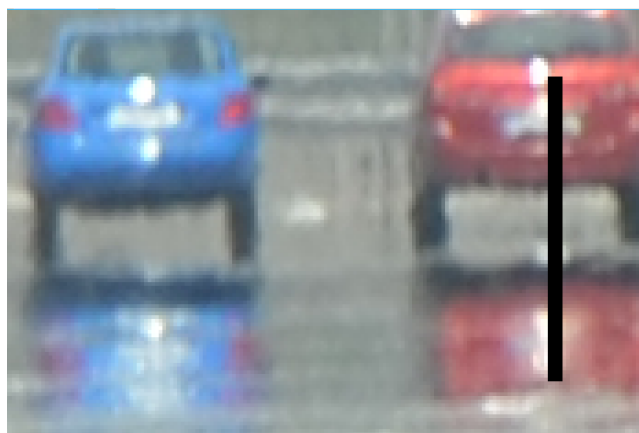


SLIKA 3.

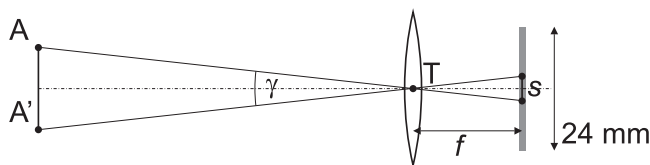
Slika 5 nam pomaga razumeti, kako iz znane velikosti slike na tipalu kamere določimo zorni kot: $\gamma \approx \frac{s}{f}$. Uporabili smo ločno definicijo kota in daljico s , ki ustreza velikosti slike na tipalu kamere, nadomestili z lokom krožnice s središčem v točki T s polmerom f , ki ustreza kotu γ .

Z našimi podatki je $\gamma = \frac{94 \cdot 24 \text{ mm}}{3264 \cdot 157 \text{ mm}} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Od tu dobimo razliko lomnih količnikov $\Delta n = 8 \cdot 10^{-6}$. Torej je razlika zgolj nekaj milijonink! Na hitro lahko ocenimo tudi oddaljenost avtomobila. Ocenimo dolžino AA' na 1,5 m in iz ločne definicije kota sledi $\frac{1,5 \text{ m}}{0,0044} = 340 \text{ m}$.

Če upoštevamo Ciddorjevo enačbo, je v okolici $T_0 = 20^\circ \text{C}$ lomni količnik približno premo sorazmeren s temperaturo $n \approx 1 + k(T - T_0)$ s koeficientom



SLIKA 4.



SLIKA 5.

$k = \frac{\Delta n}{\Delta T} = -9 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$. Za izračunano razliko lomnih količnikov sledi, da je temperatura v ozračju za 9°C nižja kot temperatura v plasti.

V razmerah, ko je hladnejša plast zraka spodaj, pride do zrcaljenja na ravnini nad predmetom in zrcalno sliko vidimo nad predmetom. Tako lahko vidimo tudi telesa za obzorjem. Lom svetlobe v plasteh atmosfere morajo upoštevati tudi geodeti, kadar s teodoliti ocenjujejo višine oddaljenih hribov (t. i. zemeljska refrakcija), in astronomi, ko določajo smeri zvezd (t. i. astronomska refrakcija).

Literatura

- [1] P. E. Ciddor, *Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared*, Appl. Opt. 35 (1996), 1566-1573.
- [2] emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Ciddor.asp, ogled 20. 5. 2020.

xxx

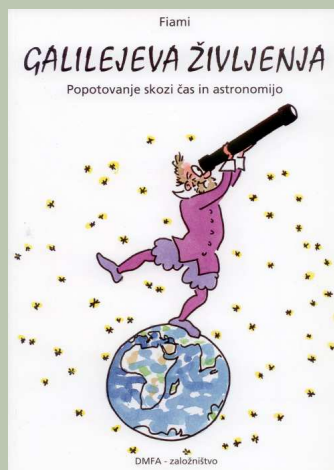
Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbe ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodba o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.