PO TREH POTEH DO VZTRAJNOSTNEGA MOMENTA ŽOGE

Tine Golež

Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

Povzetek *— Opisane so tri različne meritve vztrajnostnega momenta žoge okoli geometrijske osi, ki gre skozi središče žoge.*

Abstract *— Three different measurements of the moment of inertia (about any axis passing through the center of the ball) of an ordinary ball are described.*

UVOD

V fiziki prav radi merimo izbrano količino po več neodvisnih poteh. Če so rezultati skladni, smo še bolj prepričani, da smo v resnici kar nekaj dognali o merjeni količini.

Lep primer za šolsko rabo je vztrajnostni moment žoge. V mislih nimamo kakšnega dragega primerka, pač pa kar brezdušno ceneno žogo. (Izraz *brezdušna* ni fraza; gre za žogo, ki nima notranje in zunanje žoge; notranji žogi pravimo duša.) Zavedamo se, da najbrž ni iz gume, a kljub temu bomo v tem zapisu uporabljali to besedo za opis materiala, iz katerega je; gre brez dvoma za postranski podatek pri vprašanju o vztrajnostnem momentu.

Prvi dve meritvi bosta dinamični. Najprej se bo žoga kotalila in z merjenjem pospeška žoge na klancu bomo določili vztrajnostni moment. Druga meritev bo brez translacije, saj bo žoga del sistema, ki bo sučno nihal okoli geometrijske osi žoge. Pri zadnji pa bosta v glavni vlogi meter in tehtnica, ki predstavljata statični pristop, in še nekaj teorije bo potrebne. Skratka, vsi trije primeri skupaj predstavljajo harmonično mešanico teorije in prakse, ki pa ne bi smela biti prezahtevna za malce bolj fizikalno navdahnjene srednješolce.

PO KLANČKU GOR, PO KLANČKU DOL[1]

Smiselno je, da se žoga kotali tako po klančku gor kot tudi dol. Prav zaradi kotalnega trenja pri obeh gibanjih ne bo šlo za enak pospešek. Povprečje obeh pospeškov pa bo kar dober približek za kotaljenje, kjer kotalnega trenja ne bi bilo in bi nas tako dobljeni pospešek pripeljal do vrednosti vztrajnostnega momenta.

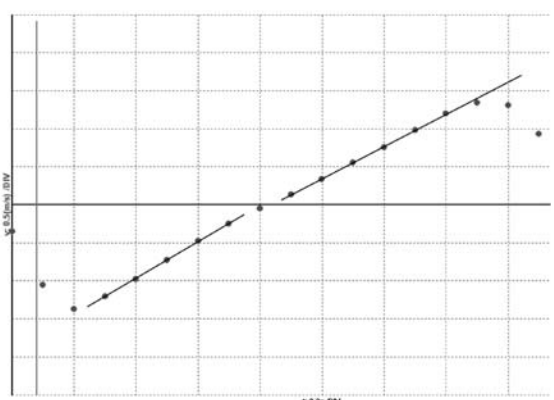
V glavni vlogi je nagnjena miza, na njej ultrazvočni slednik (slika 1). Žogo zakotalimo proti ultrazvočnemu sledniku in računalnik iz izmerjenih leg žoge računa ter riše graf v(t). Dinamična komponenta sile teže žoge je ves čas enako velika, rezultanta vseh sil pa ne.

[1] Če me spomin ne vara, je to besedna zveza neke starejše lahkotne narodno-zabavne popevke, ki sicer govori o avtu.

Ko se žoga kotali navzgor, kaže sila kotalnega trenja navzdol, tako da je rezultanta večja od dinamične komponente. Obratno velja za kotaljenje žoge navzdol.

Slika 1. Postavitev poskusa s kotaljenjem žoge.

Izberemo graf *v*(*t*) in računalnik nam izpiše oba pospeška (slika 2). Še bolj ustvarjalni pa bomo, če kar sami narišemo ustrezno premico za vzpon in spust žoge. Os *x* enodimenzionalnega opazovalnega sistema je obrnjena po klancu navzdol, zato je pri kotaljenju navzgor hitrost negativna. Pospešek pri kotaljenju navzgor je 2,4 ms^{-2}, kar izračunamo iz strmine grafa, ki je bil izmerjen med ustavljanjem žoge. Ko pa se žoga kotali navzdol, je rezultanta sil manjša od dinamične komponente, saj sila kotalnega upora deluje v smeri klanca navzgor. Tokrat izmerimo, da je pospešek le 2,1 ms^{-2}. Zato vzamemo, da bi bil pospešek brez kotalnega trenja enak 2,25 ms^{-2}.



Slika 2. Iz grafa v(t) je vidna različna strmina med vzponom in spustom, kar potrjuje prisotnost kotalnega trenja. Izračunamo strmini obeh premic, strmini ustrezata obema pospeškoma.

Ker smo s povprečjem pospeškov izničili vpliv kotalnega trenja, je delo rezultante zunanjih sil razen sile teže enako nič. Zato zapišemo izrek o ohranitvi kinetične in potencialne energije:

$$mgh = \frac{1}{2}\left(mv^2 + J\omega^2\right)$$

Gre za translacijsko in rotacijsko kinetično energijo, ki naraščata na račun potencialne energije (in obratno pri kotaljenju navzgor).

Za kotaljenje brez spodrsavanja velja:

$$v = \omega R\,,$$

kjer je R polmer žoge. Zato dobimo:

$$mgh = \frac{1}{2}\left(mv^2 + J\frac{v^2}{R^2}\right)$$

Enačbo preuredimo in upoštevamo zvezo med višinsko razliko in prekotaljeno potjo po klancu ($sin\varphi = h/x$). Dobimo:

$$2mgx\sin\varphi = v^2\left(m + \frac{J}{R^2}\right)$$

Enačbo še delimo z maso in dobimo:

$$2\left(\frac{g\ sin\ \varphi}{1+\dfrac{J}{mR^2}}\right)x = v^2$$

V členu, ki je v oklepaju, prepoznamo pospešek, saj se težišče žoge giblje enakomerno pospešeno, zato za translacijo žoge (ali gibanje težišča) velja:

$$2ax = v^2$$

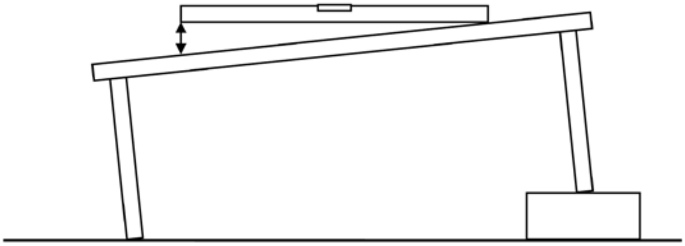
Pospešek (translatornega gibanja) pri kotaljenju žoge po klancu je torej enak:

$$\alpha = \left(\frac{g\ sin\ \varphi}{1+\dfrac{J}{mR^2}}\right)$$

od koder izrazimo vztrajnostni moment žoge (*J*):

$$J = R^2m\left(\frac{g\ sin\ \varphi}{a} - 1\right)$$

Masa žoge je 121,8 g, polmer 0,095 m in pospešek 2,25 m/s^2. Seveda izmerimo še nagib klanca (mize). Na metru dolžine (v vodoravni smeri, slika 3) se miza spusti za 41,2 cm, kar pomeni, da je kot φ enak 22,4 ^{0}.



Slika 3. Merjenje nagiba mize. Ključni pripomoček je metrska vodna tehtnica. Slika ni narisana v merilu.

Zato je:

$$J = (0{,}095\ m)^2\ 0{,}1218\ kg\left(\frac{9{,}8\ ms^{-2}\ sin\ 22{,}4^0}{2{,}25\ ms^{-2}} - 1\right) = 0{,}00073\ kgm^2$$

TORZIJSKO (SUČNO) NIHALO

Torzijsko nihalo izdelamo sami iz polžaste vzmeti. Seveda pazimo, da ni prevelikih nihajev, ki bi povzročili še kako dodatno nihanje. Če uporabljamo svetlobna vrata, zlahka izmerimo nihajni čas na nekaj promilov natančno (slika 4).

Slika 4. Nihalo na polžasto vzmet. Vzmet je s togo žico pritrjena na navpično stojalo.

Najprej smo se vprašali, kolikšna je konstanta vzmeti in kolikšen je vztrajnostni moment tega nihala. Do odgovora smo prišli kar po posredni poti. Najprej smo v nihalo vtaknili 301 mm dolgo palico, potem 401 mm in na koncu še 500-milimetrsko. Natančno smo izmerili nihajni čas vsake postavitve. Vse tri palice so bile iz medenine, vse smo tudi stehtali. Upoštevamo, da je vztrajnostni moment aditivna količina, zato napišemo enačbo za nihajni čas v obliki:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2 + J_0}{D}}$$

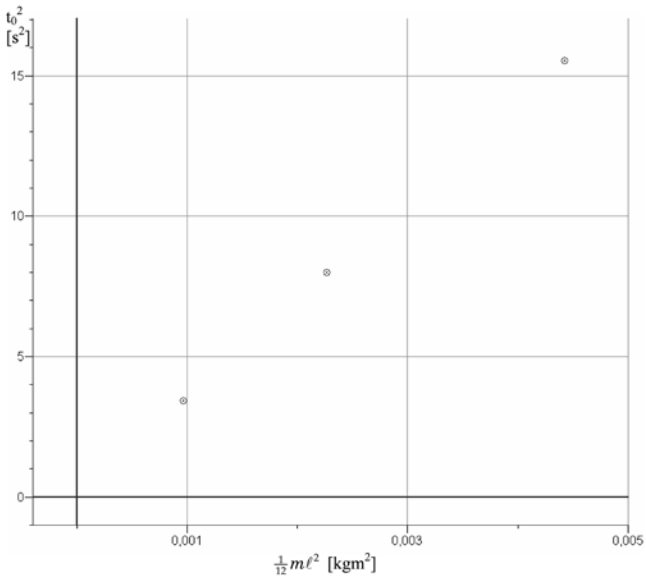
Pri tem je D konstanta vzmeti, J_0 vztrajnostni moment nihala brez vtaknjene palice in $\frac{1}{12}$ ml^2 vztrajnostni moment vtaknjene palice, ki je odvisen od dolžine in mase palice. Ker slednjega zlahka izračunamo za vse tri palice, bo to neodvisna spremenljivka, odvisna pa nihajni čas. Želimo imeti linearno zvezo, zato enačbo preoblikujemo:

$$t_0^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(\frac{1}{12}ml^2 + J_0\right)$$

Enačba nas spominja na znanko iz matematike, y = k(x – x_0).

Izmerke vnesemo v graf in program (LoggerPro) nam izračuna, da vse tri vrednosti ležijo zares skoraj popolnoma na premici (slika 5), ki ima smerni koeficient:

$$k = \frac{4\pi^2}{D} = 3490\ s^2kg^{-1}m^{-2}$$



Slika 5. Kvadrat nihajnega časa v odvisnosti od vztrajnostnega momenta uporabljene palice.

Površni pogled na graf zavede bralca, da gre za premico, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. V resnici je vztrajnostni moment nihala brez vtaknjene palice majhen, a nikakor ni enak nič. Izračunamo ga iz

$$\frac{t_0^2}{k} - \tfrac{1}{12} ml^2 + J_0$$

kar da J_0 = 0,000025 kgm^2.

Sedaj se v zgodbo vključi še žoga. Žogo pritrdimo pod leseni kvader tako, da je simetrijska os palice nihala (je navpična) hkrati simetrijska os žoge. Seveda je treba tedaj nihalo malo drugače pritrditi. Pri postavitvi, ki je na sliki 4, ni prostora, da bi simetrijski osi palice nihala in žoge sovpadali. Da bo nihanje počasnejše (in s tem manjša nevarnost, da se žoga odlepi), je v lesenem kvadru še vedno najkrajša medeninasta palica. Izmerimo nihajni čas nihala in izračunamo vztrajnostni moment žoge iz enačbe:

$$t_0^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(\tfrac{1}{12} ml^2 + J_0 + J_Ž\right)$$

Po tej poti dobljeni vztrajnostni moment žoge je enak $J_Ž$ = 0,00070 kgm^2.

TEORETIČNA IZPELJAVA

Žogo najprej obravnavajmo kot polno kroglo. Njen polmer naj bo *R*, masa pa *M*. Vztrajnostni moment namišljene homogene polne žoge okrog središčne osi je enak:

$$J = \frac{2}{5}MR^2$$

Seveda pa žoga ni polna, zato bomo odšteli vztrajnostni moment tistega dela žoge, kjer je v resnici zrak in ne guma. Polmer tega dela je *r*, masa pa *m*. (Do sem nam je oznaka *m* pomenila dejansko maso žoge, od tod naprej pa bo dejanska masa označena z Δm, masa namišljene krogle iz gume, ki bi imela enak polmer, kot je notranji polmer naše žoge, pa bo označena z *m*.)

$$J_{ŽOGE} = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}mr^2$$

Enačba je sicer preprosta, žal pa je v njej preveč neznank. Pri žogi smo namreč lahko izmerili le obseg (ali premer) in maso. Poznamo torej *R* in Δm. Velja:

$$\Delta m = M - m$$

Masa polne žoge bi bila:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

masa tistega dela žoge, kjer je sicer zrak (upoštevamo gostoto gume in ne zraka!), pa:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Upoštevamo zapisani masi in preuredimo enačbo:

$$J_{\check{Z}OGE} = \frac{2}{5}\left(R^5 - r^5\right)\frac{4}{3}\pi\rho$$

Gostoto pa lahko izrazimo iz obeh enačb za maso:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)}$$

in jo vstavimo v enačbo za vztrajnostni moment žoge:

$$J_{\check{Z}OGE} = \frac{2}{5}\Delta m\frac{\left(R^5 - r^5\right)}{\left(R^3 - r^3\right)}$$

Pred nami je izraz za vztrajnostni moment žoge, ki ima tokrat le še eno neznano količino (no, poleg vztrajnostnega momenta, seveda); to je *r*, polmer praznega dela žoge. A za izračun moramo imeti na desni le znane količine, zato je potreben dodaten razmislek. Zapišemo še drugače:

$$J_{\check{Z}OGE} = \frac{2}{5}\Delta m\frac{(R-r)\left(R^4 + R^3r + R^2r^2 + Rr^3 + r^4\right)}{(R-r)\left(R^2 + Rr + r^2\right)}$$

V resnici je žoga iz precej tanke gume, zato sta *R* in *r* skoraj enaka. Ker njuna razlika zagotovo ni nič, lahko prvi člen (*R* – *r*) krajšamo. Toda če sta skoraj enaka, ju po krajšanju prvega člena v ostalem delu izraza kar izenačimo in dobimo[2]:

$$J_{\check{Z}OGE} = \frac{2}{5}\Delta m\frac{5R^2}{3}$$

oziroma:

$$J_{\check{Z}OGE} = \frac{2}{3}\Delta m R^2$$

To je seveda rezultat, ki ga najdemo tudi v literaturi. Vstavimo še vrednosti uporabljene žoge (Δm = 0,1218 kg in R = 0,095 m) in dobimo:

$$J_{\check{Z}OGE} = 0{,}00073\ kgm^2$$

[2] Ta dvojnost (najprej trdimo, da polmera nista popolnom enaka, potem pa upoštevamo, kot da sta enaka) me spominja na moja gimnazijska leta. Po pisanju matematične kontrolne naloge so bile nekatere ocenjene z minus dve. Tisti hip so bile to pozitivne ocene in ni bilo potrebno ponavljati testa zaradi preveč nezadostnih. Ko pa je prišel čas za graje ob konferenci, je minus dvojka postala negativna ocena. Vsekakor je dvojnost opisane vrste bolj na mestu v fiziki kot v šolskem ocenjevanju.

ŠE RAZMISLEK O NAPAKAH IN POMENU

Prvi hip bi človek pomislil, da zaradi ujemanja rezultata prve metode in teoretične izpeljave (tretja pot) velja dati tej številski vrednosti prednost. Preden pa to naredimo, se moramo še pogovoriti o napakah.

Pri kotaljenju po klancu prva napaka meritve izvira iz nenatančnega merjenja pospeška iz grafa $v(t)$, druga napaka pa je v podatku za polmer. Najbrž se žoga za kak milimeter deformira, ko je postavljena na mizo ali tla. Zato priznamo, da je naš tako dobljeni rezultat malo prevelik, saj smo uporabili celotni polmer. Ocenimo, da je napaka prve meritve okoli 5 %.

Merjenje z nihalom je – tako so pokazale palice – zelo natančno. Če bi bila žoga prilepljena nekoliko iz središčne lege nihala, bi dobili večji vztrajnostni moment. Najbrž se ne motimo, če trdimo, da je rezultat nezanesljiv največ za približno 3 %.

Teoretična izpeljava ima vsaj dve pomanjkljivosti. Po eni strani je v igri prevelik polmer. Debelina žoge je (najbrž) približno dva milimetra, zato bi bilo verjetno bolj prav, da bi za polmer žoge vzeli milimeter manj od uporabljenega. Natančnejši ogled žoge izda, da ni povsem homogena. Tam, kjer je ventil, je malo več mase, pa tudi stena žoge je tam malce debelejša. V naši izpeljavi pa smo privzeli, da je masa enakomerno razporejena po žogi. Ker je nekaj več mase blizu osi vrtenja, smo dobili malenkost prevelik rezultat. Tudi tu je napaka nekaj odstotkov, a več kot 5 % zagotovo ni.

Vprašamo se še, kako je odebelitev žoge ob ventilu vplivala na obe meritvi. Ni, saj sta meritvi merili dejansko stanje in nista predvidevali homogene razporeditve mase, zato pri njiju tega pomisleka ni bilo treba upoštevati. Seveda pa smo morali paziti, da je bila os vrtenja vselej enaka. Če bi enkrat potekala skozi ventil in drugič ne, bi bila prisotna še dodatna napaka. Zato smo poskrbeli, da se je po klancu žoga kotalila tako, da je os vrtenja potekala skozi ventil; prav tako je os vrtenja potekala skozi ventil tedaj, ko je bila žoga del torzijskega nihala.

Če upoštevamo vse zapisano, bi bila primerna ocena za vztrajnostni moment žoge:

$$J = (0{,}00071 \pm 0{,}00002)\ kgm^2.$$

Priznati moramo, da imamo nekaj občutka za maso telesa. Ko bi žogo vzeli v roke, bi vsaj približno uganili njeno maso. Vztrajnostni moment pa je fizikalna količina, ki je »nimamo v svojih čutih«. No, najbrž bi jo imeli, če bi jo za več predmetov, ki jih vzamemo v roke, tudi povedali.

Priznati moramo, da dobljeni podatek o vztrajnostnem momentu žoge ni ugotovitev, ki bi bila pomembna za nadaljno uporabo te igrače. Vrednost naše prehojene poti je v treh neodvisnih pristopih merjenja fizikalne količine in v razmisleku o nenatančnosti. Morda se še vi odpravite po tej poti, morda pa se podobno odpravite raziskovat kako drugo fizikalno količino; bralci revije bodo radi prebrali vaše poročilo.