TSCHIRNHAUSOVA KUBIKA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 14H45, 14H50

Tschirnhausovo kubiko bomo definirali kot katakavstiko parabole glede na žarke, ki padajo pravokotno na njeno geometrijsko os, in kot negativno nožiščno krivuljo parabole glede na njeno gorišče. Krivuljo bomo zapisali v parametrični in polarni obliki in navedli nekatere njene lastnosti.

THE TSCHIRNHAUS CUBIC

The Tschirnhaus cubic is defined as the catacaustic of the parabola with respect to the rays falling on its axis perpendicularly, and as the negative pedal curve of the parabola with respect to its focus. The equation of the cubic is written in parametric and polar form and some properties of the curve are explained.

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708), vsestranski nemški znanstvenik (kemik, didaktik, matematik, mineralog, filozof, fizik, tehnik, vulkanolog, zdravilec), izumitelj evropskega porcelana, je leta 1682 začel študirati tako imenovane *kavstične krivulje* ali *kavstike*, ki so ogrinjače (ovojnice ali envelope) odbitih ali lomljenih žarkov na dani ravninski krivulji. Svoje rezultate o teh krivuljah je objavil v letih 1682 in 1690.[1]

Ukvarjal se je tudi z ekstremalnimi problemi in teorijo enačb. Leta 1683 je objavil prispevek, v katerem pokaže, kako lahko s primerno transformacijo v polinomu odpravimo nekaj členov. Transformacija se imenuje po avtorju *Tschirnhausova transformacija*. V letih 1669–1676 se je mudil v Holandiji, Angliji in Franciji, kjer se je seznanil z nekaterimi pomembnimi znanstveniki tistega obdobja, na primer s Chr. Huygensom, J. Wallisom, I. Newtonom in G. W. Leibnizem. To je bilo ravno v času nastajanja infinitezimalnega računa in gradenj optičnih inštrumentov, pri katerih sta pomembna odboj in lom svetlobe ter s tem v zvezi že omenjene kavstike. V letih 1684 in 1686 (glej [3]) je Leibniz objavil prvi deli o infinitezimalnem računu, Newton pa nekaj malega v svojih Principih leta 1687 in več kasneje. Nato pa je prišlo do znanega spora med Newtonom in Leibnizem glede primata v infinitezimalnem računu, kajti Newton je glavne ideje o njem imel že pred letom 1684,

[1] Družinsko ime *Tschirnhaus* se v matematični literaturi pogosto pojavlja tudi kot *Tschirnhausen*, kar je po obliki starinski dajalnik prvega, ki ga zahteva predlog *von*.

a jih ni objavil. Tschirnhaus je leta 1675 dobil neki prepis Newtonovega rokopisa, in to ravno v času, ko je skupaj z Leibnizem delal v Parizu. Zato v zvezi s tem sporom pogosto omenjajo tudi Tschirnhausa.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da imajo vse obravnavane krivulje v vsaki točki enolično določeno tangento razen morda v končno mnogo točkah.

Naj bo $\mathcal{K}$ ravninska krivulja, ki jo vzamemo za idealno zrcalo, na katero padajo vzporedni žarki ali pa žarki iz izbrane točke v ravnini krivulje. Odbiti žarki, podaljšani v premice, sestavljajo družino premic. Če obstaja ogrinjača $\mathcal{K}'$ teh premic, jo imenujemo *katakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ glede na dane vpadajoče žarke. Analogno je *diakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ ogrinjača na tej krivulji lomljenih žarkov, podaljšanih v premice. Izraza katakavstika in diakavstika je prvi uporabljal Jakob Bernoulli (1654–1705) leta 1693.

Od kod besede *kavstika*, *katakavstika* in *diakavstika*? Najprej so jih uporabljali v optiki. Sferična zrcala in leče namreč vzporednih žarkov ne zbirajo točno v eni točki, gorišču, ampak odbiti oziroma lomljeni žarki ogrinjajo neko ploskev, ki so ji dali ime *kavstika*, kar je grškega izvora. V grščini izraža beseda *kaustikos* nekaj, kar je v zvezi z ognjem in gorenjem, na primer *vrel* ali *ognjen*. Zloglasna beseda *holokavst* je istega izvora. Z dodajanjem grških besedic *kata*, kar pomeni med drugim *spodaj*, *dol* ali *nasproti*, in *dia*, kar pomeni med drugim *prek* ali *skozi*, sta nastali besedi katakavstika in diakavstika.[2] V ravninski geometriji delamo glede tega podobno. Študiramo odboje in lome svetlobnih žarkov na ravninski krivulji.

Poiskali bomo katakavstiko parabole glede na žarke, ki nanjo vpadajo pravokotno na njeno geometrijsko os. Žarki, ki padajo na parabolo vzporedno z njeno osjo, se odbijajo skozi gorišče in po drugem odboju potekajo spet vzporedno z osjo. Drugi tipi na parabolo vpadajočih žarkov dajo zapletene katakavstike. S pridom uporabljamo odbojne lastnosti parabole na primer pri avtomobilskih žarometih. Spomnimo se na dolge in kratke luči, kjer s preklapljanjem prestavljamo svetlobni vir iz gorišča nekoliko vstran.

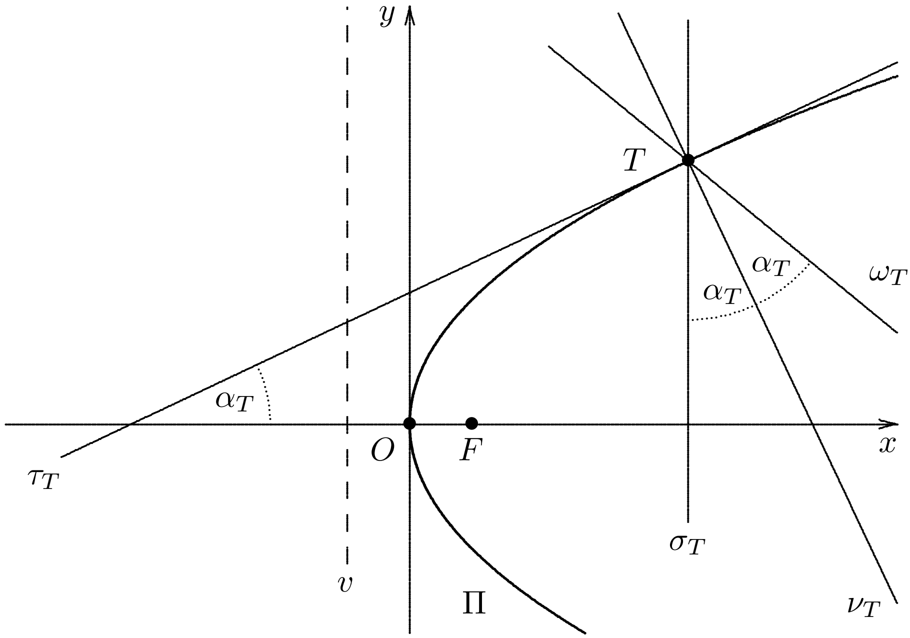
Vzemimo parabolo Π, ki jo določata gorišče F in vodnica v, in na njej točko T, v kateri konstruiramo tangento τ_T in normalo ν_T. Naj bo σ_T pravokotnica skozi točko T na os parabole in naj bo ω_T zrcalna slika σ_T glede na normalo ν_T. Zanima nas, kaj je ogrinjača družine $\{\omega_T : T \in \Pi\}$.

Za udobno računanje vzemimo parabolo Π v pravokotnem kartezičnem

---

[2]Katakavstiko lahko opazujemo ob primerni svetlobi v kavni skodelici. Odbiti žarki se ne zbirajo v eni točki, v gorišču, ampak vidno oblikujejo krivuljo, ki bi ji lahko rekli *goriščnica*. V bistvu vidimo ravninski presek prave prostorske katakavstike.

koordinatnem sistemu xy tako, da je njeno teme v koordinatnem izhodišču O, njena os sovpada z osjo x, gorišče F pa leži na pozitivnem delu osi x. Kot je znano, ima parabola Π potem enačbo $y^2 = 2px$, kjer je p parameter parabole, to je razdalja gorišča F od vodnice v ali pa ordinata točke parabole nad goriščem.



Slika 1. Odboj na paraboli

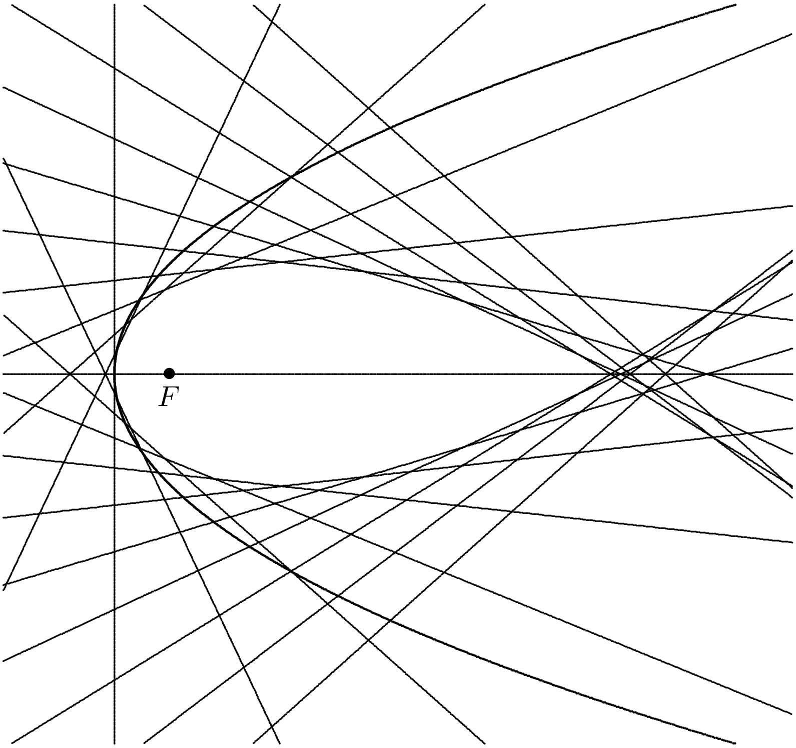
Za točko T označimo ordinato s t. Potem je njena abscisa $t^2/(2p)$ in s tem imamo parametrizacijo parabole Π:

$$x = \frac{t^2}{2p}\,, \quad y = t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Naklonski kot tangente τ_T označimo z α_T. Osnovna geometrijska interpretacija odvoda pove:

$$\operatorname{tg}\alpha_T = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{p}{t}\,. \tag{2}$$

Premici σ_T in ν_T se sekata pod kotom α_T, prav tako premici ν_T in ω_T. Zato se premici σ_T in ω_T sekata pod kotom $2\alpha_T$, premica ω_T pa ima naklonski kot $2\alpha_T + \pi/2$ in s tem smerni koeficient $k_T = \operatorname{tg}(2\alpha_T + \pi/2) =$



Slika 2. Družina odbitih premic

$-\operatorname{ctg}(2\alpha_T)$. Enačba premice ω_T je seveda

$$y - t = k_T\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) = -\operatorname{ctg}(2\alpha_T)\left(x - \frac{t^2}{2p}\right). \tag{3}$$

Z uporabo rezultata (2) lahko hitro izračunamo

$$\operatorname{ctg}(2\alpha_T) = \frac{t^2 - p^2}{2pt} \tag{4}$$

in nato izrazimo enačbo premice ω_T iz (3):

$$2p(t^2 - p^2)x + 4p^2ty = 3p^2t^2 + t^4. \tag{5}$$

To je enoparametrična družina premic ω_T. Vemo pa (glej na primer [4]), da se ogrinjačo enoparametrične družine krivulj $F(x, y, t) = 0$ dobi z izločitvijo parametra t iz sistema enačb

$$F(x, y, t) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0\,. \tag{6}$$

Če pa nam zgornji sistem enačb uspe razrešiti na x in y, dobimo ogrinjačo v parametrični obliki. V našem primeru gre to gladko. Najprej z odvajanjem na parameter t dobimo iz (5) sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2p(t^2 - p^2)x + 4p^2ty &= 3p^2t^2 + t^4, \\ 2ptx + 2p^2y &= 3p^2t + 2t^3. \end{aligned} \tag{7}$$

Sistem se da lepo rešiti po Cramerjevem pravilu in s tem imamo iskano krivuljo v parametrični obliki:

$$x = \frac{3t^2}{2p}\,, \quad y = \frac{t(3p^2 - t^2)}{2p^2}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Z izločitvijo parametra t iz zgornjih enačb dobimo

$$54py^2 = x(9p - 2x)^2. \tag{9}$$

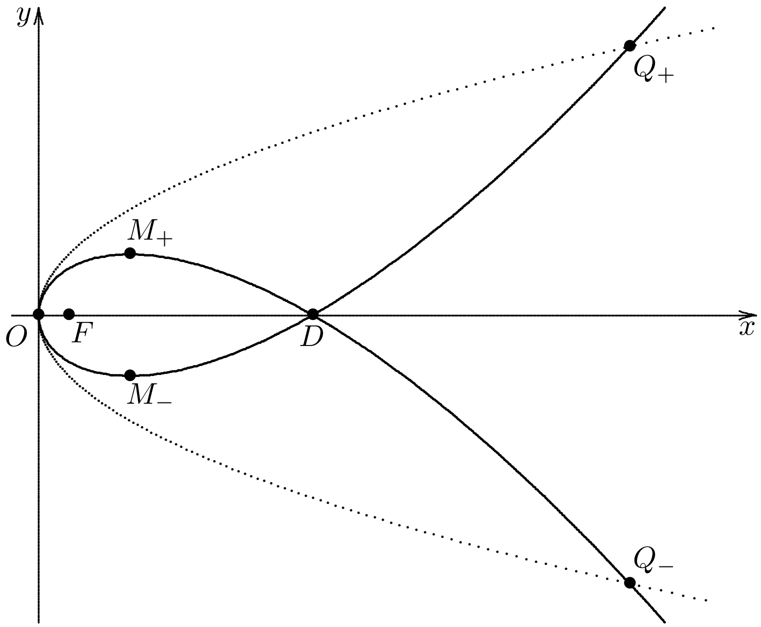
To je enačba iskane krivulje v implicitni obliki. Krivulja je kubična in jo imenujemo *Tschirnhausova kubika*. Ime je vpeljal leta 1900 kanadski matematik R. C. Archibald (1875–1955), ko je klasificiral kubične krivulje. Tschirnhausova kubika je torej katakavstika parabole glede na žarke, ki vpadajo pravokotno na os parabole. V zgodovini matematike je Tschirnhausova kubika ena prvih krivulj, ki je bila dobljena kot ogrinjača družine premic.

S tem ko dani krivulji $\mathcal{K}$ poiščemo katakavstiko $\mathcal{K}'$, transformiramo krivuljo $\mathcal{K}$ v novo krivuljo $\mathcal{K}'$. Ni pa to edini način. Poleg običajnih transformacij, kot sta razteg in zrcaljenje na krožnici, nove krivulje pridobivamo tudi na primer z evolutami in evolventami dane krivulje in z drugimi postopki (glej na primer [2]). Eden preprostejših postopkov je poiskati dani krivulji tako imenovano *nožiščno ali pedalno krivuljo* glede na dano točko N. Z obratnim postopkom pa krivulji poiščemo *negativno nožiščno ali negativno pedalno krivuljo* glede na dano točko N.

Nožiščna krivulja ravninske krivulje $\mathcal{K}$ glede na točko N v ravnini te krivulje je množica $\mathcal{K}^*$ pravokotnih projekcij (nožišč) N^* točke N na tangente τ_T krivulje $\mathcal{K}$, ko dotikališče T teče po $\mathcal{K}$. Obratno pa je $\mathcal{K}$ negativna nožiščna krivulja za $\mathcal{K}^*$ glede na točko N.

Očitno je negativna nožiščna krivulja za krivuljo $\mathcal{K}^*$ glede na točko N ogrinjača družine pravokotnic v točki N^* krivulje $\mathcal{K}^*$ na premice skozi N in N^*, pri čemer $N^* \neq N$ teče po krivulji $\mathcal{K}^*$.

Dokažimo, da je Tschirnhausova krivulja tudi negativna nožiščna krivulja parabole glede na njeno gorišče F. To lahko naredimo z metodo elementarne geometrije, pri čemer upoštevamo lastnost parabole, ki pove, da njena



Slika 3. Tschirnhausova kubika

tangenta v katerikoli točki T razpolavlja kot med premico skozi T in F ter pravokotnico skozi T na vodnico parabole, ali pa popolnoma računsko.

Parabola Π naj bo postavljena v koordinatni sistem tako kot doslej. Smerni koeficient premice skozi točki $F(p/2, 0)$ in $T(t^2/(2p), t) \in \Pi$ je

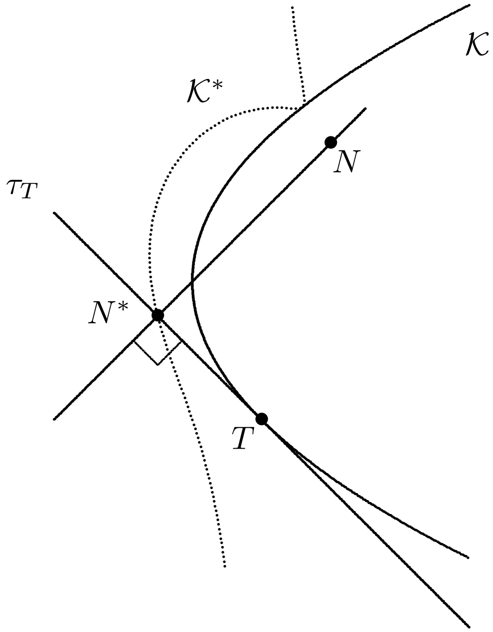
$$k = \frac{2pt}{t^2 - p^2} \,. \tag{10}$$

Zato je enačba pravokotnice skozi T na to premico:

$$y - t = -\frac{t^2 - p^2}{2pt}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right). \tag{11}$$

S preureditvijo pa spet dobimo ravno enačbo (5) in za ogrinjačo družine takih premic Tschirnhausovo kubiko.

Lastnosti Tschirnhausove kubike lahko poiščemo iz njene parametrične oblike (8) ali implicitne oblike (9). Najprej je očitno, da je os x njena simetrala, ki jo preseka v točki $D(9p/2, 0)$, ki je edina dvojna točka Tschirnhausove kubike. Ko se parameter t spreminja od zelo velikih negativnih proti zelo velikim pozitivnim vrednostim, teče ustrezna točka po Tschirnhausovi kubiki iz zelo oddaljene točke prvega kvadranta in preseka parabolo



Slika 4. Nastanek nožiščne krivulje $\mathcal{K}^*$ iz dane krivulje $\mathcal{K}$ glede na točko N

v točki Q_+, preseka abscisno os v točki D, se spusti v točko M_-, kjer ima na zanki najmanjšo ordinato, nato doseže teme O, potem se dvigne v točko M_+, kjer ima na zanki največjo ordinato, nato pa se spušča proti dvojni točki D in zopet seka parabolo, tokrat v točki Q_-, nato nadaljuje pot proti zelo oddaljenim točkam četrtega kvadranta.

Brez težav izračunamo koordinate pomembnih točk in za kateri parameter t jih dobimo:

$$O(0,0)\,, \quad t=0\,;$$

$$M_+(3p/2,p)\,, \quad t=p\,;$$

$$M_-(3p/2,-p)\,, \quad t=-p\,;$$

$$Q_+\Big(p(9/2+3\sqrt{3}),p\sqrt{9+6\sqrt{3}}\Big)\,, \quad t=-p\sqrt{3+2\sqrt{3}}\,;$$

$$Q_-\Big(p(9/2+3\sqrt{3}),-p\sqrt{9+6\sqrt{3}}\Big)\,, \quad t=p\sqrt{3+2\sqrt{3}}\,;$$

$$D(9p/2,0)\,, \quad t=\pm p\sqrt{3}\,.$$

Izračunajmo kot, pod katerim Tschirnhausova kubika seka sama sebe. Iz (4) ali pa iz (8) najdemo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p^2 - t^2}{2pt}\,. \tag{12}$$

Smerna koeficienta $k_\pm$ tangent na Tschirnhausovo kubiko v točki D izračunamo iz (12) za $t = \mp p\sqrt{3}$ in dobimo $k_\pm = \pm\sqrt{3}/3$. To pomeni, da Tschirnhausova kubika seka sama sebe pod kotom $\pi/3$, in to neodvisno od parametra p, torej od oblike parabole Π.

V točki Q_+ je strmina parabole enaka $1/\sqrt{9+6\sqrt{3}}$, strmina Tschirnhausove kubike pa $(1+\sqrt{3})/\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. Kot β, ki ga oklepata parabola in Tschirnhausova kubika v točkah Q_+ in Q_-, ima za tangens število $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, iz česar dobimo približno $\beta = 34^\circ 16'$, prav tako neodvisno od parametra p.

Iz parametrične oblike (8) Tschirnhausove kubike brez težav izrazimo ločno dolžino s, ploščino S zanke, prostornino V in površino P vrtenine, ki nastane z rotacijo zanke za kot 2π okoli njene simetrale. Dobimo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{9}{4p^4}\left(p^2 + t^2\right)^2 dt^2. \tag{13}$$

Ločna dolžina Tschirnhausove kubike od temena O do točke T, ki ustreza parametru $t > 0$, je:

$$s(t) = \frac{3}{2p^2}\int_0^t (p^2 + \tau^2)\, d\tau = \frac{t}{2p^2}(3p^2 + t^2)\,. \tag{14}$$

Iz (9) izračunamo:

$$S = \frac{2}{\sqrt{54p}}\int_0^{9p/2} (9p - 2x)\sqrt{x}\, dx = \frac{18p^2\sqrt{3}}{5}\,. \tag{15}$$

Za prostornino V dobimo

$$V = \frac{\pi}{54p}\int_0^{9p/2} x(9p - 2x)^2\, dx = \frac{81\pi p^3}{32}\,, \tag{16}$$

površino pa lahko izrazimo v obliki

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{54p}}\int_0^{9p/2} (9p - 2x)\sqrt{x}\, ds\,, \tag{17}$$

kjer najprej iz (13) izračunamo

$$ds^2 = \frac{3}{8p^3}\left(p^2 + \frac{2px}{3}\right)^2 \frac{dx^2}{x} \tag{18}$$

in nazadnje dobimo integral

$$P = \frac{\pi}{6p^2}\int_0^{9p/2}(9p-2x)\left(p^2 + \frac{2px}{3}\right)dx = \frac{27\pi p^2}{4}\,. \tag{19}$$

Za ukrivljenost κ in krivinski polmer $\varrho = 1/\kappa$ Tschirnhausove kubike tudi najdemo preprosta izraza. Uporabimo splošno formulo

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{20}$$

in iz (8) imamo hitro:

$$\kappa = \frac{4p^3}{3\left(p^2+t^2\right)^2}\,, \quad \varrho = \frac{3\left(p^2+t^2\right)^2}{4p^3}\,. \tag{21}$$

V posebnih primerih je v točkah O, M, D, Q_-, Q_+:

$$\varrho(O) = \frac{3p}{4}\,, \quad \varrho(M) = 3p\,, \quad \varrho(D) = 12p\,, \quad \varrho(Q_-) = \varrho(Q_+) = 3p(7+4\sqrt{3})\,.$$

Tschirnhausova kubika ima preprosto enačbo v polarnih koordinatah. Da bi jo izpeljali, postavimo koordinatno izhodišče v gorišče F parabole Π. Parabola Π s parametrom p ima v polarnih koordinatah enačbo

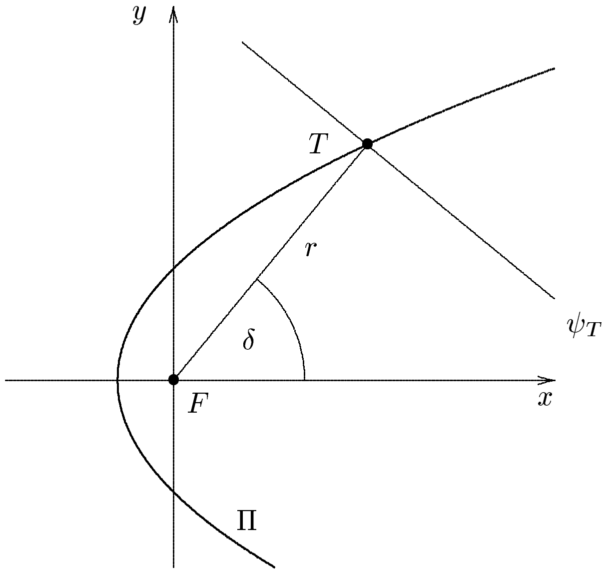
$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}\,. \tag{22}$$

Hessejeva ali normalna enačba premice ψ_T, ki je pravokotna na radij r parabole v točki T, ki jo določa kot δ, je

$$x\cos\delta + y\sin\delta = \frac{p}{1-\cos\delta}\,. \tag{23}$$

Ko δ teče po množici $(-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, dobimo družino premic $\{\psi_T : T \in \Pi\}$ in s splošnim principom, z odvajanjem (23) na parameter δ, dobimo sistem enačb za iskano ogrinjačo:

$$\begin{aligned} x\cos\delta + y\sin\delta &= \frac{p}{1-\cos\delta}\,, \\ -x\sin\delta + y\cos\delta &= -\frac{p\sin\delta}{(1-\cos\delta)^2}\,. \end{aligned} \tag{24}$$



Slika 5. Parabola in polarne koordinate

Sistem ima eno samo rešitev:

$$x = \frac{p(\cos\delta - \cos(2\delta))}{(1-\cos\delta)^2}\,, \quad y = \frac{p(\sin\delta - \sin(2\delta))}{(1-\cos\delta)^2}\,. \tag{25}$$

Po faktorizaciji trigonometričnih izrazov lahko zapišemo:

$$x = \frac{p\sin(3\delta/2)}{2\sin^3(\delta/2)}\,, \quad y = -\frac{p\cos(3\delta/2)}{2\sin^3(\delta/2)}\,. \tag{26}$$

Dobljeni enačbi predstavljata drugo parametrično obliko Tschirnhausove kubike. Sedaj uvedemo polarni koordinati r in φ, tako da bo veljalo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Najprej imamo:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4\sin^6(\delta/2)}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(3\delta/2 + \pi/2)\,. \tag{27}$$

Veljati mora relacija $2\varphi = 3\delta + \pi + 2k\pi$, kjer je k celo število. Izberimo $k = -1$, tako da velja $2\varphi = 3\delta - \pi$ oziroma $\delta = (2\varphi + \pi)/3$. S tem imamo

$$r^2 = \frac{p^2}{4\sin^6(\varphi/3 + \pi/6)} = \frac{p^2}{4\cos^6(\varphi/3 - \pi/3)}\,. \tag{28}$$

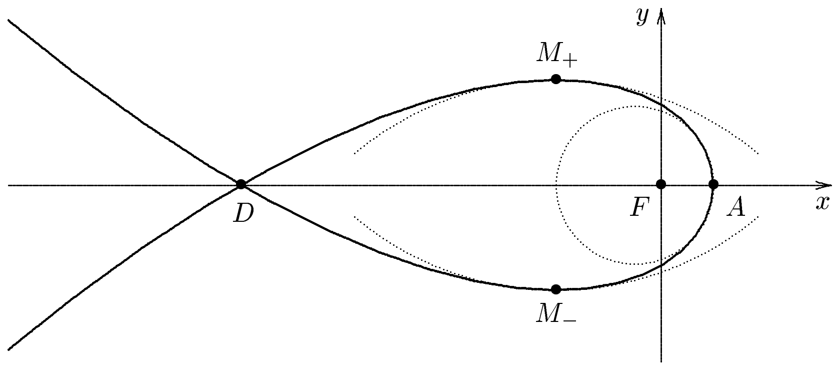
Enačba Tschirnhausove kubike v polarni obliki je torej

$$r = \frac{p}{2\cos^3(\varphi/3 - \pi/3)} \,. \tag{29}$$

Za enkratni sprehod po Tschirnhausovi kubiki vzamemo $-\pi/2 < \varphi < 5\pi/2$. Z zamenjavo $\varphi \to \pi + \varphi$, kar pomeni zasuk krivulje okoli pola za kot π, dobimo še enostavnejšo obliko

$$r = \frac{p}{2\cos^3(\varphi/3)} \,. \tag{30}$$

Za enkratni sprehod po krivulji pa tedaj vzamemo $-3\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.



Slika 6. Tschirnhausova kubika po enačbi (30) s krivinskimi krožnimi loki

Iz že znanih rezultatov lahko zapišemo koordinate važnih točk na krivulji:

$$A(p/2, 0)\,, \quad D(-4p, 0)\,, \quad M_+(-p, p)\,, \quad M_-(-p, -p)\,.$$

Točkama $M_\pm$ ustrezata polarna kota $\varphi = \pm 3\pi/4$ in polarni radij $r = p\sqrt{2}$.

Tschirnhausovo kubiko imenujemo tudi *Catalanova trisektrisa*, ker lahko z njeno pomočjo razdelimo kot na tri enake dele. Z njo se je namreč ukvarjal tudi E. Ch. Catalan (1814–1894). Če sta namreč φ in r polarni kot in polarni radij točke T na Tschirnhausovi kubiki (30), potem iz enakosti

$$\cos\varphi = 4\cos^3(\varphi/3) - 3\cos(\varphi/3) \tag{31}$$

sledi relacija

$$\cos\varphi = \frac{2p}{r} - 3\cos(\varphi/3)\,, \tag{32}$$

iz katere je

$$\cos(\varphi/3) = \frac{2p - r\cos\varphi}{3r} = \frac{2p - x}{3r}\,. \tag{33}$$

Pri tem je $x = r\cos\varphi$ abscisa točke T. Očitno lahko konstruiramo kot $\varphi/3$ s pomočjo pravokotnega trikotnika, ki ima hipotenuzo $3r$ in eno kateto $2p-x$. Tschirnhausova kubika je le ena od trisektris. Precej znana je tudi *Maclaurinova trisektrisa*, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = a/\cos(\varphi/3)$, kjer je a pozitivna konstanta. Še nekaj pa jih najdemo na primer v [1, 2].

Nekateri imenujejo Tschirnhausovo kubiko tudi *L'Hôpitalova kubika*, ker se je z njo ukvarjal tudi matematik markiz G. F. A. de L'Hôpital (1661–1704) in rezultate objavil leta 1696, kasneje kot Tschirnhaus. Zato je popolnoma umestno, da so krivuljo, malo pozno sicer, poimenovali po slednjem.

LITERATURA

[1] E. H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge University Press, 1963.

[2] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

[3] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, DMFA, Ljubljana 1986.

[4] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008.

NOVE KNJIGE

Jernej Kozak: NUMERIČNA ANALIZA, Matematika – fizika 44, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008, 420 strani.

Slovenska matematična literatura je bogatejša za novo delo z zgornjim naslovom. Knjiga je izšla v zbirki *Matematika – fizika*, ki je zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. Delo spada v to zbirko, ker je prav to: univerzitetni učbenik in monografija. Izdajatelja sta Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Društvo matematikov, fizikov in astronomov – založništvo. Slovensko numerično literaturo je to delo dopolnilo na področju numerične analize, ki v ožjem smislu vsebuje poglavja: interpolacijo, aproksimacijo, numerično odvajanje in integriranje ter numerično reševanje navadnih in parcialnih diferencialnih enačb. Ta poglavja so bila sicer že na kratko obravnavana v prvem slovenskem učbeniku iz nume-