

Brezdimenzionalni nevidni radiani

Peter Prelog

upokojeni učitelj fizike

Že ob prvem srečanju s fiziko, v osnovni šoli, učitelji ob osnovnem pojmu »fizikalna količina« postavijo stroga »strokovna pravila«: fizikalno količino, npr. čas nekega dogodka, zapišemo z določeno mednarodno »dogovoreno« **oznako**, z **merskim številom** in **mersko enoto**, npr. $t = 5$ s. Pri tem je zapis merske enote obvezen, saj bi bil brez nje podatek nesmiseln! Če npr. povemo, da je TV-zaslon širok 80 – saj »vsak 'vosu' ve, da so to centimetri«! – ali bi nas prav razumeli tudi v Ameriki?

Koliko jeze je zaradi slabših ocen pri šolskih nalogah, kjer učenci »pozabijo« zapisati enote!

Ta naša fizikalna strogost pa malce izpuhti že ob razlagi količine, ki se imenuje »kot«. Ta ima posebnost: »naravno« enoto polni kot! Zgodovinsko je polni kot razdeljen na 360 enakih stopinj ($\varphi = 360^\circ$) ali pa na 400 gradov, 6400 tisočin itd. – ali pa na dva iztegnjena kota ali štiri prave kote ali šest »enakostraničnih« kotov ... To so vse različne veljavne in uporabne kotne enote! Zaradi povezave prek polnega kota lahko te enote tudi primerjamo, npr. $360^\circ = 4(\text{pravi kot}) \rightarrow \varphi = 1(\text{pravi kot}) = 90^\circ$.

Pa definirajmo še eno enoto, »radian«, to je središčni kot $\varphi = 1$ rad v krogu, kjer je lok med krakoma kota enako dolg kot polmer kroga, $l = r$. Če upoštevamo znano formulo za obseg kroga, $2\pi r$, dobimo zaradi sorazmerja loka s središčnim kotom φ° (v stopinjah):

$$l/\varphi^\circ = 2\pi r/360^\circ = r(\pi/180^\circ),$$

torej je ob $l = r$:

$\varphi^\circ = 180^\circ/\pi = 57,3^\circ = 1$ rad. Pisati moramo npr. $\varphi = 87^\circ = 1,52$ rad itd. Tudi lok lahko izračunamo kar s kotom v radianih:

$$l = r\varphi^\circ/(180^\circ/\pi) = r\varphi$$

Ker sem pri tem kot φ° v stopinjah delil z velikostjo 1 rad $= 180^\circ/\pi$ (tudi v stopinjah) – **dobim mersko število** kota φ v radianih – torej le število radianov – **količino φ brez enote rad!** Zato se sedaj ujemajo merske enote na levi in desni strani enačbe $l = r\varphi$ (sicer bi dobil lok z enoto mrad), toda radian ni izginil, ni postal »neviden« zaradi naše želje po poenostavljanju zapisa, ampak zaradi KRAJŠANJA enot, ker smo rad tako definirali!! Zato pri fizikalnih enačbah ($l = r\varphi$, $\omega = \varphi/t$...) ob količini φ ni kotne enote, čeprav imamo na razpolago več takih enot, jih (npr. ob vstavljanju podatkov v formule) v te enačbe **ne smemo pisati** (v nasprotju s prvotno zahtevo)! Tudi pri kotni hitrosti $\omega = \varphi/t$ je enota $1/s$ in ne rad/s, podobno pri kotnem pospešku. Seveda pa nevidni rad lahko (po dogovoru) uporabimo tudi pri primerjavi enot, npr. $\varphi = 87^\circ = 1,52 \dots$ rad $= 1,52 \dots$ saj je to smiselno.

Zavedajmo se, da se moramo tukaj prvič ugrizniti v jezik: naš šolski fizikalni »zakon«, da fizikalno količino v enačbah **vedno** predstavljata mersko število in enota, **pri teh enačbah** ne velja več! V razredu zadrego prikrijemo z malomarno izjavo, npr.: »Enote rad v računih običajno ne pišemo!« Toda – od kdaj pa so slavna fizikalna pravila odvisna od »običajev« in dobre volje uporabnika in jih lahko kar po potrebi spreminjamo, saj to ni običajna politika!!

Če sežem na polico in v učbenikih poiščem zapise o radianih, najdem npr. te izjave (brez dodatnih pojasnil):

V račune vstavljamo namesto rad število 1.

Kotne enote rad največkrat ne pišemo.

Kote merimo v **brezdimenzijskih** enotah, v radianih.

The radian is dimensionless (has no units).

Enota za kot je 1, radian je pomožna enota.

Za lok in kot velja sorazmernost $l = r\varphi$, če kot merimo v radianih.

...

Vse to je nekako res (razen trditve v angleščini), toda ali se to ne bi dalo povedati drugače? **Brezdimenzionalnost kota bi uvedli z definicijo središčnega kota $\varphi = l/r$** in to je vse, kar je treba povedati. Kot pa lahko ima – poleg vseh ostalih izmišljenih merskih enot (stopinja, pravi kot ...) – še eno (zakaj »pomožno«?) enoto – radian (če $l/r = 1 \rightarrow \varphi = 1$ rad), ki pa je v enačbah ne potrebujemo (enako velja za druge kotne enote), razen pri primerjavah enot ali pri zapisu podatkov. (npr. $\varphi = 57,3^\circ = 1$ rad).

»Dimenzijo« količine smo včasih v srednji šoli redkeje omenjali, določena je z osnovnimi enotami, npr. dimenzija sile je kgms^{-2} ; zato ... lahko seštevamo ali odštevamo samo izraze z enako dimenzijo (= ne odštevaj jabolk od hrušk!), fizikalna enačba je veljavna, če imata leva in desna stran enačbe enaki dimenziji itd. Zato mora seveda biti kot φ v enačbah $l = r\varphi$, $v = r\varphi/t$... brez dimenzije. Podobno velja za vse količine, ki so definirane z razmerjem dveh količin enakih dimenzij in se te zato krajšajo. Toda merska enota rad obstaja, ne moreš je »zanemariti« ali zacoprati v 1, čeprav je »pomožna« in brez dimenzije!

»Definicija« $\text{rad} = 1 \dots$ **kot-da-bi-rad-bil 1**, zaradi katere rad iz enačb »izgine«, mi ni všeč. Zagovarjajo jo, »ker smo to definirali« – toda to ni res, definirali smo le kot 1 rad ob predpostavki $l = r$. Definiraš, izmisliš si lahko kakršnokoli kotno enoto in jo krstiš z nekim imenom (npr. $\varphi^\circ = 57,3^\circ = 1$ rad) – toda ob našem krstu je bila še zahteva brezdimenzionalnosti $\varphi = l/r = 1$, tega pa gola »definicija« $\text{rad} = 1$ ne pove!!

Ker kasneje pri relativnosti izvemo še za podobno »definicijo« $c = 1$, bo morda kak jezičen bistrež v razredu vprašal, ali je svetlobna hitrost $c = 1 \text{ rad!}$ (čista matematična logika: če je $c = 1$ in $\text{rad} = 1 \rightarrow c = \text{rad?}$). Kaj bi mu odgovorili?

Pišite mi: peter.prelog@siol.net!

Dodatek

Pri kotnih funkcijah smo nekoč pisali enote zato, da bi lahko vrednost funkcije lažje poiskali v tablicah ali (kasneje) na kalkulatorju, kjer so koti zapisani npr. v stopinjah (npr. $\sin(30^\circ) = 0,5$), zato bi lahko bi pisali tudi $\sin(0,03 \text{ rad}) = 0,03$ ali pa upoštevali **dogovor**, da naj tako zapisani kot brez enote vedno pomeni radian, torej $\sin \varphi = \sin(0,03) = 0,03$. V fizikalnih enačbah pa je kot φ vedno brez dimenzije (sicer bi npr. dobili iz $l = \varphi r$ lok l z dimenzijo mrad , ali pa iz $v = dx/dt = [x_0 \sin(\varphi t)]'$ dobili za hitrost enoto mrad/s ali m°/s).

Ali je torej merske enote za kot treba pisati ali ne?

Seveda je pisanje kotnih enot (razen radiana) obvezno npr. pri naštevanju osnovnih podatkov za neko fizikalno nalogo, enako pri zapisu končnih rezultatov. Pri izdelavi računalniškega programa za izračun vrednosti nekega fizikalnega izraza pa merskih enot ne vstavljamo, za pravilnost enot moramo skrbeti že pri programiranju in pravilno enoto predvideti tudi za izpis rezultata. Podob-

no lahko brez enot delam tudi pri ponavljanju izračunov »ročno« – brez računalnika. V skupini sodelavcev, npr. sošolcev pri reševanju iste naloge, se lahko **dogovorijo**, da vse hitrosti računajo npr. v m/s in potem – med računanjem – teh enot ne pišejo. Seveda pa dogovor vedno velja le v nekem okviru, zunaj njega pa ne! Ta okvir je lahko tudi precej velik, dogovor lahko velja tudi za celotno svetovno fizikalno ekipo, čeprav o tem odločajo le izbranci in se vsi drugi temu »predlogu« le podredimo! Npr. nenatančni »dogovor«, da je $\text{rad} = 1$, bi bilo bolje nadomestiti z enostavnejšim dogovorom, da enote **rad ne pišemo**: če ob nekem **podatku o velikosti kota** ni enote, naj bo ta nenapisana enota **rad!** (Druge kotne enote je seveda treba pisati!!). V enačbah pa enot za kot itak ni in tam tudi **rad** ne smemo pisati, saj je kot brez dimenzije!

Torej pozor! Koti so brez dimenzije, niso pa brez merskih enot (*»has no units«*?)!! Podobno velja za vse relativne fizikalne količine, npr. relativna vlažnost, raztezec ... vse so brez dimenzije! Lahko si pa **izmišljujemo imena** za njihove enote, npr. vlažnost $r = 0,10 \%$ imenujemo »1 vlagica«, potem pa iz tega napravimo »znanost«: ko je že vse precej mokro, je $r = 9$ vlagic, »naravna« največja mogoča vlažnost je 10 vlagic, zato vlažnost 12 vlagic ni mogoča, »ne obstaja« itd.

Procent (%) pa seveda ni enota (npr. $r = 50 \%$), to je le vsem vsečna »latinščina«:

15 **pro-centov** = 15% = $0,15 = 15/100 = 15$ **od-stotkov** ($\% = 1/100$)!

Kaj pa pravzaprav pove izjava (če je $c = 1$ in $\text{rad} = 1 \rightarrow c = \text{rad}$)?

Če bi bila c in rad števili, bi bila izjava pravilna. Toda to sta fizikalni količini in implikacija seveda ne more (*»jabolka in hruške!«*) enačiti c (z dimenzijo ms^{-1}) in brezdimenzionalnega radiana! Strokovnjaška površnost (*»saj vsak, vosu' ve, kaj hočem povedati z izjavo, da je $c = 1$!«*) je morda sprejemljiva v strokovnjaškem okolju, tiste, ki se fizike še učijo (predvsem mladino), pa le zmede, saj vsaki »znanstveni« izjavi sveto zaupajo. Zato poskusimo drugače:

če »po definiciji nove merske enote c ($c = 1$)« ... to pomeni, da faktor (c) v enačbi lahko nadomestimo s faktorjem ($.1$), ali kar pomeni isto – da tega faktorja $.c$ v nekem produktu ni treba pisati ...

npr.: $xx.c = xx.1 = xx$ ali tudi $yy/z.c = yy/z.1 = yy/z$...

... potem tudi $\text{rad} = 1$ pomeni isto (faktor rad ima enako lastnost kot faktor $.c$): faktor rad v enačbah nadomestimo s faktorjem $.1$, ki ga ni treba pisati (pri rad to itak velja le za **podatke o velikosti kota**, saj v enačbah ni brezdimenzionalnih kotnih enot).

Torej drugače razumljena implikacija (če je $.c = .1$ in $\text{rad} = .1 \rightarrow .c = \text{rad}$) pove, da imata faktorja $.c$ in rad – zaradi dogovora v predpostavki – enako lastnost (neznanstveno, po kmečko): v enačbah ju ni treba pisati!

Pri tem pa moramo paziti, da bomo količino prav označili; če zapišem $x = 0,4$, ne vem, ali je $x = 0,4 \text{ rad}$ ali $x = 0,4 c$ ali $x = 0,4$ kar tako. Če pa zapišemo $v = 0,4$ ali $\varphi = 0,4$, je jasno, da je to hitrost $v = 0,4 c$ ali kot $\varphi = 0,4 \text{ rad}$.