Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2017, letnik 23 **2**

IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Ključni elementi v procesu samoocenjevanja matematičnega znanja

IZ RAZREDA:

Raziskovanje pri matematiki v 1. razredu

Matematika na konzervatoriju za glasbo in balet

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Leibnizev harmonični trikotnik

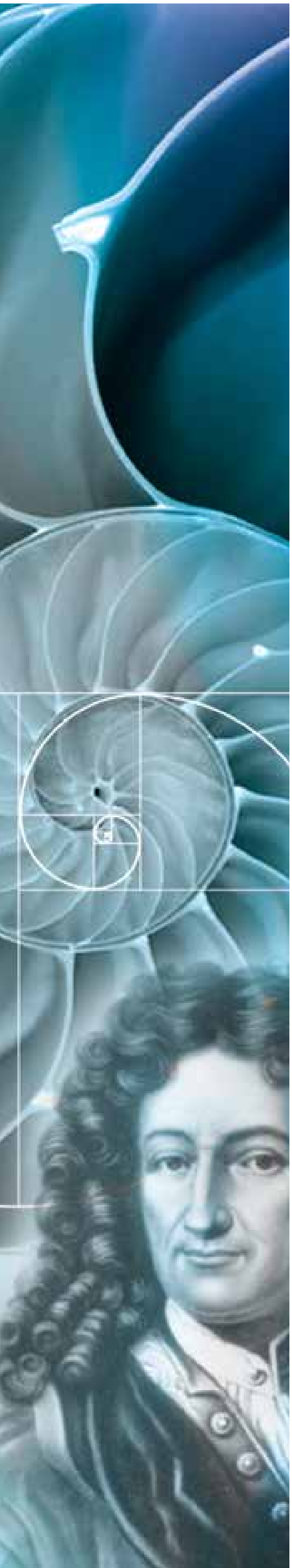
NOVICE:

KUPM 2018

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2017, letnik 23 2



VSEBINA

Spoštovani bralci revije Matematika v šoli!

Pred nami je druga številka revije Matematika v šoli. O čem lahko beremo in razmišljamo?

O **samovrednotenju**, ki je zmožnost realne presoje lastne uspešnosti. V samovrednotenju vidimo priložnosti za večjo aktivnost učencev v procesu učenja, razmišljanju o učinkovitih strategijah učenja, lastnem načrtovanju nadaljnjih korakov učenja. Posledično z uporabo različnih orodij samovrednotenja učenci prevzemajo odgovornost za lastno znanje. Zato si je smiselno zastaviti vprašanje: *Kako spodbujamo učence k vrednotenju njihovih dosežkov in kakovosti učenja?*

Fermatov zadnji izrek v teoriji števil nas sprašuje, za kateri naravni eksponent n obstajajo taka neničelna cela števila x, y, in z, da je

$$x^n + y^n = z^n;\ n \in \mathbb{N}.$$

Za $n = 1$ je neskončno takih trojic, za $n = 2$ pa dobimo pitagorejske trojice. In kako naprej? Izrek je eden od najbolj znanih v zgodovini matematike. Dokazali ga niso 357 let, dokler ga ni leta 1995 končno rešil angleški matematik Andrew John Wiles. Za dokaz izreka je lani prejel Abelovo nagrado, ki jo od leta 2003 podeljuje norveški kralj v čast njihovemu matematiku Henriku Abelu.

Kaj iz tega lahko povzamemo za pouk matematike? Pomembno je, da se zavedamo pomena preiskovanja in reševanja problemov v različnih fazah pouka. Skozi različne primere, kjer učenci pridobivajo novo znanje preko lastnih dejavnosti in spoznavajo lepoto matematike. Potrditev tega je članek o **preiskovanju v 1. razredu** z vključenimi elementi formativnega spremljanja in preiskovanje naravnih pojavov okoli nas – **opazovanje sence ravne palice**. Da se matematika skriva povsod okrog nas, lahko beremo v članku, ki pravi: **glasba je matematika s čustvi**.

V prejšnji številki smo se spomnili Gottfrieda Wilhelma Leibniza. V tej številki nadaljujemo s primeri **preiskovanja v Pascalovem trikotniku**, ki jih nadgradimo s primeri **preiskovanja v Leibnizevem trikotniku.**

In na koncu zapišimo misel indijskega borca za človekove pravice Mahatma Gandhija: »*Če želiš videti spremembo v svetu, moraš ti biti ta sprememba.*« Naj enako velja tudi za nas pri pedagoškem delu z učenci.

Vsi bralci ste vabljeni k pisanju člankov in soustvarjanju revije.

Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXIII, številka 2, 2017

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov in foto dokumentacija uredništva
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Stritarjeva 8, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Ključni elementi v procesu samoocenjevanja matematičnega znanja

mag. Adrijana Mastnak
Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Povzetek

V prispevku predstavimo različna teoretična izhodišča za oblikovanje koncepta samoocenjevanja in poudarimo njegov pomen v kontekstu formativnega preverjanja znanja. Prikažemo zapletenost procesa samoocenjevanja in obravnavamo vire učenčevega znanja, poznavanja učnih ciljev, kriterijev in standardov za oblikovanje realne samoocene znanja. Podajamo tudi nekaj smernic za poučevanje samoocenjevanja v razredu in nudimo vpogled v prakso prepoznavanja učnih ciljev pri obravnavi nove učne snovi in uporabe virov pri tem. Predstavimo tudi rubrike in skripte kot orodji, ki sta lahko učiteljem v pomoč pri ekspliciranju učnih ciljev, kriterijev in standardov za samooceno znanja.

Ključne besede: formativno spremljanje, matematika, samoocenjevanje, cilji, kriteriji, standardi.

Key Elements in the Process of Self-Assessing Mathematical Knowledge

Abstract

This paper presents various theoretical premises for forming the concept of self-assessment and emphasises its importance within the context of formative knowledge assessment. It shows the complexity of the self-assessment process, and discusses the sources of a pupil's knowledge and familiarisation with learning objectives, criteria and standards for shaping a realistic knowledge self-assessment. It also gives a few guidelines for teaching self-assessment in class and provides insight into the practice of identifying learning objectives when discussing new learning content, and of using sources in the process. It also presents rubrics and scripts as tools that can help teachers to explain learning objectives, criteria and standards for knowledge self-assessment.

Keywords: formative assessment, Mathematics, self-assessment, objectives, criteria, standards.

Uvod

V praksi preverjanja in ocenjevanja znanja se je v zadnjih nekaj desetletjih naredil velik premik v načinu zbiranja informacij o učenčevem znanju od tistega, pri katerem učitelji v pouk vključujejo občasna objektivna preverjanja znanja (sumativno preverjanje), do tistega, pri katerem učitelj pridobiva informacije o učenčevem zanju nenehno skozi proces poučevanja in na tej osnovi podpira učenca pri učenju (formativno preverjanje) (Razdevšek Pučko, 1994). Broadfoot (1993, v Razdevšek Pučko, 1994) omenja kot bistveno značilnost nove paradigme, da postaja glavni cilj učenje samo in ne merjenje rezultatov. V tem procesu naj bi bil učenec odgovoren za vse etape, t.j. načrtovanje, organizacijo, izvedbo in evalvacijo. Več let je tako že opaziti povečan interes iskanja načinov, ki bi učence spodbujali k prevzemanju večje odgovornosti za svoje učenje.

Tovrstno razmišljanje izhaja tudi iz ene izmed ključnih usmeritev pri oblikovanju kakovostnega pouka, ki pravi, da je treba podpreti razvoj mladih v samostojne vseživljenjske učence ter jim nuditi pomoč pri razvijanju ključnih kompetenc, med njimi tudi kompetence učenje učenja (European Communities, 2007). K razvoju kompetence učenje učenja učitelj prispeva tudi s tem, da učencem pomaga prepoznati njihovo znanje in učne strategije (Weinert, 2001). Tudi Finci med pomembne učne kompetence, ki naj bi jih učenci razvili, uvrščajo učenčevo zmožnost ocenjevanja lastnega učenja in razvoj spretnosti samoocenjevanja (Rutar Ilc, 2008).

Opredelitev pojma samoocenjevanje znanja

Samoocenjevanje znanja je v kontekstu podpiranja učenca pri učenju obravnavano kot eden izmed načinov formativnega preverjanja znanja (Black in William, 1998; Clarke, 2005) in kot pomemben dejavnik pri doseganju kakovostnega pouka (Hattie, 2009). Vendar pa pojem samoocenjevanja v literaturi ni obravnavan le z didaktične perspektive, saj ga proučujejo tudi v povezavi z nekaterimi psihološkimi dejavniki (s samopodobo, samoučinkovitostjo, metakognicijo, samoregulacijo). Pri samoocenjevanju znanja učenec namreč potrebuje znanje o lastnem znanju (Flavell, 1985), zato lahko le-tega razumemo kot pomemben del metakognicije. Hkrati je samoocenjevanje vključeno v proces oblikovanja posameznikove samopodobe, ki jo več avtorjev (Markus, 1977; Marsh in Hattie, 1996) opredeli kot posameznikovo zaznavanje sebe, kognitivne ocene, predstave o samem sebi, o svojih zmožnostih, dosežkih in ciljih, ki si jih posameznik oblikuje skozi izkušnje in interakcijo z okoljem. Samoocenjevanje nekateri avtorji (Panadero in Alonso Tapia, 2013; Zimmerman in Schunk, 2001) obravnavajo tudi kot enega izmed procesov samoregulacijskega učenja, v katerem učenec uporablja lastne in zunanje vire informacij za nadzorovanje, uravnavanje in upravljanje svojega učenja (Andrade, 2010).

Samoocenjevanje znanja je torej precej kompleksen in zapleten koncept, saj ga v literaturi razlagajo z različnimi teoretičnimi pristopi, z njim povezujejo različne druge koncepte, hkrati pa se zanj uporablja več različnih poimenovanj. Med najpogostejšimi angleškimi termini, ki opisujejo proces, v katerem učenec oceni ali ovrednoti svoje znanje, si poda povratno informacijo, so: »*self-assessment, self-evaluation, self-reflection, self-monitoring, reflection, self-grading, self-testing, self-rating*«. V slovenskem prostoru se uporabljata dva izraza to sta samoocenjevanje in samovrednotenje, občasno tudi refleksija. Avtorji podajajo več različnih opredelitev razlikovanja med pojmoma samoocenjevanje in samovrednotenje.

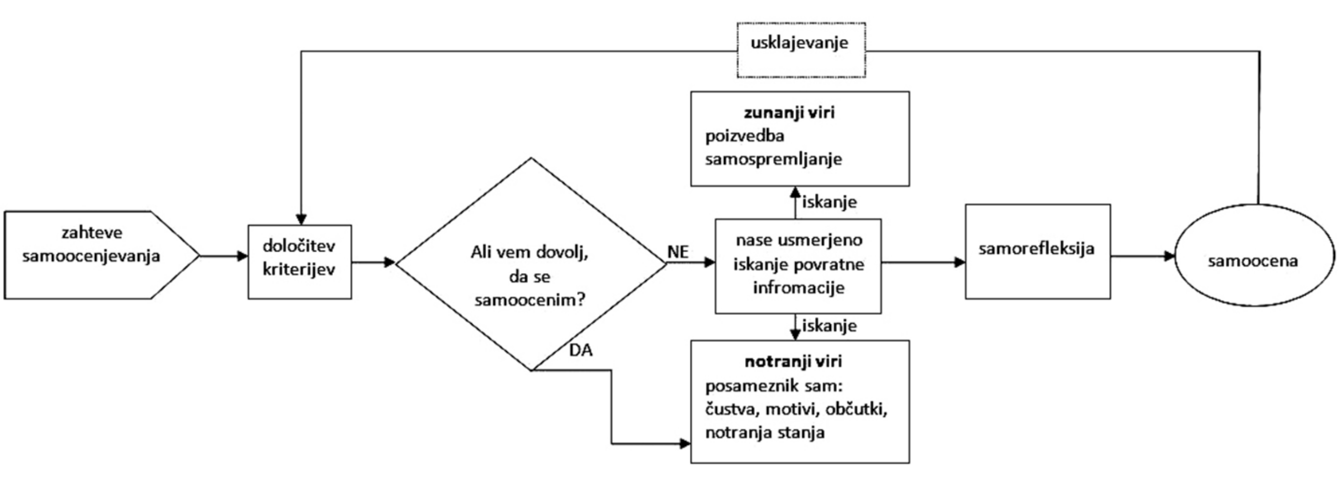
Klenowski (1995) pri opredeljevanju razlike med samoocenjevanjem in samovrednotenjem izhaja iz kriterijev, ki jih učenec v procesu ocenjevanja lastnega znanja uporablja. Pravi, da samovrednotenje poteka na osnovi nekih notranjih kriterijev, torej učenec sam določa bistvene elemente, ki jih kritično ovrednoti ter načrtuje nadaljnje potrebne aktivnosti. Učenec pri samovrednotenju presoja vrednost svojih dosežkov, identificira močne točke (kaj je dobro narejeno, kaj dobro znam) in slabosti (kaj je slabo narejeno, česa še ne znam) ter razmišlja, kako bi svoje dosežene rezultate izboljšal. Pri tem so seveda pomembni relevantni kriteriji in načrtovanje nadaljnjih aktivnosti. Pri samoocenjevanju pa pravi, da gre za samostojno presojanje dosežkov glede na neke poznane kriterije (npr. učenec po učiteljevih navodilih ali vzorcih preveri in oceni svoj izdelek). Yan in Brown (2016) v skladu s to opredelitvijo poimenujeta samovrednotenje kot neformalno samoocenjevanje, saj pri njem učenec izhaja iz svojih notranjih vrednot, idej, ciljev, medtem ko pri formalnem ali strukturiranem samoocenjevanju proces spremlja in oblikuje učitelj, izvaja pa ga učenec na osnovi zunanjih kriterijev, ki jih poda učitelj.

V prispevku bomo uporabili termin samoocenjevanje, ki bo pomenilo učenčevo presojanje lastnega znanja na osnovi poznavanja učiteljevih absolutnih kriterijev, ki izhajajo iz načrtovanih učnih ciljev, in standardov.

Yan (2016a) je različne konceptualizacije in interpretacije pojma samoocenjevanje razdelil v tri glavne skupine:

- samoocenjevanje je posameznikova sposobnost/spretnost oceniti kakovost svojega izdelka in narediti evalvacijo svojega znanja, spretnosti ali uspešnosti;
- samoocenjevanje je eden izmed načinov ocenjevanja znanja, uporabljenega v sumativne namene;
- samoocenjevanje je učna strategija/proces, ki spodbuja učenčevo učenje in je uporabljeno v formativne namene.

V zadnjih dveh desetletjih je samoocenjevanje postalo pomembno predvsem kot del formativnega preverjanja znanja (Brown in Harris, 2013). Več avtorjev (Andrade, 2010; Andrade, Du in Wang, 2008; Andrade in Valtcheva, 2009; Boud, 1995; Yan in Brown, 2016) tako pravi, da je samoocenjevanje proces formativnega preverjanja znanja, skozi katerega učenec zbira informacije o svoji uspešnosti, kakovosti izdelka ali napredku v znanju. Zbrane informacije nato primerja s predvidenimi učnimi cilji, kriteriji in/ali standardi in na tej osnovi naredi refleksijo tako, da oceni stopnjo doseganja učnih ciljev. Učenec nato svoje delo na tej osnovi pregleda in popravi. Andrade in Valtcheva (2009) uporabita za ta opis opredelitve samoocenjevanja termin »*na kriterije nanašajoče se samoocenjevanje*« (»*criteria-referenced self-assessment*«).



Slika 1: Prikaz cikličnega procesa samoocenjevanja (Yan in Brown, 2016).

Yan (2016b) tudi izhaja iz te opredelitve in pravi, da samoocenjevanje vključuje dve dejavnosti: nase usmerjeno iskanje povratne informacije in samorefleksijo. Povratna informacija je pri tem v splošnem definirana kot specifična informacija, predstavljena učencu, z namenom spodbuditi pri učencu refleksijo o njegovi uspešnosti, napredku, močnih in šibkih znanjih (Hattie in Timperley, 2007).

Nase usmerjeno iskanje povratne informacije pomeni, da učenec sam išče povratno informacijo o svojem znanju iz različnih virov in pri tem sam določa vsebino ter vire povratne informacije (ne sledi nujno navodilom zunanjih virov - učitelju, sošolcem, staršem).

Samorefleksija pa je dejanje, pri katerem učenec premišljuje in ovrednoti kakovost svojega procesa učenja in učnih izidov z uporabo dostopnih/zbranih povratnih informacij.

Yan (2016b) navaja primer izjave učenca, ki išče nase usmerjene povratne informacijo in nato naredi samorefleksijo: »*Ko se samoocenjujem, običajno najprej vprašam sošolce, da dobim povratno informacijo in nato se vrnem nazaj in premislim o svoji uspešnosti*«.

Yan in Brown (2016) sta pri oblikovanju sheme procesa samoocenjevanja izhajala iz empirične raziskave, v kateri sta ugotavljala, kako učenci izvajajo samoocenjevanje. Ugotovila sta, da vsi sledijo istemu osnovnemu procesu samoocenjevanja, ki je prikazan na sliki 1.

Yan in Brown (2016) pravita, da se proces samoocenjevanja začne, ko se pojavi potreba ali zahteva po samoocenjevanju. Učenec pri tem najprej določi kriterije uspešnosti, ki so predpogoj za oblikovanje samoocene. Nato učenec sledi eni izmed dveh možnih poti, glede na to, ali že ima dovolj povratnih informacij za oblikovanje samoocene ali ne. Če učenec zazna, da ima že dovolj informacij, da oblikuje samooceno, na tej osnovi reflektira in ovrednoti svojo uspešnost pri učenju/delu, identificira močna in šibka znanja in kaj še mora narediti. Če pa učenec še nima dovolj informacij, potem prevzame pobudo za iskanje povratnih informacij, na osnovi katerih nato izvede samorefleksijo. Glavna funkcija samorefleksije je pomagati učencu pri razumevanju lastne uspešnosti in določitvi močnih in šibkih področij z namenom izboljšati lastno delo/znanje. Primer uporabe samorefleksije ponazarja naslednja izjava učenca: »*Pri samoocenjevanju je zame pomembno, da naredim refleksijo na lastno uspešnost pri delu, saj s tem vem, zakaj sem nekaj naredil dobro ali slabo.*« Samorefleksija vključuje tudi učenčevo ovrednotenje povratne informacije, ki jo je dobil od drugih. Učenci lahko povratno informacijo od drugih sprejmejo in uporabijo ali pa jo ignorirajo, saj se jim ne zdi relevantna (Primer izjave učenca: »*Povratna informacija je koristna, a ni treba vedno vsake sprejeti. Na primer, jaz pogosto iščem povratne informacije od sošolcev, ampak previdno preverim, ali so njihovi predlogi smiselni. Kadar so nerelevantni, jih preprosto ignoriram.*«). Na osnovi samorefleksije učenec oblikuje samooceno znanja. Samooceno znanja prečisti in uskladi s standardi, tako da svoje delo približa zahtevanim standardom ali standarde prilagodi svojemu delu. Posledično to pomeni, da v prvem primeru učenec poda bolj realistično samooceno, med tem ko v drugem pesimistično. S pridobivanjem novih povratnih informacij lahko učenec svojo samooceno ponovno usklajuje s postavljenimi standardi.

Ključni elementi pri oblikovanju samoocene znanja

Iz opisanega procesa samoocenjevanja lahko sklepamo, da so v procesu učenčevega oblikovanja samoocene znanja zelo pomembni naslednji elementi: poznavanje učnih ciljev (namenov učenja), kriterijev in/standardov ter viri informacij o lastnem znanju.

Viri informacij o lastnem znanju

Učenec lahko v procesu učenja povratne informacije o svojem znanju pridobi na različne načine. Najbolj dostopen vir o učenčevem znanju je učenec sam. Tudi več drugih avtorjev (Andrade, 2010; Boud, 1995; Yan in Brown, 2016) pravi, da so učenci lahko sami sebi vir informacij o lastnem znanju, saj imajo ves čas dostop do lastnih misli, dejanj in dela, ki so ga že opravili (npr. reševanje nalog), upoštevajo svoje notranje intuicije, čustva in fizične občutke. Učencu je njegova **notranja povratna informacija** lažje dostopna, kar pomeni, da so njegove samoocene bolj značilno hevristične (npr. *Trudil sem se, zato mora biti moj izdelek dober. Z reševanjem nalog o ulomkih nisem bil zadovoljen. Gre bolj za moj občutek, intuicijo … preprosto sem čutil, da nekaj ni v redu.*) in nič povezane z absolutnimi standardi in kriteriji kakovostnega dela. Pri učencu se pogosto pojavi avtomatsko in nezavedno. Notranja povratna informacija pa lahko izhaja tudi iz učenčevega načrtnega samospremljanja pri učenju in k zbiranju zunanjih dokazov o lastnem znanju. Učenec se lahko spremlja eksplicitno (npr.: »*Včasih ponovno naredim stare preizkuse, da preverim, ali sem v redu razumel, kar nas je učitelj učil.*«) ali bolj implicitno, tako da sam sebi zastavlja vprašanja (samoizpraševanje) (npr. »*V mislih si zastavim vprašanja in tako preverim, ali sem razumel. To naredim* včasih *med uro ali pa po njej.*«). Poleg notranje povratne informacije učenci uporabljajo tudi **zunanje povratne informacije**. Pomen zunanje povratne informacije poudarja tudi Boud (1995), saj pravi, da samoocenjevanje naj

Preglednica 1: Viri informacij o lastnem znanju (Elder, 2010).

Vir informacij o lastnem znanju		Primer
oseba	Učenec sam sebi.	Vem, da znam, ko si pregledam nalogo.
	Učenec skupaj z drugim (sošolcem, starši, učiteljem).	Oče mi pomaga pri pregledu moje naloge.
	Drugi (sošolci, učitelj, starši).	Učitelj mi pove, da mi gre dobro.
naloga	Učenec sam sebi.	Vem, ker dobro rešujem naloge.
	Učenec skupaj z drugim (sošolcem, starši, učiteljem).	V razredni diskusiji sem ugotovil, kaj moram pri nalogi izboljšati.
	Drugi (sošolci, učitelj, starši).	Učitelj mi je dal nalogo, ki sem jo rešil.

ne bi bil izoliran proces, ampak naj bi vključeval učenčevo iskanje informacij o lastnem znanju iz različnih virov (učitelji, vrstniki, sošolci, starši). Pogosto so torej vir informacij o učenčevem znanju tudi pomembni drugi (podajanje mnenja učitelja, sošolca, ocene). Uporabo zunanje povratne informacije lahko ponazorimo z naslednjo izjavo učenca: »*Ko končam nalogo, jo dam pregledati učiteljici, da mi poda komentarje, čeprav menim, da je v redu. Če je mogoče, se o nalogi pogovorim tudi z vrstniki in tako tudi dobim povratno informacijo.*«

Elder (2010) pravi, da vir informacij o lastnem znanju izhaja iz osebe ali naloge/dejavnosti, ki jo učenec izvaja. V preglednici 1 je povzeta delitev virov informacij o lastnem znanju, kot jo navaja Elder (2010) na osnovi rezultatov svoje empirične raziskave.

Učni cilji/nameni učenja

Bourke (2000) je v svoji raziskavi ugotovila, da so bili pri učenčevem samoocenjevanju pomemben dejavnik jasni in eksplicitno izraženi cilji, ki so jih učenci razumeli. Opazila je namreč, da se učenci v razredu pogosto ne zavedajo (ne ozaveščajo) učnih ciljev oz. kriterijev in standardov, na osnovi katerih naj bi oblikovali samooceno. Posledično se učenčevi učni cilji v raziskavi večkrat niso skladali s cilji, ki si jih je zastavil učitelj. Učenci, ki so si med naborom ciljev sami izbirali cilje, ki jih želijo doseči, so bili za učenje bolj motivirani in tudi manj odvisni od učiteljevega vodenja pri njihovem samoocenjevanju.

Učenčevo prepoznavanje učnih ciljev oz. namenov učenja je tako prvi korak pri oblikovanju samoocene znanja. Če učenec želi vedeti, kako dobro nekaj zna, mora namreč najprej vedeti, kaj se od njega pričakuje, da zna. Pri prepoznavanju ciljev učne ure učenci uporabljajo različne vire. Vsekakor pa je učitelj tisti, ki mora učencu narediti učne cilje vidne in razumljive.

Ko učence enkrat naučimo prepoznavanja in ubeseditve učnih ciljev, pa nanje vežemo tudi kriterije znanja.

Kriteriji znanja

Kriteriji znanja (im. tudi kriteriji uspešnosti, Ada Holcar Brunauer, Cvetka Bizjak, Janja Cotič Pajntar, Marjeta Borstner, Vineta Eržen s sod., 2016) predstavljajo specifične smernice, na podlagi katerih se ocenjuje učenčevo znanje in ga lahko učenec izrazi na različne načine. Kriteriji znanja običajno izhajajo iz učnih ciljev (Panadero in Alonso Tapia, 2013), so torej opisi, ki nam povedo, kaj naj bi znali. Običajno se kriteriji navezujejo na lastnosti, kakovost, značilnosti/lastnosti učiteljevih odgovorov (Sadler, 1989).

Panadero in Alonso Tapia (2013) pravita, da lahko učenec oblikuje kriterije znanja na tri načine:
- zunanje oblikovanje kriterijev: kriterije oblikuje in učencem poda učitelj;
- zunanje oblikovanje kriterijev, ki je s strani učenca ponotranjeno: učitelj z učenci o kriterijih prediskutira;
- notranje oblikovanje kriterijev: učenec, izhajajoč iz naloge ali neke druge dejavnosti, sam oblikuje in postavi kriterije znanja.

Yan in Brown (2016) zunanje oblikovanje kriterijev s strani učitelja ali v sodelovanju z učiteljem poimenujeta kot **formalni kriteriji**. V tem primeru gre za eksplicitno podane kriterije, pogosto v obliki ocenjevalnih rubrik. Primer izjave učenca, ki uporablja zunanje oblikovanje kriterijev: »*Vsakič, ko končam nalogo, jo pregledam z uporabo kriterijev, ki jih je podal učitelj.*« Poleg formalnih kriterijev Yan in Brown (2016) opredelita še učenčeve **notranje kriterije**, ki izhajajo iz njegovih osebnih ciljev, predhodnih izkušenj in so subjektivni. Le-ti so prikriti, podani implicitno in pogosto uporabni kot splošno pravilo pri vseh podobnih nalogah. Učenec jih ponotranji na osnovi predhodnih izkušenj s podobnimi nalogami. Učenec je v raziskavi, ki sta jo izvedla Yan in Brown (2016), izrazil uporabo tovrstnih kriterijev: »*Včasih uporabim svoje kriterije, npr. pri ocenjevanju eseja so nekateri splošni kriteriji, kot je povezanost vsebine, logično argumentiranje, ustreznost citiranja in podobno. To lahko uporabim pri skoraj vseh primerih. Pri tem niti ne potrebujem neke ocenjevalne sheme.*«

Yan in Brown (2016) podajata tudi primer izjave učenca, ki intuitivno uporablja ponotranjene učiteljeve kriterije: »*Poleg učiteljevih kriterijev imam tudi svoje, na osnovi katerih ocenim svoje delo … ti kriteriji so bolj ali manj moja zdrava pamet, kot so: v nalogi ni tiskarskih napak, jezikovnih napak, predstavitev je jasna, utemeljitve so logične in konsistentne in drugo.*«

Standardi uspešnosti

Poleg kriterijev se pri opredelitvi samoocenjevanja pojavlja termin standard, ki ga razumemo kot pričakovano raven/stopnjo uspešnosti (Sadler, 1987; Labuhn, Zimmerman in Hasselhorn, 2010). Znanje o standardih zahteva informacijo o tem, kaj šteje za dobro narejeno nalogo/dobro delo in identifikacijo kriterijev, ki so pokazatelj doseganja teh standardov (Boud, Lawson, Thompson, 2013). Pojma standard v tem kontekstu ne smemo enačiti s pojmom standard (znanja), ki ga uporablja Rutar Ilc (2008), saj so z njim opredeljeni učni cilji, ki naj bi jih učenci dosegli. Podobno kot Rutar Ilc (2008) termin standard znanja uporabljamo v učnem načrtu za matematiko (Učni načrt za matematiko v OŠ, 2011).

Pri samoocenjevanju lahko učenci uporabljajo različne vrste standardov. Wayment in Taylor (1995) pravita, da obstajajo najmanj trije različni:
- **normativni** standard oz. standard socialne primerjave;
- **absolutni** standard (zahteve, ki jih postavlja naloga sama oz. učitelj);
- **samoreferenčni** standard (standard, ki si ga postavi učenec sam).

Samoreferenčni standard se nanaša na učenčevo predstavo o tem, kaj je zanj zadostno znanje, s katero stopnjo doseganja posameznega kriterija bo zadovoljen.

Elder (2010) je dodala še četrti standard, t.j. **ipsativni standard**, pri katerem učenec ocenjujejo svojo uspešnost na osnovi primerjave s svojo predhodno uspešnostjo. Do enakih ugotovitev sta v svoji empirični raziskavi prišla tudi Yan in Brown (2016).

Primer uporabe ipsativnega standarda lahko ponazorimo z izjavo učenca: »*To nalogo sem naredil boljše kot prejšnjo. Zame pomemben kriterij uspešnosti je, ali sem naredil napredek.*« Kot samoreferenčni standard so učenci v raziskavi navajali: »*Zelo sem se trudil. Vložil sem veliko dela. Reševal sem dolgo časa. Naloga je lahka/težka. Nalogo sem naredil brez pomoči*«. Učenci, ki so uporabili normativni standard, so npr. izjavili: »*Nalogo sem rešil boljše kot sošolci. Mislim, da v tem nisem dober, ker so moji sošolci v tem vedno boljši od mene.*« Absolutni standard so uporabili učenci, ki so opisovali značilnosti nalog: »*Ostali sošolci so komentirali* *moje delo. Učitelj mi je pregledal nalogo. Učitelj mi je napisal komentar. S starši sem se pogovoril o nalogi.«*

Poučevanje samoocenjevanja

Če učenec želi oblikovati realno samooceno znanja, mora najprej vedeti, kaj naj bi znal, kateri so ključni kriteriji, s katerimi lahko svoje znanje ovrednoti, in kakšne so zahteve/pričakovanja učitelja (poznavanje in uporaba absolutnega standarda).

Black s sod. (2003) poudarja, da ima v tem procesu pomembno vlogo učitelj in da je samoocenjevanje sposobnost, ki je v vsakem posamezniku, a jo lahko s časom, vajo in ustreznimi dejavnostmi izboljšamo. Pomembno je tudi vedeti, da lahko dejavnosti samoocenjevanja enostavno vključimo v vsakodnevne interakcije med učiteljem in učenci (Towler in Broadfoot, 1992). Samoocenjevanje tako lahko postane del učnega procesa.

Panadero in Alonso Tapia (2013) podajata dva primera, iz katerih je razvidno, kako lahko učitelj vpliva na razvoj učenčevega samoocenjevanja v razredu.

1. PRIMER: Učiteljev slab vpliv na učenčevo samoocenjevanje lahko podamo z naslednjim primerom (Panadero in Alonso Tapia, 2013):

»*Predstavljajte si, da učenec prvič rešuje račun pisnega deljenja. Pri tem upošteva korake deljenja, kot mu jih je predstavil učitelj. Ko pride do rešitve, nalogo pokaže učitelju, da jo pregleda. Učitelj nalogo pregleda in sporoči učencu, da je rešil narobe ter mu pove pravilno rešitev brez dodatne razlage.«*

V tem primeru učenec ni mogel ponotranjiti učiteljevih kriterijev in standardov, ki bi mu pomagali, da bi lahko sam ocenil svoje delo. Učenec tako še vedno ostaja odvisen od učiteljevega preverjanja naloge in njegove povratne informacije o tem, kako uspešen je bil pri reševanju naloge.

2. PRIMER: Primer, kjer učitelj pomaga učencu razvijati spretnost samoocenjevanja, je razviden iz naslednjega primera (Panadero in Alonso Tapia, 2013):

»*Ko učenec reši nalogo in prosi učitelja, da mu jo pregleda, mu učitelj poda list, na katerem ima rešeno podobno nalogo po korakih. Učenec nato primerja svoj postopek reševanja z rešenim zgledom in se na tej osnovi odloči, ali mora še kaj popraviti.«*

V tem primeru je učenec svoje reševanje naloge primerjal z modelom, zaznal napako in jo popravil, da je prišel do pravilne rešitve. Učitelj je s tem učenca učil, kako oceniti svoj izdelek.

Žal vsi učenci niso zmožni samooceniti dela na ta način, zato je pomembno, da učitelj učence uči samoocenjevanja eksplicitno. Učencem naj bi pokazal, kako kriterije ocenjevanja uporabiti pri konkretni nalogi in jim podal povratno informacijo na njihovo samooceno. Pri tem učitelju pomaga, če se vpraša, kaj se bo učenec z nalogo, ki jo bo rešil, naučil, kaj se želi iz odgovorov/rešitev naloge naučiti, kako lahko te informacije uporabi in od česa so odvisne. Pri tem lahko učitelj uporablja različne načine poučevanja samoocenjevanja: razlago, opazovanje drugih pri samoocenjevanju, posnemanje, različne dejavnosti v skupinah ipd. Cilj vseh teh intervencij je, da učitelj učencem na nek način posreduje modele samoocenjevanja, ki jih nato lahko učenci uporabijo (Panadero in Alonso Tapia, 2013).

Coffey (2003) podaja nekaj predlogov, kako lahko učitelj vključi učence v proces samoocenjevanja znanja med vsakodnevnimi učnimi dejavnostmi:

- učenci reflektirajo, kaj so se pri uri naučili, česa še ne razumejo in kaj lahko naredijo, da bodo razumeli;
- učenci oblikujejo širšo (večjo) sliko o tem, kaj se učijo;
- učenci sami preverijo svoje rešitve nalog;
- učenci z učiteljem diskutirajo o vrednotenju svojih rešenih nalog (koliko točk bi dobili in zakaj).

Vpogled v prakso prepoznavanja ciljev učne ure

Vpogled v prakso prepoznavanja ciljev učne ure predstavljamo z rezultati empirične raziskave, v katero smo vključili 164 učencev 7. razreda. Podatke so pridobili z anketnim vprašalnikom, ki so ga učenci izpolnili po obravnavi snovi. Zanimalo nas je, kaj so učenci prepoznali, da bo treba znati in katera dejanja učiteljice so jim pomagala to ugotoviti. Vprašanji sta bili del nekoliko obsežnejšega anketnega vprašalnika, s katerim smo proučevali učenčeve mehanizme za samoocenjevanje in so ga učenci reševali približno 20 minut, takoj po koncu obravnave učne snovi. Vprašanji sta bili odprti, zato smo oblikovali kategorije odgovorov. Eno vprašanje je bilo zaprto (navedeni viri samoocenjevanja, med katerimi so izbrali enega ali več ter označili najpomembnejšega). Rezultate smo obdelali kvantitativno z izračunom frekvenc in deležev.

Učenci so se pri uri učili:

- zrcaliti točko, premico, daljico in lik čez izbrano premico;
- zapisati s simboli zrcaljenje čez premico;
- našteti/opisati lastnosti zrcaljenja čez premico.

V preglednici 2 je prikazano, kaj so učenci navajali, da bo pri uri treba znati. Oblikovali smo šest kategorij. Učenci so pri podajanju odgovorov izhajali iz učnih ciljev obravnavane ure, predhodnih znanj (npr. znam narisati pravokotnico), matematičnih veščin oz. splošnih matematičnih znanj (npr. znam uporabljati šestilo) ali pa so napisali, da bo treba znati vse/nič. Iz preglednice 2 je razvidno, da je največ učencev prepoznalo kot cilj učne ure, da bodo morali znati zrcaliti čez premico. Preostala dva učna cilja je prepoznal precej manjši delež učencev.

Preglednica 2: Prepoznavanje ciljev učne ure.

Kaj bo treba znati?	f	f (%)
zrcaljenje čez premico	103	67,8
simbolni zapis zrcaljenja	46	30,3
lastnosti zrcaljenja	16	10,5
nič/vse	16	10,5
predhodno znanje	53	34,9
matematične veščine, splošna mat. znanja	39	25,7

Zanimalo nas je tudi, na osnovi katerih virov oz. dejanj učiteljice učenci prepoznavajo učne cilje. Oblikovali smo šest kategorij odprtih odgovorov učenec, ki so prikazane v preglednici 3. Učenci so najpogosteje kot vir prepoznavanja učnih ciljev navajali primere oz. naloge o snovi (39,2 %) ter razlago učiteljice (29,5 %). Manjši delež učencev je navedel še nekatere druge vire: zapis razlage v zvezek/na tablo, učiteljica je navedla/poudarila, kaj bo treba znati, nič oz. vse, kar je naredila učiteljica ter naslovi snovi (Preglednica 3).

Preglednica 3: Učiteljica kot vir prepoznavanja učnih ciljev.

	f	f %
Primeri/naloge, vprašanja o snovi	65	39,2
Razlaga učiteljice	49	29,5
Zapis razlage v zvezek/na tablo	29	17,5
Učiteljica je navedla, poudarila	16	9,6
Nič /vse, kar je naredila učiteljica	6	3,6
Naslovi snovi	1	0,6
Skupaj	166	100,0

Učencem smo nato možne vire prepoznavanja učnih ciljev navedli in so med njimi morali izbrati enega ali več ter označiti najpomembnejšega. Učenci so med navedenimi viri kot najpomembnejšega v največjem deležu izbrali zapis razlage in nalog o snovi v zvezek (63,6 %), nato učiteljičina vprašanja o snovi ob razlagi (19,4 %), v manjšem deležu pa so izbrali, da je učiteljica navedla, kaj bo treba znati (8,5 %), da so jim pomagali naslovi snovi, ki jih je učiteljica napisala/narekovala (7,0 %), in pregled učbenika o tej snovi (1,6 %).

Rezultati raziskave kažejo na to, da je učencem treba pri učni uri bolj jasno eksplicirati učne cilje in jih tudi naučiti, kako jih zapisati. Zapisi učencev so namreč bili v večini primerov zelo skromni (npr. napisali so le: zrcaljenje, simbolni zapis in podobno) ali pa niti niso bili vezani na konkretno učno uro, ampak na predhodno znanje ali na splošne matematične veščine in spretnosti. Učenci pri prepoznavanju učnih ciljev uporabljajo več različnih virov, predvsem pa so vezani na različna dejanja učitelja pri pouku.

V nadaljevanju prispevka bomo predstavili dve orodji, katerih uporaba je lahko učiteljem v pomoč pri ekspliciranju učnih ciljev, kriterijev in z njimi povezanih absolutnih standardov. Z njihovo uporabo lahko učenci oblikujejo bolj realno predstavo o tem, kaj bo treba znati in kdaj to dovolj dobro znajo.

Orodja za učenje samoocenjevanja

Nudenje kriterijev znanja in standardov uspešnosti s pomočjo rubrik, modelov ali primerov dobrih izdelkov pomaga učencem bolje razumeti učiteljeva pričakovanja in zahteve učnih dosežkov. S tem učenci pričenjajo razumeti in ponotranjati korake, ki so potrebni za dosego učnih ciljev. Učenci pa so lahko aktivno vključeni tudi v ta del procesa samoocenjevanja, če kriterije oblikujejo skupaj z učiteljem.

V literaturi obstajata dve različni orodji za samoocenjevanje, ki naredita kriterije učencu jasne: rubrike in skripte.

Rubrike

Rubrike so orodje za samoocenjevanje v obliki preglednice, ki vsebuje (Andrade, 2000; Arter in Chappuis, 2007; Goodrich, 1997):

- seznam kriterijev za ocenjevanje pomembnih učnih ciljev naloge,
- lestvico za oceno stopnje doseženosti teh kriterijev,
- opis posamezne stopnje za oceno doseganja izbranega kriterija.

Učenci lahko z uporabo rubrik ocenijo doseganje kriterijev, ki jih naloga preverja, na osnovi učiteljevih absolutnih standardov.

Rubrike so sicer namenjene za samooceno končnega izdelka, vendar je priporočljivo, da jih učenci dobijo že na začetku naloge, saj jim pomagajo, da so usmerjeni k ustreznim učnim ciljem (Alonso Tapia in Panadero, 2010; Andrade in Valtcheva, 2009).

Egodawate (2010) navaja uporabo rubrik pri pouku matematike (Preglednica 5). Ugotovila je, da rubrike pomagajo učitelju analizirati in opisati učenčeve odgovore pri bolj kompleksnih nalogah in določiti učenčevo stopnjo uspešnosti. Dodatno rubrike nudijo učencu bolj specifične kriterije, tako da učenec ve, kaj se od njega pričakuje in kaj mora vključevati popoln odgovor.

Skripte

Skripte so orodje za samoocenjevanje, sestavljeno iz specifičnih vprašanj, ki so strukturirana po korakih, tako da učenec sledi reševanju naloge, kot bi jo rešil učitelj (učitelj kot model). Oblikovane so tako, da analizirajo proces reševanja naloge od začetka do konca, čeprav jih lahko uporabimo tudi za analizo končne rešitve naloge (končnega izdelka). Vprašanja tako vključujejo ključna znanja, ki jih mora učenec pri nalogi pokazati. Montague (2007) podaja primer uporabe skripte pri reševanju matematičnega problema (Preglednica 6).

Montague (2007) k tej skripti podaja predlog učnega lista, kot bi ga naj dobil učenec ob reševanju nalog (Preglednica 7).

Učitelj pa lahko zastavlja različna vprašanja, ki spodbujajo učenčevo samoocenjevanje znanja oziroma razumevanja snovi tudi med samo obravnavo snovi ali po njej preko pogovora z učenci (McDonald, 2011). Učitelj tako učencem modelira vprašanja o tem, kaj se učijo, kako bodo svoje znanje lahko pokazali, kdaj bodo vedeli, da dovolj dobro znajo, kako bodo vedeli, ali je naloga pravilno rešena in podobno.

Preglednica 4: Učenčevi viri prepoznavanja učnih ciljev.

	Uporabljeni vir		Najpomembnejši vir	
	f	f %	f	f %
Zapis razlage in nalog o snovi v zvezke	126	84,6	82	63,6
Učiteljičina vprašanja o snovi ob razlagi	73	49,0	25	19,4
Učiteljica je navedla, kaj bo treba znati	38	25,5	11	8,5
Naslovi snovi	44	29,5	9	7,0
Pregled učbenika o tej snovi	8	5,4	2	1,6
Skupaj			129	100,0

Preglednica 5: Rubrika za ocenjevanje reševanja matematičnih problemskih nalog (Egodawatte, 2010)

Kriteriji	**Standardi uspešnosti**	**Močna področja in/ali primanjkljaji**
Konceptualno razumevanje in povezave	0 – ni konceptualnega razumevanja 1 – ne pokaže skoraj nič razumevanja mat. pojmov in njihovih povezav 2 – pokaže malo razumevanja mat. pojmov in njihovih povezav 3 – pravilno uporabi večino mat. pojmov in pokaže razumevanje njihovih povezav 4 – pravilno uporabi mat. pojme in pokaže popolno razumevanje njihovih povezav	
Strategije in utemeljevanje	0 – ne pokaže načrta reševanja 1 – pokaže načrt reševanja, ki ni smiseln in vsebuje preveč podatkov 2 – pokaže nekaj pravilnih korakov načrta, ampak načrt ni jasen 3 – pokaže jasen načrt reševanja in večino korakov, ki so potrebni za pravilno rešitev problema 4 – pokaže jasen načrt reševanja s pravilnimi koraki, ki so potrebni za rešitev problema	
Izračuni	0 – ni izračunov 1 – izračuni so, a večinoma napačni 2 – večje napake v izračunih, ki privedejo do napačnih rezultatov 3 – manjše napake v izračunih, ki privedejo do napačnih rezultatov 4 – izračuni brez napak	
Verbalno izražanje	0 – ni napisane nobene razlage 1 – podane so razlage, ki niso povezane z izračuni 2 – podana je razlaga, kaj je bilo narejeno ali zakaj je bilo tako narejeno (ne pa oboje) 3 – podana je razlaga, kaj je bilo narejeno in delno tudi zakaj je bilo tako narejeno 4 – podana je razlaga, kaj je bilo narejeno in zakaj je bilo tako narejeno.	

Preglednica 6: Skripta za samospremljanje pri reševanju matematičnega problema (Montague, 2007)

1. korak. Definiranje problema • Ali sem prebral in razdelal matematični problem? • Ali vem, kaj naloga od mene zahteva? Ali bi nalogo znal obnoviti? • Ali v nalogi nastopajo odvisne spremenljivke? Če da, kakšna je odvisnost med njimi? • Ali problem vsebuje navedbo pogoja Če ... *potem*, ki poveže dve spremenljivki?
2. korak. Organizacija podatkov v diagram odvisnosti • Ali sem napisal vse pravilne simbole, oznake spremenljivk? • Ali sem v diagramu pravilno napisal urejen par števil? • Ali sem napisal »?« za manjkajoče število?
3. korak. Načrt reševanja • Ali sem pretvoril informacije v nalogi v matematični zapis/enačbo?
4. korak. Reševanje problema • Ali sem ugotovil rešitev enačbe? • Ali sem napisal ustrezen odgovor? • Ali sem preveril, če je rešitev smiselna?

Preglednica 7: Predlog uporabe učnega lista k skripti (Montague, 2007).

Učni cilj/namen naloge:
Česa ne znam:
Kaj znam:
Znam povedati, kaj naloga od mene zahteva s svojimi besedami, znam narisati sliko:
Vrsta matematičnega problema:
Enačba:
Reševanje enačbe:
Rešitev:
Primerjanje z učnim ciljem/namenom naloge:
Preverjanje pravilnosti rešitve:

Zaključek

Samoocenjevanje učenčevega znanja je pomembno v procesu učenja, saj učenca aktivno vključuje v proces ocenjevanja (Woodward in Munns, 2003), razvija pri učencih samoregulacijo in metakognicijo (Andrade, 2000; Boud, 2005; Hattie in Timperlay, 2007) ter omogoča učencem boljše razumevanje uporabljenih kriterijev za vrednotenje njihovega dela/znanja (Andrade, 2000; Andrade in Valtcheva, 2009). Hkrati pomaga učencem, da bolje razumejo učne cilje oz. vedo, kaj se od njih pričakuje, zahteva od učenca, da prevzame večjo odgovornost za lastno učenje (Black in William, 1998; Sadler, 1989) in razvija realističen občutek o njegovih močnih področjih in primanjkljajih v znanju (Towler in Broadfoot, 1992). Vse to pripelje učenca do pomembnih izboljšav v njegovi učni uspešnosti (Cassidy, 2006; Irving, Moore in Hamilton, 2003). Samoocenjevanje učencu tudi pomaga učiti se z razumevanjem, učenje pa je usmerjeno v procese in ne v izide učenja. Učenec je namreč v procesu samoocenjevanja usmerjen v nalogo in v to, kaj mora narediti, da izboljša svoje znanje in razumevanje. Pri tem potekajo v učencu kognitivni procesi, kot so mišljenje, samospremljanje in generiranje rešitev (McMillan in Hearn, 2008). S samoocenjevanjem učenec izboljša tudi svoje komunikacijske spretnosti (Andrade, 2010; Andrade in Valtcheva, 2009; Black in William, 1998; Brown in Harris, 2013; Munns in Woodward, 2006; Sadler, 1989, Topping, 2013). Na področju matematike Stallings in Tascione (1996) navajata, da samoocenjevanje pozitivno učinkuje na učenčevo učenje in spodbuja učenčevo samozaupanje, s tem ko mu nudi veliko priložnosti učenja matematike in še posebej matematičnega komuniciranja. Verjameta, da je ta proces nujna okrepitev pri učenčevem razvoju razumevanja matematičnih konceptov.

Zaradi prednosti, ki jih samoocenjevanje v procesu učenja ima, je tako pomembno, da postane integralni del vsakodnevnih učnih aktivnosti. Vsekakor pa je proces zapleten in pri njegovi vpeljavi potrebujejo pomoč in podporo tako učitelji kot učenci. ■

Literatura

Alonso Tapia, J. in Panadero, E. (2010). Effects of self-assessment scripts on self-regulation and learning. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, V33, št. 3, str. 385-397.

Andrade, L. H. (2010). Students as the Definitive Source of Formative Assessment: Academic Self-Assessment and the Self-Regulation of Learning. Paper presented at the annual meeting of the Northeastern Educational Research Association. Rocky Hill, CT.

Black, P. in William, D. (1998). Assessment and Clasroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice,* V5, št. 1, str. 7-74.

Boud, D., Lawson, R. in Thompson, D. G. (2013). Does student engagement in self-assessment calibrate their judgement over time? *Assessment & Evaluation in Higher Education*, V38, št. 8, str. 941-956.

Brown, G. T. L., in Harris, L. R. (2013). *Student self-assessment*. V: J. H. McMillan (ur.). The SAGE handbook of research on classroom assessment (str. 367-393). Thousand Oaks, CA: Sage.

Egodawatte, G. (2010). A rubric to self-assess and peer-assess mathematical problem solving tasks of college students. *Acta didactica napocensia*, V3, št. 1, str. 75-88.

Elder, A. D. (2010). Children's self-assessment of their school work in elementary school. *Education 3-13,* V38, št. 1, str. 5-11.

Holcar Brunauer, A., Bizjak, C., Cotič Pajtnar, J., Borstner, M., Eržen, V. idr. (2016). *Formativno spremljanje v podporo učenju.* Priročnik za učitelje in strokovne delavce. ZRSŠ: Ljubljana.

McMillan, J. H. in Hearn, J. (2008). Student Self-Assessment: The Key to Stronger Student Motivation and Higher Achievement. *Educational Horizons*, V87, št. 1, str. 40-49.

Montague, M. (2007). Self-regulation and mathematics instruction. *Learning disabilities research & practice*, V22, št. 1, str. 75-83.

Stallings, V. in Tascione, C. (1996). Student self-assessment and self-evaluation. *The Mathematics Teacher*, V89, št. 7, str. 548-554.

Yan, Z. in Brown, G. (2016). A cyclical self-assessment process: towards a model of how students engage in self-assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, DOI: 10.1080/02602938.2016.1260091.

Primeri orodij samovrednotenja

Andreja Verbinc, Osnovna šola Oskarja Kovačiča
mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo

V prizadevanju, da se učenci poleg vrednotenja svojih dosežkov učijo tudi razmišljanja o tem, kaj in kako se učijo, spoznavajo svoje strategije učenja, svoja močna in šibka področja, primerjajo svoje dosežke z načrtovanimi, opisujejo, kako se ob tem počutijo, navajamo nekaj orodij za samovrednotenje.

Iz članka dr. C. Razdevšek Pučko: Samoocenjevanje – sestavina nove doktrine ocenjevanja (Pedagoška obzorja, 1998, 13, št. 1-2) navajava:
»Med pozitivnimi ugotovitvami omenimo tudi povečano sposobnost za refleksijo, bolje so znali oceniti svoje postopke in bolj so se zavedali, kdaj potrebujejo učiteljevo pomoč. Izjave učencev o tem, kako so se počutili, dokazujejo, da je samovrednotenje povzročilo in pospešilo razvoj metakognitivnih strategij – učenci niso razmišljali samo o tem, kaj so se naučili, ampak tudi o tem, kako so se učili, in o tem, kateri načini učenja so bili bolj in kateri manj uspešni. Zanimivo je razmišljanje enega od učencev: »Ampak to je pomenilo veliko več dela. Hočem reči, da je veliko lažje, če kar dobiš oceno in se samo vprašaš: Koliko sem dobil? Vendar je novi način boljši zame, od tega imam več koristi.« ■

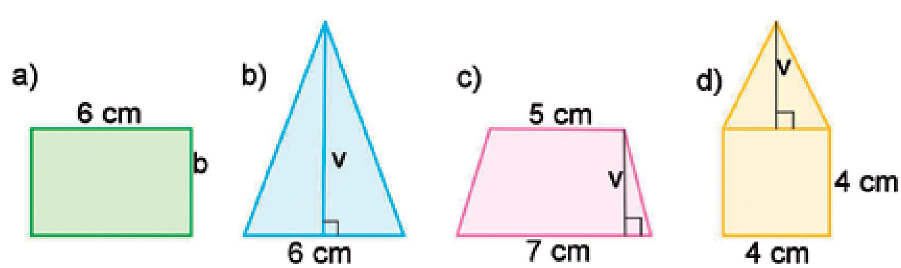
Literatura

Razdevšek Pučko, C. (1998). Samoocenjevanje – sestavina nove doktrine ocenjevanja, *Pedagoška obzorja*, *13*, št. 1-2.

Ballheim. C, idr. (1995). *Mathplus 8*. Canada: Harcourt Brace and Company.

1. primer

Pred in po reševanju pobarvaj kroge (zelena – znam, rumena – delno znam, rdeča – ne znam).

Pred reševanjem	Cilj/namen učenja: uporabljam pojem ploščina pri računanju neznanih dolžin	Po reševanju
	Ploščina vsakega lika je 24 cm^2. Pošči neznane dolžine. Uporabi poljubno strategijo.  Like nariši na list papirja veliki karo in preveri rešitve s štetjem enotskih kvadratov.	
	V učbeniku poišči nalogo in jo reši. Rezultat preveri v rešitvah.	

2. primer

Vrednotenje mojega znanja po zaključenem tematskem sklopu:

Naučil sem se:

Težave imam še pri:

Katere napake še delam?

Kaj bom naredil, da bom napredoval in napake odpravil?

Moj načrt učenja z zbranimi nalogami:

3. primer

Pri matematiki danes:

Opiši postopek/lastnost/strategijo, ki si se jo naučil.

Katero/e matematično/e besedo/e si se danes naučil? Kaj pomeni/jo? Opiši jo/jih.

Katero/e napako/e si naredil? Si se iz tega kaj naučil?

4. primer

Kaj si se danes naučil?

Kaj ti je bilo težko?

Kaj naj naslednjo uro ponovimo?

Še nekaj izdelkov učencev:

Zapiši.

1. Kaj sem se danes naučil?
   Izračunati ploščino kroga.
2. Kje bom lahko to znanje uporabil?
   V vsakdanjem življenju.
   Napiši bolj konkretno.
3. Vprašanje, ki se mi poraja v zvezi s ploščino kroga je:
   Zakaj je πr^2 – zakaj na kvadrat?

Zapiši.

1. Kaj sem se danes naučil?
   Kako izračunam ploščino kroga.
2. Kje bom lahko to znanje uporabil?
   Ko bomo prekrivali okrogel bazen.
   Na kakšen način, kaj boš meril, računal?
3. Vprašanje, ki se mi poraja v zvezi s ploščino kroga je:
   Če je vedno treba oceniti ploščino?

Samovrednotenje

1. Kaj sem se danes naučil?
   Dopolnila sem tisto, kar mi ni bilo jasno.
2. Vprašanje, ki se mi poraja v zvezi z računanjem izrazov z racionalnimi števili je …
   Težave imam pri zadnjih vrsticah izraza in ko moram razultatu določiti predznak (ali pa ga pozabim).
   Super, zelo konkretno.
3. Kje bom to znanje uporabil?
   V srednji šoli. Ko bom računala v decimalkah, koliko stanejo različne surovine v evrih.

Samovrednotenje

1. Kaj sem se danes naučil?
   Računanje izrazov z ulomki, z racionalnimi števili.
2. Vprašanje, ki se mi poraja v zvezi z računanjem izrazov z racionalnimi števili je …
   Kdaj sta 2 – plus in kadaj ne.
3. Kje bom to znanje uporabil?
   V testu, v službi, ko bo šlo podjetje v minus.
   Še malo bolj pojasni.

Raziskovanje pri matematiki v 1. razredu

Barbara Oder
Osnovna šola Kajetana Koviča Poljčane

Povzetek

Prispevek prikazuje učne situacije, v katerih lahko učenci utrjujejo osnovne računske operacije in razvijajo strategije reševanja problemov. Učenec z lastnim raziskovanjem pride do rešitev, novih spoznanj in povezav. Rezultate dela v razredu prikazujemo ob številnih fotografijah in s primeri, ki kažejo na aktivnost otrok v različnih učnih situacijah, na njihovo razumevanje ter učiteljevo povratno informacijo. Ključne ugotovitve ob organiziranju in opazovanju učnih situacij v razredu pokažejo, da so pri matematiki v 1. VIO pomembni nazornost in konkretna učna situacija, učni pogovor in vprašanja učitelja, povratna informacija učencu ter zagotavljanje priložnosti za raziskovanje.

Ključne besede: raziskovanje, različnost reprezentacij, spremljanje, matematični miselni proces

Inquiry in Mathematics in 1st Grade

Abstract

This paper shows teaching situations in which pupils can consolidate their knowledge of basic operations and develop problem-solving strategies. Through inquiry a pupil arrives at solutions, new findings and connections. The results of work performed in class are demonstrated with numerous photographs and examples that show children's engagement in various teaching situations, their understanding, and the teacher's feedback. The key findings reached from organising and observing teaching situations in class show that the important elements in Mathematics in the 1st educational triad are explicitness and a concrete teaching situation, class discussion and questions from the teacher, feedback given to pupils, and providing opportunities for inquiry.

Keywords: inquiry, variety of interpretations, monitoring, mathematical thought process

Uvod

Ideja za izvedbo dejavnosti v razredu izhaja iz delavnice E. R. Wittmanna (KUPM, 2012), kjer so bile predstavljene dejavnosti za utrjevanje osnovnih matematičnih veščin na učinkovit način. V našem primeru smo izbrali računske operacije v 1. VIO in jih utrjevali v različnih učnih situacijah. Cotič, M. in Felda, D. (2012) poudarita, da bi moral pouk matematike razvijati naslednje vidike učenja: raziskovanje, reševanje problemov, ustvarjalno mišljenje, obdelavo podatkov, logično sklepanje in ocenjevanje rezultatov. Avtorja (prav tam) pišeta, da je za ustvarjalno učenje matematike treba učenca vključiti v praktično reševanje problema, ki ima več možnih poti za rešitev, saj otrok večkrat najde izvirne premisleke in povezave. Ustvarjalno raziskovanje v matematiki je tako pot do razvoja matematičnih konceptov in velikokrat tudi koristno orodje za utrjevanje postopkov. Raziskovanje od otroka zahteva, da postavlja vprašanja, izbira strategije in reprezentacije, uporablja svoje miselne veščine, dokazuje in ovrže trditve, kritično pregleduje, preverja in ocenjuje svoje delo ter razvija potrpežljivost in vztrajnost, da pride do rešitve. Žakelj, A. (2009) ob uvedbi posodobitev učnega načrta za matematiko opredeli procesnodidaktični pristop učenja in poučevanja kot aktivno učenje, ki učenca celostno, miselno in čustveno aktivira. Prav tako pojasni (prav tam), da tak pristop omogoča, da učenec matematiko spoznava v nastajanju in ne le kot končna dejstva, zato naj učni proces vključuje matematično razmišljanje in raziskovanje, matematično argumentiranje in komuniciranje, modeliranje, postavljanje in reševanje problemov, uporabo simbolnega in formalnega jezika. Ves čas se prepletata izkustveno učenje in dialog. Skozi dejavnosti raziskovanja smo upoštevali načelo uresničevanja operativnih ciljev učnega načrta, ki so naravnani tako, da poudarjajo najprej znanja na konkretni ravni, šele nato na grafični in simbolni ravni.

V prispevku želim prikazati primer rabe t. i. trinomina (model s tremi polji trikotnika), ki učencem omogoči raziskovati, da ali preko slepih poskusov ali sistematično, samostojno in s sklepanjem, pridejo do zaključkov/rešitev (Kmetič, S. 1996). Učenčevo raziskovanje učitelj spremlja z usmerjevalnimi vprašanji, ki bodo v prispevku predstavljena kot izseki matematičnih učnih pogovorov v razredu ob raziskovanju trinomina.

Potek učnega sklopa

Učencem prvega razreda sem predstavila problemsko situacijo. Reševanja smo se lotili najprej na konkretni ravni. Ko sem ugotovila, da učenci razumejo učno izhodišče in sistem reševanja matematičnega problema, smo prešli na slikovno raven in zaključili na simbolni ravni. Tudi težavnost nalog sem skozi proces stopnjevala. Pri reševanju trinomina ne gre zgolj za reševanje problema, ampak, kot je že v uvodu povedano, za urjenje osnovnih računskih operacij na učinkovit in inovativen način. Pri delu smo sledili korakom formativnega spremljanja.

Predznanje

Učenci znajo seštevati in odštevati v številskem obsegu do 5, nekaj učencev v številskem obsegu do 10 in en učenec v številskem obsegu do 20. Učenci poznajo in na konkretni ravni uporabljajo zakon o zamenjavi. Uspešnejši učenci uporabljajo pri reševanju nalog večja števila, šibkejši računajo v številskem obsegu do 5, pri tem si nekateri še pomagajo s konkretnim materialom (link kockami).

Nekaj učencev poskuša najti več različnih poti, ki vodijo do pravilne rešitve naloge, rešujejo problemske naloge in znajo samostojno sestaviti nalogo za sošolca. Seveda to napravijo ustno.

Načrtovanje aktivnosti

Po preverjenem predznanju smo skupaj z učenci načrtovali nadaljnje delo. Ob primeru, ki smo ga imeli na tleh, so spoznali možnosti in načine reševanja in preverili svoje predznanje. Učenci so se glede na ugotovljeno predznanje odločili, v kateri skupini bodo pričeli z delom. Izbirali so lahko med modelom na tleh, plastificiranimi modeli piši–briši, modelom na interaktivni tabli. Nekateri so si pri delu pomagali s konkretnim materialom (link kocke, krožci). Ko so uspešno rešili naloge v izbrani skupini in dosegli zastavljeni cilj, so se lahko sami odločili, v kateri skupini bodo svoje znanje nadgradili. Nekateri so pri menjavi skupin potrebovali pomoč in usmerjanje učitelja. Če so sami ugotovili, da so izbrali skupino s pretežkimi ali prelahkimi nalogami, so jo lahko zamenjali.

Ob vsaki nalogi so ugotavljali, kaj že vedo, kaj jim naloga pove, kako se lahko lotijo reševanja naloge, kaj bi lahko naredili drugače, da bi prišli do iste rešitve. Ugotavljali so, ali obstaja več poti do rešitve in ali lahko po enaki poti rešijo tudi druge naloge.

Zbiranje dokazov

Dokazi o učenju so za prvošolce spremljanje njihovega dela in njihov komentar ob delu ter rešeni učni listi. Te so zbirali ves čas učnega procesa v svojih mapah. Ob zapisih in modelih trinomina so razlagali strategije reševanja nalog. Dokazi so tudi posnetki, ki so nastali med raziskovanjem.

Povratna informacija

Povratne informacije učitelja, ki so jih dobivali ves čas procesa, so jih usmerjale v nadaljnje raziskovanje. Med delom pa niso prejeli le povratne informacije učitelja, ampak tudi povratno informacijo sošolcev. Ker so to prvošolci, so bile povratne informacije ustne.

Samoevalvacija

Ob koncu so sami razmislili o svojem delu in odgovorili na nekaj vprašanj, ki so predstavljena na koncu prispevka.

Slika 1: Primer reševanja

Primer razlage strategije reševanja

Učenka: Položim tri, ker je 1 + 2 = 3. Tukaj moram položiti še tri pike, da jih bo skupaj pet. Manjka še število v okencu, to je štiri.

Učiteljica: Zakaj si se odločila za štiri?

Učenka: Ker so tukaj tri rdeče pike in tukaj ena rumena, skupaj so 4.

Učiteljica: Kje si začela reševati nalogo?

Učenka: Jaz sem najprej položila število 3.

Učiteljica: Ali bi lahko pričela še kje drugje? Kako bi to preverila?

Učenka: Vse to, kar sem nastavila, bi dala proč in začela drugje.

Tokrat je učenka najprej položila rdeče krogce in na koncu je ugotovila, da je dobila enako rešitev.

Cilji, ki smo jim sledili

Učenci:

- znajo predstaviti problemsko situacijo z različnimi ponazorili,
- besedno in grafično rešijo probleme, ki so predstavljeni na različnih ravneh (konkretni, grafični, abstraktni),
- problem, ki so ga rešili, znajo predstaviti s svojimi besedami, interpretirati in utemeljiti,
- poznajo različne poti in strategije reševanja problemov (npr. poskusi in napake),
- znajo rešiti preprosti problem z različnimi metodami in različnimi postopki,
- izračunati neznano število na različne načine:
  – dopolnjevati (prištevati) do danega števila,
  – seštevati v primerih združevanja objektov,
  – z odštevanjem.

Potek dejavnosti v razredu

Učenci so ob problemski situaciji, ob konkretnem primeru, spoznali model trinomina, pojma polje in sosednji polji ter kvadratek-okno za vsote elementov na sosednjih poljih. Dogovorili smo se, da smo vsako polje pobarvali z drugo barvo, zaradi lažjega dogovarjanja.

Predlagali so, da bi si pri reševanju nalog, ob konkretnem modelu na tleh, lahko pomagali s kockami, pikami, števili, lahko bi se postavili v polja učenci sami …

Dogovorili smo se, da so se najprej v polja postavili sami, v nadaljevanju pa smo poskusili še s pikami.

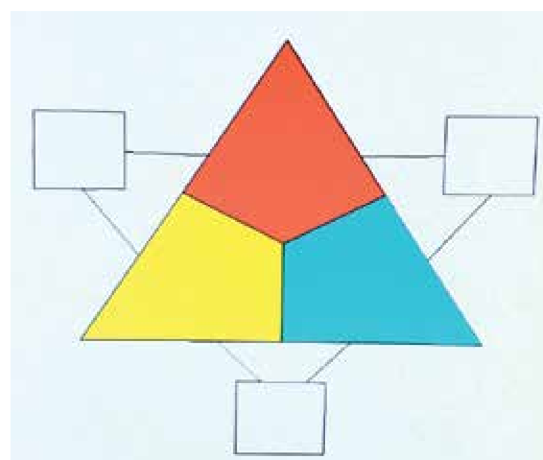
Na modelu na tleh so učenci spoznali način reševanja trinomina. Učenci so se po navodilih učiteljice postavljali v polja. Izbrani učenec je v okenca položil ustrezne kartončke s števili-vsotami števil na sosednjih poljih. Vse, kar so naredili, so tudi govorno spremljali.

Moja vprašanja, ki sem jih zastavljala učencem pri reševanju nalog: *Kaj že veš, poznaš? Kje lahko začneš? Bi lahko začel tudi kako drugače? Zakaj si postavil kartonček s številom 5 v to polje? Kaj lahko izračunaš? Kako si to izračunal?*

Po uvodnem delu so se učenci razdelili v skupine. Vse skupine so pričele z reševanjem enostavnejših primerov in nadaljevale z zahtevnejšimi (1., 2., 3. in 4. učna situacija). Učenci so samostojno prehajali med skupinami tako, da so se lahko preizkusili v vseh načinih reševanja, v vseh učnih situacijah.

1. skupina: Dela na modelu, na tleh.
2. skupina: Dela na interaktivni tabli.
3. skupina: Dela v dvojicah, na plastificiranih podlagah.
4. skupina: Delo na učnem listu.

Slika 2: Trinomino na tleh učilnice

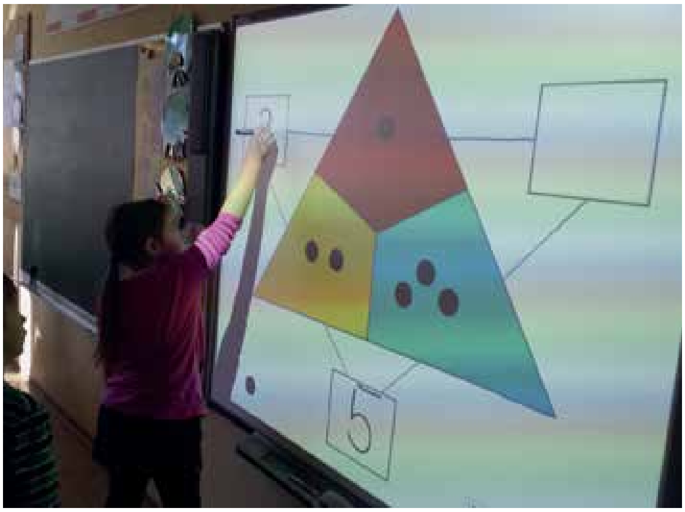


Slika 3: Plastificirani model

Sliki 4, 5: Delo na modelu na tleh

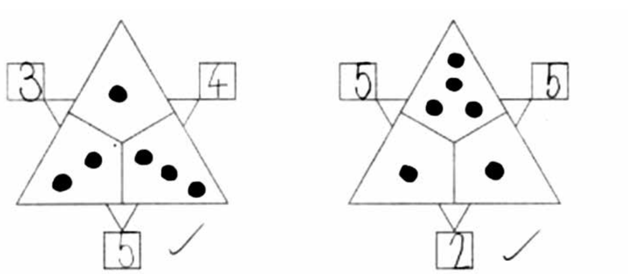
1. UČNA SITUACIJA

Vsa polja so zapolnjena s pikami, modeli ali števili, manjkajo vsote.



Slika 6: Reševanje trinomina na interaktivni tabli

Slika 7: Reševanje na podlagah piši-briši



Slika 8: Primer reševanja na učnem listu

Učenka, ki je delala pri tabli, je takole govorno spremljala svoje delo:
Napisala sem 3, ker je 2 + 1 = 3. Tukaj sem napisala 5, ker je 2 + 3 = 5; 3 + 1 = 4, zato bom napisala 4.

Ugotovitve

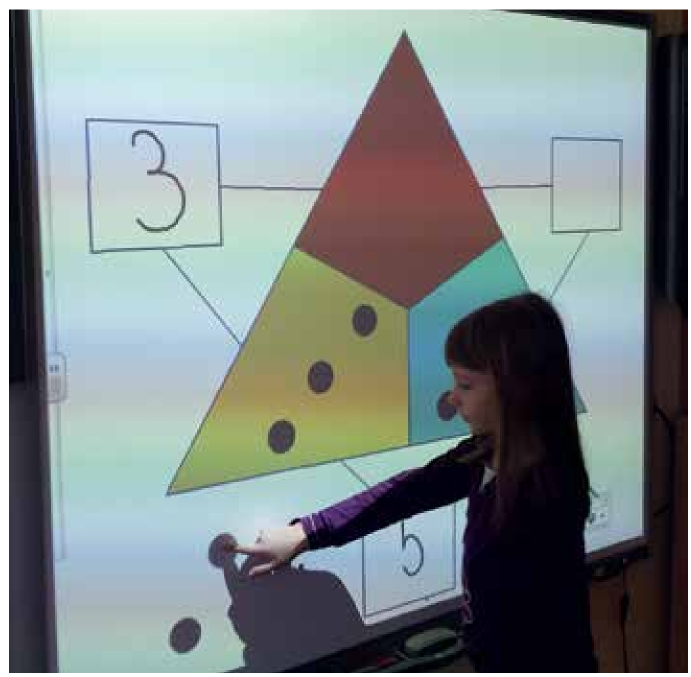
Pri utemeljevanju je večina učencev predstavila število v okencu kot vsoto števil v dveh sosednjih poljih. Zelo malo učencev je preštevalo otroke, kocke, pike. Ob tem je treba povedati, da imajo učenci zelo dobre številske predstave do števila 5 in nekoliko slabše do števila 10.

Kadar so učenci imeli vsa polja trinomina polna, niso imeli težav z nastavljanjem števil v okencih, ki so vsote. Ugotovili so tudi to, da v takšnih primerih ni pomembno, kje začnejo, katero število vpišejo najprej.

S takšnimi primeri, tudi pri kasnejšem reševanju nalog na učnih listih, niso imeli težav.

2. UČNA SITUACIJA

Poznajo eno vsoto in sta zapolnjeni dve polji ali poznajo dve vsoti in je zapolnjeno eno polje.



Sliki 9, 10: Različni načini reševanja

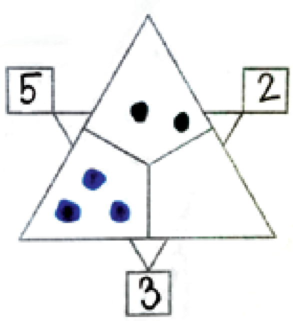
 Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

Ugotovitve

Pri reševanju si je večina učencev pomagala z dopolnjevanjem do danega števila. Nekaj učencev v razredu pa je nalogo rešilo s štetjem. V teh primerih so nekateri učenci imeli manjše težave. Težava se je pojavila zato, ker niso razmislili, ampak so se naloge lotili na slepo. Ali pa so v polje, kjer so manjkale pike narisali toliko pik, kot je bilo napisano v okencu, ob modelu in niso upoštevali, da je število, ki je zapisano vsota pik v sosednjih poljih. Vse te naloge smo napravili najprej s konkretnim materialom, sledilo je reševanje nalog na učnem listu.

3. UČNA SITUACIJA

Eno polje je zapolnjeno, v dveh okencih sta vsoti. Rešitev naloge je eno prazno polje.



Slika 11: Primer rešene naloge, kjer je rešitev polje brez pik.

Moje vprašanje: *Zakaj je eno polje prazno?* Razmišljanje učenca: *Ničesar ne narišem (pokaže), ker morajo biti v obeh poljih skupaj 3, te pa so že narisane (pokaže). Tukaj jih je skupaj 5 in tu pa 2 (pokaže).*

Ugotovitve

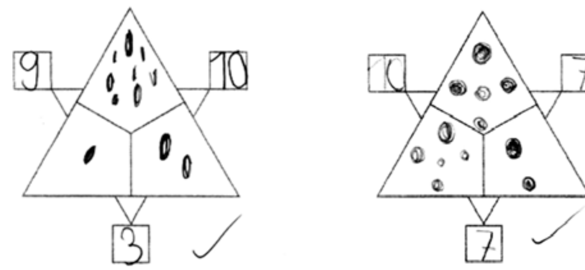
Vsi, razen treh učencev, so to nalogo uspešno rešili. Trije učenci, ki je niso pravilno rešili, so imeli težave že pri prejšnji učni situaciji. V prazno polje so narisali toliko predmetov, kot je bilo zapisano v okencu na desni strani, dve piki. Šele nato, ko sem jih opozorila, kaj pomeni število, ki je zapisano v okencu, so ugotovili, da je eno polje prazno.

4. UČNA SITUACIJA

Samostojno sestavijo nalogo za sošolca.

Vsi učenci so samostojno in pravilno sestavili po eno nalogo. Učenci, ki so imeli šibko predznanje, so sestavljali naloge 1. in 2. tipa. Uspešnejši učenci pa so sestavljali naloge 2. in 3. tipa.

Pri sestavljanju naloge so si trije pomagali s poskušanjem, ostali so se naloge lotili tako, da so najprej narisali pike v polja, nato pa so zapisali števila-vsote v okenca. Tisti, ki so se naloge lotili s poskušanjem, so vpisali števila v prazna okenca ob trinominu in nato risali pike v trinomino. Trije učenci so napisali nalogo s števili do 10. Dva primera sta bila pravilna, enega pa je učenka po moji povratni informaciji sama popravila. Število pik je bilo na poljih pravilno, števila-vsote pa niso bila ustrezna. V desnem okencu je zapisala število 10, spodaj pa 1. Moja povratna informacija je bila: *Poskušaj rešiti to nalogo, lahko si pomagaš s kockami.*



Sliki 12, 13: Naloga za sošolca

Samoevalvacija po opravljenem delu

Učencem sem zastavila vprašanja:
- Kaj se ti je zdelo najtežje?
- Kje si najbolj užival?
- Kaj ti je bilo najbolj zanimivo?
- Kako se počutiš zdaj, ko si končal delo?

Nekaj razmišljanj, ki so jih povedali učenci:
- Najtežji je bil tisti primer, ki je imel zelene pike, ker nisem vedel, kaj je zgoraj (primer, ki ima eno polje prazno). Najbolj mi je bilo všeč, ko smo se sami postavljali v veliki trinomino in smo polagali kartončke. Vesel sem, ker sem imel vse prav.
- Najtežje mi je bilo, ko smo delali sami na drugem listu, potem pa sem vzela link kocke in sem znala. Na prvem listu jih nisem potrebovala. Najbolj sem uživala, ko smo delali na svoje trinomine, ko smo lahko pisali s flomastri in brisali. Počutim se dobro, ker znam rešiti trinomino.
- Meni je bilo všeč, ker sem moral misliti. Nič mi ni bilo težko. Še bi reševal takšne naloge.

Nadaljnje delo, novi izzivi

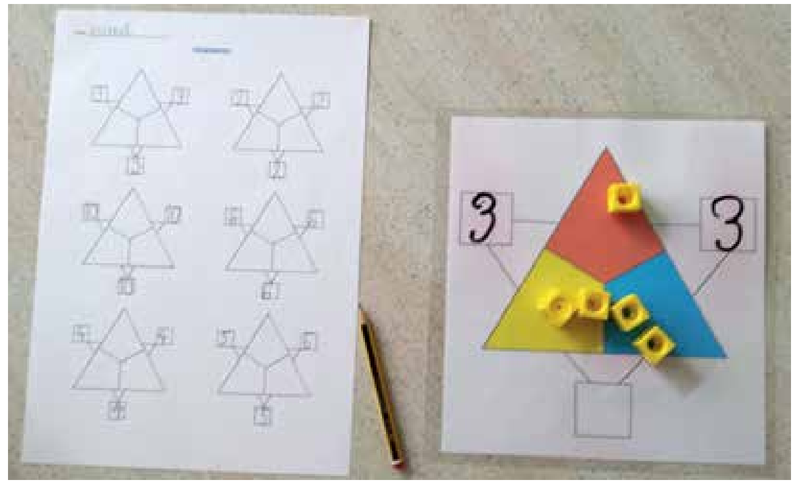
Učenci, ki so imeli napake, so te naslednjič popravili in rešili še nekaj podobnih nalog. Delo je poteklo v paru, da so lahko drug drugemu pomagali, če so pomoč potrebovali. Če so želeli, so si pri delu lahko pomagali z link kockami. Večina učencev je brez težav popravila napake. Pomoč so poiskali pri sošolcu, nekaj pa jih je potrebovalo pomoč učitelja.

Tisti učenci, ki pa so imeli vse prav, so dobili kot izziv novo vprašanje:

Ali bi znal rešiti trinomine, v katerih so v vseh okencih vpisana enaka števila?

Dogovorili smo se, da so bila števila v okencih v številskem obsegu do 10.

Učenci so dobili prazen list, na katerega so sami vpisovali števila in risali pike. Za pomoč so lahko vzeli plastificirane trinomine in link kocke.



Sliki 14, 15: Reševanje novega izziva

Moje vprašanje po opravljenem delu:

Dobro poglej primere, ki so se dali rešiti, in primere, ki se niso dali rešiti. Kaj ugotoviš?

Ugotovitve učencev:

- Če šteješ po 2, gre, pri tistih gre.
- Pri 1 ne gre, pri 2 gre, pri 3 ne gre, pri 4 gre … Pri vsakem drugem številu gre.
- Če štejem 2, 4, 6, 8, 10 - pri teh številih gre rešiti, lahko narišem pike.
- Gre pri tistih, ko štejemo po dva naprej. Gre pri 0, 2, 4, 6, 8, 10. Pri 1, 3, 5, 7, 9 ne gre.

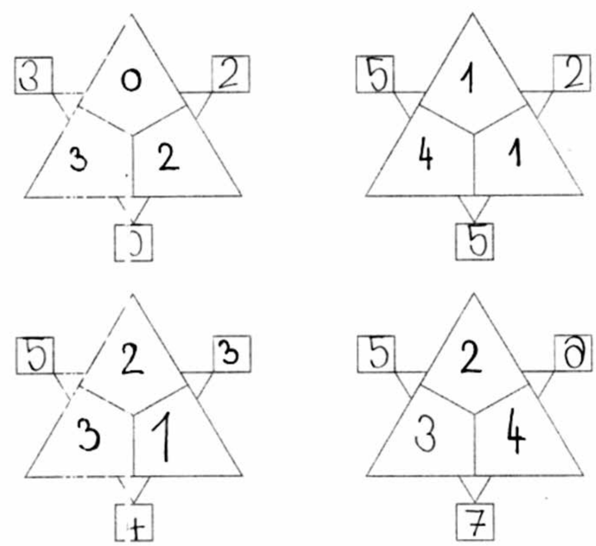
Moja povratna informacija na eno od ugotovitev: *Alen, odlično si reševal naloge, preveril si vsa števila. Tudi to, kar si ugotovil, drži. Morda še naslednjič pogledaš, kako je, če bi bili v okencih zapisani dve enaki števili in eno drugačno. Npr. v dveh okencih 4 in v enem 6.*

Ugotovitve

Večina učencev, ki je reševala te naloge, si je pomagala s konkretnim materialom. Naloge so reševali tako, da so na trinomine, ki so jih imeli na mizi, vpisali najprej števila, nato pa so polagali kocke. Ko so ugotovili, da so našli pravo rešitev, so jo prerisali na učni list. Osem učencev je preizkusilo vse možnosti (od 1 do 10) in pravilno rešilo vse primere. Dva učenca sta rešila šest primerov in imela prav tako vse prav. Trije učenci so imeli eno napako. Dva sta imela več kot eno napako. Dva pa nista razumela navodil in nista vedela, kaj bi sploh počela.

Izpostavila bi problem števila 0, ki je na konkretnem nivoju prazno mesto, zato povzroča težave. V naslednji fazi, ko so se s trinominom ukvarjali na nivoju števil in zapisovali 0, je bilo manj težav.

V nadaljevanju smo kocke zamenjali s števili.



Slika 14: Primer s števili

Ugotovitve

Učenci niso imeli težav z reševanjem nalog. Za delo so bili zelo motivirani, rešili so veliko primerov.

V zvezek so izpisali številske enakosti za vsak trinomino. Npr. 2 + 0 = 2; 0 + 3 = 3 in 2 + 3 = 5.

Po opravljenem delu so dobili mojo povratno informacijo. Primer PI: *Mia, odlično si reševala naloge s števili. Pazi na število 6. Pomagaj si s kartončkom, ki ga imaš na mizi, da se število ne bo več »obračalo«. Prihodnjič lahko še sama poskusiš sestaviti kakšno nalogo za sošolca.*

Zaključek

Reševanje problemov je proces, ki omogoča učencem razmišljanje. Pri reševanju matematičnih problemov učenci veliko odkrijejo o problemu, če ga samostojno rešujejo, če se pri reševanju odločajo o poti reševanja in hkrati odkrivajo, kaj jih bo pripeljalo do rešitve. Spretnosti in znanje, kar je potrebno v procesu reševanja problemov, vključujejo tako ustrezno vsebinsko znanje, miselne spretnosti, kot tudi generalizacijo, zmožnost spopasti se z neznanim, ter spretnosti samorefleksivnega mišljenja, kar se lahko razvije le v spodbudnem učnem okolju. Učitelj pri tem postopoma vodi učence k raziskovanju in evalviranju poti reševanja problemov in spodbuja samorefleksivno mišljenje.

Predstavljeni primeri s trikotniki (TRINOMINO) otroku omogočijo, da preko slepih poskusov ali sistematično, npr. pričeti z največjim ali z najmanjšim številom, sam z lastnim raziskovanjem in s sklepanjem pride do rešitve. Učenci so se srečali z različnimi izzivi na osnovi istega učnega modela. Tako so spoznali, da ni vsak problem rešljiv in da so rešitve odvisne od izbire števil. Učitelj ima pri takšnem delu več možnosti za opazovanje posameznega učenca in za zbiranje dokaznega gradiva o napredku razreda in posameznikov. Evidentira lahko uporabo strategij oz. načine sklepanja posameznih otrok in lahko odkrije nevralgične točke kot je že omenjena ugotovitev, kako je na konkretnem za otroke količina nič manj razumljiv pojem, a je presenetljivo manj problemov, ko je količina 0 stvari predstavljena s simbolom. ■

Viri

Cotič, M. (2012). Reševanje realističnih problemov na začetku šolanja. V: *Zbornik prispevkov Konferenca o učenju in poučevanju matematike.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://pefprints.pef.uni-lj.si/2027/1/Konferenca_o_ucenju_matematike.pdf (pridobljeno 1. 9. 2016).

Kmetič, S., Forbisher, L. (1996). *Izzivi za mlade matematike: izzivi za učence, učitelje in starše.* Maribor: Obzorja.

Mršnik, S., Novak, L. (2014). *Samorefleksivno mišljenje in formativno spremljanje pri reševanju matematičnih problemov.* Konferenca KUPM, 2014.

Wittmann, E. C. (2012). Practicing basic skillls in a productive way. V: *Zbornik prispevkov KUPM*, 2012. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.zrss.si/pdf/zbornikpovzetkovkupm2012.pdf (pridobljeno 12. 3. 2014).

Žakelj, A. (2009). *Didaktični pristopi k posodobljenemu učnemu načrtu za matematiko.* Ljubljana: Zavod za šolstvo.

Žakelj, A. et al. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika.* Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/področje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (pridobljeno 24. 5. 2012).

Matematika na konservatoriju za glasbo

Tinka Majaron
Konservatorij za glasbo in balet Ljubljana

Povzetek

Pred kratkim je dr. Miha Kos v intervjuju, objavljenem na rtvslo.si, dejal, da bi profesorji morali biti navduševalci. Profesorji matematike imamo za prikaz čarobnosti matematike veliko možnosti, saj se matematika skriva povsod okoli nas. In s čarobnostjo zagotovo lahko navdušimo. V tem članku bomo odkrili nekaj povezav z glasbo. Matematika in glasba imata veliko skupnega - za obe uporabljamo enak zapis po celem svetu (sta mednarodna jezika) in pri obeh je potrebno veliko redne vaje, če želimo biti dobri. Toda zakaj bi matematiko potrebovali (bodoči) glasbeniki? Kako prepričati dijake, da matematiko potrebujejo za glasbo? Lepote matematike jim lahko približamo z glasbo v poglavjih Realna števila, Statistika, Verjetnost, Toge preslikave, Podobnost in Kotne funkcije. Če smo seznanjeni z osnovami teorije glasbe, pri tem ne bi smeli imeti težav, saj je glasba matematika s čustvi.

Ključne besede: lepota matematike, glasba, medpredmetno povezovanje

Mathematics at Conservatoire of Music

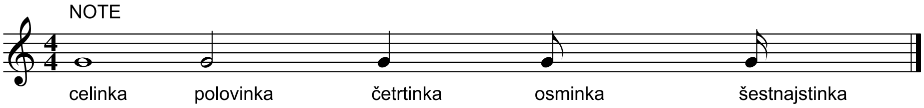
Abstract

Recently, dr. Miha Kos said in an interview published on www.rtvslo.si that professors should be exciters. We, Mathematics professors, have many opportunities for showing the magic of mathematics, because mathematics is hidden all around us. And with magic we are bound to excite.This article reveals a few of its connections to music. Mathematics and music have much in common - the same notation is used for both throughout the world (they are international languages), and both require a great deal of regular practice if one wishes to be good at them. But why would (prospective) musicians need mathematics? How to convince secondary school students that they need mathematics for their music? We can connect the beauties of mathematics to music in the chapters Real Numbers, Statistics, Probability, Isometry, Similarity, and Trigonometric Functions. If we are familiar with the basics of music theory, this should not be a problem, because music is mathematics with emotions.

Keywords: beauty of Mathematics, Music, cross-curricular integration

Uvod

Tesna povezanost med glasbo in matematiko se kaže že v imenih not glede na njihovo dolžino:



Poleg tega se notni zapis praviloma začne z ulomkom, ki pove, v kakšnem taktu je napisana skladba. Tudi višino tonov lahko zapišemo s številkami (namesto glasbene abecede C, D, E, F, G, A, H). Leta 1973 je Allen Forte v knjigi *The Structure of Atonal Music* objavil glasbeno teorijo množic ali nizov. Tonske višine je obravnaval po načelu oktavne ekvivalence in po načelu enharmonske identitete (to pomeni, da so bili zanj vsi c-ji enaki in da je bil ton cis enak tonu des in podobno). Tako je dobil sistem razredov notnih višin (pitch-classes), v katerem je tonske višine predstavil s preglednim številčnim sistemom, kot je prikazano v preglednici 1.

Poleg očitnih podobnosti med matematiko in glasbo obstaja še kopica bolj ali manj skritih povezav. V tem članku bomo odstrli tiste tančice, ki glasbo povezujejo s slovensko srednješolsko matematiko. Za razumevanje je potrebno osnovno znanje teorije glasbe.

Realna števila

Za ustvarjanje glasbe je najpomembnejša uglasitev. Pitagora je prvi matematično zapisal glasbeno lestvico. Ugotovil je, da dve struni zvenita ubrano, če sta njuni dolžini v razmerjih 1 : 2, pri čemer zazveni oktava, 2 : 3, pri čemer zazveni kvinta, ter 3 : 4, pri čemer zazveni kvarta. Na več kot štiri dele

Preglednica 1: Nizi po definiciji Allena Forteja

c	cis/des	d	dis/es	e	f	fis/ges	g	gis/as	a	ais/b	h	c
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 = 0

strune ni delil. Lestvico je sestavil s kvintnimi skoki, in sicer za en navzdol in pet navzgor, ker je tako dobil vse »ubrane« intervale:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1},\ 1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{1},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{4},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

Dobljene vrednosti je z množenjem ali deljenjem z 2 (oktavni premik) prestavil v osnovno oktavo, to je od 1 do 2. Tako je prišel do glasbene lestvice:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128},\ 2$$

Ta zapis pomeni, da moramo frekvenco osnovnega tona (1) pomnožiti z $\frac{9}{8}$, da dobimo drugi ton, z $\frac{81}{64}$ za tretji ton in tako naprej do oktavne ponovitve prvega - množenje osnovne frekvence z 2. Oglejmo si še razdalje med dvema sosednjima tonoma Pitagorove lestvice (dobimo jih z deljenjem):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & \frac{9}{8} & & \frac{81}{64} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{27}{16} & & \frac{243}{128} & & 2 \\ & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & \end{array}$$

Okrog leta 20 pr.n.št. je Didimos z delitvijo strune tudi na petine dobil lestvico čiste uglasitve:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & \frac{9}{8} & & \frac{5}{4} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{15}{8} & & 2 \\ & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} & \end{array}$$

Pri obeh lestvicah naletimo na težave, če želimo vpeljati še višaje in nižaje (črne tipke na klaviaturi), saj dva poltona nista enaka kot en cel ton (pri lestvici čiste uglasitve pa imamo celo dva različna cela tona). Kako definirati glasbeno lestvico, da se bo na eno glasbilo lahko igralo vse durove lestvice? Eno oktavo moramo razdeliti na dvanajst enakih poltonov. V ta namen moramo iz množice racionalnih števil prestopiti v množico iracionalnih števil, saj moramo za tak polton rešiti enačbo $x^{12} = 2$. Iskano število je $\sqrt[12]{2}$. Dobimo enako temperirano lestvico:

$$1,\ \sqrt[12]{2^2},\ \sqrt[12]{2^4},\ \sqrt[12]{2^5},\ \sqrt[12]{2^7},\ \sqrt[12]{2^9},\ \sqrt[12]{2^{11}},\ \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

Pri učenju o realnih številih lahko glasbo vključimo še na en način. Če vsaki števki priredimo nek ton, lahko slišimo razliko med racionalnimi in iracionalnimi števili. Število $\frac{1}{4} = 0{,}25$ bi bilo v takem zvočnem zapisu sestavljeno le iz treh tonov. Pri številu $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ bi se v nedogled ponavljalo zaporedje tonov 2, 8, 5, 7, 1, 4. Pri številih $\sqrt{2}$ ali π pa bi bil zvočni zapis povsem nepredvidljiv, brez kakršnih koli ponovitev.

Statistika in verjetnost

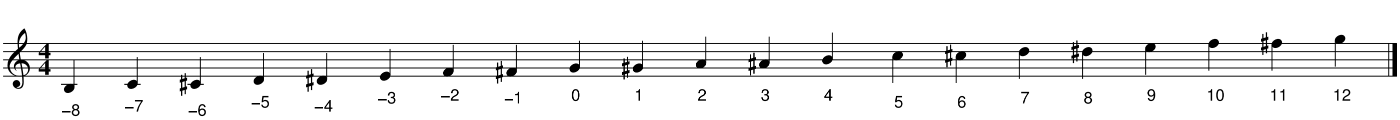
Statistična analiza skladbe nam lahko razkrije značilnosti skladateljevega komponiranja ali značilnosti ljudskih pesmi z nekega področja. Opazovali bomo značilnosti slovenske ljudske pesmi Marko skače. (Glejte Sliko 1.)

Najosnovnejša informacija o melodiji je njen obseg ali ambitus, to je interval med najvišjim in najnižjim tonom. V našem primeru je obseg 7 poltonov (čista kvinta). Obseg se uporablja kot merilo za razvitost melodije. Podobno kot nize iz uvoda lahko vsakemu tonu priredimo številsko vrednost na način, kot je prikazano na sliki 2.

Za Marko skače dobimo zaporedje tonov: –1, 2, 2, 2, –1, 2, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5, –5, –3, –1, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5, –5, –3, –1, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5.

V melodiji so toni bolj ali manj razpršeni okrog njihove srednje vrednosti. Iz zgornjih vrednosti za Marko skače dobimo srednjo vrednost $\overline{x} = -\frac{54}{36} = -1,5$. Standardni odklon tonov je merilo za razgibanost melodije. Večje vrednosti standardnega odklona ustrezajo večji gibljivosti tonov okrog srednje vrednosti. Nekateri avtorji enačijo stopnjo razgibanosti s stopnjo razvitosti. Za Marko skače dobimo $\sigma = \sqrt{\frac{241}{36}} = 2,587$.

Slika 1: Marko skače



Slika 2

Zastopanost posameznega tona v melodiji pove njegova pogostost (verjetnost pojavitve), ki je enaka deležu ponovitev tega tona. Za Marko skače dobimo:

ton	–5	–3	–1	2
frekvenca	8	8	10	10
pogostost	$0,\overline{2}$	$0,\overline{2}$	$0,\overline{27}$	$0,\overline{27}$

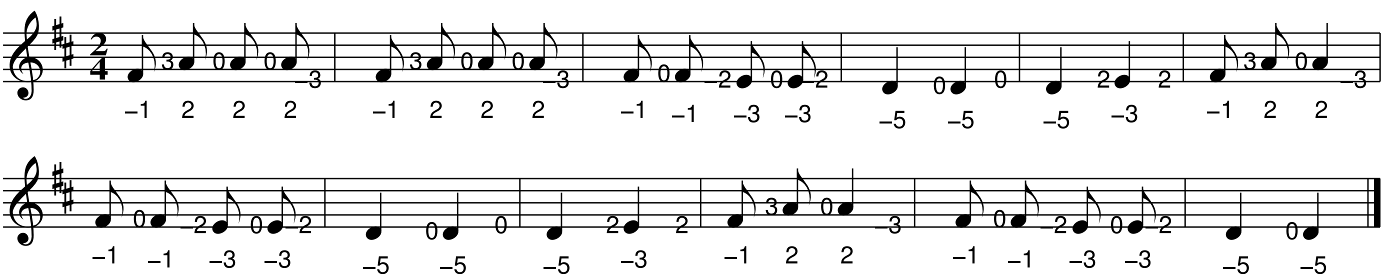
Entropija je pričakovana informacija o pojavljanju tonov pri naključnem izbiranju tona,

$$H = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i,$$

pri čemer je p_i verjetnost pojavitve (pogostost) posameznega tona, k pa število tonov. Entropijo merimo v bitih in jo lahko privzamemo kot merilo za razvitost melodijske zgradbe. Za Marko skače dobimo:

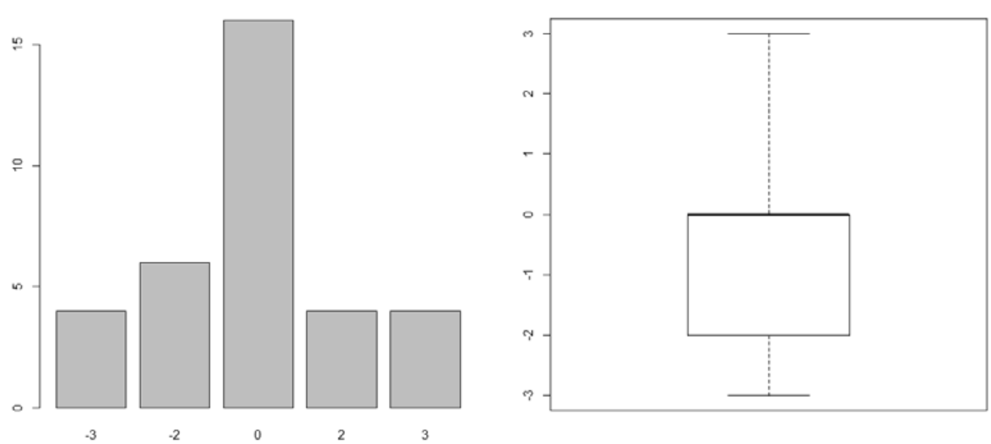
$$H = -0,\overline{2}\cdot\log_2 0,\overline{2} - 0,\overline{2}\cdot\log_2 0,\overline{2} - 0,\overline{27}\cdot\log_2 0,\overline{27} - 0,\overline{27}\cdot\log_2 0,\overline{27} = 1,9911 \text{ bit}.$$

Že omenjeni parametri govorijo o zgradbi melodije, glasbeni slog pa določajo intervali med toni. Intervale merimo v poltonih in jih dobimo kot razliko ustreznih sosednjih vrednosti za tone. Za Marko skače dobimo zaporedje intervalov: 3, 0, 0, –3, 3, 0, 0, –3, 0, –2, 0, –2, 0, 0, 2, 2, 3, 0, –3, 0, –2, 0, –2, 0, 0, 2, 2, 3, 0, –3, –2, 0, –2, 0.



Slika 3: Marko skače – zaporedje not in intervalov

Za glasbeni slog sta pomembni asimetrija in kurtozis intervalov, a to presega učni načrt na srednji stopnji. Namesto tega si oglejmo porazdelitev intervalov in narišimo škatlo z brki za Marko skače.



Slika 4: Marko skače – porazdelitev intervalov in škatla z brki

Vidimo, da je polovica vseh intervalov med intervaloma –2, to je velika sekunda navzdol, in 0, to je čista prima. Na splošno je značilno, da prevladujejo majhni intervali in da je medčetrtinski razmik okrog 2, kot je tudi v tem primeru.

Toge preslikave in podobnost

V glasbi najdemo tudi vse toge preslikave. Tudi te si bomo ogledali na slovenski ljudski pesmi Marko skače. Začnimo s premikom. Osnovni premik si lahko predstavljamo kot transponiranje v višjo ali nižjo lego (na primer iz D-dura v C-dur). Še bolj zanimiv je premik v času, tako dobimo kanon. Spodaj je zapisano, kdaj vstopi naslednji glas – Marko skače lahko zapojemo kot štiriglasni kanon. (Glejte Sliko 5.)

Lahko ga zapojemo tudi kot retrogradni kanon - ena skupina poje, kot piše, druga pa od zadaj naprej. Matematično gre za zrcaljenje čez vertikalno premico skozi sredino skladbe (če je skladba zapisana v eni vrstici). Zapišimo osnovno in zrcaljeno melodijo, tokrat brez besedila. (Glejte Sliko 6.)

Slika 5: Marko skače – kanon

Slika 6: Marko skače – retrogradni kanon

Slika 7: Marko skače – zrcalni retrogradni kanon

Slika 8: Marko skače – proporcionalni kanon

Če osnovno melodijo zavrtimo okrog sredine skladbe za 180°, dobimo prav poseben kanon. Pri tem kanonu prvi glas poje osnovno melodijo, drugi pa od zadaj naprej, a z notami, obrnjenimi na glavo. (Glejte Sliko 7.)

Nazadnje si oglejmo še razteg. Dobimo ga, če skladbo izvajamo hitreje ali počasneje (običajno s faktorjem 2). V našem primeru bi Marko skače en glas lahko pel počasneje - zapisano v štiričetrtinskem taktu, drugi pa kot običajno (alla breve). Drugi glas skladbo zapoje dvakrat. Tako dobimo proporcionalni kanon. Matematično gledano je prvi glas podoben drugemu.

Prava zakladnica kanonov vseh naštetih vrst je glasbena zapuščina Johanna Sebastiana Bacha. (Glejte Sliko 8.)

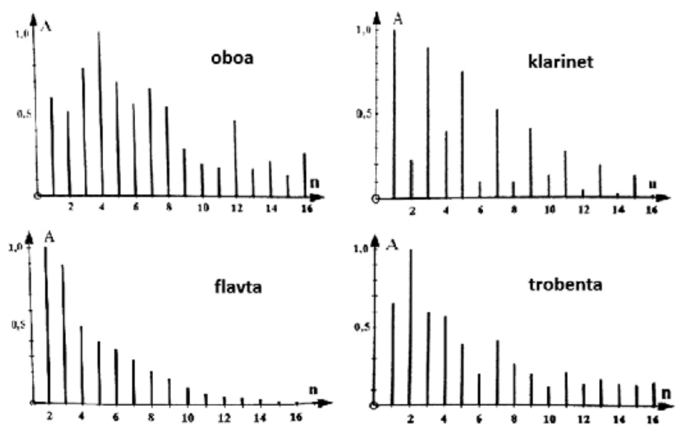
Kotne funkcije

Zvok nastane z nihanjem. Oddaljenost od središčne lege je pri tem nihanju za glasbila s strunami in za glasbila, pri katerih zvok nastane z zrakom, periodična funkcija. To v resnici sledi iz valovne enačbe za zvok. Vsako periodično funkcijo pa lahko zapišemo s Fourierovo vrsto. Za opisano oddaljenost od središčne lege lahko v zelo poenostavljeni obliki zapišemo:

$$x = A_1 \cdot \sin(2\pi v t) + A_2 \cdot \sin(2 \cdot 2\pi v t) + \ldots + A_3 \cdot \sin(i \cdot 2\pi v t) + \ldots,$$

pri čemer v predstavlja osnovno frekvenco tona. Vidimo, da so poleg osnovne frekvence prisotni tudi vsi njeni večkratniki. Večkratniki osnovne frekvence predstavljajo alikvotne tone. Prvi alikvotni ton je oktavna ponovitev osnovnega, drugi je kvinto višji od drugega, tretji je kvarto višji od drugega in tako naprej. S harmonsko ali zvensko analizo lahko izračunamo amplitude (Fourierove koeficiente) A_1, A_2 …, ki nam povejo, kako močno je zastopan posamezen alikvotni ton. Vrednosti amplitud praviloma padajo in postanejo od nekega člena naprej zanemarljivo majhne. Tako lahko teoretično neskončno vrsto v praksi obravnavamo kot končno vrsto.

Vrednosti amplitud so odvisne od glasbila in ravno te vrednosti določajo barvo zvoka (tako prepoznamo različna glasbila, ki jih slišimo na radiu). Običajno jih predstavimo s stolpičnim diagramom, ki ga imenujemo harmonski ali zvenski spekter. Pri tem vnašamo relativne vrednosti amplitud - privzamemo, da je $A_1 = 1$, ostale amplitude pa izrazimo z deležem osnovne amplitude. Na spodnji sliki je nekaj zvenskih spektrov.



Slika 9: Zvenski spekter nekaterih glasbil

Za konec le še zanimivost: solopevci se naučijo ojačati višje alikvotne tone, zato jih lahko slišimo tudi ob glasnem orkestru.

Se zdaj strinjate, da je glasba matematika s čustvi? Želim vam veliko navdušenih dijakov. ■

Literatura

Majaron, T. (2003). *Matematika glasbenih lestvic – diplomsko delo*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

Majaron, T. (2016). *Vzorci v glasbi – magistrsko delo*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

Mihelčič, P. (2000). *Teorija glasbe*. Ljubljana: DZS.

Pavlič, G. (1999). *Bach, mojster Jaka in matematika*, Življenje in tehnika, 6, str. 69–72.

Ravnikar, B. (2001). *Osnove glasbene akustike in informatike*. Ljubljana: DZS.

Enačba sence ravne palice v treh ravninah

Marijan Prosen

Povzetek

Članek predstavi izpeljavo enačbe sence v treh značilnih ravninah, to je v vodoravni, navpični in ekvatorialni ravnini.

Ključne besede: senca palice, enačba sence palice, vodoravna, navpična in ekvatorialna ravnina.

Equation for the Shadow of a Straight Stick on Three Planes

Abstract

The article presents the derivation of an equation for shadow on three characteristic planes, namely the horizontal, vertical and equatorial plane.

Keywords: shadow of a stick, equation for the shadow of a stick, horizontal, vertical and equatorial plane.

Uvod

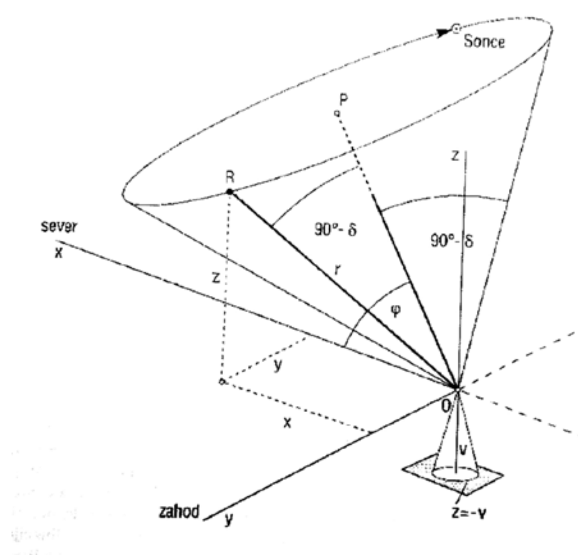
S senco, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica meče na različne ravnine, sem se veliko ukvarjal (1981-2017). Tu navajam del svojih raziskav, in sicer svojo izpeljavo enačbe krivulje, po kateri se med dnevom premika konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice v omenjenih treh ravninah. Enačbe iskanih krivulj sem poimenoval enačbe sence.

Precej razmišljanja, poskušanja in tudi matematičnega dela je bilo, predno sem ugotovil enačbe krivulj v teh ravninah. Do danes še nisem opazil, da bi senco, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica meče na te tri ravnine, kdo tako obravnaval, kot jo sam obravnavam. Vse tri enačbe sence sem izpeljal po lastni zamisli z vektorji na osnovi srednješolske matematike, zato lahko zapišem, da sem jih odkril. S tem člankom jih zavarujem. Prvo enačbo sence sem odkril leta 1994, drugi dve leta 2017.

Osrednji del

Recimo, da želimo ugotoviti, kakšno krivuljo med dnevom popiše konec (vrh) sence navpične od Sonca osvetljene palice (gnomona) z višino v na vodoravni ravnini v kraju (opazovališču) z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu pri znani deklinaciji δ Sonca. Za kraje v Sloveniji je φ blizu 45°, deklinacija Sonca pa se spreminja v mejah od $-23{,}5^{\circ}$ do $+23{,}5^{\circ}$.

Vpeljemo prostorski pravokotni koordinatni sistem, ki ima koordinatno izhodišče v vrhu O navpične palice (gnomona). Pozitivno smer osi x usmerimo proti severu, pozitivno smer osi y proti zahodu, pozitivno smer osi z pa proti zenitu. Severni nebesni pol P leži v meridianski ravnini, to je ravnini (xz). Višinski kot pola P za kraje na severni Zemljini poluti je po definiciji enak geografski širini φ kraja. Navidezna dnevna pot Sonca poteka po nebesnem vzporedniku z deklinacijo δ, to je po nebesnem vzporedniku, katerega točke so za kot $(90^{\circ} - \delta)$ oddaljene od P. Sončevi žarki, ki gredo med dnevom čez vrh palice, ležijo na plašču krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi P. Kot med vektorjem $\overrightarrow{OP}$ in vektorjem $\overrightarrow{OR} = \vec{r} = (x, y, z)$ Sončevega žarka je $(90^{\circ} - \delta)$.



Slika 1: K izpeljavi enačbe plašča krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi severni nebesni pol P. Presek tega plašča in vodoravne ravnine skozi podnožišče palice (gnomona; tukaj pokončnega stožca) je stožnica, ki je pri nas v splošnem hiperbola, v drugih krajih pa tudi krožnica, elipsa ali parabola. Plašč krožnega dvojnega stožca pa preseka tudi navpično ravnino v smeri vzhod-zahod in tudi ekvatorialno ravnino. Tako dobimo kot presek plašča krožnega dvojnega stožca s tema ravninama spet stožnice.

Naj bo na vektorju $\overrightarrow{OP}$ enotski vektor $\vec{e} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, na vektorju $\overrightarrow{OR}$ pa enotski vektor $\vec{f} = (x, y, z)/r$. Najprej je skalarni produkt enotskih vektorjev

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = 1\cdot 1\cdot\cos(90^\circ - \delta) = \sin\delta,$$

nato pa tudi

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)\cdot(x, y, z)/r = x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r.$$

Enačbo ploskve, to je plašča krožnega dvojnega stožca, dobimo iz enakosti:

$$x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r = \sin\delta,$$

od koder sledi

$$r\sin\delta = x\cos\varphi + z\sin\varphi.$$

Zapisano enačbo kvadriramo, upoštevamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, in dobimo

$$(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi + z\sin\varphi)^2.$$

To je enačba plašča krožnega dvojnega stožca z odprtino $2\cdot(90^\circ - \delta)$. Presek tega plašča z vodoravno ravnino, vzporedno z ravnino (xy), pa je stožnica. Enačbo stožnice, to je krivulje, ki jo čez dan na vodoravni ravnini popiše konec (vrh) sence naše navpične palice (pokončnega stožca), dobimo s presekom plašča tega krožnega dvojnega stožca in vodoravne ravnine z enačbo $z = -v$.

1. Krivulja, ki jo določenega dne (δ) popiše konec sence navpične palice na vodoravni ravnini v kraju z geografsko širino φ, ima enačbo:

   $$\mathbf{(x^2 + y^2 + v^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi - v\sin\varphi)^2}.$$

   To je izpeljana enačba sence navpične palice v vodoravni ravnini, vzporedni z (xy) ravnino. O tej enačbi lahko razpravljamo za različne geografske širine $\varphi \geq 0$ (različne kraje) in za različne deklinacije δ Sonca (različne datume). Enačba splošno velja za vsak kraj $\varphi \geq 0$ in dan (δ) na Zemlji.

2. Namesto vrha O navpične palice z višino v si lahko mislimo vrh vodoravne palice z dolžino d, ki jo navpično zapičimo v navpično ravnino vzhod-zahod. Enačba sence v navpični ravnini vzhod-zahod, vzporedni z (yz) ravnino, za $x = d$ dobi obliko:

   $$\mathbf{(d^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta = (d\cos\varphi + z\sin\varphi)^2}.$$

3. Če pa si predstavljamo, da leži O na vrhu ravne palice z dolžino a, ki jo navpično zapičimo v ekvatorialno ravnino tako, da je palica usmerjena proti severnemu nebesnemu polu P, dobimo enačbo plašča krožnega dvojnega stožca iz enakosti skalarnih produktov

   $$\vec{e}\cdot\vec{f} = 1\cdot 1\cdot\cos(90^\circ - \delta) = \sin\delta \text{ in}$$
   $$\vec{e}\cdot\vec{f} = (0, 0, 1)\cdot(x, y, z)/r = z/r.$$

   Tako je enačba plašča krožnega dvojnega stožca $z/r = \sin\delta$ oziroma:

   $$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta.$$

Enačba sence palice v ekvatorialni ravnini za $z = -a$ dobi najprej obliko:

$$a^2 = (x^2 + y^2 + a^2)\sin^2\delta$$

in končno:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2/\mathrm{tg}^2\,\delta;}\ \delta > 0.$$

To pa je enačba krožnice z radijem (ki je hkrati tudi dolžina sence palice) $R = a/\mathrm{tg}\,\delta$ in ob enakonočjih $(\delta = 0)$ ni opredeljen, saj gre R v neskončnost, in to za vse $\varphi \geq 0$. Na ekvatorialni ravnini je namreč tega dne pot vrha sence palice neopredeljena (je ni), jeseni in pozimi pa senca palice sploh ne pade na ekvatorialno ravnino. Spomladi in poleti se vrh sence palice giblje po krožnicah, od katerih doseže R minimum ob poletnem Sončevem obratu, ko je $R = a/\mathrm{tg}\,23{,}5^\circ \approx 2{,}3\,a$. Tega dne je torej radij krožnice (dolžina sence palice) najmanjši, ostale dni pa je večji in se veča vse do neopredeljenosti ob enakonočjih.

Zaključek

Razen, ko gre za neopredeljenost, je krivulja, po kateri se giblje konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice v vseh treh ravninah, vedno stožnica (krožnica, elipsa, hiperbola, parabola), ki se le v posebno redkem primeru (in to na primer pri nas v vodoravni in navpični ravnini za $\delta = 0$) izrodi v premico (glej podpis k drugi sliki).

Navedli smo le teoretično izpeljane enačbe senc za vse tri navedene ravnine. Lahko pa z neposrednim opazovanjem sence, ki jo ravne palice mečejo na te ravnine, teorijo preskusimo tudi v praksi. Treba si je vzeti čas. Jaz sem to naredil. Veliko časa mi je vzelo, dolgo, dolgo vrsto let. ■

Literatura

Prosen, M. (2003). *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica 39. Ljubljana: DMFA in tam navedena literatura.

Prosen, M. (1995). Enačba sence. *Matematika v šoli*, 3, str. 237.

Prosen, M. (2001/2002). Kako do enačbe sence?. *Presek*, 29, str. 144–148. http://www.presek.si/29/1478-Prosen.pdf

Možnosti uporabe programa Scratch pri matematiki

Milan Hlade
Osnovna šola Koroška Bela, Jesenice

Povzetek

Medpredmetno povezovanje oziroma povezovanje znanj je čedalje pomembnejše v izobraževanju. Če k temu dodamo še uporabo sodobne komunikacijske tehnologije in aktivno vlogo učencev, medpredmetnemu povezovanju damo dodatno težo. Povezali smo matematiko in računalniške izbirne predmete v osnovni šoli – sklop programiranje. V prispevku predstavimo možnosti in načine izdelave preprostih aplikacij za utrjevanje ali učenje osnovnih računskih operacij pri matematiki s pomočjo programa Scratch. Aplikacije lahko izdelujejo učitelji sami ali skupaj z učenci osmega in devetega razreda. Namenjene so utrjevanju seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja v množici naravnih števil do 10, 20, 100 in celo v množici celih števil. Možnosti programa so velike, zato bi lahko obdelali še druga področja pri matematiki: funkcija, enačbe in neenačbe, zbiranje in predstavitev podatkov, geometrija. Pri izdelavi aplikacije prikažemo različne metode reševanja iste naloge, istega problema. Obenem prikažemo sistematičen, urejen pristop k sestavljanju aplikacije, kar je pogoj za reševanje kompleksnejših problemov. Tako izdelane aplikacije so zelo uporabne pri diferenciaciji pouka, pri pouku dodatne strokovne pomoči, pri dopolnilnem in dodatnem pouku matematike ter pri medsebojni pomoči med sošolci.

Ključne besede: medpredmetna povezava, aplikacija, matematika, računalništvo

Use of Scratch Application in Mathematics

Abstract

Interdisciplinary integration or knowledge collaboration is of increasing importance in education. By adding modern communication technology and an active role of pupils we can greatly enrich this area. We connected Mathematics and elective Computer Science subjects in primary school – the programming unit. This paper presents variations and methods of programming simple applications for training or learning basic arithmetic operations in Mathematics with the Scratch program. Applications can be made by teachers alone or together with pupils of the eighth or ninth grade. They are intended for pupils to train addition, subtraction, multiplication and division up to 10, 20, 100 and even in the set of whole numbers. The variations of this programme are vast, so it could be used for discussing other mathematical fields. By making the application we can show different methods for solving the same task or problem. At the same time, we show a systematic, organised approach to compiling this application, which is a basic condition for solving more complex problems. Such applications are helpful in differentiating instruction, providing additional professional support, teaching Mathematics to children with learning disabilities, teaching mathematically-talented pupils, etc.

Keywords: interdisciplinary integration, application, Mathematics, Computer Science

Uvod

Matematika in računalniško programiranje sta v zadnjem času neločljivo povezana. Vendar danes v osnovni šoli redko najdemo primer medpredmetne povezave med omenjenima področjema. Razlog za to delno leži v majhnem deležu ur, namenjenih programiranju v učnih načrtih računalniških izbirnih predmetov. Vendar so znanja, ki jih učenci pridobijo z medpredmetnim učenjem globlja, uporabnejša (vir 7). Mnogi menijo, da je izdelava programov, aplikacij, s katerimi računamo, za osnovnošolce prevelik zalogaj. S prihodom uporabnikom prijaznejših okolij za programiranje (Light-Bot, Scratch, Alice, Etoys …) je tudi to področje postalo zanimivejše, prijaznejše, dostopnejše.

Pri računalniških izbirnih predmetih v osmem in devetem razredu smo za učenje programiranja uporabili program Scratch. Ker so se nekateri učenci s tem programom že srečali, so ga že precej dobro poznali. Na koncu sklopa programiranje naj bi izdelali neko svojo aplikacijo,

»igrico«. Uspešnejšim učencem se je to zdelo prelahko, nezanimivo. Skupaj smo se odločili za reševanje izbranega matematičnega problema, saj so bili učenci uspešni matematiki, program pa je poleg drugih ukazov vseboval sklopa ukazov operatorji in podatki, ki sta bila za učence še posebej zanimiva. Aplikacijo naj bi predstavili mlajšim bratom ali sestram in sošolcem, ki jim je matematika povzročala težave. Izkazalo se je, da so bile izdelane aplikacije uporabne tudi pri podaljšanem bivanju in za utrjevanje znanja računskih operacij.

Programski jezik Scratch

Programski jezik Scratch je prosto dostopen program, namenjen zgodnjemu učenju programiranja. Lahko rečemo, da je osnovnošolcem pisan na kožo, saj lahko sprogramirajo že kar zahtevne igrice ali zahtevnejši program. Scratch je projekt skupine Lifelong Kindergarten Group pri MIT (Massachussets Institute of Technology) Media Lab in je namenjen otrokom od 8. do 16. leta. Z njim z veseljem programirajo tudi starejši.

Na sliki 1 vidimo uporabniški vmesnik programa, ki je preveden v slovenščino. Vmesnik je razdeljen na več področij. Omenimo le področje na levi strani, kjer lahko vidimo, kaj se med programom dogaja z različnimi elementi, figurami. To področje se pri uporabi aplikacije v celoti pokaže na ekranu. Na sredini vmesnika je polje z gradniki, bloki programa, ki jih preprosto sestavljamo v področju, ki leži na desni strani vmesnika. Funkcij vmesnika je še veliko, omenimo le spletno galerijo projektov uporabnikov, ki je zelo podobna galeriji v Geogebri.

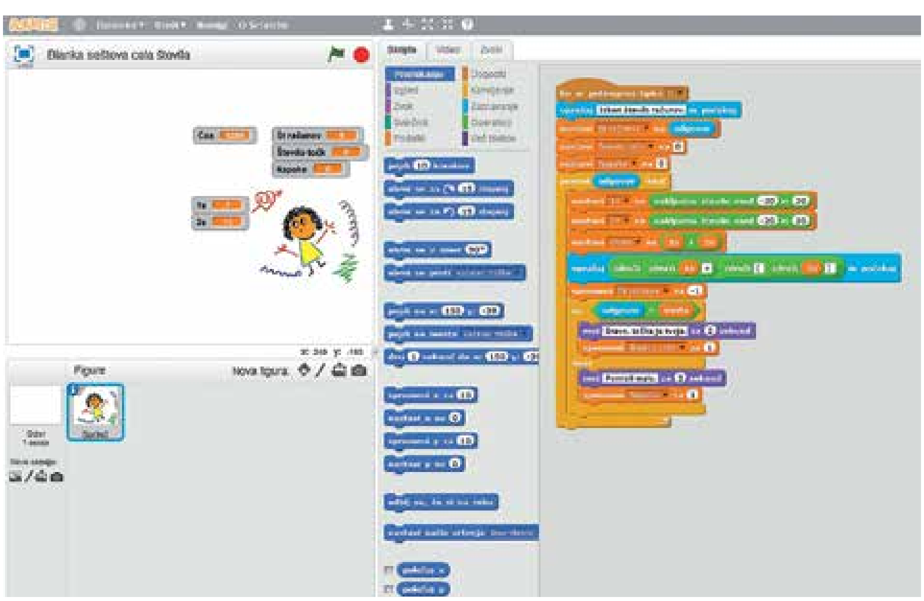
Gradniki programskega jezika so smiselno razvrščeni v sklopih: premikanje, videz, zvok, svinčnik, podatki, dogodki, krmiljenje, zaznavanje, operatorji in ostali gradniki. Podrobneje si bomo ogledali le dva sklopa, najpomembnejša za matematiko - to sta podatki in operatorji. V sklopu podatki lahko ustvarimo in poimenujemo različne spremenljivke, ki skozi program spreminjajo svoje vrednosti. V naših primerih bodo to: seštevanec, odštevanec, faktor, delitelj, rezultat, število točk, napake … V tem sklopu lahko ustvarimo tudi seznam spremenljivk. Učenci vidijo lep primer uporabe spremenljivk, saj se pri matematiki velikokrat postavi vprašanje: Kje bomo pa to potrebovali? Za matematiko še bolj zanimiv pa je sklop operatorji, kjer najdemo gradnike za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje dveh števil ali spremenljivk. Poleg teh gradnikov najdemo še gradnike za primerjanje dveh števil, logični IN, ALI in NE, gradnik, ki nam da ostanek pri deljenju, gradnik za zaokroževanje in gradnik za računanje kvadratnih korenov. Nekateri gradniki (kvadratni koren) so bili dodani šele z zadnjimi verzijami, zato lahko pričakujemo še nove gradnike, namenjene matematiki.

Izdelava aplikacije

Pri izdelavi aplikacij smo se z učenci odločili uporabiti vse možnosti programa Scratch, ne le računanje, ampak tudi komunikacijo z uporabnikom, štetje pravilnih in napačnih izračunov in beleženje časa računanja. Uporabili nismo le možnosti zvoka pa še to le zaradi časovne stiske.

Na začetku smo predvideli računanje v množici naravnih števili do 10, 20, 100 in računanje s celimi števili, zato v nadaljevanju opišemo izdelavo aplikacije za seštevanje celih števil. Pred začetkom dela smo morali nalogo sistematično razčleniti na smiselno zaključene dele. Brez takega sistematičnega pristopa se lahko hitro prikradejo napake ali pa ne najdemo rešitve problema. Za komunikacijo z učencem uporabnikom aplikacije lahko uporabimo katerikoli lik, figurico, sliko … Na OŠ Koroška Bela smo se odločili za deklico Blanko, ki je tudi maskota naše šole. Na sliki 2 vidimo zaslonsko sliko z Blanko in spremenljivkami, ki jih vidi učenec na ekranu.

Slika 2: Zaslonska slika

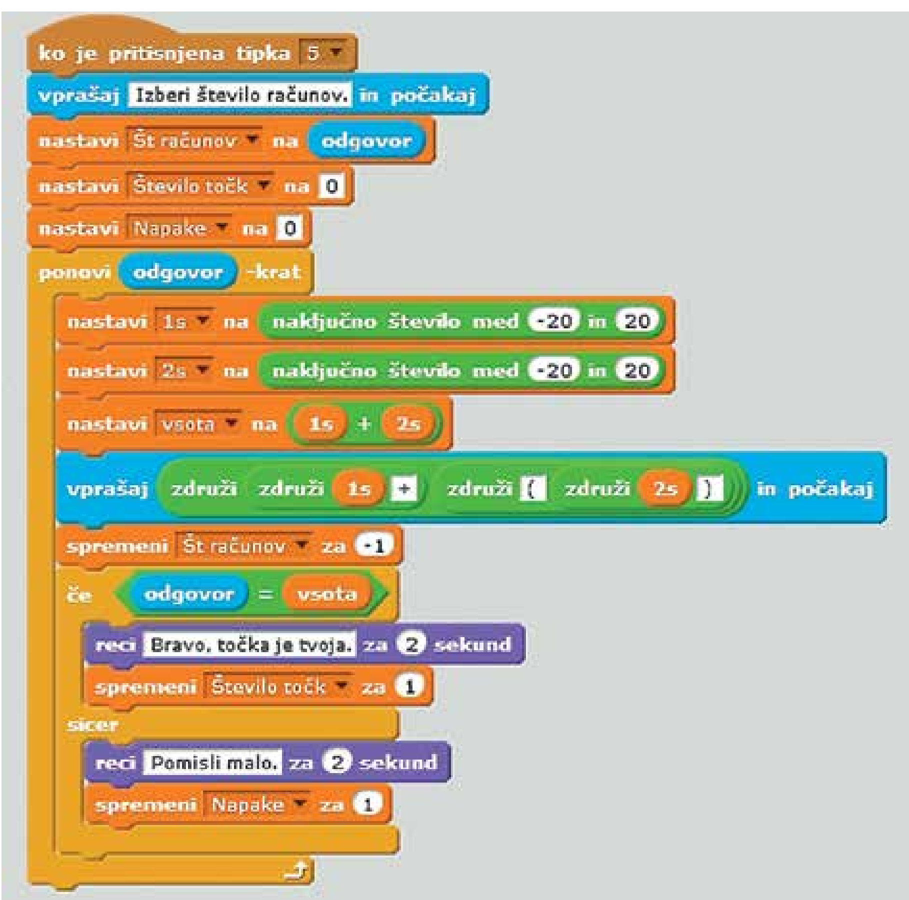


Slika 1: Uporabniški vmesnik s programom za seštevanje celih števil

Komunikacija z učencem in merjenje časa

Na sliki 3 vidimo v zgornjem delu podprogram, kjer Blanka komunicira z učencem. Taka oblika komunikacije je pomembna za učence s težavami pri računanju. Opazil sem, da je ob taki komunikaciji trema in strah pred neuspehom pri učencih manjša. Strahu pred sodobno komunikacijsko tehnologijo običajno nimajo. Kasneje lahko s spodbudnimi namigi pomagamo učencem pri računanju; lahko bi tudi za določen čas prikazali številsko premico. Obenem učenci, ki izdelujejo aplikacijo, spoznajo podprogram, ki ga lahko uporabijo v več aplikacijah. Drugi podprogram je namenjen merjenju časa. Še pred tem moramo ustvariti spremen-

Slika 3: Podprogram za komunikacijo z učencem in za merjenje časa.



Slika 4: Program za seštevanje celih števil

ljivko čas, ki se prikaže na zaslonu. Čas začnemo meriti na začetku računanja, vrednost spremenljivke čas pa se mora ob novem računanju nastaviti na nič. Vidimo, da merjenje časa izvedemo s preprosto zanko, kjer se vrednost spremenljivke poveča za 1 vsako sekundo. Seveda se mora merjenje časa ustaviti, ko je izračunan zadnji primer.

Del programa za seštevanje celih števil

Glede na zahteve, ki smo si jih sami postavili, smo v sklopu podatki ustvarili potrebne spremenljivke in jih poimenovali (Slika 4):

- Število računov – izbere učenec na začetku računanja ter se zmanjša za 1 po izračunanem primeru
- Prvi seštevanec – 1 s – izbere računalnik naključno med –20 in 20
- Drugi seštevanec – 2 s – izbere računalnik naključno med –20 in 20
- Vsota – program sešteje oba seštevanca
- Število točk – poveča se za 1, če učenec pravilno izračuna račun
- Napake – poveča se za 1, če se učenec zmoti pri računanju

Prvi del aplikacije se začne s klikom na zastavico. Drugo del pa sprožimo s klikom na tipko 5 zaradi začetka merjenja časa računanja. Učenec najprej izbere število računov, ki jih želi izračunati. Vrednost se pripiše spremenljivki *Število računov.* Zaradi možnosti večkratne uporabe aplikacije nato nastavimo spremenljivki *Število točk* in *Napake* na nič. Nato izberemo zanko, ki se ponovi tolikokrat, kolikor računov želi izračunati učenec. V zanki najprej naključno izberemo vrednosti za spremenljivki 1 s in 2 s med –20 in 20. Obe meji lahko poljubno nastavljamo. Spremenljivki *Vsota* priredimo vsoto spremenljivk 1s in 2 s. V vprašanju združimo spremenljivko 1s, znak za seštevanje, oklepaj, spremenljivko 2 s in zaklepaj. Številski izraz je na zaslonu do vnosa rezultata. Pred nadaljevanjem moramo spremenljivko *Število računov* zmanjšati za 1. Sledi ugnezdena zanka, kjer preverjamo spremenljivko *Vsota* z odgovorom. Če je odgovor pravilen, se spremenljivka Število *točk* poveča za 1, če pa je nepravilen, se tudi spremenljivka *Napake* poveča za 1. Vse skupaj opremimo s spodbudnimi komentarji. Ko se prva zanka ponovi zadnjič, se izvajanje aplikacije ustavi.

Preverjanje aplikacije

Preverjanje delovanja aplikacije poteka že sproti, vendar pravo preverjanje sledi na koncu. Po uspešnem delovanju se pri učencih običajno pojavi veliko novih idej. Naj naštejemo le nekatere, ki so se nam pojavile po izdelavi aplikacije:

- učenec lahko sam izbira velikost seštevancev,
- več računskih operacij,
- grafična predstavitev na številski premici,
- pomoč v obliki podobnega primera,
- računanje vrednosti zahtevnejših številskih izrazov …

Zaključek

Pri izdelavi opisanih aplikacij so učenci pokazali veliko ustvarjalnosti in matematičnega znanja. Rešitve posameznih korakov jim niso bile takoj na voljo, ampak so jih v večini primerov poiskali sami. Posamezno aktivnost npr. seštevanje naravnih števil do 20 sta ločeno »reševala« dva učenca, ki pa sta se lahko med seboj posvetovala. Včasih sta posamezna učenca delala skoraj enako, včasih pa sta do istega cilja prišla na različna načina. Zanimiva sta primera izdelave aplikacije deljenja naravnih števil v obsegu do 100. En učenec je izbral deljenca med 1 in 100 in delitelja med 1 in 10. Če se deljenje ni izšlo, je izbiro ponovil. Drugi učenec je najprej opravil množenje med dvema izbranima številoma med 1 in 10 in nato opravil deljenje. Pri analizi aplikacij smo pregledali slabe in dobre programske in matematične rešitve aplikacije.

Menimo, da se lahko s programom Scratch izdela še veliko preprostih aplikacij, kot so: grafična predstavitev seštevanja celih števil, poštevanka, pisno računanje, računanje z racionalnimi števili, risanje geometrijskih likov, risanje pravilnih mnogokotnikov. Menim, da bi tak način programiranja lahko vključili v kakšno od računalniških (tekmovanje Bober) ali celo matematičnih tekmovanj. ■

Viri

Bonaca, K. (2016). Bober – naloge iz matematike pri računalništvu. *Matematika v šoli*, XXII, št. 3-4, str. 63–72.

Hlade, M. (2016). *Izdelava aplikacij za računanje s programom Scratch*. Konferenca Sirikt 2016.

Lajovic, S. (2011). *Scratch*. Ljubljana: Založba Pasadena.

Repolusk, S. (2012). Priprava bodočih učiteljev matematike na povezovanje znanj pri pouku matematike, *Matematika v šoli*, XVIII, št. 1-2, str. 97–102.

http://www.monitor.si/clanek/prvi-koraki-v-programiranje2/124892/?xURL=301 (oktober, 2017)

https://scratch.mit.edu/ (oktober, 2017)

http://pefprints.pef.uni-lj.si/2005/1/Matematika.pdf (oktober, 2017)

Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

Preverjanje znanja z aplikacijo Wordwall

Anamarija Cencelj
Osnovna šola Griže

Povzetek

V sodobnem načinu poučevanja in pridobivanja znanja se postavlja vprašanje, kako naj učenci prikažejo oziroma dokažejo pridobljeno znanje. Tradicionalne oblike preverjanja znanja niso primerne za današnje generacije učencev, tako imenovane digitalne domorodce, kot jih je poimenoval Marc Prensky v svojem članku Digital Natives. Tudi formativno spremljanje spodbuja drugačne oblike preverjanja znanja. Ena izmed možnih oblik avtentičnega preverjanja znanja je uporaba spletne aplikacije Wordwall, ki je dosegljiva na spletnem naslovu http://wordwall.co.uk/. Spletna in namizna različica aplikacije učencem omogoča drugačen, prijaznejši način predstavitve oz. dokazovanja lastnega znanja s pomočjo uporabe sodobne tehnologije. Z nekaj koraki so lahko učenci pri pouku matematike sestavili zanimive interaktivne naloge na temo Pitagorov izrek. S preverjanjem in razumevanjem učnih ciljev danega poglavja, načrtovanjem nalog ter izdelavo interaktivnih nalog so učenci preverjali znanje in nadgrajevali svoje digitalne kompetence. Preprosta izdelava križank, parov, vislic in več kot 30 ostalih iger v interaktivni obliki, izdelanih v manj kot minuti, ki so dosegljiva učencem na vseh sodobnih napravah, je dovolj dober razlog, da z enostavnim in kakovostnim programom ustvarjamo kreativno in spodbudno učno okolje za svoje učence in dijake.

Ključne besede: Wordwall, preverjanje znanja, igre, digitalni domorodci

Knowledge Assessment with Wordwall Application

Abstract

In the contemporary method of teaching and acquiring knowledge the question arises as to how pupils should demonstrate or prove the knowledge they have acquired. Traditional forms of knowledge assessment are not suitable for today's generations of pupils, the so-called digital natives, as referred to by Marc Prensky in his article "Digital Natives". Formative assessment also promotes different forms of knowledge assessment. One potential form of authentic knowledge assessment is the use of the Wordwall online application, which is accessible on the website http://wordwall.co.uk/. The online and desktop version of this application enables pupils to demonstrate or prove their own knowledge in a different, friendlier way by using modern technology. In just a few steps pupils were able to prepare interesting interactive tasks during Mathematics class on the topic of the Pythagorean theorem. By assessing and understanding the learning objectives of a given chapter, by planning tasks, and by making interactive tasks the pupils assessed their knowledge and upgraded their digital competences. The easy-to-make crossword, match up, hangman and more than 30 other games in interactive form, made in under a minute and accessible to pupils on all modern devices, is a good enough reason to set up a creative and stimulating learning environment for our pupils and secondary school students with this easy-to-use and quality computer program.

Keywords: Wordwall, knowledge assessment, games, digital natives

Uvod

Danes je v šolah in drugod pri uporabi IKT velika ločnica med mlajšo in starejšo generacijo. Mnogo starejših se še vedno navaja na uporabo sodobne digitalne tehnologije, mladi pa si vsakodnevnega življenja brez modernih visokotehnoloških rešitev ne znajo predstavljati. Prav je, da jim omogočimo uporabo IKT tudi pri učenju.

Marc Prensky v svojem članku Digital Natives, Digital Imigrants (Prensky, 2001) opisuje digitalno ločnico med t. i. digitalnimi domorodci in digitalnimi priseljenci. Naši učenci spadajo v skupino domorodcev, saj so bili rojeni v času, ko je digitalna tehnologija že obstajala in tekoče obvladajo »jezik« računalnikov, videoiger, interneta, mobilnih naprav … Ljudje, ki so se rodili pred pojavom digitalne tehnologije, imajo kljub mnogim spretnostim, ki so jih pridobili ob uporabi, še vedno težave in tuj naglas v tem računalniškem »jeziku«. Ni samo starost tista, ki ločuje ti dve skupini, temveč tudi izpostavljenost posameznika digitalnim tehnologijam.

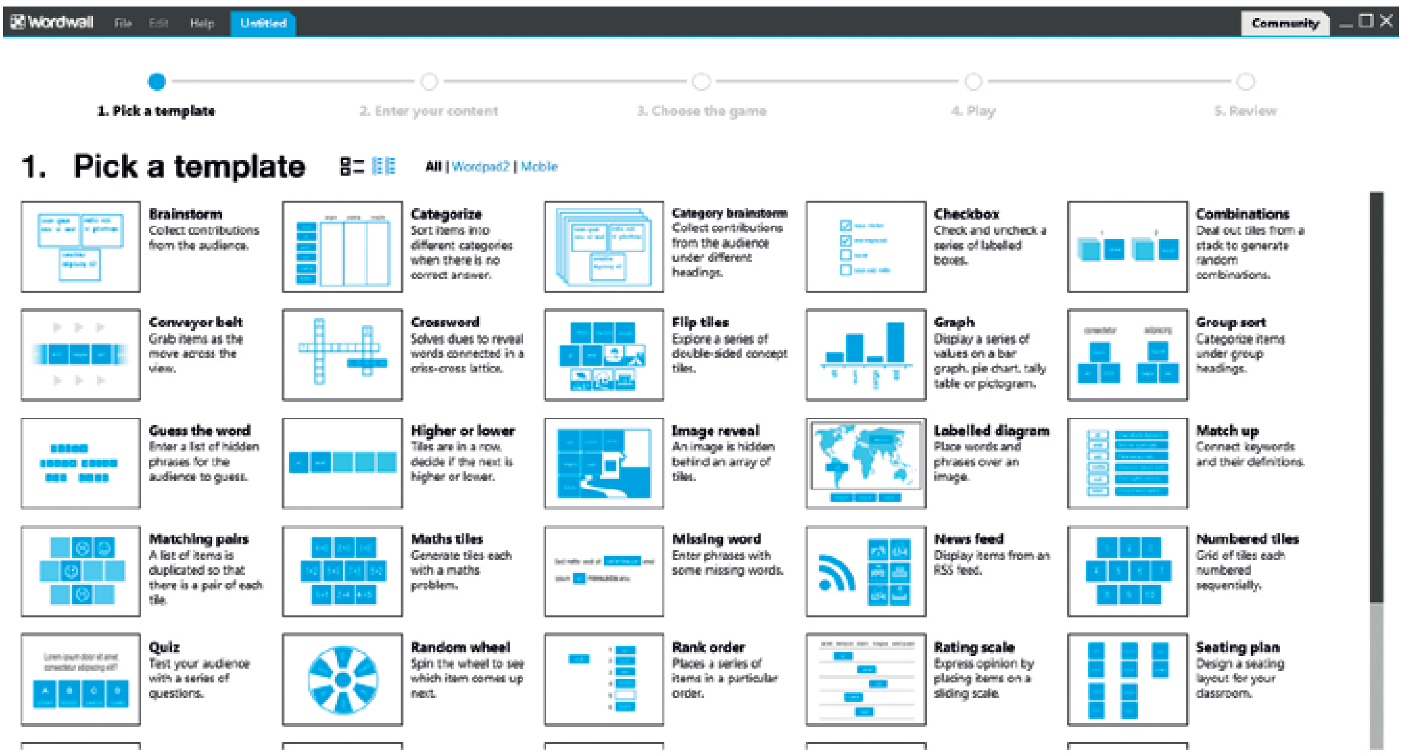
Prensky v tem delu opozarja, da poučevanje ne sme obstati v preddigitalni dobi, marveč mora učitelj svoje metode prilagoditi novim tehnologijam in spregovoriti v jeziku digitalnih domorodcev (Prensky, 2011).

Zavedati se je treba, da so učenci z uporabo sodobne tehnologije, ki jim je blizu, aktivni in inovativni ter ustvarjalno sodelujejo z drugimi. Učitelji uporabljajo računalnik, internet in drugo tehnologijo le kot novo orodje za doseganje tradicionalnih ter že preverjenih ciljev, manj pa kot možnost drugačnega načina poučevanja oziroma preverjanja znanja.

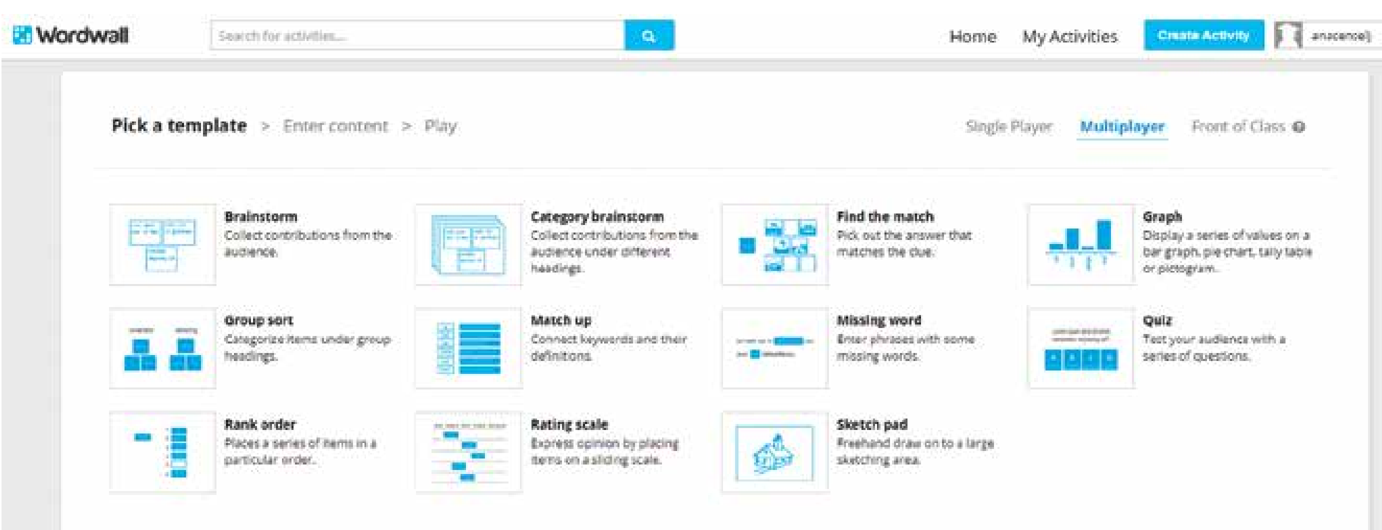
V nadaljevanju bom predstavila nov program Wordwall, ki omogoča drugačen način poučevanja in preverjanja znanja, saj spodbuja ustvarjalnost in sodelovanje med učenci.

Kaj je Wordwall?

Wordwall je enostaven program, ki omogoča izdelavo interaktivnih nalog (kvizov, križank, parov …). Na voljo je v spletni in



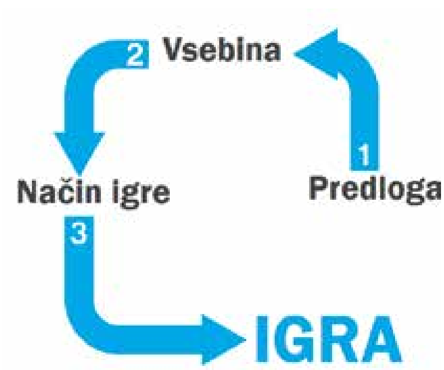
Slika 1: Namizna različica programa Wordwall



Slika 2: Spletna različica programa Wordwall

namizni različici. Vsi uporabniki Smart interaktivnih tabel ali zaslonov Vivid-Touch, kupljenih med septembrom 2014 in majem 2016, prejmejo za sedem uporabnikov brezplačno licenco za uporabo programa Wordwall.

Z javno objavo izdelanih gradiv lahko pripomoremo k zbirki interaktivnih gradiv, ki so na voljo učencem in učiteljem po celem svetu. Na voljo so gradiva za različne starostne skupine in različna predmetna področja. S štirimi preprostimi koraki lahko v manj kot minuti izdelamo zanimivo spletno igro. Po končani igri lahko preverimo in izvozimo rezultate igre ter isto vsebino uporabimo v drugi predlogi.



Slika 3: Koraki izdelave interaktivnih nalog

Preverjanje znanja z Wordwall

S tradicionalnimi metodami preverjanja znanja merimo zgolj poznavanje dejstev in konceptualno razumevanje, vendar te metode ne merijo natančno učenčevih sposobnosti reševanja problemov, sklepanja, kritičnega razmišljanja ter ne poznajo spretnosti sodelovanja, čuta odgovornosti. Običajne metode vrednotenja velikokrat odvrnejo učence od učnega procesa (Luongo Orlando, 2008).

Rutar Ilc (1996) trdi, da s tradicionalnimi testi ne moremo zajeti veščin, ki zahtevajo višje mentalne funkcije, saj krepijo predvsem repetitivno znanje oz. priklic dejstev. Učenci se navajajo na enoznačne odgovore, s čimer ne spodbujamo učenčeve kreativnosti, kritičnega mišljenja in problemskega pristopa. Rezultati, ki merijo takšno znanje, so zato kritični, saj ne ločujejo med učenci, ki so snov razumeli, in tistimi, ki so snov le mehanično privzeli.

»Da bi otrokom pomagali pri razvoju lastne motivacije in samostojnosti ter uporabe bistvenih konceptov, učnih spretnosti in delovnih postopkov, učitelji v pouk vključujejo avtentične načine preverjanja in ocenjevanja. Te alternativne metode obsegajo veliko različnih dejavnosti in predstavitvenih oblik, s katerimi pridobimo globlji vpogled v učenčev napredek« (Luongo Orlando, 2008: 7).

Avtentični načini ocenjevanja, ki izhajajo iz metod poučevanja, so usmerjeni k izobraževalnim in operativnim ciljem učnih enot. Ti načini bolj poudarjajo reševanje problemov, kritično razmišljanje, razumevanje, sklepanje, metaspoznavanje ali samorefleksivne spretnosti (Luongo Orlando, 2008).

Marentič Požarnik (2000) navaja nekaj drugačnih oblik preverjanja:

PRAKTIČNO OCENJEVANJE

S takšnim načinom ocenjevanja ugotavljamo, ali znajo učenci uporabiti znanje v konkretni dejavnosti. Pri reševanju problemov morajo znati uporabiti ustrezno vednost. Pri izdelkih lahko ocenjujemo referate, seminarske naloge, likovne izdelke, tehniške izdelke, samostojne naloge …

SKUPINSKO OCENJEVANJE

Gre za ocenjevanje sodelovalnega učenja oziroma timskega dela.

SAMOOCENJEVANJE

S takšnim načinom preverjanja povečujemo odgovornost učencev, s čimer vplivamo na učenje brez stalne kontrole in prisile.

MAPA UČENČEVIH DOSEŽKOV

Z zbirko učenčevih dosežkov na določenem področju, iz katerega je razviden učenčev napredek, preverjamo njegovo znanje, hkrati pa mu omogočamo samorefleksijo.

AVTENTIČNI TESTI

S takšnimi oblikami preverjanja zahtevamo, da učenci uporabljajo sposobnosti in spretnosti, kot bi jih uporabljali v resničnem življenju.

Z avtentičnimi oblikami preverjanja povezujemo učenje, poučevanje, preverjanje in ocenjevanje znanja, s čimer postanejo učitelji pozornejši na to, kako se učenci učijo (Razdevšek Pučko, 1996).

Po pregledu spletne aplikacije Wordwall sem dobila idejo, da lahko uporabim ta program kot enega izmed načinov drugačne oblike preverjanja znanja. Tu učitelju ni treba pripraviti naloge z namenom, da jih učenci zgolj rešujejo. Učenci lahko namreč sami uporabijo svoje znanje in izdelajo naloge. S takšnim načinom spodbujamo in razvijamo digitalne kompetence, kritično uporabo pridobljenega znanja, ustvarjalnost, poznavanje ter razumevanje učnih ciljev, uporabo znanja v novih situacijah …

Wordwall pri pouku

Pri pouku matematike skušam uporabljati korake formativnega spremljanja. Na začetku vsake učne enote preverimo predznanje in skupaj na podlagi učiteljeve usmeritve oblikujemo učne cilje za dano enoto. Skozi celotno poglavje učne teme sproti preverjamo znanje. Po končani obravnavi učnih enot učenci naredijo miselni vzorec o tem, kaj so se naučili oziroma katere cilje bi morali doseči ob koncu poglavja.

S preverjanjem znanja učenci izpišejo, katerih ciljev še niso dosegli, in načrtujejo lastno učenje za dosego ciljev ter pisno ocenjevanje.

Največkrat uporabljam standardne oblike, ki pa so velikokrat prinesle kampanjsko delo in kratkotrajno učenje.

Pri učnem poglavju Pitagorov izrek sem se odločila za **drugačno obliko preverjanja.** Učencem sem podala navodila za pripravo nalog. V prvi uri smo si zelo na kratko pogledali Wordwall in oblike nalog, ki jih lahko ustvarimo. S tem so učenci dobili ideje za sestavo nalog. V zvezek so zapisali dve nalogi (vsebino in obliko igre). Med seboj so si preverili ustreznost nalog glede na cilj, ki so si ga izbrali.

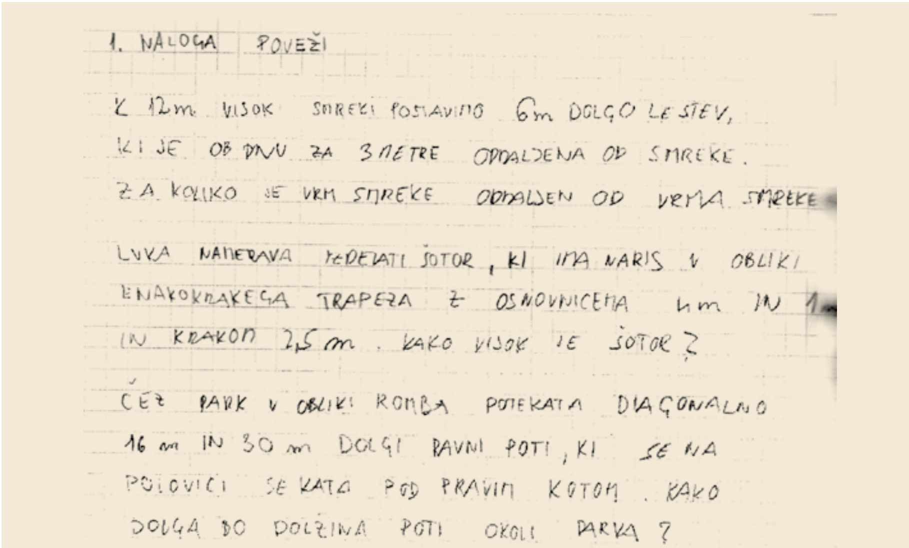
Naslednjo šolsko uro so učenci v računalniški učilnici začeli z ustvarjanjem v spletni aplikaciji Wordwall. Nastale so različne naloge (križanke, osmerosmerka, vrtavka …).

Pred pričetkom računalniškega dela sem imela pomisleke, da bi lahko učenci imeli težave z uporabo programa, a izkazalo se je, da so bili ti odveč. Učenci so se prijavili

Slika 4: Miselni vzorec s cilji

PITAGOROV IZREK			
CILJI	Ocena mojega znanja ob koncu poglavja	Aktivnosti za izboljšanje znanja	Ocena mojega znanja po dodatnem učenju
Poznati lastnosti pravokotnega trikotnika in poimenovati stranice pravokotnega trikotnika.			
Izračunati dolžino neznane stranice v pravokotnem trikotniku.			
S pomočjo Pitagorovega izreka preveriti, ali je trikotnik pravokoten.			
Uporabiti Pitagorov izrek v pravokotniku in kvadratu.			
Uporabiti Pitagorov izrek v enakokrakem in enakostraničnem trikotniku.			
Uporabiti Pitagorov izrek v rombu, deltoidu in enakokrakem trapezu.			
Uporabiti Pitagorov izrek pri reševanju nalog iz vsakdanjega življenja.			
Izračunati razdaljo med dvema točkama.			

ZNAM SVOJE ZNANJE MORAM ŠE DOPOLNITI ŠE VELIKO SE MORAM NAUČITI/VADITI


1. NALOGA POVEŽI

K 12m VISOK SMREKI POSTAVIMO 6m DOLGO LESTEV,
KI JE OB DNU ZA 3 METRE ODDALJENA OD SMREKE.
ZA KOLIKO JE VRH SMREKE ODDALJEN OD VRHA SMREKE

LUKA NAMERAVA IZDELATI ŠOTOR, KI IMA NARIS V OBLIKI
ENAKOKRAKEGA TRAPEZA Z OSNOVNICAMA 4m IN 1
IN KRAKOM 2,5 m. KAKO VISOK JE ŠOTOR?

ČEZ PARK V OBLIKI ROMBA POTEKATA DIAGONALNO
16 m IN 30 m DOLGI RAVNI POTI, KI SE NA
POLOVICI SEKATA POD PRAVIM KOTOM. KAKO
DOLGA BO DOLŽINA POTI OKOLI PARKA?

Slika 5: Priprava naloge v zvezku

v aplikaciji, nalagali slike, iskali primerne slike, dodajali omejitve s časom … Tudi angleški jezik aplikacije jih pri delu ni oviral. Pojavljala so se zgolj vprašanja za zapis matematičnih formul. Posameznim učencem sem pokazala način zapisa s »Tex« besedilom in kako si lahko pomagajo z zavihkom »Pomoč«. Tudi osnovni »TeX« zapis so zelo hitro osvojili. Večjo težavo so imeli s pravopisom in z oblikovanjem večjega števila nalog, ki bi izhajale iz življenjskih situacij in ki bi preverjale višje taksonomske stopnje. Z nekaj moje pomoči so nekateri učenci sestavili tudi takšne naloge.

V nadaljevanju je nekaj slik nalog, ki so jih učenci izdelali s spletno aplikacijo Wordwall.

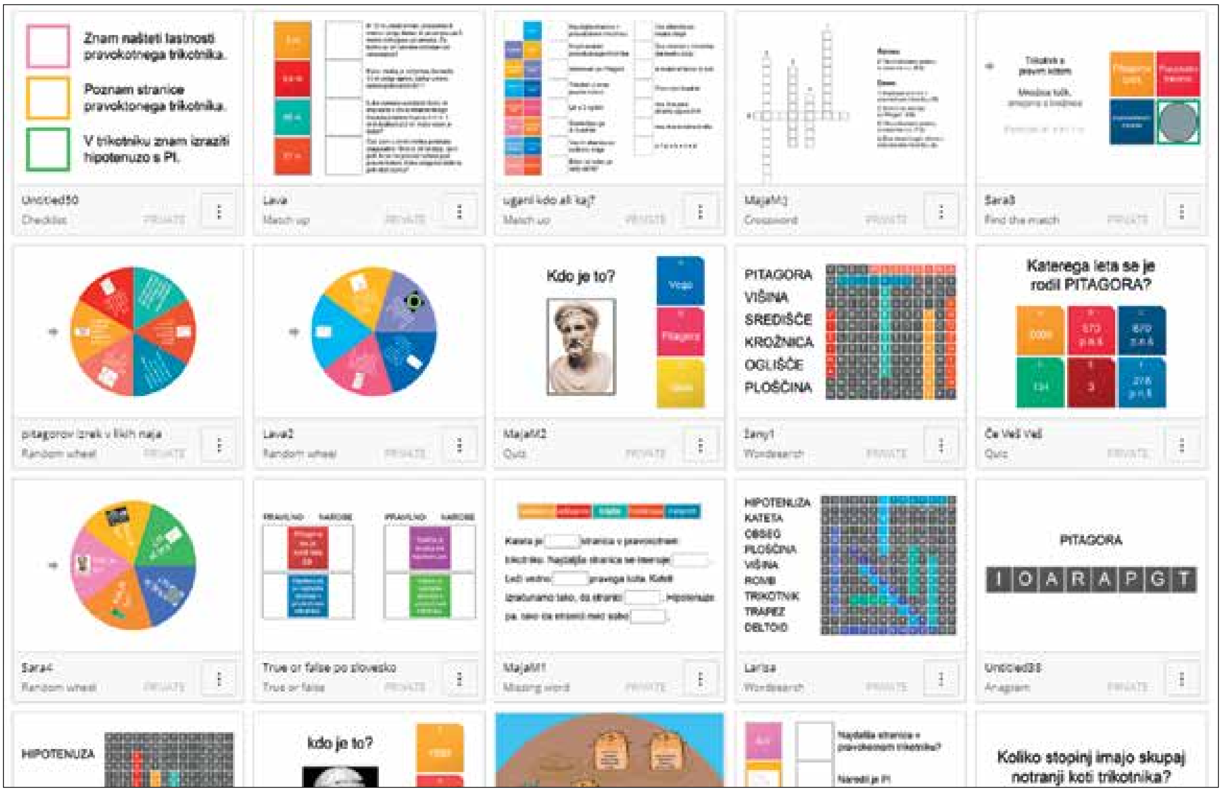
Po končanem delu so učenci predstavili lastne naloge, reševali tiste, ki so jih sestavili drugi sošolci in si ustno podali mnenja za izboljšanje nalog.

Učenci so z navdušenjem sestavljali naloge in potrdili moje mnenje, da je Wordwall odlična in enostavna aplikacija za sestavljanje interaktivnih nalog. Z gotovostjo lahko zatrdim, da bom tudi v prihodnje uporabljala Wordwall kot učni pripomoček, hkrati pa bomo tako lahko z učenci gradili svojo zbirko nalog za vse učence na šoli.

Slabosti aplikacije Wordwall

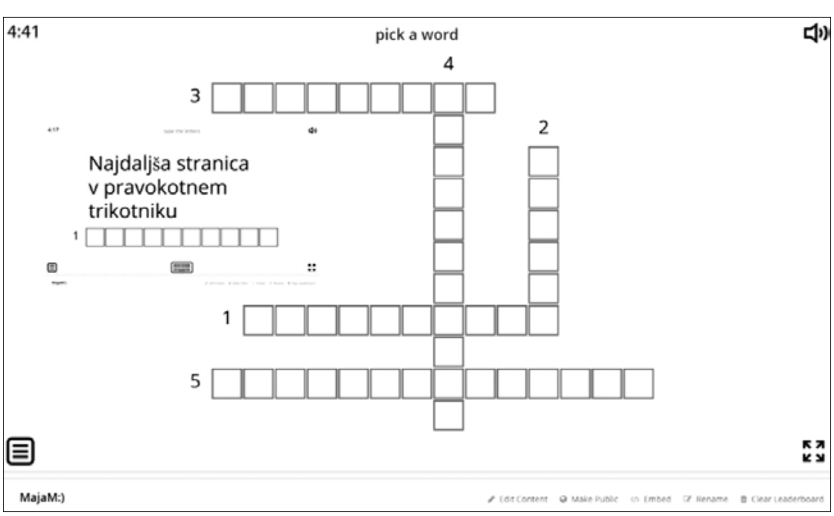
Kot večina uporabnih programov, ki jih najdemo na tržišču, je tudi Wordwall plačljiv program. Brezplačna različica omogoča zgolj igranje in uporabo gradiv. S plačljivo različico je mogoče sestavljati lastna interaktivna gradiva, prirejati javna gradiva drugih uporabnikov, spremljati rezultate učencev …

Manjša težava je tudi jezik aplikacije, ki ni na voljo v slovenskem jeziku. Pri izdelavi križank in nekaterih drugih iger je tako onemogočena uporaba šumnikov.

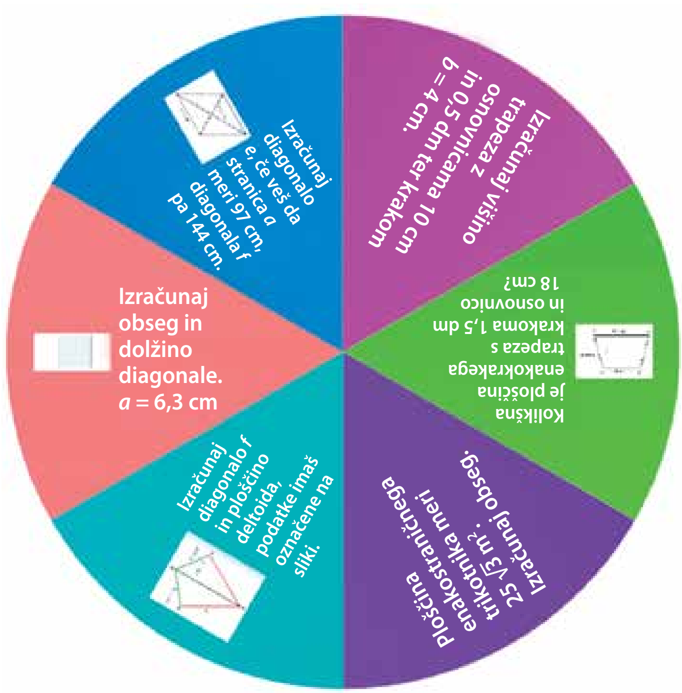


Slika 6: Interaktivne naloge, ki so jih izdelali učenci

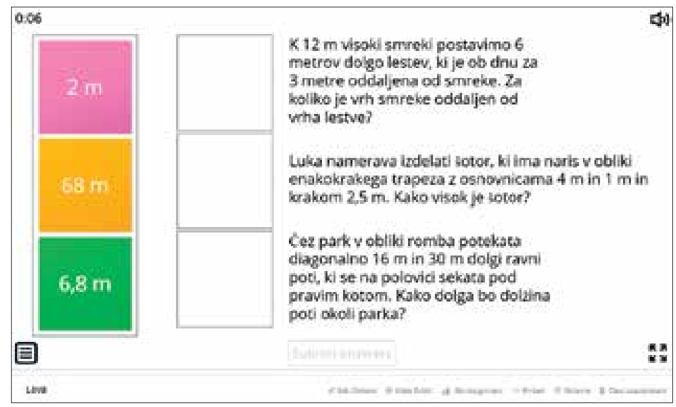
Slika 7: Osmerosmerka z osnovnimi pojmi v poglavju Pitagorovega izreka



Slika 8: Križanka z lastnostmi pravokotnega trikotnika



Slika 9: Vrtiljak s Pitagorovim izrekom v likih



Slika 10: Poišči pare z nalogami iz vsakdanjega življenja.

Zaključek

Sodobna šola razvija različne sposobnosti, interese, spretnosti ipd., kar je treba upoštevati tudi pri preverjanju znanja. Tradicionalni način poučevanja, preverjanja in ocenjevanja znanja, ki temelji na transmisijskem modelu, je treba zamenjati z novim konstruktivističnim pojmovanjem učenja in poučevanja, ki daje poudarek organizaciji čim bolj raznolikih učnih situacij, kjer se znanje ugotavlja tudi z različnimi izdelki, meritvami, s projektnimi nalogami itd. Menim, da tradicionalne oblike preverjanja znanja učencem ne predstavljajo izziva. S preverjanjem znanja z uporabo Wordwall spletne aplikacije upoštevamo tudi individualno stopnjo intelektualnih sposobnosti. Zavedati se moramo, da vsem učencem ne odgovarja le en sam način poučevanja in posledično tudi preverjanja znanja. Drugačne oblike preverjanja lahko pri učencu odprejo skrita močna področja, ki pozitivno vplivajo na samopodobo in s tem na boljšo notranjo motivacijo za učenje.

Sprememba v smeri novih oblik preverjanja znanja je nujna, saj spodbuja razvoj samostojnih učencev, ki se zavedajo lastnega znanja, znajo ovrednotiti svoje znanje in načrtovati nadaljnje učenje za doseganje ciljev. ■

Literatura

Černelc, K. (2015). *Vnos informacijsko-komunikacijske tehnologije in e-preverjanje znanja pri pouku kemije.* Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo.

Kop, M. (2015). *Formativno spremljanje znanja učencev v osnovni šoli.* Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Filozofska fakulteta.

Luongo – Orlando, K. (2008). *Drugačno preverjanje znanja: predlogi za avtentično sledenje napredka učencev.* Ljubljana: Rokus Klett.

Marentič Požarnik, B. (2004). Kako bolje uravnavati mogočen vpliv preverjanja in ocenjevanja. *Sodobna pedagogika*, 1, str. 8-22.

Prensky, M. (2001). *Digital Natives, Digital Immigrants*. Pridobljeno: 25. 6. 2016 s http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf

Razdevšek Pučko, C. (1996). Drugačne oblike preverjanja in ocenjevanja znanja. *Sodobna pedagogika*, 47 (9/10), str. 411-419.

Rutar Ilc, Z. (1996). Drugačna kultura preverjanja v praksi. *Didakta*, 5 (28/29), str. 3-7.

Rutar Ilc, Z. (2001). Spodbujanje in preverjanje kompleksnega razmišljanja. *Sodobna pedagogika*, 52/5, str. 183-201.

Veiner, M. (2016). *Glasovi svetov* [radijski posnetek]. Ljubljana: RTV Slovenija. Predvajano na Radiu Slovenija (3. program/ARS) 18. feb. 2016.

https://en.wikipedia.org/wiki/Whac-A-Mole (25. 11. 2016).

Pascalov aritmetični trikotnik

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Pascalov trikotnik binomskih koeficientov, ki ga nekateri imenujejo tudi aritmetični trikotnik oziroma Kitajski trikotnik, je v našem šolskem prostoru precej znan. V srednji šoli se uporablja predvsem kot pomoč pri računanju potenc dvočlenika ter pri verjetnosti in statistiki.

V prispevku je navedenih nekaj aktivnosti, s pomočjo katerih lahko pri osnovnošolcih krepimo sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje različnih matematičnih problemov. Predstavljene so le nekatere od aktivnosti v Pascalovem trikotniku, ki jih lahko izvajamo z osnovnošolskim znanjem. Verjamemo, da jih učitelji poznajo in izvajajo še več. Osredotočili smo se predvsem na tiste aktivnosti v Pascalovem trikotniku, ki jih lahko izvajamo in nadgradimo še v Leibnizevem harmoničnem trikotniku.

Ta prispevek je namreč zamišljen kot uvod k prispevku o Leibnizevem harmoničnem trikotniku, saj priporočamo, da pred preiskovanjem v Leibnizevem harmoničnem trikotniku učenci spoznajo in podrobno preiščejo Pascalov aritmetični trikotnik.

Ključne besede: Pascalov aritmetični trikotnik, preiskovanje, vzorci števil.

Potrebno predznanje učencev: seštevanje naravnih števil.

Priporočljivo (ni pa obvezno) predznanje: figurativna števila (števila, ki imajo geometrijsko obliko, če jih ustrezno grafično ponazorimo), Fibonaccijevo zaporedje, fraktali.

Pascal's Arithmetic Triangle

Abstract

Pascal's triangle of binomial coefficients, which some call arithmetic triangle or the Chinese triangle, is rather well known in Slovenian schools. In secondary school it is used mostly as an aid in calculating the powers of a binomial, and in probability and statistics.

This paper mentions a few activities which can be used to strengthen primary school pupils' ability to use mathematical reasoning to solve various mathematical problems. It presents only a few of the activities in Pascal's triangle which can be carried out at the primary school knowledge level. Teachers are undoubtedly familiar with and carry out others as well. The paper mostly focuses on those activities in Pascal's triangle which can be carried out and upgraded in the Leibniz harmonic triangle.

This paper has been conceived as an introduction to the paper on the Leibniz harmonic triangle, as it is recommended that pupils learn about and research Pascal's arithmetic triangle in-depth before performing inquiry in the Leibniz harmonic triangle.

Keywords: Pascal's arithmetic triangle, inquiry, number patterns.

Pupils' required prior knowledge: adding up natural numbers.

Recommended (but not mandatory) prior knowledge: figurate numbers (numbers that have a geometric shape when properly depicted graphically), Fibonacci sequence, fractals.

Uvod

Trikotna shema naravnih števil (glejte Sliko 1) se imenuje po francoskem matematiku, filozofu in fiziku Blaisu Pascalu (1623-1662), ker je o njej napisal Razpravo o aritmetičnem trikotniku, ki je izšla leta 1665, šele po njegovi smrti. To shemo nekateri avtorji imenujejo tudi Kitajski trikotnik, saj se na Kitajskem omenja že v 13. stoletju.

V nadaljevanju bomo Pascalov trikotnik binomskih koeficientov oziroma aritmetični trikotnik oziroma Kitajski trikotnik imenovali kar Pascalov trikotnik.

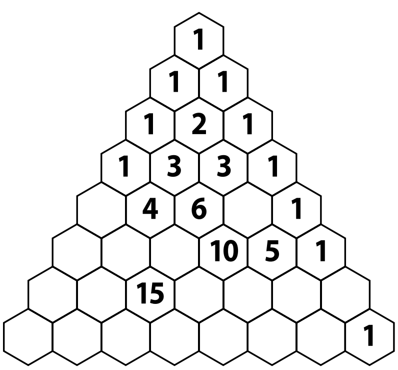
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Slika 1: Pascalov trikotnik

Pascalov trikotnik

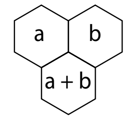
Ker v Pascalovem trikotniku nastopajo naravna števila, se lahko z njim srečajo že učenci v 1. in 2. vzgojno-izobraževalnem obdobju (VIO) osnovne šole.

Učenci naj preiskujejo shemo, v kateri so vpisana le nekatera števila, ubesedijo pravilo, po katerem so nanizana števila, ter po ugotovljenem pravilu dopolnijo manjkajoča števila v shemi in zapišejo še nekaj naslednjih vrstic Pascalovega trikotnika. (Glejte Sliko 2.)



Slika 2: Za lažje ločevanje števil in za ugotavljanje lastnosti števil po vrsticah naj bodo posamezna števila v shemi Pascalovega trikotnika vpisana v enake like (npr. šestkotnike, kvadrate …).

Učenci so sposobni že v 1. VIO ugotoviti, da se vsaka vrstica Pascalovega trikotnika začne in konča s številom 1, vsako število v notranjosti Pascalovega trikotnika pa je dobljeno kot vsota števil nad njim. Velja:



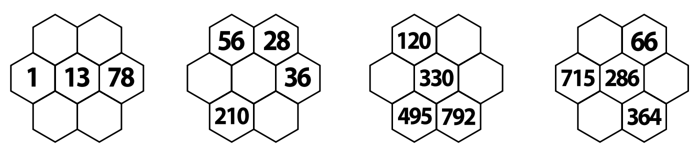
Ker po navadi izpolnjujemo števila v shemo Pascalovega trikotnika od zgoraj navzdol, učenci z računanjem števil v naslednjih vrsticah nimajo težav, razen če se v nekem primeru zmotijo in imajo od tam dalje vse narobe. Večinoma tudi niso dovolj vztrajni, da bi s števili izpolnili dovolj vrstic, potrebnih za nadaljnje preiskovanje. Zato jim za preiskovanje lastnosti števil v Pascalovem trikotniku ponudimo shemo, ki je izpolnjena vsaj do 16. vrstice.

Učenci lahko samostojno ugotovijo, da je zaradi komutativnosti seštevanja shema simetrična glede na navpično somernico.

Ugotovijo, da se vsaka vrstica začne in konča z 1, torej z najmanjšim številom, proti notranjosti, oziroma proti navpični somernici pa se velikost števil veča in tako največje število v vrstici leži tik ob somernici oziroma na njej.

Glede na starost in sposobnost učencev lahko težavnost aktivnosti in število vrstic v Pascalovem trikotniku večamo. Učenci lahko samostojno ugotovijo, da je število vrstic v Pascalovem trikotniku neskončno.

Po ugotovljenem pravilu naj učenci dopolnijo še nekatere izseke iz Pascalovega trikotnika.

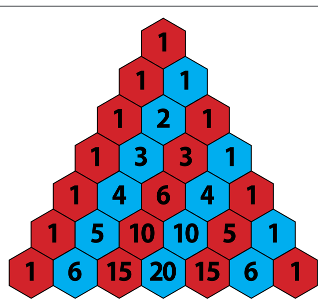


Slika 3: Posamezni izseki iz Pascalovega trikotnika, s pomočjo katerih preverimo, ali učenci razumejo, kako dopolnjujejo shemo

Lastnosti števil po vrsticah

V preiskovalnih aktivnostih učenci hitro ugotovijo, da za števila, ki so zapisana v isti vrstici Pascalovega trikotnika, veljajo zanimive zakonitosti. Glede na starost in sposobnosti učencev so lahko

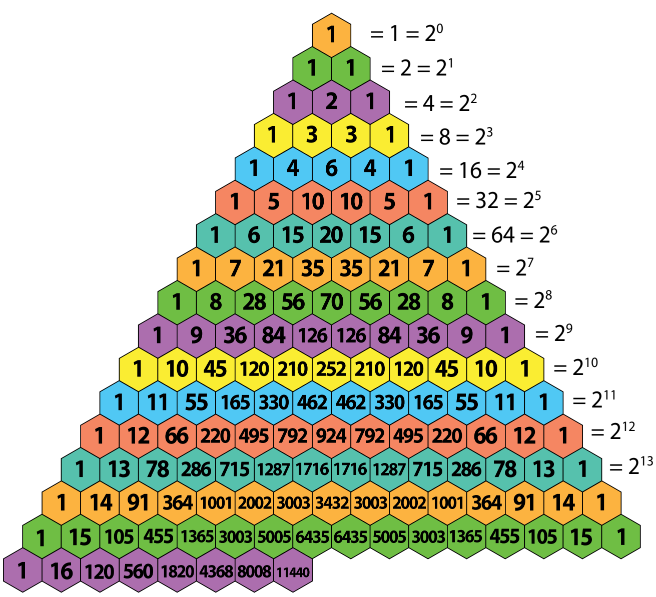
Preglednica 1: Vsota števil na lihih in sodih mestih

Vrstica		Vsota števil na lihih mestih	Vsota števil na sodih mestih
1.		1	
2.		$1 = 2^0$	$1 = 2^0$
3.		$1 + 1 = 2 = 2^1$	$2 = 2^1$
4.		$1 + 3 = 4 = 2^2$	$3 + 1 = 4 = 2^2$
5.		$1 + 6 + 1 = 8 = 2^3$	$4 + 4 = 8 = 2^3$
6.		$1 + 10 + 5 = 16 = 2^4$	$5 + 10 + 1 = 16 = 2^4$
7.		$1 + 15 + 15 + 1 = 32 = 2^5$	$6 + 20 + 6 = 32 = 2^5$
n.		2^{n-2}	2^{n-2}

njihove ugotovitve zelo različne. Učenci lahko isto ugotovitev ubesedijo na različne načine, kar je odvisno od predhodnih izkušenj posameznika s preiskovanjem in ne nazadnje od njegovih sposobnosti opazovanja (prirojenih ali pridobljenih z vajo). Pa navedimo nekatere njihove ugotovitve.

a) Sledi nekaj ugotovitev učencev, ki veljajo za števila v **vodoravnih vrsticah**.

- Vsota števil v spodnji vrstici je dvakrat večja od vsote števil v predhodni zgornji vrstici. To pa zato, ker je vsako število iz zgornje vrstice dvakrat uporabljeno za pridobivanje števil spodnje vrstice (enkrat levo in drugič desno) kot eden izmed dveh seštevancev.
- Vsota števil, ki je v posamezni vrstici na lihih mestih, je z izjemo prve vrstice enaka vsoti števil, ki je v tej vrstici na sodih mestih. Obe vsoti lahko zapišemo kot potenci števila 2 (glejte preglednico 1).
- Iz obeh prejšnjih ugotovitev sledi, da je tudi vsota števil po posameznih vrsticah enaka vrednosti potence števila 2 (glejte Sliko 4). Če seštejemo vsoti števil na sodih in lihih mestih, ki sta enaki, dobimo dvakratnik potence števila 2, ki je tudi potenca števila 2. Torej: $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Vsota števil v n-ti vrstici je 2^{n-1}.



Slika 4: Vsota števil v posameznih vodoravnih vrsticah Pascalovega trikotnika je enaka potenci števila 2

- Alternirajoča vsota števil po vrsticah je z izjemo prve vrstice enaka 0, kar sledi iz druge ugotovitve in preglednice 1.

$$1 = 1$$
$$1 - 1 = 0$$
$$1 - 2 + 1 = 0$$
$$1 - 3 + 3 - 1 = 0$$
$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$
$$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$$
$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

- Če vsako število v polju Pascalovega trikotnika obravnavamo kot števko, so v vrsticah zapisane vrednosti potenc števila 11.

$$1 = 11^0$$
$$11 = 11^1$$
$$121 = 11^2$$
$$1331 = 11^3$$
$$14641 = 11^4$$

Ups! To očitno velja le za vrstice, v katerih so samo enomestna števila. Kaj pa v vrsticah, v katerih so tudi večmestna števila? V naslednji vrstici bi potemtakem morala biti zapisana vrednost potence $11^5 = 161051$, zapisana pa so števila:

1	5	10	10	5	1

.

Pa uporabimo lastnost pisnega seštevanja in »1 štejemo naprej«.

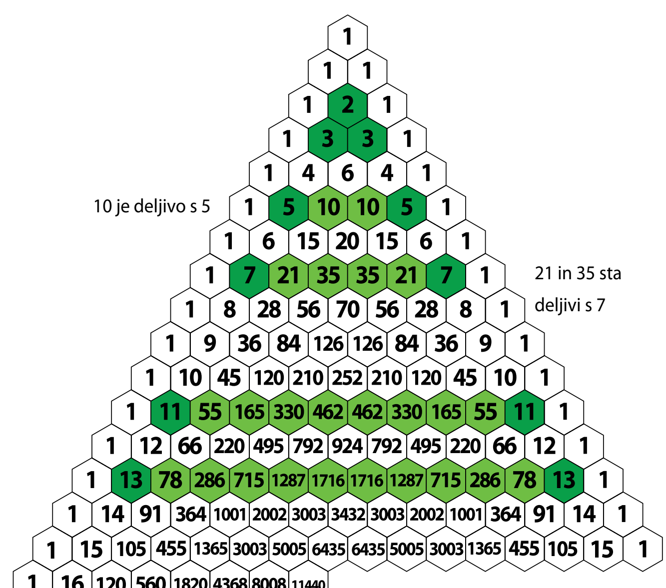
1	5	10	10	5	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	5 + 1	0 + 1	0	5	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	6	1	0	5	1

Torej je tudi v vrstici

1	5	10	10	5	1

ponazorjena vrednost potence $11^5 = 161051$.

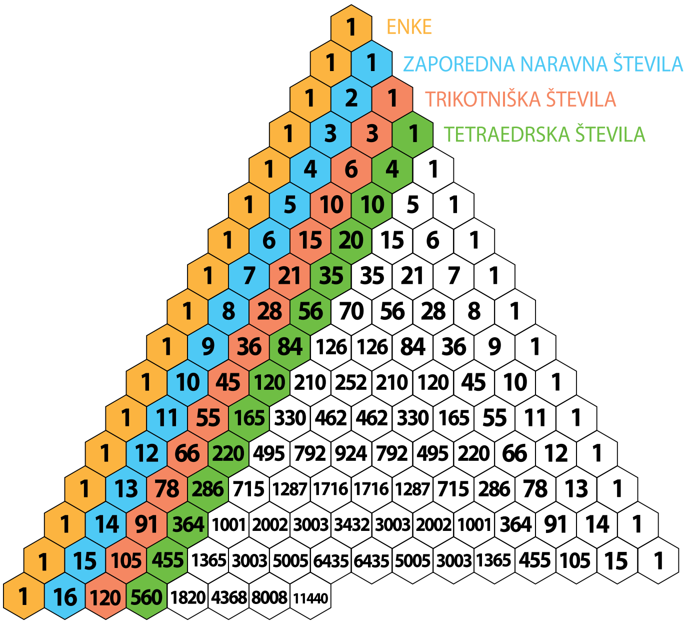
- V vrstici, ki ima v drugem in predzadnjem polju praštevilo, so tudi vsa števila med tema dvema prašteviloma deljiva s tem praštevilom. Npr.: števila 78, 286, 715, 1287 in 1716 so deljiva s 13 (glejte Sliko 5).



Slika 5: V vrstici, ki ima v drugem in predzadnjem polju praštevilo, so tudi vsa števila med tema dvema prašteviloma deljiva s tem praštevilom.

b) **Poševne vrstice** (vrstice, ki so vzporedne stranici trikotnika, ob kateri ležijo same enke): (Zapisane ugotovitve veljajo za poševne vrstice, ki potekajo v smeri od desno zgoraj do levo spodaj (glejte sliko 6) in tudi za vrstice, ki potekajo v smeri od levo zgoraj proti desno spodaj – ugotovili smo namreč že, da je shema simetrična glede na navpično somernico.)

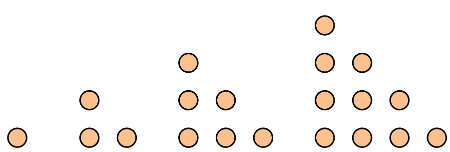
Če učenci že poznajo **figurativna števila** (glejte vir [3], stran 281–283), jih usmerimo na preiskovanje lastnosti števil znotraj poševnih vrstic.



Slika 6: Obarvane so nekatere poševne vrstice Pascalovega trikotnika

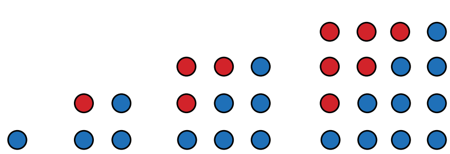
Ugotovijo lahko, da za števila v poševnih vrsticah velja:

- V prvi poševni vrstici so same enke (v vsaki celici je število 1).
- V drugi poševni vrstici so zapisana zaporedna naravna števila.
- V tretji poševni vrstici so zaporedna **trikotniška števila** (števila, ki predstavljajo število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko trikotnika): 1, 3, 6, 10, 15 …

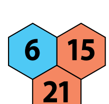


– Števila v tretji poševni vrstici oziroma trikotniška števila so vsote zaporednih naravnih števil od 1 dalje:
1 = **1**, 1 + 2 = **3**, 1 + 2 + 3 = **6**, 1 + 2 + 3 + 4 = **10**,
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15** …

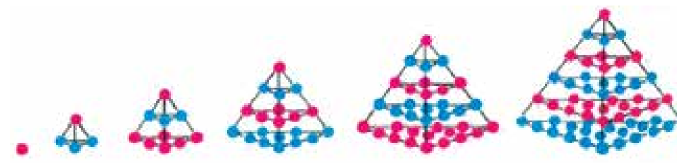
– Če seštevamo po dve zaporedni (trikotniški števili) števili v tretji poševni vrstici, dobimo popolne kvadrate števil – **kvadratna števila** (Število m je kvadratno tedaj in le tedaj, kadar lahko razmestimo m točk v obliko kvadrata.):
$1 + 3 = \mathbf{4} = 2^2$, $3 + 6 = \mathbf{9} = 3^2$, $6 + 10 = \mathbf{16} = 4^2$,
$10 + 15 = \mathbf{25} = 5^2$, $15 + 21 = \mathbf{36} = 6^2$ …



– Kvadrat števila iz druge poševne vrstice je enak vsoti desnega in spodnjega števila v tretji poševni vrstici. Primer: $6^2 = 15 + 21$.



- V četrti poševni vrstici so zapisana **tetraedrska števila** (števila, ki predstavljajo število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko tetraedra)**:** 1, 4, 10, 20, 35, 56 …



– Tetraedrska števila so vsote zaporednih trikotniških števil:
1 = **1**, 1 + 3 = **4**, 1 + 3 + 6 = **10**, 1 + 3 + 6 + 10 = **20**,
1 + 3 + 6 + 10 + 15 = **35**, 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = **56**
…

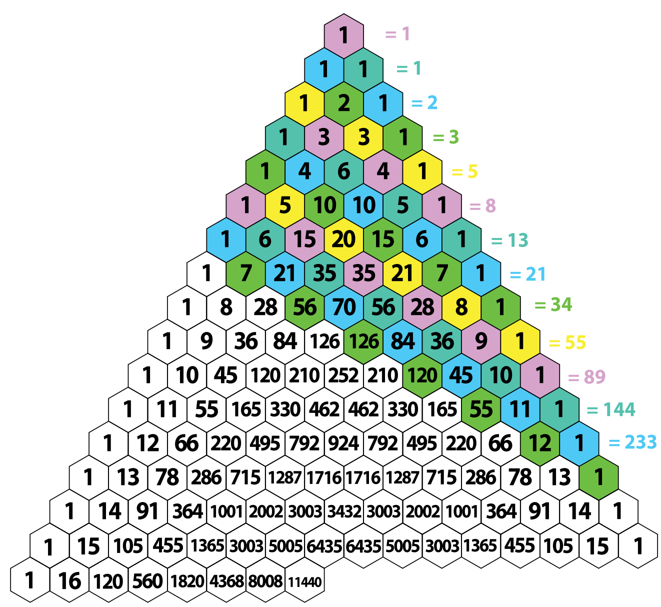
- n-to število v peti poševni vrstici je vsota prvih n (tetraedrskih) števil iz četrte poševne vrstice: 1 = **1**, 1 +4 = **5**, 1 + 4 + 10 =**15**, 1 + 4 + 10 + 20 = **35**, 1 + 4 +10 + 20 + 35 = **70**, 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = **126** …

Podobna trditev velja za vse vrstice, kar bomo podrobneje pokazali v naslednjem poglavju z naslovom Nogavice. Velja: **Vsota prvih *n* števil iz neke poševne vrstice je enaka *n*-temu številu iz naslednje poševne vrstice.**

c) Lastnosti števil v **položno-poševnih vrsticah**:

Vsota števil po spodaj obarvanih položno-poševnih vrsticah (glejte Sliko 7) tvori **Fibonaccijevo zaporedje**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 …

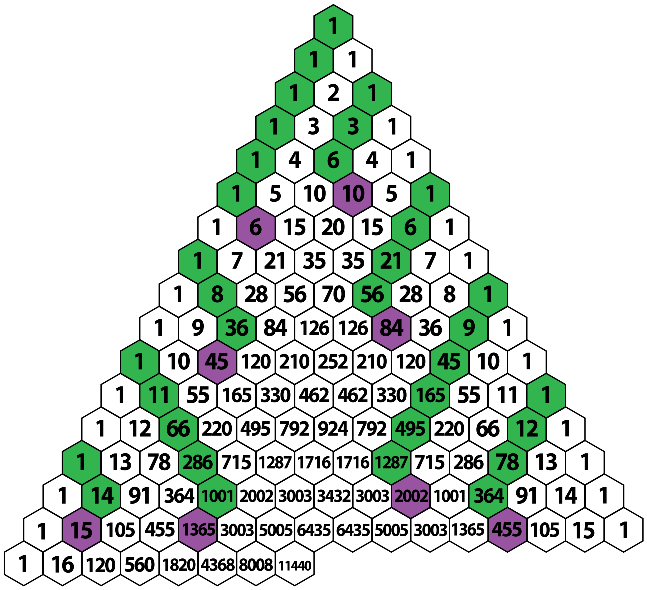
Fibonaccijeva števila, ki določajo Fibonaccijevo zaporedje, so določena tako, da je vsako **število** od tretjega naprej vsota predhodnih dveh (1 + 1 = **2**, 1 + 2 = **3**, 2 + 3 = **5**, 3 + 5 = **8**, 5 + 8 = **13**, 8 + 13 = **21**, 13 + 21 = **34** …).

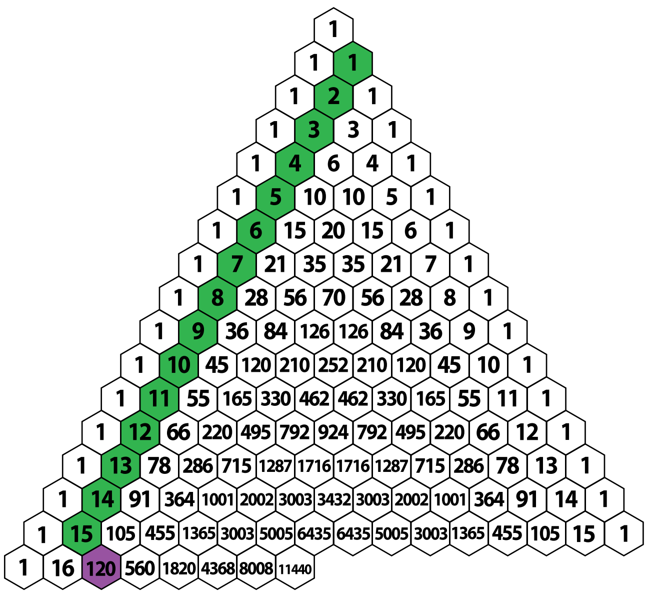


Slika 7: Vsota števil po obarvanih vrsticah tvori Fibonaccijevo zaporedje

Nogavice

Lastnosti števil, ki jih pokriva skupna nogavica (oziroma hokejska palica, kot jo imenujejo nekateri), smo sicer ugotovili že v prejšnjem poglavju **Lastnosti števil po vrsticah** (pri poševnih vrsticah). Ker je za nekatere navedene ugotovitve potrebno malo več matematičnega znanja, za učence iz prvega VIO prilagodimo preiskovalno aktivnost z zgodbico o nogavicah, ki jih otroci v anglosaških deželah v prednovoletnem času obešajo na novoletno jelko za darila.





Sliki 8 in 9: Nogavice na Pascalovem trikotniku

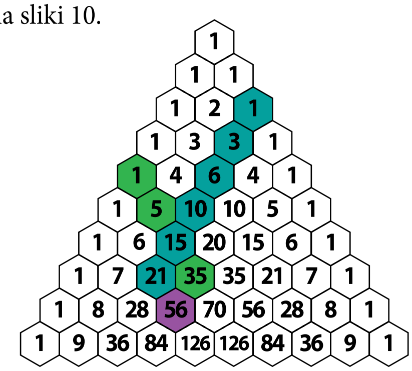
Že učenci v prvem VIO lahko ugotovijo, da so števila v Pascalovem trikotniku, ki jih pokriva ista nogavica, povezana na prav poseben način. Vse nogavice se začenjajo v enki na robu Pascalovega trikotnika, lahko so različno dolge, vse pa imajo enako veliko stopalo. Vsota števil v zeleno obarvanem delu nogavice je enaka številu, ki je v prstih nogavice (v vijoličasto obarvanem polju). Prsti nogavice v vijoličastem polju morajo biti v naslednji poševni vrstici od zeleno obarvanega dela nogavice.

S slike 9 razberemo, da velja:
1 + 14 = 15, 1 + 11 + 66 + 286 + 1001 = 1365, 1 + 8 + 36 = 45,
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, 1 + 3 + 6 = 10, 1 + 6 + 21 + 56 = 84,
1 + 9 + 45 + 165 + 495 + 1287 = 2002, 1 + 12 + 78 + 364 = 455.

Posebej uporabne pa so nogavice iz druge poševne vrstice Pascalovega trikotnika (glejte Sliko 9), saj lahko v prstih nogavice, ki so v tretji poševni vrstici, preberemo vsoto zaporednih naravnih števil od 1 dalje. Npr: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120.

Število v notranjosti Pascalovega trikotnika, ki je dobljeno kot vsota dveh števil (naj bo ***a*** levo in ***b*** desno) nad njim, je enako tudi vsoti števil, ki se »vzpenjajo« od števila ***a*** po vzporednici leve stranice Pascalovega trikotnika in vsoti števil, ki se »vzpenjajo« od števila ***b*** po vzporednici desne stranice Pascalovega trikotnika.

Učenci 1. VIO pa lahko to ugotovitev zapišejo tako, da je vsako število iz notranjosti Pascalovega trikotnika v prstih dveh različnih nogavic (proti levi in proti desni strani do enke na robu Pascalovega trikotnika). Tako lahko s pomočjo nogavic Pascalovega trikotnika npr. število 56 zapišemo kot vsoto na dva načina 1 + 5 + 15 + 35 = 56 in 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56, kot je ponazorjeno na sliki 10.



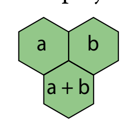
Slika 10: Število 56 je v prstih dveh nogavic v Pascalovem trikotniku

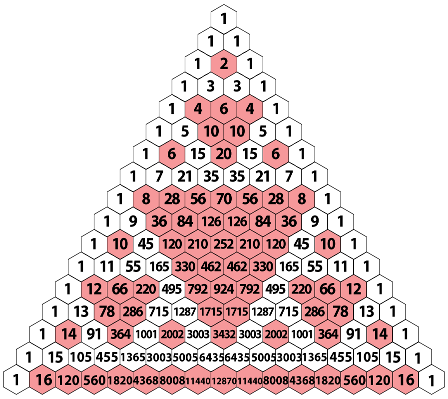
Večkratniki

Z učenci 5. razreda smo pri dodatnem pouku preiskovali lastnosti števil v Pascalovem trikotniku. Med drugim smo s pomočjo žepnega računala ugotavljali, ali so števila v njem večkratniki določenega števila. Seveda učenci še niso poznali pravil za deljivost, ločili so le liha in soda števila. Vsak učenec je v shemi Pascalovega trikotnika barval večkratnike drugega števila (slike 11–19).

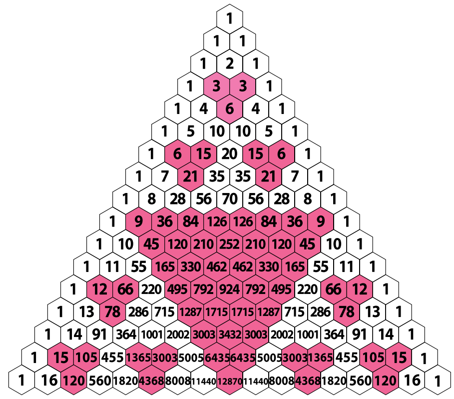
Ko smo končali z barvanjem, smo razvrstili vse pobarvane sheme in jih primerjali. Ko so učenci ugotovili vzorec barvanja števil, so hitro našli kakšno napako pri barvanju sošolca (npr. da so pozabili pobarvati vse večkratnike števil 2 oziroma 4, da 165 ni večkratnik števila 8) in to preverili še z žepnim računalom. Ob storjenih napakah so se ogromno naučili. S pomočjo žepnega računala so ob barvanju večkratnikov samostojno odkrili pravilo za deljivost z 2, s 3, s 5, z 9 in z 10.

Presenetili so me z ugotovitvijo, da so »vsi obarvani trikotniki obrnjeni navzdol«. Skupaj smo ugotovili, da če sta dve števili deljivi z nekim številom, je tudi njuna vsota deljiva s tem številom. Torej, če sta obarvani dve sosednji polji (celici) v isti vodoravni vrstici, moramo pobarvati tudi polje (celico) pod njima.

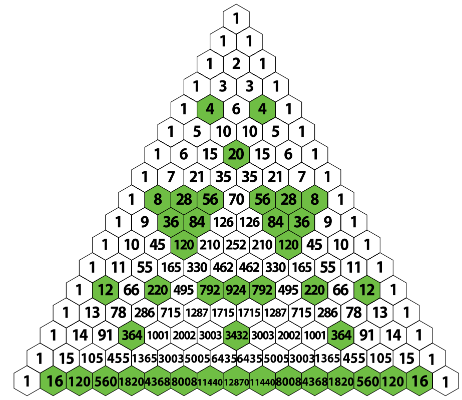




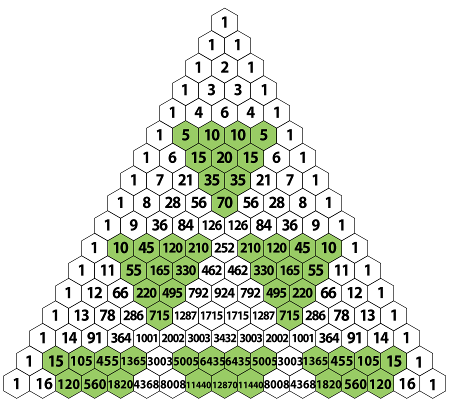
Večkratniki števila 2



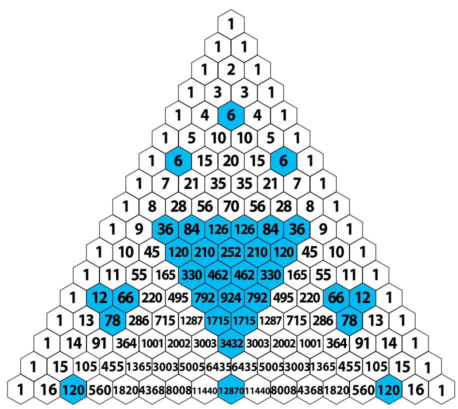
Večkratniki števila 3



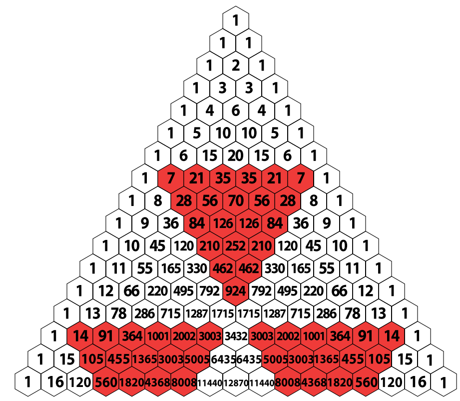
Večkratniki števila 4



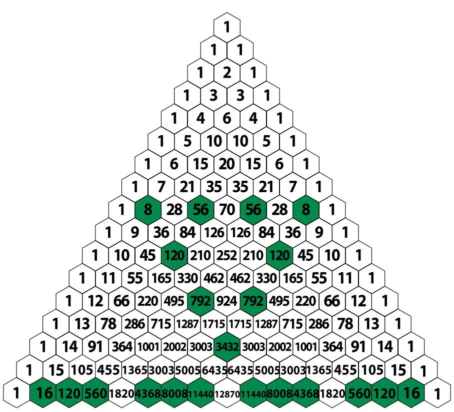
Večkratniki števila 5



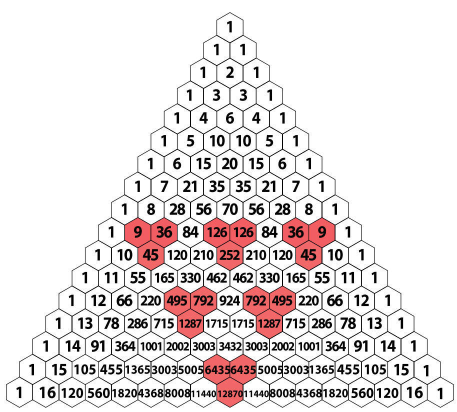
Večkratniki števila 6



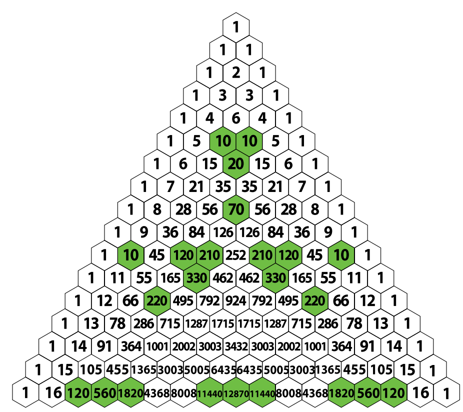
Večkratniki števila 7



Večkratniki števila 8



Večkratniki števila 9



Večkratniki števila 10

Slike 11–19: V Pascalovem trikotniku so učenci barvali večkratnike posameznih števil

Prav s pomočjo te ugotovitve so našli napako pri barvanju večkratnikov števila 4, ki jih je na sliki 14 barval eden od učencev.

Ko smo skozi liste s Pascalovimi trikotniki pogledali proti svetlobi, smo iskali skupne večkratnike različnih števil. Npr.: Ker so bili večkratniki števila 2 na prvem listu drugačne barve kot večkratniki števila 5 na drugem listu, smo skozi oba lista videli z obema barvama obarvane skupne večkratnike, to so večkratniki števila 10.

Podobno aktivnost sem kasneje še večkrat izvedla s starejšimi učenci. Pri preiskovanju smo se medpredmetno povezali tudi z biologijo in ugotovili, da se lastnost »je večkratnik« »recesivno deduje« navzdol po obarvanem trikotniku (pri tolmačenju recesivnosti smo števila v shemi razumeli kot hipotetične monoploidne organizme).

Ker želimo pridobiti čim več različno obarvanih shem, naj vsak učenec v razredu barva večkratnike drugega števila (idealno je, če za preiskovanje pridobimo obarvane sheme od večkratnikov števila 2 do večkratnikov števila 24). Za iskanje skupnih večkratnikov je priporočljivo, da vsak učenec pri barvanju uporabi drugo barvo.

Z učenci 3. VIO smo pred barvanjem večkratnikov v Pascalovem trikotniku preiskali lastnosti števil po vrsticah Pascalovega trikotnika. (Glejte sliko 5.) Kot smo že zapisali, so ugotovili: v vodoravni vrstici, ki ima v drugem (in predzadnjem) polju praštevilo, so vsa števila med tema dvema praštevilom deljiva s tem praštevilom. Primer: Števila 55, 165, 330 in 462, ki ležijo v isti vrstici med obema številoma 11, so deljiva s praštevilom 11.

Učenci so tudi s pomočjo te ugotovitve napovedali lego (v kateri vrstici se začne) in obliko (»navzdol obrnjen« trikotnik, saj je vsota dveh večkratnikov nekega števila tudi večkratnik tega števila) obarvanega vzorca večkratnikov za ta praštevila. Napovedi so seveda preverili še z računanjem in barvanjem večkratnikov teh praštevil.

Ugotovimo lahko: prvi, najvišje ležeči trikotnik z obarvanimi večkratniki praštevila n in hkrati eden izmed najmanjših obarvanih trikotnikov za ta večkratnik se začne v $(n + 1)$. vodoravni vrstici Pascalovega trikotnika. Stranice tega obarvanega trikotnika so dolge po $n - 1$ enot (oziroma polj v shemi Pascalovega trikotnika). Pri tem seveda eno samo obarvano polje pri večkratnikih števila 2 smatramo kot najmanjši obarvani »trikotnik« s stranico 1.

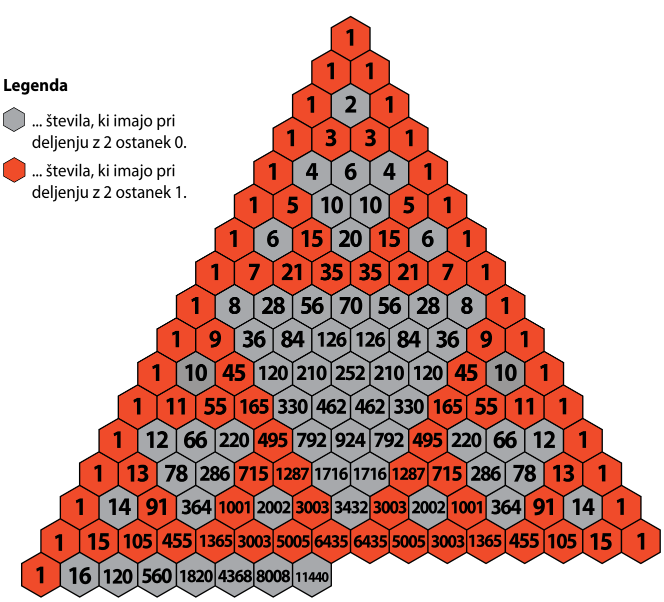
Če želimo izračunati število polj, ki smo jih obarvali za ta trikotnik, spet naletimo na trikotniška števila. Npr. Najvišje ležeči obarvani trikotnik z večkratniki števila 7, vsebuje $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ polj.

Ostanek pri deljenju

V naslednji aktivnosti smo v Pascalovem trikotniku z isto barvo obarvali še števila, ki imajo pri deljenju z izbranim številom enak ostanek. (Glejte priložene delovne liste.)

a) Ostanki pri deljenju z 2 (Slika 20)

Učenci so ugotovili, da gre (na sliki 20) za soda in liha števila ter da so podobno pobarvali shemo pri večkratnikih števila 2, le da so takrat ostala nepobarvana liha števila. Vse to smo povezali s fraktalom Sierpinski trikotnik.



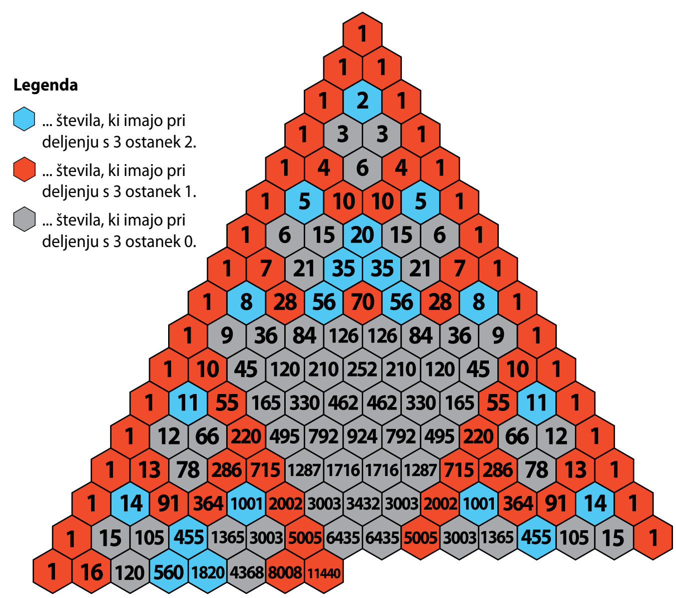
Slika 20: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju z 2 enak ostanek.

Že v prejšnjem poglavju (Večkratniki) in v tem poglavju (Ostanek pri deljenju) so učenci preiskovali vzorec pri barvanju. Ugotovili so, da so poleg prve in druge **vodoravne vrstice** v celoti pobarvane z rdečo še 4., 8., 16. vrstica, ter napovedali, da bo to veljalo tudi za 32. in 64. vrstico. Pravilnost svoje napovedi so preverili s pomočjo različnih spletnih aplikacij (uporabili smo vira [4] in [5]). V eni vrstici višje, torej v 3., 7., 15., 31., 63. vodoravni vrstici je sivo vsako drugo polje, ostala pa so rdeča. Torej je vsako polje pobarvano z rdečo v (2^n). vrstici, v $(2^n - 1)$. vrstici pa se izmenjujeta rdeče in sivo polje.

V 1. **poševni vrstici** so z rdečo pobarvana vsa števila. V 2. poševni vrstici je vsako drugo število sivo, ostala pa so rdeča. To so učenci ponazorili z vzorcem RSRSRSRSRS … , ki ima gradnik RS, v katerem so z R ponazorili rdeče pobarvano polje, s S pa sivo polje. Nekateri učenci so sicer vzorec oblikovali z oznakama za liha (L) in soda (S) števila, torej LSLSLSLSLS … , a zaradi naslednjih primerov v prispevku ohranjamo oznake za barve. Učenci namreč že vedo, da je vsako drugo zaporedno naravno število sodo oziroma parno. V 3. poševni vrstici se izmenjujeta po dve rdeči in dve sivi polji, torej imamo vzorec RRSSRRSSRRSS … z gradnikom RRSS. V 4. poševni vrstici se izmenjujeta eno rdeče in tri siva polja. Tako imamo vzorec RSSSRSSSRSSS … z gradnikom RSSS. V 5. poševni vrstici se izmenjujejo štiri rdeča in štiri siva polja. Torej imamo vzorec z gradnikom RRRRSSSS.

b) Ostanki pri deljenju s 3 (Slika 21)

Ostanki pri deljenju s 3 tvorijo bolj zapleten vzorec barvanja. Glejte sliko 21. Nekateri učenci so pri barvanju števil, ki imajo pri deljenju s 3 enak ostanek, nadaljevali barvanje še v naslednje vrstice Pascalovega trikotnika. Najprej so napovedali, kakšne barve bo polje, ga narisali in pobarvali, nato so pravilnost barvanja preverili še z računanjem.



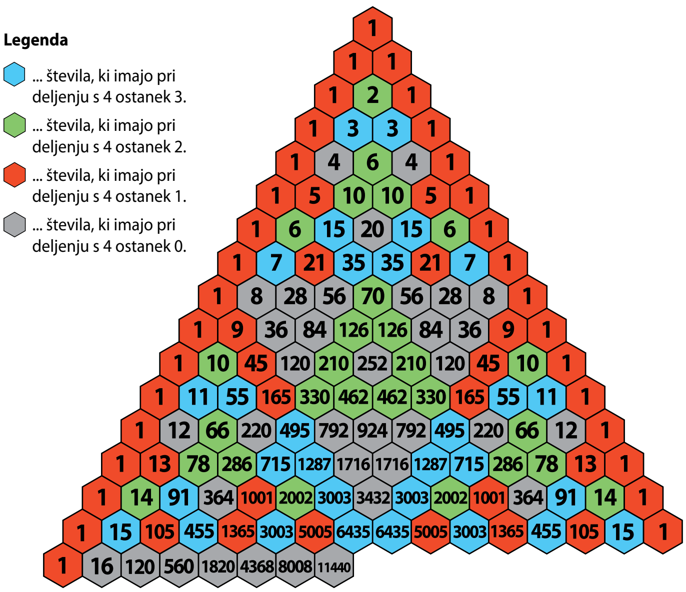
Slika 21: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 3 enak ostanek.

Ugotovili so, da se v 3. in 9. **vodoravni vrstici** izmenjujejo rdeča in modra polja. Enako so predvideli tudi za 18. vodoravno vrstico (ki na sliki 21 ni narisana). Toda v 18. vrstici je sodo število (18) polj, zato sta sredinski dve polji ob somernici enake barve, kar se zgodi tudi v 6. vrstici.

Vsa števila v 1. **poševni vrstici** so obarvana rdeče. V 2. poševni vrstici se v vzorcu ponavlja gradnik RMS (rdeča, modra, siva), torej imamo vzorec RMSRMSRMS … V 3. poševni vrstici se izmenjujejo eno rdeče in dve sivi polji, oziroma imamo gradnik RSS. Tako dobimo vzorec RSSRSSRSS … V 4. poševni vrstici se izmenjujejo 3 rdeča, 3 modra in 3 siva polja. Torej imamo v vzorcu gradnik RRRMMMSSS.

c) Ostanki pri deljenju s 4 (Slika 22)

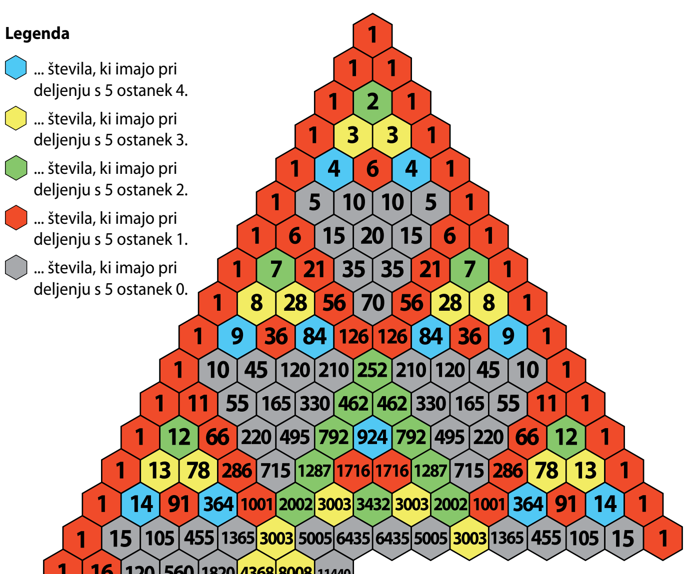
Tudi v primeru barvanja števil, ki imajo pri deljenju s 4 enak ostanek (glejte sliko 22), so preiskovali obarvane vzorce števil po vrsticah in napovedovali, katera barva bo npr. v 20. polju 2. poševne vrstice.



Slika 22: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 4 enak ostanek.

č) Ostanki pri deljenju s 5 (Slika 23)

Učenci že vedo, da je število deljivo s 5, če je zadnja števka 0 ali 5. Na podoben način so pri barvanju števil, ki imajo pri deljenju

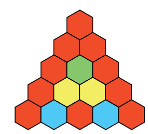


Slika 23: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 5 enak ostanek.

s 5 enak ostanek, zapisali, v katerem primeru bo ostanek 1, 2, 3 ali 4. Torej:

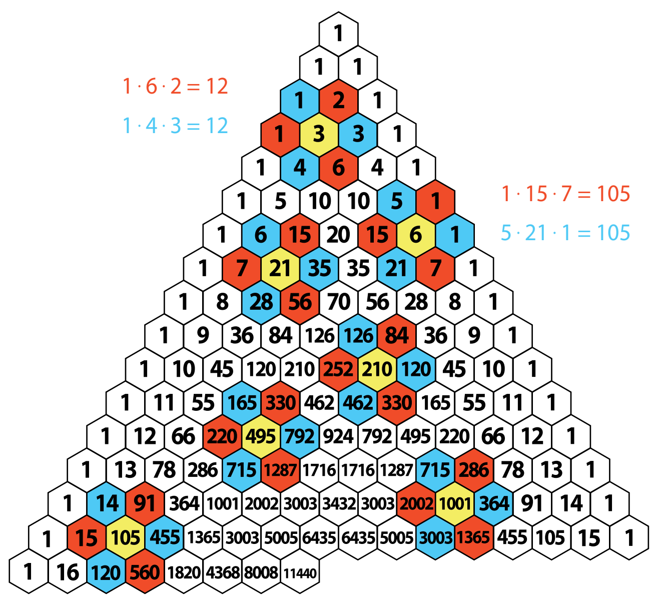
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 1, če je zadnja števka 1 ali 6.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 2, če je zadnja števka 2 ali 7.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 3, če je zadnja števka 3 ali 8.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 4, če je zadnja števka 4 ali 9.

Poleg tega, da so ugotavljali vzorec barvanja v vodoravnih in poševnih vrsticah, so učenci ugotovili, da se na slikah del barvanja ravninskega vzorca večkrat ponovi. Tako se npr. na sliki 23 večkrat ponovi del barvanja vzorca:



Cvetovi

Učenci 2. VIO so preiskali lastnosti števil iz šestih cvetnih listov posameznega cveta, ki so kjerkoli na shemi Pascalovega trikotnika (glejte sliko 24). Pri preiskovanju so uporabljali žepno računalo.



Slika 24: Cvetovi na Pascalovem trikotniku

Ugotovili so, da za vse cvetove, ki so na Pascalovem trikotniku, velja:

- **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.** Primer:

  Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih:
  $15 \cdot 7 \cdot 56 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 5880$

  Zmnožek števil v modrih cvetnih listih:
  $6 \cdot 28 \cdot 35 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 5880$

Ugotovili so, da pri večjih številih sploh ni treba računati vrednosti zmnožka števil, ampak morajo ugotoviti, da v obeh zmnožkih nastopajo isti (pra)faktorji.

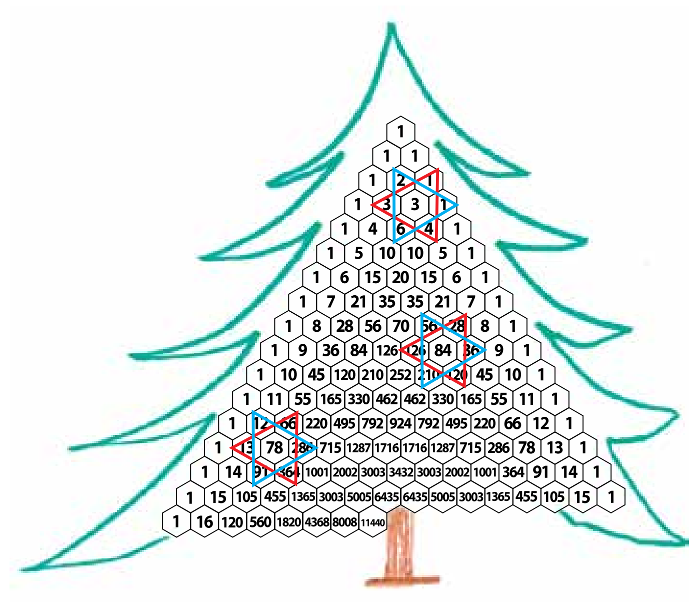
- Iz prve ugotovitve sledi, da je **zmnožek števil v vseh cvetnih listih istega cveta popoln kvadrat**.

  Torej: $15 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 35 = 5880^2$.

Preiskovali so tudi, če je število v rumenem polju cveta povezano s števili v cvetnih listih. Ugotovili so:

- Če seštejemo zmnožka števil v rdečih in modrih cvetnih listih, dobimo večkratnik števila iz rumenega polja. Npr.: Vsota 105 + 105 = 210 je večkratnik števila 6.

Če izvajamo aktivnosti s Pascalovim trikotnikom v prednovoletnem času, lahko namesto cvetov narišemo zvezde, samo shemo Pascalovega trikotnika pa okrasimo kot novoletno jelko (slika 25). Učenci preiskujejo, kaj velja za števila v rdečih oziroma modrih trikotnikih znotraj iste zvezde.



Slika 25: Pascalov trikotnik kot novoletna jelka, okrašena z zvezdami

Zaključek

V eni sami trikotni shemi lahko najdemo ogromno idej za preiskovanje, napovedovanje, utemeljevanje, sklepanje ter iskanje vzorcev števil, posplošitev in zakonitosti. Prav ta red v matematiki, pravila in vzorci nas vedno znova očarajo in tako tudi učenci občutijo lepoto matematike. V naravi in matematiki je vse urejeno ter ima nek red in smisel. Ob preiskovalnih aktivnostih bo učenje matematike učencem v veliko zadovoljstvo ter navdih in spodbuda za nadaljnje delo, saj bo ob tem vsak od njih lahko uspešen.

Opisane aktivnosti so primerne za izvajanje pri rednem pouku matematike (za preiskovanje), pri dodatnem pouku, podaljšanem bivanju, dnevih aktivnosti, delavnicah za nadarjene …

Te aktivnosti pa lahko učenci prenesejo tudi v domače okolje in se v družini igrajo družabne matematične igre v razvedrilo starim in mladim. ■

Viri in literatura

[1] Enzensberger, H. M. (2000). *Številski hudiček: knjiga za vse, ki jim je matematika trn v peti.* Tržič: Učila.

[2] Hogben, L. (1976). *Matematika v nastajanju.* Ljubljana: Mladinska knjiga.

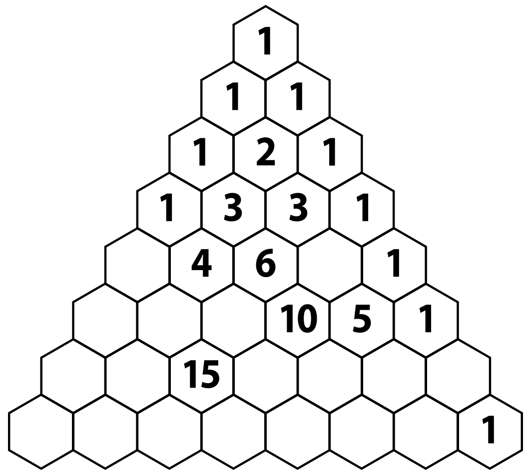
[3] Rajh, S. (2013). *Različni načini reševanja nalog z vzorci.* V Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

[4] http://www.shodor.org/interactivate/activities/ColoringMultiples/ (pridobljeno 20. 7. 2017)

[5] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml (pridobljeno 20. 7. 2017)

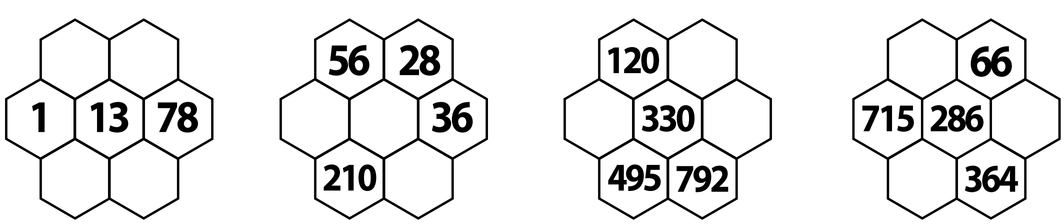
Pascalov trikotnik - preiskovanje števil

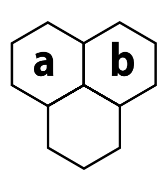
1. Ugotovi pravilo in dopolni manjkajoča števila v shemi.
Kaj velja za števila v shemi? Zapiši vse ugotovitve.



Doriši še nekaj vrstic sheme. Koliko vrstic bi lahko še dodal?

Po ugotovljenem pravilu dopolni še spodnje dele zgornje sheme.





2. Razišči lastnosti števil v shemi Pascalovega trikotnika.

Kaj ugotoviš?
Kaj velja za števila, ki ležijo v isti vrstici? Zapiši vse ugotovitve.

3. V shemi Pascalovega trikotnika pobarvaj večkratnike poljubnega števila.

Zapiši izbrano število. ____________

Kaj velja za obarvana števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

Obarvane sheme primerjaj s sošolci, ki so barvali večkratnike drugih števil. Kaj ugotovite?

4. V shemi Pascalovega trikotnika z isto barvo pobarvaj števila, ki dajo pri deljenju z 2 (3, 4, 5) enak ostanek. Zapiši ugotovitve.

Legendo si pobarvaj sam:

pri deljenju z 2:

… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 0.
… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 1.

pri deljenju s 3:

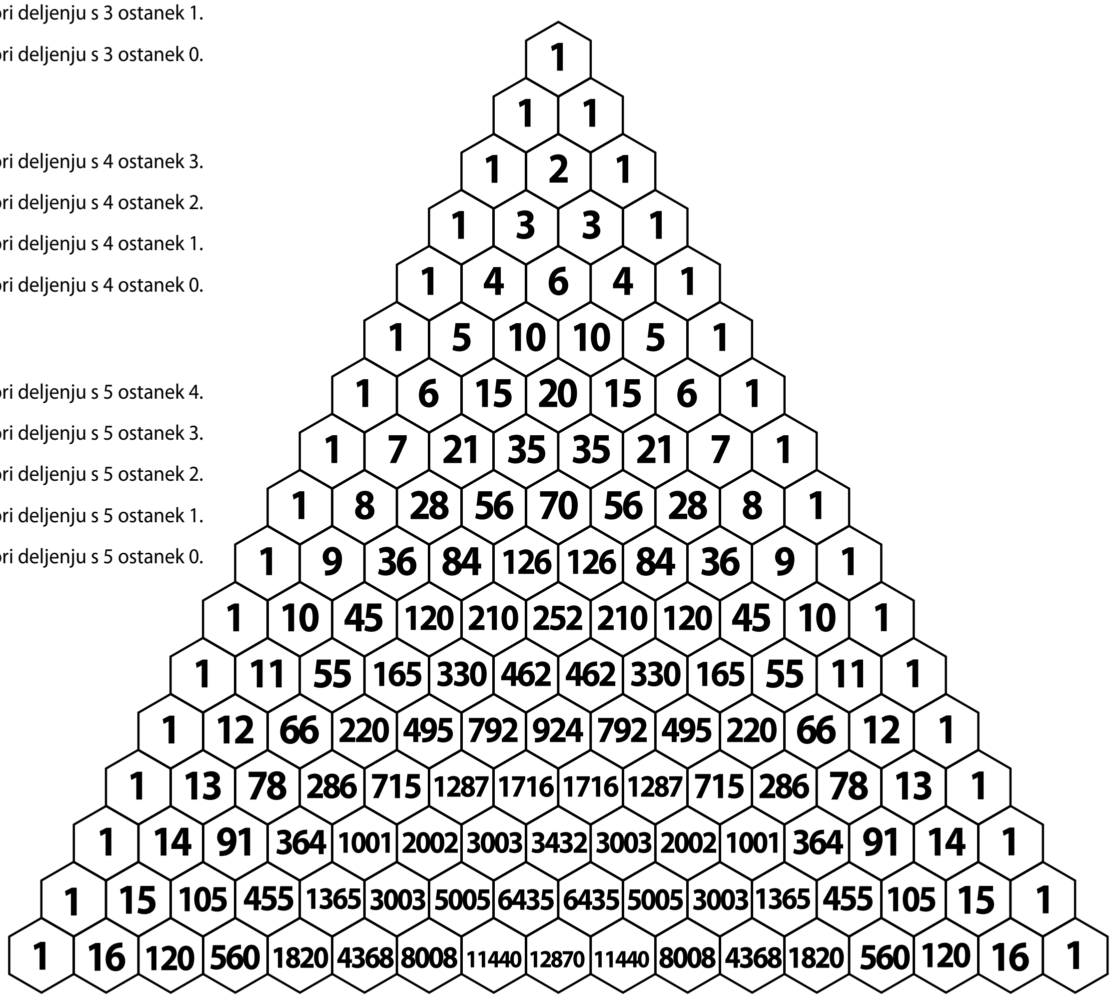
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 0.

pri deljenu s 4:

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 0.

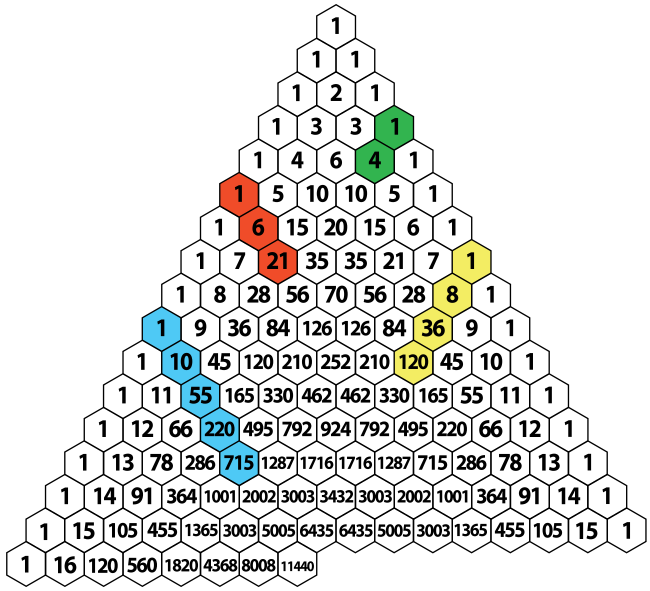
pri deljenju s 5:

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 4.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 0.



5. Nogavice v Pascalovem trikotniku

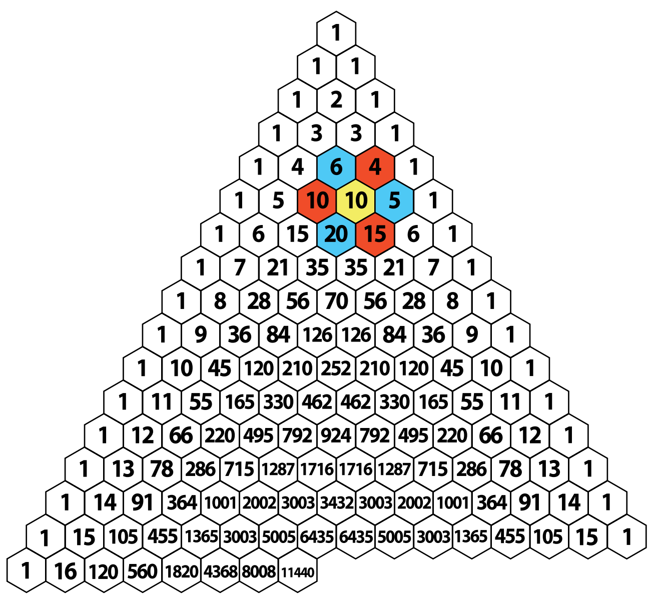
Kaj velja za števila v poljih pobarvanih z enako barvo?



Pobarvaj najbližje polje s številom, ki vsebuje vrednost vsote enako pobarvanih števil. Kaj ugotoviš?
Še sam nariši nekaj primerov in računsko preveri ali tvoja ugotovitev vedno velja.

6. Cvetovi v Pascalovem trikotniku

Na shemi Pascalovega trikotnika je narisan cvet s šestimi cvetnimi listi.
Preiskuj lastnosti pobarvanih števil. Kaj ugotoviš?



Kaj velja za števila v enako obarvanih cvetnih listih?

Kaj velja za števila zapisana v vseh cvetnih listih?

Še sam nariši nekaj cvetov na Pascalov trikotnik in preveri ali tvoja ugotovitev velja tudi za druge cvetove.

Leibnizev harmonični trikotnik

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Pascalov aritmetični trikotnik in Leibnizev harmonični trikotnik sta trikotni shemi števil, ki imata neskončno mnogo vrstic. Oba trikotnika sta simetrična glede na navpično simetralo. Števila, ki nastopajo v obeh trikotnikih, so med seboj povezana na zanimiv način.

Pascalov aritmetični trikotnik je v našem šolskem prostoru precej znan in se z njim pogosto srečajo že osnovnošolci, ko preiskujejo zanimive lastnosti števil v njem, srednješolci pa ga uporabljajo predvsem kot pomoč pri računanju binomskih koeficientov.

Leibnizev harmonični trikotnik je morda še marsikje prezrt, čeprav se tudi v njem skrivajo mnoge zanimivosti. V prispevku bomo nakazali možnosti za preiskovalne aktivnosti v Leibnizevem harmoničnem trikotniku za učence v 3. VIO osnovne šole in v srednji šoli.

Ključne besede: Pascalov (aritmetični) trikotnik, Leibnizev (harmonični) trikotnik, preiskovanje, vzorci števil.

Potrebno predznanje učencev: poznavanje obratne vrednosti števil, znanje seštevanja in odštevanja ulomkov z različnimi imenovalci, poznavanje Pascalovega (aritmetičnega) trikotnika in lastnosti števil v njem.

Leibniz Harmonic Triangle

Abstract

Pascal's arithmetic triangle and the Leibniz harmonic triangle are triangular arrays of numbers with an infinite number of rows. Both triangles are symmetrical on either side of the perpendicular bisector. The numbers appearing in both triangles are linked to one another in an interesting way.

Pascal's arithmetic triangle is rather well known in Slovenian schools and is often encountered by primary school pupils when inquiring about the interesting properties of the numbers in it, whereas secondary school students mostly use it as an aid in calculating binomial coefficients.

The Leibniz harmonic triangle is perhaps still overlooked in many schools despite the many interesting features it contains. This paper will indicate the possibilities for carrying out inquiry activities in a Leibniz harmonic triangle for pupils in the 3rd educational triad of primary school.

Keywords: Pascal's (arithmetic) triangle, Leibniz (harmonic) triangle, inquiry, number patterns.

Pupils' required prior knowledge: knowledge of multiplicative inverses for numbers, knowledge of adding and subtracting fractions with unlike denominators, knowledge of Pascal's (arithmetic) triangle and of the properties of the numbers in it.

Uvod

Preiskovalnih aktivnosti v Leibnizevem harmoničnem trikotniku smo se lotili, ker smo v letu 2016 obeleževali 300. obletnico smrti in 370. obletnico rojstva nemškega matematika in filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Nismo pa pričakovali, da nas bo več različnih poti preiskovanja pripeljalo do Pascalovega aritmetičnega trikotnika.

Zato priporočamo, da pred preiskovalnimi aktivnostmi v Leibnizevem (harmoničnem) trikotniku učenci spoznajo in podrobno preiščejo Pascalov (aritmetični) trikotnik.

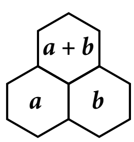
Ker v Leibnizevem harmoničnem trikotniku oziroma Leibnizevem trikotniku nastopajo ulomki, so zapisane aktivnosti primerne za učence 3. VIO osnovne šole in srednje šole.

Leibnizev trikotnik

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Slika 1: Leibnizev trikotnik

Leibnizev trikotnik (Slika 1) ima podobno strukturo kot Pascalov trikotnik, le da se n-ta vrstica Leibnizevega trikotnika prične in tudi konča z obratno vrednostjo števila n, posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim. Torej velja:



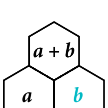
Z Leibnizevim trikotnikom lahko nadgradimo znanje učencev o Pascalovem trikotniku in njihovo sposobnost preiskovanja. Tukaj imajo učenci več težav z računanjem. Tudi zato, ker v Leibnizevem trikotniku nastopajo ulomki. Predlagamo, da učenci najprej izpolnijo robna polja (polja, v katerih se vrstica začne in konča).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{3} & \\
\frac{1}{4} & & & & & & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Slika 2: Vpisano je le prvo in zadnje število v vsaki vrstici Leibnizevega trikotnika

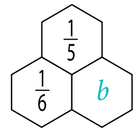
Največja težava se pojavi pri izpolnjevanju polj v notranjosti sheme (Slika 2). Če imajo učenci izpolnjena robna polja, želijo izpolnjevati polja v notranjosti od zgoraj navzdol. A to s seštevanjem ne gre.

Če je zgornje število vsota spodnjih dveh, bomo enega od spodnjih neznanih števil dobili kot razliko med zgornjim in znanim spodnjim številom.



$$b = (a + b) - a$$

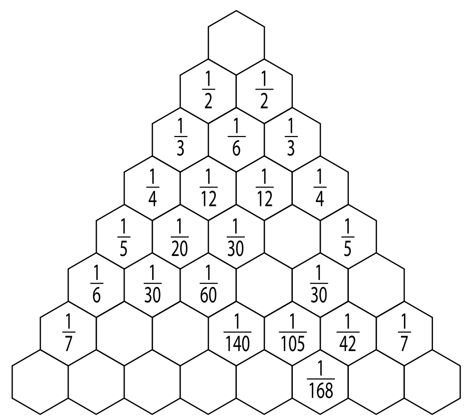
Npr.:



$$b = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$$

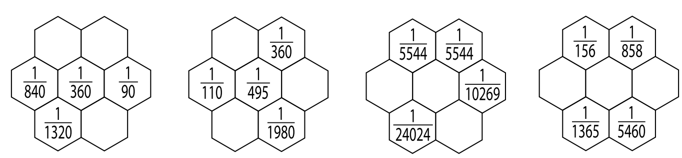
Predlagamo, da učenci nekaj začetnih primerov izračunajo »peš«, nato si pomagajo z žepnim računalom. Opozorimo jih, da morajo ulomek, preden ga vpišejo v shemo, še okrajšati.

Na drug način pa se lahko izpolnjevanja sheme in preiskovanja lotijo tako, da s pomočjo sheme, v kateri so vpisana le nekatera števila (Glejte Sliko 3 in Učni list za preiskovanje), ugotovijo in ubesedijo pravilo, po katerem so nanizana števila ter po ugotovljenem pravilu dopolnijo manjkajoča števila v shemi in zapišejo še nekaj naslednjih vrstic Leibnizevega trikotnika.



Slika 3: Shema za preiskovanje

Po ugotovljenem pravilu naj učenci dopolnijo še nekatere izseke iz Leibnizevega trikotnika (Slika 4), s pomočjo katerih preverimo, ali razumejo, kako dopolnjujejo shemo.

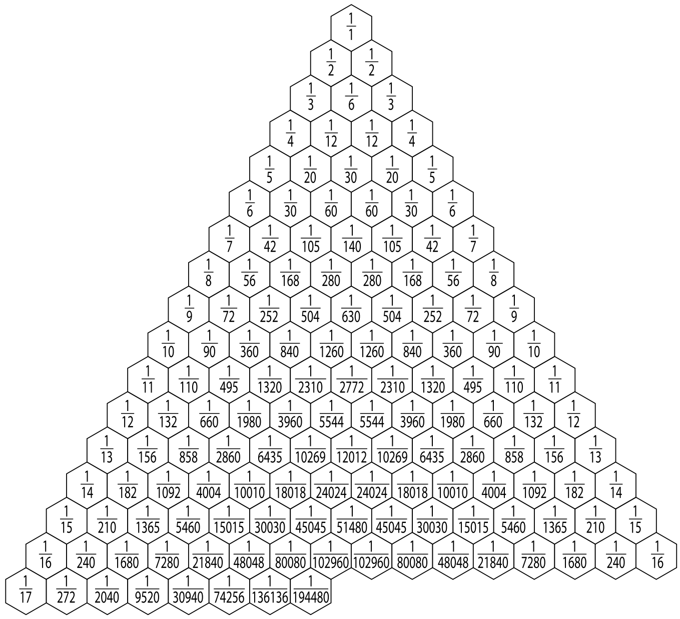


Slika 4: Posamezni izseki iz Leibnizevega trikotnika

Ko učenci izpolnijo shemo Leibnizevega trikotnika (Slika 5), naj ugotavljajo odnose med števili v njem.

Ugotovimo, da v Leibnizevem trikotniku nastopajo t. i. enotski ulomki oziroma Egipčanski ulomki (ulomki, ki imajo v števcu število 1). Podobno kot Pascalov trikotnik je tudi Leibnizev trikotnik simetričen, saj za seštevanje velja komutativnost (vsako število v Leibnizevem trikotniku je namreč vsota števil pod njim, čeprav so učenci števila določevali z odštevanjem).

Znotraj posamezne vodoravne vrstice se proti sredini vrstice vrednost ulomkov manjša in najmanjše število v vrstici je tik ob somernici ali na njej. Podobno se vrednost ulomkov v vsaki naslednji vodoravni vrstici manjša glede na prejšnjo (zgornjo) vrstico.



Slika 5: Izpolnjena shema Leibnizevega trikotnika

Če smo pred Leibnizevim trikotnikom izvajali aktivnosti s Pascalovim trikotnikom, bodo učenci po analogiji samodejno iskali podobne povezave med števili znotraj sheme kot so jih našli v Pascalovem trikotniku.

Lastnosti števil po vrsticah

Ugotovimo, da so vsi imenovalci v n-ti vrstici Leibnizevega trikotnika večkratniki števila n.

Poševne vrstice:

- V prvi poševni vrstici je zaporedje enotskih ulomkov: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ...
- V drugi poševni vrstici so števila enaka produktu levega in zgornjega števila. (**Produktu**, čeprav smo ulomke dobili z **odštevanjem**!). Učenci ugotovijo, da velja $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7}{42} - \frac{6}{42} = \frac{1}{42}$ in tudi $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Ker se imenovalca zaporednih ulomkov v prvi poševni vrstici razlikujeta za 1, bo tudi razlika števcev ulomkov, ki so razširjeni na skupini imenovalec, enaka 1. Učenci 9. razreda in srednješolci bi morali to znati utemeljiti tudi s pomočjo algebre:

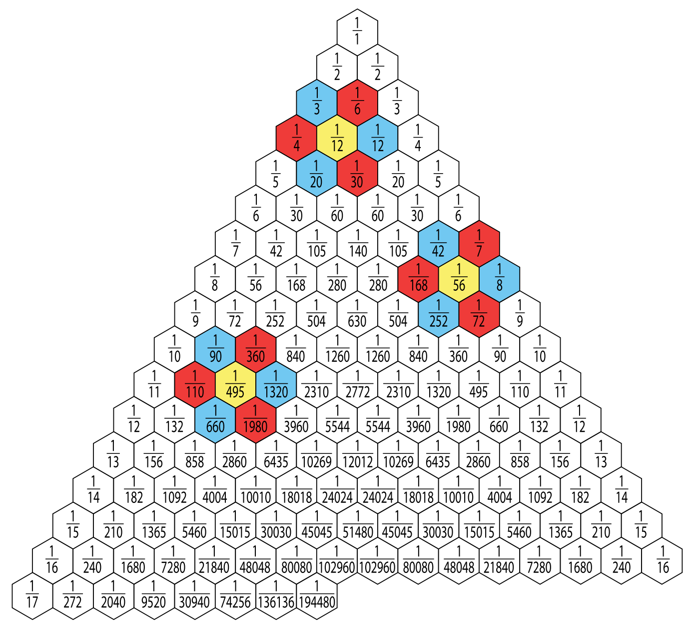
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{a(a+1)} - \frac{a}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+1}$$

Števila v drugi poševni vrstici $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}$ ... tvorijo tako imenovano Teleskopsko zaporedje, katerega vsota je enaka 1. Srednješolci bi znali ugotoviti, da velja:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots =$$
$$= \frac{1}{1} = 1$$

Cvetovi

Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku na shemi Leibnizevega trikotnika obarvamo nekaj cvetov s šestimi cvetnimi listi (Slika 6).



Slika 6: Cvetovi na Leibnizevem trikotniku

Ugotovimo, da tudi za cvetove v Leibnizevem trikotniku velja ista ugotovitev kot za Pascalov trikotnik: Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

Primer za cvet v zgornjem delu sheme, kjer so ulomki z manjšimi imenovalci:

Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{720}$

Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{720}$

Primer za cvet v spodnjem delu sheme, kjer so ulomki z večjimi imenovalci:

Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $\frac{1}{360} \cdot \frac{1}{110} \cdot \frac{1}{1980} = \frac{1}{78408000}$

Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{660} \cdot \frac{1}{1320} = \frac{1}{78408000}$

Čeprav so imeli na razpolago žepno računalo, so nekateri učenci za ugotavljanje veljavnosti zapisane ugotovitve rajši računali »peš«. Števila v imenovalcih ulomkov so razcepili na manjša števila (lahko bi jih tudi na praštevila) in primerjali, ali imata imenovalca za zmnožek rdečih in modrih cvetnih listov enake faktorje. Isti primer:

Rdeči:

$$\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{110}\cdot\frac{1}{1980}=\frac{1}{6\cdot 6\cdot 10}\cdot\frac{1}{11\cdot 10}\cdot\frac{1}{9\cdot 220}=\frac{1}{6\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 220}$$

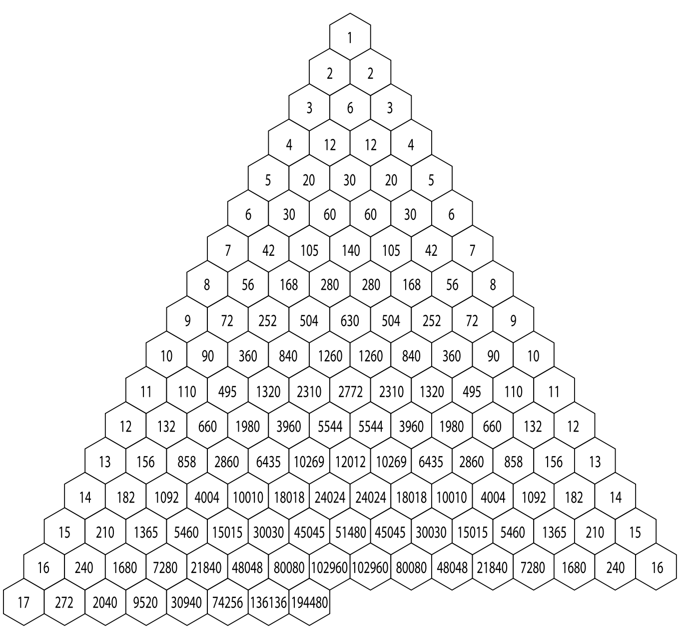
Modri:

$$\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{660}\cdot\frac{1}{1320}=\frac{1}{9\cdot 10}\cdot\frac{1}{6\cdot 10\cdot 11}\cdot\frac{1}{6\cdot 220}=\frac{1}{9\cdot 10\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 6\cdot 220}$$

Ulomka, ki imata enak števec, v imenovalcu pa zmnožek enakih faktorjev $6\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 10\cdot 11\cdot 220$, sta enaka. Zato je zmnožek števil v rdečih cvetnih listih enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

»Shema z imenovalci«

Ker so števci vseh ulomkov v Leibnizevem trikotniku enaki ena, se v nadaljevanju osredotočimo samo na imenovalce. Da bo shema bolj pregledna in da bomo lažje preiskovali, predlagamo, da v novo trikotno shemo zapišemo samo števila, ki so v imenovalcih ulomkov in se pri tem zavedamo, da to ni več Leibnizev (harmonični) trikotnik. Za lažje opisovanje ga poimenujmo »shema z imenovalci« (Slika 7).



Slika 7: Shema, v kateri so zapisani le imenovalci ulomkov iz Leibnizevega trikotnika (na kratko »shema z imenovalci«)

Učenci so se preiskovanja v novem trikotniku »shema z imenovalci« lotili na več različnih načinov oziroma so ubrali različne poti preiskovanja:

1. pot preiskovanja: **Vodoravne vrstice**

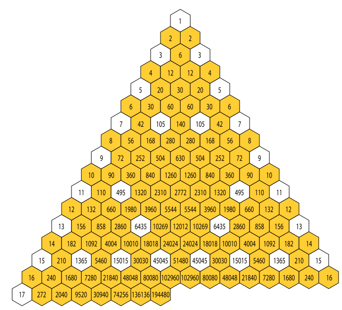
Učenci so izhajali iz ugotovitve, da so vsi imenovalci ulomkov v n-ti vrstici Leibnizevega trikotnika večkratniki števila n. Iz tega sledi, da so v »shemi z imenovalci« vsa števila v n-ti vodoravni vrstici večkratniki števila n. Zato so vsa števila v n-ti vodoravni vrstici »sheme z imenovalci« delili z n. Števila, ki so jih dobili, so zapisali v novo prazno shemo. Dobili so: Pascalov trikotnik.

2. pot preiskovanja: **Poševne vrstice**

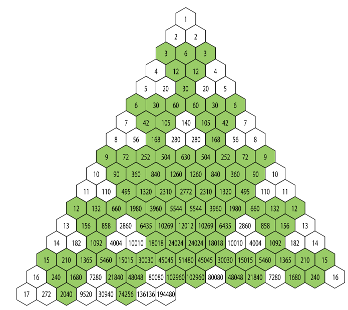
Učenci so ugotovili, da so števila v n-ti poševni vrstici »sheme z imenovalci« večkratniki števila n. Preiskovanja so se lotili tako, da so vsa števila v n-ti poševni vrstici »sheme z imenovalci« delili z n. Števila, ki so jih dobili, so zapisali v novo prazno shemo. Dobili so trikotnik, ki je podoben Pascalovemu, le da mu manjka prva leva poševna vrstica. (Tokrat smo poševne vrstice upoštevali od desno zgoraj do levo spodaj. Če bi bile poševne vrstice od levo zgoraj do desno spodaj, bi nastalemu trikotniku do Pascalovega trikotnika manjkala prva desna poševna vrstica.)

3. pot preiskovanja: **Večkratniki**

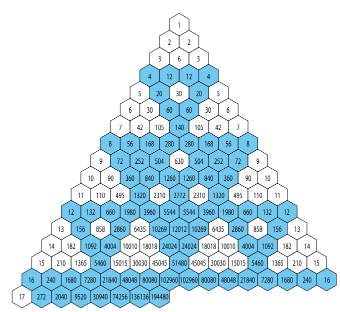
Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku so učenci v »shemi z imenovalci« barvali večkratnike različnih števil in ugotavljali lastnosti obarvanega vzorca števil (Slike 8–11).



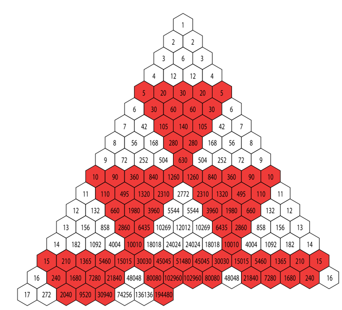
Večkratniki števila 2



Večkratniki števila 3



Večkratniki števila 4



Večkratniki števila 5

Slike 8–11: Obarvani večkratniki števil 2, 3, 4 in 5.

Učenci so med drugim ugotovili, da je pri večkratnikih števila 2 v celoti pobarvana vsaka druga *vodoravna vrstica*, pri večkratnikih števila 3 vsaka tretja, pri večkratnikih števila 4 vsaka četrta, pri večkratnikih števila 5 pa vsaka peta vodoravna vrstica. Napovedali so, da bo pri večkratnikih števila 6 v celoti pobarvana vsaka šesta vrstica. To so kasneje utemeljili s tem, da so v shemi z obarvanimi večkratniki števila 3 vsa števila v 6. in 12. vrstici soda, torej so večkratniki števila 2. Števila, ki so hkrati večkratniki števil 2 in 3, so tudi večkratniki števila 6. Torej so vsa števila v 6. in 12. vrstici večkratniki števila 6.

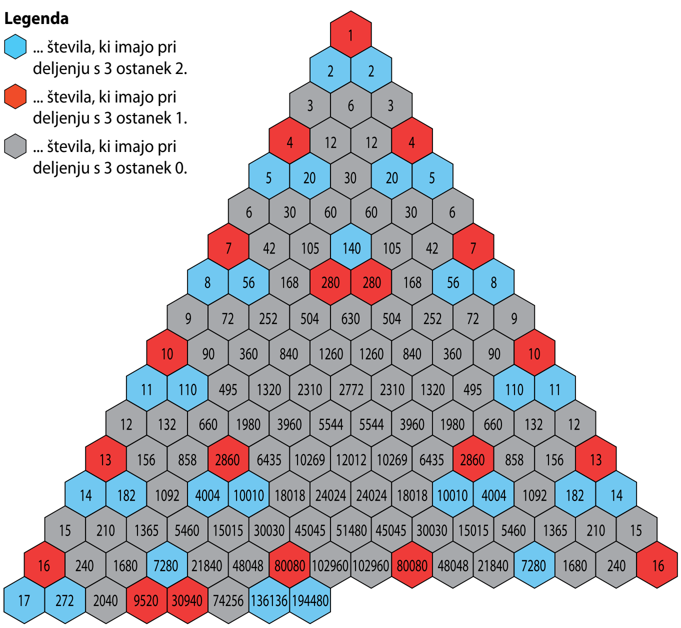
Ista ugotovitev velja tudi za v celoti pobarvane *poševne vrstice*.

Vse navedene ugotovitve skupaj pa izhajajo iz dejstva, ki smo ga zapisali pri 1. in 2. poti preiskovanja: **Vsa števila v *n*-ti vrstici (pa naj gre za vodoravne ali poševne) so večkratniki števila *n*.**

4. pot preiskovanja: **Ostanki pri deljenju**

Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku so v »shemi z imenovalci« z isto barvo pobarvali števila, ki imajo pri deljenju z nekim številom enak ostanek.

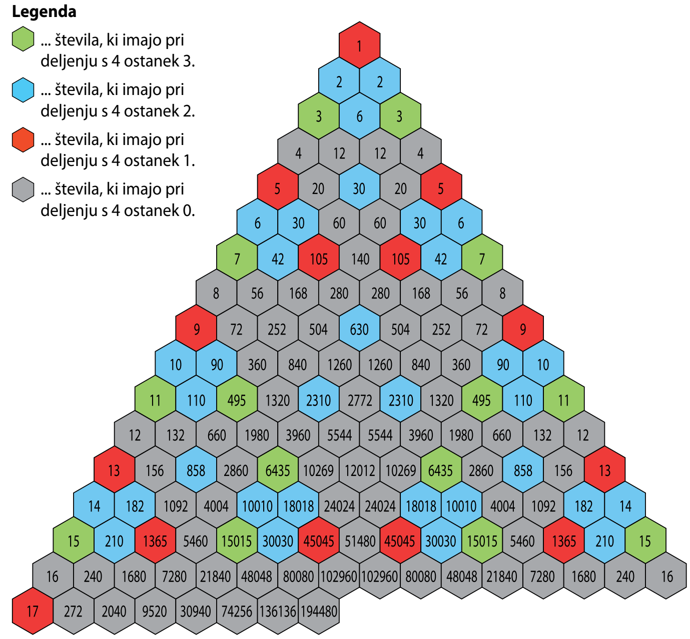
Pri barvanju ostankov pri deljenju z 2 so opazovali vzorec, ter ugotovili, da je v 3., 7. in 15. *vodoravni vrstici* vzorec LSLSLS … z gradnikom LS, kjer so z L označili liho, s S pa sodo število. Isti vzorec so napovedali tudi za 31., 63., oziroma v $(2^n – 1)$. vodoravno vrstico. Podobno so predvidevali tudi za 1. in 9. *poševno vrstico*, a so kmalu spregledali, da se ta vzorec v 17. vodoravni vrstici prekine. Svoje napovedi so preverili še s pomočjo računalniške aplikacije (glejte vira [1] in [2]).



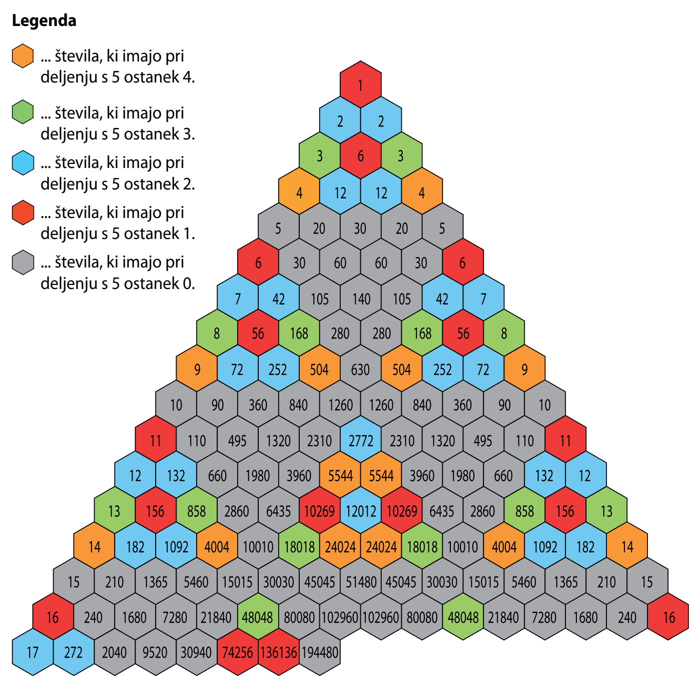
Slika 12: Ostanki pri deljenju s 3.

Ko so učenci z enako barvo barvali števila, ki dajo pri deljenju s 3 enak ostanek, so ugotavljali, da so siva polja na sliki 12 preiskovali že pri aktivnosti večkratniki števila 3. Zato so se osredotočili na ostale vzorce barv. V 1. poševni vrstici se izmenjujejo rdeče, modro in sivo obarvano polje. Tako nam gradnik RMS tvori vzorec RMSRMSRMS … V 2. poševni vrstici se izmenjujejo eno modro in dve sivi polji, oz. gradnik MSS, kar daje vzorec MSSMSSMSS … 3. poševna vrstica je v celoti siva, kar so ugotovili že pri aktivnosti barvanja večkratnikov števila 3.

Tudi pri barvanju ostankov pri deljenju s 4 z isto barvo (glejte sliko 13), so ugotavljali, da so siva polja obravnavali in opisali že pri večkratnikih števila 4. Osredotočili smo se na ostale barve. V 1. poševni vrstici opazimo vzorec barvanja RMZSRMZSRMZS …, v katerem se ponavlja gradnik RMZS (rdeče, modro, zeleno, sivo polje). V 2. poševni vrstici se izmenjujeta dve modri in dve sivi polji. V vzorcu 2. vrstice MMSSMMSSMMSS …. se tako ponavlja gradnik MMSS. Vzorec barvanja 3. poševne vrstice ima zelo dolg gradnik ZSMSRSSS, 4. poševna vrstica pa je v celoti siva.



Slika 13: Ostanki pri deljenju s 4.



Slika 14: Ostanki pri deljenju s 5

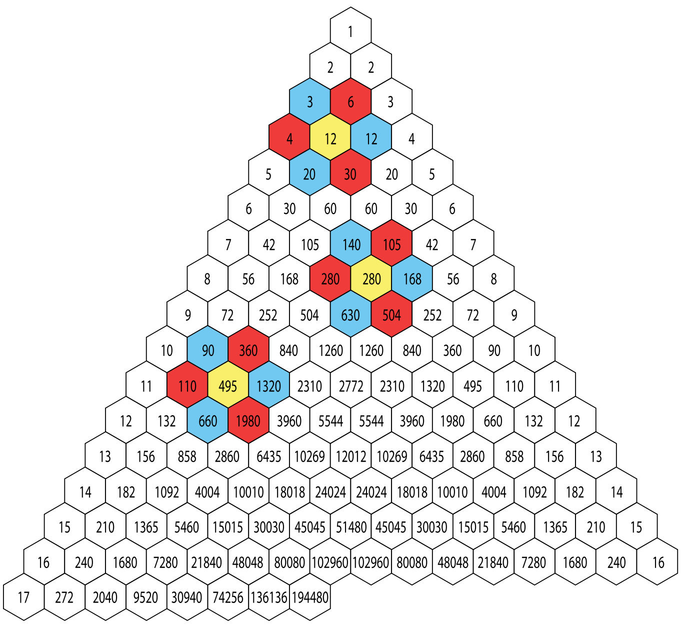
Barvanje števil, ki dajo pri deljenju s 5 enak ostanek, jim je bilo še posebej ljubo, saj so že pri barvanju Pascalovega trikotnika ugotovili, da morajo pri številih v posameznih poljih opazovati samo zadnjo števko (Slika 14). Tako so npr. z zeleno pobarvali vsa števila, ki imajo zadnjo števko 3 ali 8.

Ugotovili so, da je v prvi poševni vrstici vzorec RMZOSRMZOSRMZOS … z gradnikom RMZOS (rdeče, modro, zeleno, oranžno, sivo polje). V drugi poševni vrstici je vzorec z gradnikom MRMSS, v tretji vzorec z gradnikom ZMSSS, v četrti vzorec z gradnikom OSSSS, peta pa je v celoti siva (saj so tam večkratniki števila 5).

Učenci bi lahko ugotovili, da se nek trikotnik - gradnik barvanja v celotni sliki večkrat ponovi (podobno kot so to ugotavljali za Pascalov trikotnik) in tako bi se naša pot preiskovanja v tej točki lahko preusmerila še na fraktale, a to je že tema nove preiskave in morda naslednjega prispevka. Predlagam, da se po tej poti podate tudi vi z vašimi učenci.

5. pot preiskovanja: **Cvetovi**

Tudi v »shemi z imenovalci« so učenci pobarvali cvetove in preiskali lastnosti števil v cvetnih listih (Slika 15).



Slika 15: Cvetovi na »shemi z imenovalci«

Že v prejšnjem poglavju smo zapisali, da tudi za cvetove v Leibnizevem trikotniku velja ista ugotovitev kot za Pascalov trikotnik: **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.**

Ker je zmnožek ulomkov ulomek, katerega števec je enak zmnožku števcev vseh faktorjev (v našem primeru je to zmnožek samih enk), imenovalec pa zmnožek vseh imenovalcev, iz tega sledi, da tudi za imenovalce (oziroma za »shemo z imenovalci«) velja: **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.**

Iz prejšnje ugotovitve sledi: **Zmnožek števil v vseh cvetnih listih je popoln kvadrat.**

Primer za cvet v delu sheme, kjer so manjša števila:
Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $6 \cdot 4 \cdot 30 = 720$
Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $3 \cdot 20 \cdot 12 = 720$
Zmnožek števil v vseh šestih cvetnih listih:
$3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 4 = 720^2$

Primer za cvet v delu sheme, kjer so večja števila:
Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih:
$105 \cdot 280 \cdot 504 = 14817600$
Zmnožek števil v modrih cvetnih listih:
$140 \cdot 630 \cdot 168 = 14817600$
Zmnožek števil v vseh šestih cvetnih listih:
$105 \cdot 140 \cdot 280 \cdot 630 \cdot 504 \cdot 168 = 14817600^2$

Še računanje »peš« z razcepom na faktorje in primerjanje faktorjev.

Rdeči cvetni listi:
$105 \cdot 280 \cdot 504 = 5 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 140 \cdot 9 \cdot 56 = 9 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 56 \cdot 140$

Modri cvetni listi:
$140 \cdot 630 \cdot 168 = 140 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 56 = 9 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 56 \cdot 140$

Ker v obeh zmnožkih nastopajo isti faktorji, je zmnožek števil v rdečih cvetnih listih enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

Velja tudi, da je zmnožek števil v rdečih/modrih cvetnih listih večkratnik števila v rumenem polju.

Zaključek

Pascalov aritmetični trikotnik in Leibnizev harmonični trikotnik na prvi pogled morda nimata nič skupnega razen simetrične trikotne sheme z neskončno mnogo vrsticami.

Trikotnik	Pascalov aritmetični	Leibnizev harmonični
n-ta vrstica se začne in konča z	1	$\frac{1}{n}$
Število v notranjosti je dobljeno kot vsota obeh števil …	**nad** njim	**pod** njim

Po preiskovalnih aktivnostih pa najdemo mnogo zanimivih pravil in povezav, ne samo med števili po vrsticah posameznega trikotnika, temveč tudi povezave med števili v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku. ■

Viri in literatura:

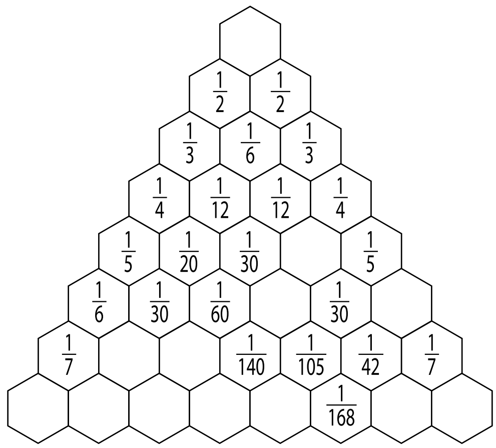
[1] http://www.shodor.org/interactivate/activities/ColoringMultiples/ (pridobljeno 20. 7. 2017)

[2] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml (pridobljeno 20. 7. 2017)

[3] Rajh, S. (2017). Pascalov aritmetični trikotnik. *Matematika v šoli*, 23, št. 2, str. 37–48.

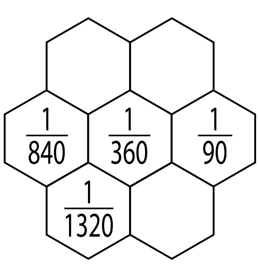
Preiskovanje števil

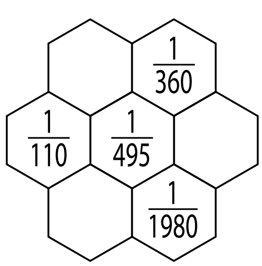
1. Ugotovi pravilo in dopolni manjkajoča števila v shemi.
Kaj velja za števila v shemi? Zapiši vse ugotovitve.

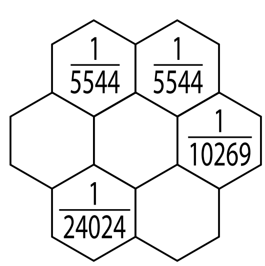


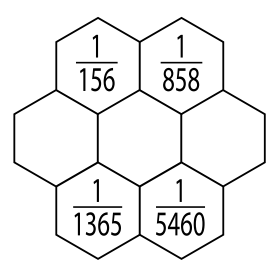
Dopiši še nekaj vrstic sheme. Koliko vrstic bi lahko še dodal?

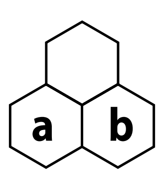
Po ugotovljenem pravilu dopolni še spodnje dele zgornje sheme.





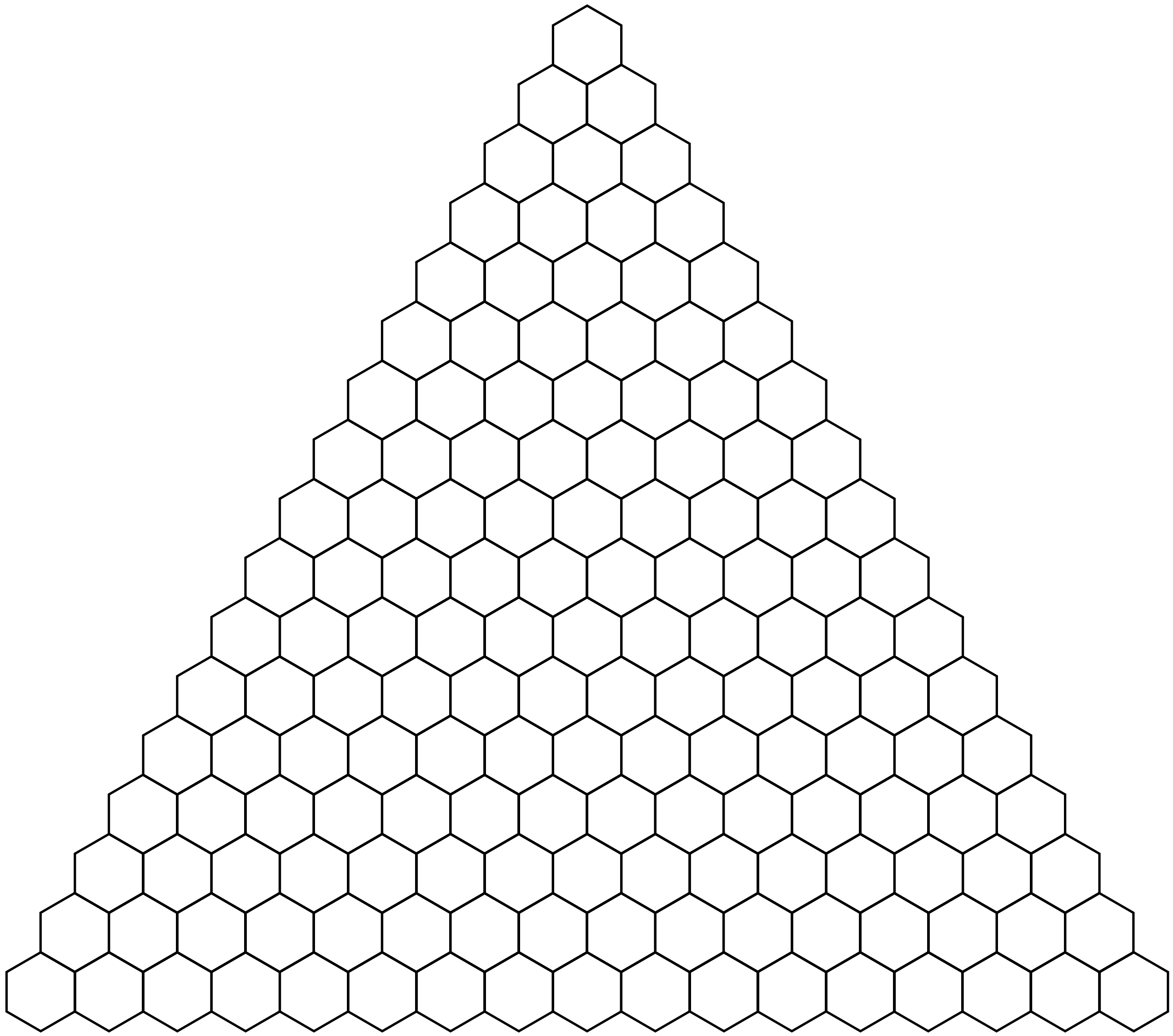






2. Izpolni predlogo Leibnizevega trikotnika, če velja:

- *n*–ta vrstica Leibnizevega trikotnika se prične in tudi konča z obratno vrednostjo števila *n*, torej z $1/n$,
- posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim.



Kaj velja za števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

Za lažje preiskovanje in iskanje zakonitosti med števili v prazno shemo zapiši samo imenovalce Leibnizevega harmoničnega trikotnika.

Kaj velja za števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

3. Uporabi shemo z imenovalci ulomkov iz Leibnizevega trikotnika. Z isto barvo pobarvaj števila, ki dajo pri deljenju z 2 (3, 4, 5) enak ostanek. Zapiši ugotovitve.

Legendo si pobarvaj sam:

pri deljenju z 2:

… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 0.
… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 1.

pri deljenju s 3:

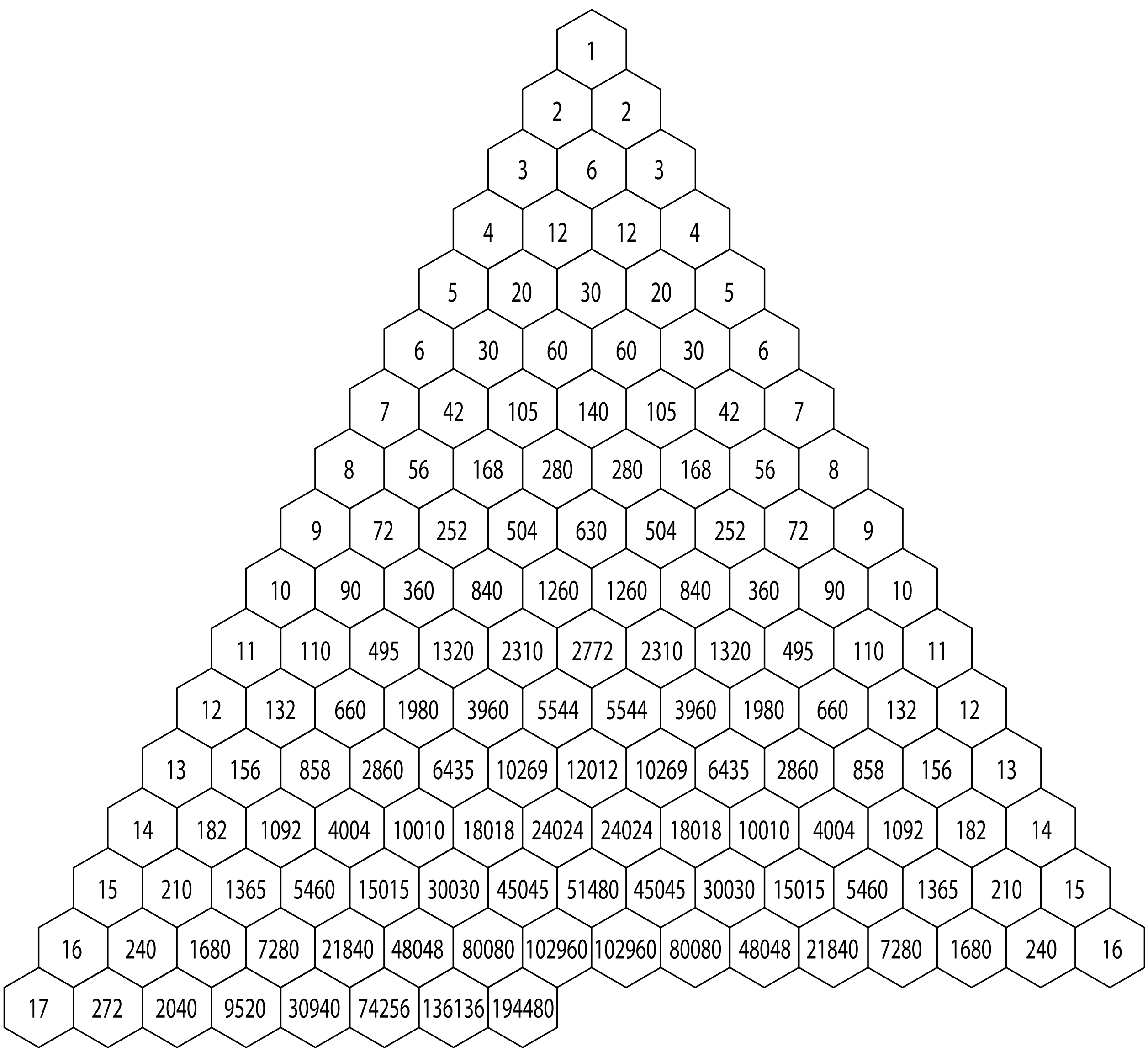
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 0.

pri deljenju s 4:

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 0.

pri deljenju s 5:

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 4.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 0.



Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2017

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Uvod

V letu 2017 je potekalo že 51. državno srečanje mladih raziskovalcev v Murski Soboti. Na končnem izboru za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 12 raziskovalnih nalog. Komisijo so sestavljali Polona Repolusk, Mateja Grašič, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec.

Iz prvega kroga je prispelo osemnajst nalog. Komisija je izbrala dvanajst nalog za srebrna in zlata priznanja. Te naloge so bile tudi predstavljene pred komisijo. Na koncu je komisija določila osem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje. Predstavljene naloge so bile naslednje:

Osnovne šole:

1. ZLATO *Včrtajmo kroge*: Nino Djordjević in Miha Mlinarič, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor 2.

2. ZLATO *Kako lahko razdelimo trikotnik*: Tilen Komel, Bor Križaj in Dominik Uršič, mentorica Lucija Filipčič Križaj, Osnovna šola Komen.

3. SREBRNO *Kvadrati v pravokotniku*: Julija Vidmar in Lara Perko, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor.

4. SREBRNO *Kitajsko množenje*: Jure Virtič in Metka Supej, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor.

5. SREBRNO *Reuleauxov trikotnik*: Lea Strniša in Lara Stegnar, mentorica Alenka Repnik, Osnovna šola Borcev za severno mejo Maribor.

6. SREBRNO *Ploščine malo drugače*: Lara Vidic in Živa Jančar Bauman, mentorica dr. Lucija Željko, Osnovna šola Sostro.

Srednje šole:

1. ZLATO *Kombinatorična igra Catalanovih števil*: Martina Lokar in Tjaša Valič, mentor mag. Alojz Grahor, Škofijska gimnazija Vipava.

2. ZLATO *Jajčaste krivulje*: Neža Divjak in Miha Šalamun, mentorja Renata Hvala in doc. dr. Bojan Hvala, Prva gimnazija Maribor.

3. SREBRNO *Grupe kit*: Jernej Grlj, mentor Jaka Smrekar, Zavod sv. Stanislava za vzgojo, izobraževanje in kulturne dejavnosti.

4. SREBRNO *Sferična trigonometrija*: Jaka Bezjak, mentorica Simona Kokol, Gimnazija Ptuj.

5. SREBRNO *Ustvarjanje in 3D-vizualizacija fraktalov z Blenderjem*: David Mikek, mentor Nedeljko Grabant, Šolski center Velenje, Elektro in računalniška šola.

6. SREBRNO *Iskanje konsenza v pluralnem okolju*: Tjaša Gašperič, Rok Gornik in Zala Kogoj, mentorja Benjamin Tomažič in Matjaž Krnc, Zavod sv. Frančiška Saleškega za vzgojo, izobraževanje in kulturne dejavnosti.

Prevladovale so naloge z geometrijsko tematiko.

Predstavljenih je bilo sedem nalog iz geometrije, dve iz algebre, ena računalniška, ena kombinatorična in ena statistična.

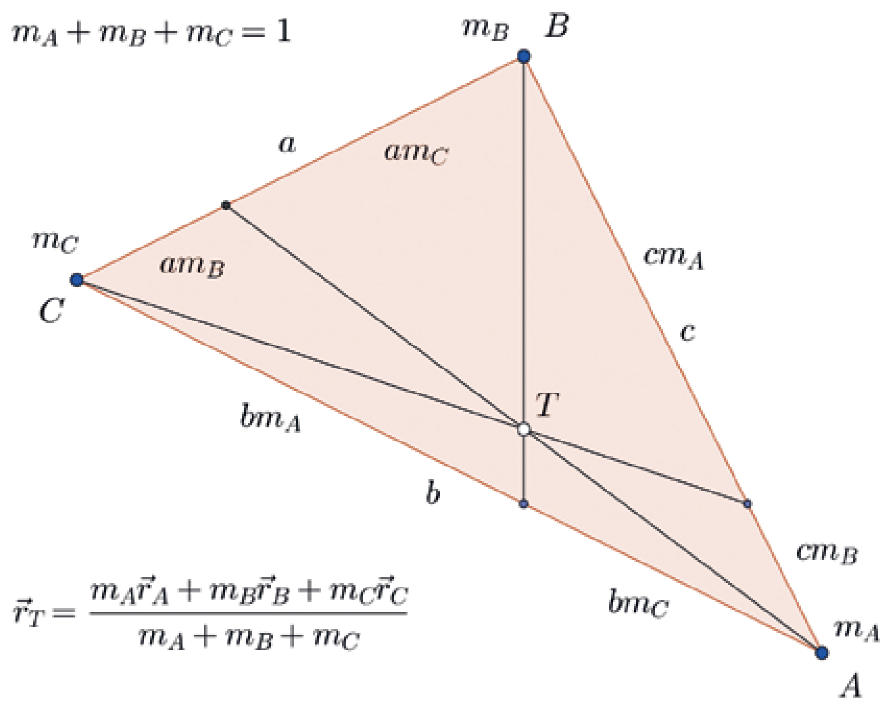
Kako lahko raziskovalne naloge še izboljšamo

1. Ponovila se je zgodba iz lanskega leta. Naloga *Kako lahko razdelimo trikotnik* je sicer dobila zlato priznanje, vendar pa bi lahko bila z malo truda, ali bolje rečeno, z veliko manj truda, kot je bilo vanjo vloženega, bolj prepričljiva in strokovna. Avtorji so posplošili pojem težiščnic v trikotniku tako, da so izbrane točke na stranicah trikotnika povezali z nasprotnim ogliščem in ugotavljali, v kakšnem razmerju morajo dane točke deliti stranice, da se bodo na koncu zveznice sekale v eni sami točki. Pri tem so avtorji pokazali, da obvladajo vektorski račun. Glede na to, da je naloga osnovnošolska, je to pomenljivo. Pri izračunih v nalogi so si pomagali s sistemom Mathematica. Obvladanje vektorskega računa in sistema Mathematica jim bo v nadaljnjem šolanju v veliko pomoč, zato lahko rečemo, da je raziskovalna naloga v polni meri dosegla svoj namen. Vendar pa bi lahko bil izračun pogoja, da se tri zgoraj omenjene zveznice srečajo v eni točki, mnogo krajši in bolj poučen kot pa tisti, ki je bil narejen v nalogi. V trikotniku lahko posplošimo težiščnice tako, da oglišča trikotnika obtežimo z različnimi utežmi. Če so vse tri uteži enake, potem dobimo običajno težišče trikotnika. Posplošene težiščnice dobimo tako, da razdelimo stranice v razmerju uteži v njenih krajiščih. Te se bodo vedno sekale v eni točki, to je v težišču sistema, kot prikazuje naslednja slika. Vzemimo, da je vsota mas enaka 1.

   Naj omenimo še nalogo *Ploščine malo drugače*, ki bi bila lahko z matematičnega vidika še bolj kakovostna.

2. V predstavljenih raziskovalnih nalogah se je že večkrat pojavil Pickardov izrek. To je izrek, ki nam pove, kako se lahko izračuna ploščina večkotnika s preštevanjem mrežnih točk, v katere je lik včrtan.

   Dana je pravokotna mreža točk. Vzemimo, da štiri sosednje točke tvorijo oglišča kvadrata ploščine 1. Večkotnik je včrtan tako, da se vsa oglišča nahajajo v točkah mreže. Na sliki je označen šestkotnik, njemu očrtani



pravokotnik in trikotnik, ki je nastal s prepolovitvijo pravokotnika po eni od diagonal.

Pickardov izrek pravi, da je ploščina lika enaka $P = a + b/2 - 1$, kjer je a število notranjih točk v liku, medtem ko je b enako številu točk, ki ležijo na robu (na stranicah in v ogliščih) mnogokotnika. V našem primeru je ploščina pravokotnika enaka
P = 10 · 8 = 80 = 63 + 36/2 – 1,
ploščina trikotnika je
P = 80/2 = 40 = 31 + 20/2 – 1
in ploščina šestkotnika enaka
P = 44 – 9/2 – 1 = 47,5 enot.

V nalogi je korektno izpeljana formula le za pravokotnik.

Za splošnejši večkotnik pa ni izpeljana. Hitro se vidi, da formula velja za pravokotni trikotnik, ki je polovica pravokotnika. Nato jo takoj posplošimo za pravokotni trapez, ki je sestavljen iz pravokotnika in pravokotnega trikotnika. Natančno izpeljavo prepuščam bralcem za vajo.

V raziskovalni nalogi je bilo rečeno, da sta avtorici oblikovali tudi like, katerih ploščine nista znali izračunati po formuli, ampak sta jo določili le s pomočjo štetja kvadratkov.

Tu sta bili nadobudni učenki prikrajšani za čudovito preprosto formulo, s pomočjo katere se da izračunati ploščina poljubnega večkotnika. Formula je napisana v sliki znotraj šestkotnika.

V nalogi najdemo še dve nerodnosti. Ko sta računali ploščino likov z luknjami, ki se med seboj ne dotikajo, sta empirično ugotovili, da je ploščina enaka $P = a + b/2 + (n - 1)$, kjer je n število lukenj. Dokaz je čisto preprost. Vzamemo lik, ignoriramo luknje in izračunamo ploščino s pomočjo Pickardovega izreka. Nato pa za vsako luknjo enako določimo ploščino in jih odštejemo od osnovnega lika. Sledimo natančno, kako se spreminjajo notranje točke v robne točke končnega lika.

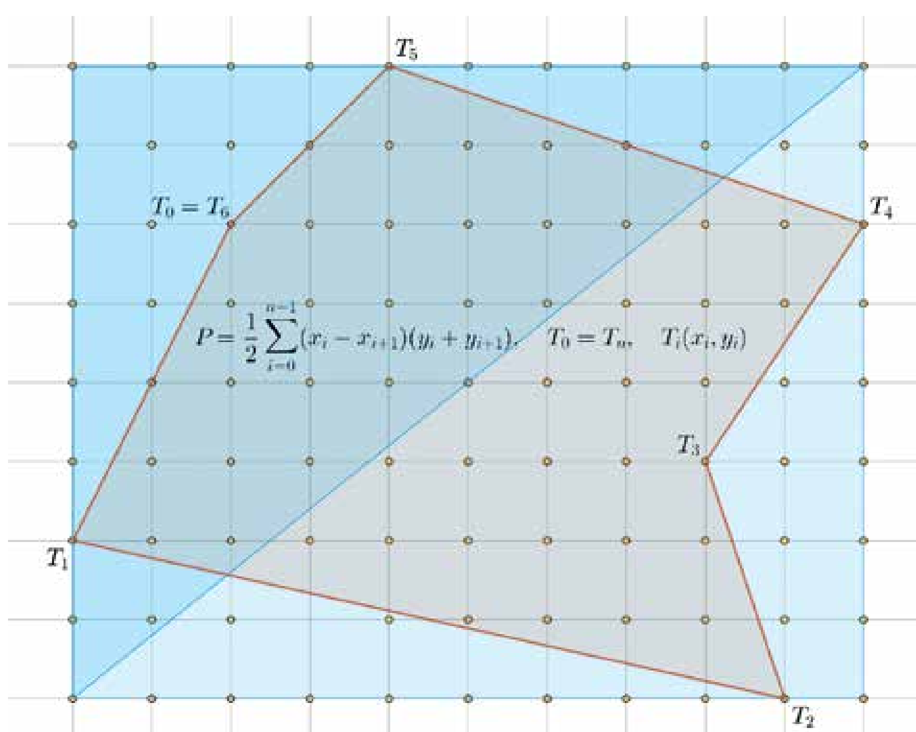
$P = a' + b'/2 - 1 - (a_1 + b_1/2 - 1) - \ldots$
$\ldots - (a_n + b_n/2 - 1) = a + b/2 + (n - 1)$

$a = a' - a_1 - \ldots - a_n - b_1 - \ldots - b_n$, $b =$
$= b' + b_1 + \ldots b_n$.

Druga nerodnost je v primeru sestavljenih likov, ki se stikajo v enem oglišču.

Takoj se vidi, brez empiričnih izračunov, ki so bili narejeni, kako obravnavati oglišča, ki so skupna več delom. Sestavne dele obravnavamo ločeno in na koncu seštejemo ploščine.

3. Naslednja stvar, na katero sem že večkrat opozoril, izvira iz navodil, kako mora biti sestavljena raziskovalna naloga in kaj loči raziskovalno nalogo od seminarske. Navodila so za naloge iz matematike popolnoma neuporabna. Zaradi upoštevanja teh navodil se raziskovalci in mentorji včasih znajdejo



v malodane smešnih situacijah. V navodilih piše, da morajo raziskovalci napisati hipoteze, ki naj bi jih njihova raziskovalna naloga ovrgla oziroma potrdila. V matematiki se reče, da bomo v nalogi izpeljali dokaz Pickovega izreka, ne pa da zapišemo med hipoteze, da predpostavimo, da Pickov izrek velja. Seveda velja, saj ga je Adolf Josef Pick dokazal že pred 120 leti. Hipoteze in njihovo preverjanje pa naravnost spodbujajo anketne raziskovalne naloge, ki so v matematiki nezaželene. Skoraj vsako leto pride nekaj takih nalog, kljub našim naporom nas na lokalnih izborih ne upoštevajo.

Naj omenimo še dva primera bolj ali manj posrečenih hipotez, ki smo jih našli v nalogah:

a. Predpostavljam, da Pitagorovega izreka ni izumil Pitagora, temveč ena od prejšnjih civilizacij.
b. Predpostavljam, da se je dedek odločil napisati članek o tej temi, ker se je zelo zanimal za zgodovino.

Seveda pa se glavna pripomba tiče anketnih nalog. Praviloma so nekakovostne, kar se tiče statističnih obdelav, kar je tudi razumljivo glede na predznanje, ki ga imajo avtorji, in matematično nezanimive. Naj omenimo eno od ponesrečenih anketnih vprašanj v eni od nalog.

Vprašanje: Kje se pri matematiki srečujemo z neskončnostjo?

Izbira odgovorov:
1. Aritmetika
2. Geometrija
3. Nikjer v matematiki
4. Aritmetika, geometrija
5. Aritmetika, geometrija, nikjer v matematiki

Primer ne potrebuje komentarja.

Kratek pregled nalog, ki so dosegle zlata priznanja

1. Včrtajmo kroge

Predstavimo nalogo s povzetkom in zaključkom.

Vemo, da lahko v kvadrat včrtamo krog tako, da se dotika vseh stranic kvadrata. Primer takega problema je razporeditev pločevink, kjer pločevinke z okroglim dnom razporedimo tako, da je ploščina ploskve, na kateri stojijo, čim manjša. V raziskovalni nalogi nas je zanimalo, kako v enakostranični trikotnik in kvadrat včrtamo en krog in več. Pri tem morajo biti polmeri vseh krogov enaki. Kakšna je razporeditev krogov in polmeri krogov v odvisnosti od dolžine stranice enakostraničnega trikotnika in kvadrata, da pokrijejo največjo možno ploščino izbranega lika? Ta problem se imenuje pakiranje krogov, v angleščini circle packing.

V raziskovalni nalogi smo v kvadrat in enakostranični trikotnik včrtali skladne kroge z največjim možnim polmerom. Raziskali smo možnosti glede na število in razporeditev krogov. Krogi so se v večini primerov dotikali med seboj ali s stranicami kvadrata oziroma enakostraničnega trikotnika. Za enakostranični trikotnik smo ugotovili, če vanj včrtamo trikotniško število (1, 3, 6, 10, 15 …) krogov, polmer kroga izrazimo z dolžino stranice trikotnika, kjer n predstavlja zaporedno trikotniško število.

V trikotnik lahko včrtamo tudi druga števila krogov, kot so samo trikotniška števila (recimo štiri ali sedem krogov). Če pa v trikotnik včrtamo en krog manj, kot je poljubno trikotniško število, vedno ostane prostor še za dodaten enako velik krog.

V nalogi je bilo uporabljeno orodje GeoGebra. Avtorja sta naredila mnogo slik in izračunov. Naloga je oblikovno zelo skrbno narejena.

2. Kako lahko razdelimo trikotnik

Predstavimo nalogo z njenim povzetkom.

Znano je, da se težiščnice v trikotniku delijo v razmerju 2 : 1. Raziskovali smo, v kakšnem razmerju se delijo daljice, če stranic trikotnika ne razdelimo na dva, pač pa na tri ali več enakih delov. Ugotavljali smo tudi, v kakšnem razmerju moramo razdeliti stranice, da se daljice iz vseh treh oglišč sekajo v eni točki.

Pri risanju z GeoGebro smo opazili zanimivo lastnost: če povečujemo število daljic v trikotniku, se ne povečuje vedno tudi število njihovih presečišč. Podobno velja tudi za število vseh likov, na katere te daljice razdelijo začetni trikotnik. Iskanje razloga za to lastnost nas je pripeljalo do splošnega pravila za število vseh presečišč in likov v trikotniku. Ko smo želeli to pravilo uporabiti pri velikem številu daljic, se je izkazalo, da zahteva veliko računanja, zato smo si pomagali s sistemom Mathematica.

Čeprav smo sprva želeli raziskovati daljice le v trikotniku, smo na koncu začeli razmišljati širše in ugotavljati pravila tudi za število presečišč in likov v poljubnih večkotnikih.

3. Kombinatorična igra Catalanovih števil

V povzetku naloge je zapisano:
V nalogi obravnavamo Catalanova števila. Švicarski matematik Leonhard Euler je raziskal problem, na koliko načinov lahko razdelimo konveksni večkotnik na trikotnike z nesekajočimi se diagonalami: trikotnik na en način, štirikotnik na dva načina, petkotnik na pet načinov, šestkotnik na 14 načinov... Tako je dobil zaporedje števil 1, 2, 5, 14, 42, 132 … Števila so kasneje poimenovali Catalanova števila po belgijskem matematiku Catalanu, ki je poleg mnogih drugih nadaljeval raziskave na tem področju. Do sedaj je bilo odkritih veliko primerov iz matematike in drugih področij, kjer se pojavijo Catalanova števila. V nalogi predstavimo osnovne že znane primere, izpeljemo eksplicitno in rekurzivni formuli ter pokažemo glavni metodi dokazovanja, da gre za Catalanova števila. Temeljni cilj naloge pa je opisati nove primere množic matematičnih in drugih objektov ter dokazati, da so njihove moči Catalanova števila.

4. Jajčaste krivulje

V literaturi obstaja več metod, kako narisati krivuljo, ki spominja na obliko ptičjega jajca. Pri večini teh metod gre za spretno sestavljene običajne krožne loke. Posebej zanimiva pa je povsem drugačna metoda, pri kateri jajčaste krivulje dobimo kot slike elips s pomočjo preslikave, ki je matematiki dobro poznana in se imenuje inverzija. Pri tem velika polos elipse leži na premici skozi središče krožnice inverzije. V raziskovalni nalogi obravnavamo na ta način dobljene jajčaste krivulje v odvisnosti od začetnih parametrov: abscise središča in obeh polosi elipse. Različne oblike ptičjih jajc bomo poskušali opisati s karakterističnimi količinami, te količine pa potem realizirati z izbiro ustreznih začetnih parametrov.

Namen raziskovalne naloge je bil raziskati oblike in lastnosti jajc ter risanje le-teh z inverzijo. Med delom pa se je pojavilo novo območje raziskovanja, konstruiranje jajc s krožnimi loki. Delo je večinoma potekalo gladko. Težave pa so se pojavile proti koncu, pri načrtovanju risanja jajc, saj sva ugotovila, da je ta postopek precej omejen. Definicije za lastnosti jajc (podolgovatost, asimetričnost in topost), številske vrednosti (maksimumi, minimumi in povprečne vrednosti lastnosti) sva povzela iz literature in izpeljala formule za količine, povezane z jajci, nastalimi s pomočjo inverzije.

Večina najinega dela je temeljila na podlagi uporabe programa GeoGebra, ki nama je pomagal pri risanju grafov in konstrukciji jajc. S pomočjo GeoGebre sva prišla tudi do nekaterih, za nadaljevaje potrebnih vrednosti. Obravnavana tema je še vedno precej odprta za nadaljnje raziskovanje. Raziskovali bi lahko še druge metode risanja jajc, s katerimi bi lahko ustvarili več kombinacij vrednosti parametrov. Skratka, našli bi metodo, ki bi bila še bolj učinkovita in univerzalna, kot je bila naša.

Avtorja sta pokazala spretnost pri načrtovanju z orodjem GeoGebro. Oblikovno je bila naloga zelo dobro narejena, tako da si zasluži najvišje priznanje.

Za konec še v razmislek. Morda je jajce hruškaste oblike zato, ker hruškasta oblika zagotavlja, da se jajce na poševni polici ne odkotali predaleč, ker prej zavije.

Kako je naravni izbor vplival na obliko jajca?

Zaključek

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog.

Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Nekatere naloge smo tudi kritično pretresli, predvsem, da opozorimo na napake. Upamo, da se bodo mentorji in raziskovalci v prihodnje tem napakam izogibali.

Hitro in zanesljivo računanje – Tekmuj sam s seboj, časom in sošolci

Alen Divjak
Osnovna šola Litija

Tekmovanje *Hitro in zanesljivo računanje* je aktivnost, s pomočjo katere učenci osvojijo in izpilijo hitrost in zanesljivost računanja v seštevanju, odštevanju, množenju, deljenju, iskanju neznanega števila in primerjavi. Tekmovalci so razdeljeni v več starostnih skupin, štiri so namenjene osnovnošolcem, ena srednješolcem in ena odraslim. Tekmovanje poteka v treh fazah: v prvi fazi so trije krogi tekmovanja v šolski računalniški učilnici na vsaki šoli, ki tekmuje. Sledi druga faza, državni finale, kjer se zberejo najboljši in se v živo v enournem tekmovanju pomerijo na eni od šol. Tretja faza pa je meddržavno tekmovanje.

Tekmovanje *Hitro in zanesljivo računanje* je bilo dvanajst let pod okriljem Zavoda RS za šolstvo. Na Osnovni šoli Litija smo se odločili, da stopimo skupaj in prevzamemo organizacijo tekmovanja ter s tem nadaljujemo tradicijo. Na spletni strani si.miksike.eu je objavljen nov pravilnik tekmovanja in razpis s časovnim razporedom. Preko elektronske pošte smo nagovorili 452 osnovnih šol. Tekmovanje je bilo le 14 dni po povabilu. Med 5. in 16. decembrom se je odvil prvi krog računanja. Rezultat je bil prijetno presenečenje: 2540 tekmovalcev. Tekmovanje je potekalo brez zapletov. Sledila sta še dva kroga, v januarju in februarju, prav tako brez posebnosti in zapletov. Rezultat tekmovanja v prvi fazi: tekmovanja se je udeležilo 2900 osnovnošolk in osnovnošolcev iz 121 različnih osnovnih šol. V prvem letu smo se osredotočili na tekmovanje osnovnošolcev, zato je bila med srednješolci slabša zastopanost. Tekmovanja se je udeležilo zgolj 19 srednješolk in srednješolcev. Sledila je priprava državnega finala: sobota, 4. marec 2017, za nekatere takoj po zimskih počitnicah. Na državno tekmovanje iz hitrega iz zanesljivega računanja je bilo povabljenih 74 tekmovalk

in tekmovalcev. V vsaki skupini vedno povabimo prvih deset tekmovalcev, v osnovnošolskih skupinah pa je bil narejen še doizbor glede na rezultate. Doizbor je opravila tričlanska komisija: Barbara Fir, Sonja Malnarič in Alen Divjak. Povabilu se je odzvalo 66 tekmovalk in tekmovalcev ter še okoli dvakrat toliko mentorjev, staršev in navijačev. V finalu so se v enournem tekmovanju pomerili v petih različnih operacijah: seštevanju, odštevanju, množenju, deljenju in iskanju neznanega števila. Tekmovanje je potekalo v duhu pozitivizma, veselja in preprosto druženja. V skupini, kjer so se pomerili tekmovalci iz prvih treh razredov osnovnih šol, je bil najuspešnejši prvošolec. Med četrtošolci in petošolci je tekmovalec izboljšal dosedanji rekord peteroboja v skupini, v skupini 6. in 7. razred pa je tekmovalec dosegel rekord peteroboja v državi 24816 točk. Po državnem finalu je sledilo meddržavno tekmovanje v Kaunasu v Litvi, kjer se je pomerilo 20 tekmovalcev v vseh starostnih kategorijah.

V Kaunasu so se pomerili:

- v skupini 1., 2. in 3. razred:
  Filip Judež, Osnovna šola Šmihel Novo mesto (1. razred), Luka Hozjan, Osnovna šola Turnišče (2. razred), Tim Bahor in Adrian Jakša, Osnovna šola Mirana Jarca Črnomelj (3. razred), Maksim Janjić, Osnovna šola Riharda Jakopiča Ljubljana (2. razred)
- v skupini 4., 5. in 6. razred:
  Tin Bevc Taraniš, Osnovna šola Center Novo mesto (5. razred), Tija Žura, Osnovna šola Center Novo mesto (5. razred), Barbara Kropec, Osnovna šola Majšperk (6. razred), Miha Gorše Pihler, Osnovna šola Fram (5. razred)
- v skupini 7., 8. in 9. razred OŠ in SŠ:
  Rene Žižek, Osnovna šola Tišina (7. razred), Žiga Laci in Nikola Kovač, Dvojezična osnovna šola Dobrovnik (9. razred), Lenart Frankovič Osnovna šola Gustava Šiliha Velenje (7. razred), Nika Zabukovšek, Osnovna šola Blaža Kocena Ponikva (8. razred), Marija Judež, Osnovna šola Šmihel Novo mesto (7. razred), Eliza Krasniqi, Osnovna šola Fram (8. razred), Leja Verbič, Gimnazija Novo mesto je zastopala srednješolke, Rok Markelc in Luka Bojanec pa sta zastopala odrasle.

Poleg Slovenije tekmujejo še Litva, Latvija, Estonija, Ukrajina in Gruzija. Vsak tekmovalec je prejel priznanje za udeležbo na meddržavnem tekmovanju, prvi trije v vsaki skupini pa še medaljo. Tekmovalci iz Slovenije so se vrnili bogatejši za eno žlahtno odličje: srebrno medaljo za drugo mesto v skupini 4.–6. razredi je dosegel Tin Bevc Taraniš. K temu uspehu sta veliko pridala še Rene Žižek s 5. mestom v najtežji konkurenci, v skupini fantje 7.–9. razreda OŠ in vsi srednješolci, in Maksim Janjić s 6. mestom v skupini 1.–3. razred.

Z željo, da imamo tekmovanje tudi prihodnja leta, vabimo, da se tekmovanja udeleži čim več šol, tako osnovnih kot tudi srednjih. Posebno vabilo pa naj velja mentorjem in vsem odraslim tekmovalcem, ki lahko s svojim zgledom dodatno motivirajo bodoče tekmovalce.

Povabilo k sodelovanju v letošnjem šolskem letu je na povezavi:
http://www.os-litija.si/images/datoteke/Alen/razpis/Razpis_2017-18.pdf
in časovnica
http://www.os-litija.si/images/datoteke/Alen/razpis/casovni_razpored_2017-18.pdf

Že objavljeni priročniki in članki na temo formativnega spremljanja

A. Holcar Brunauer in ostali (2016). **Formativno spremljanje v podporo učenju**. Priročnik za učitelje in strokovne delavce. Ljubljana: ZRSŠ.

M. Suban in ostali (2013). **Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki**. Ljubljana: ZRSŠ.

L. Novak, S. Mršnik (2015). **Samorefleksivno mišljenje in formativno spremljanje pri reševanju matematičnih problemov**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#116, (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

T. Miholič (2015). **Evolucija neke metode**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#142. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

B. Oder (2015). **Formativno spremljanje pri matematiki v 3. razredu**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#132. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

S. Repolusk in N. Koprivšek (2015). **Predtesti pri pouku matematike,** v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#150. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

N. Nedeljko (2015). **Domača naloga – dileme učitelja**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#160. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

A. Mastnak (2015). **Predstave bodočih učiteljev matematike v OŠ o neformalnem formativnem preverjanju znanja**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#528. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

V. Mlakar (2015). **Medpredmetno povezovanje in formativno spremljanje**, v KUPM 2014 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/#656. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

M. Peršolja (2012). **Strah pred ocenjevanjem, kaj je že to? Uvajanje formativnega spremljanja in spremljanje poučevanja**, v KUPM 2012 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/KUPM%202012%20-%20Zbornik%20prispevkov/#/276/. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

V. Manfreda Kolar (2017). **Tehnike formativnega preverjanja znanja**, v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#140. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

T. Kerin (2017). **Moje prvo leto formativnega spremljanja**, v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov**,** https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#146. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

A. Mastnak (2016). **Učenčevi viri za samoocenjevanje** v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#146. (21. 11. 2017) Ljubljana: ZRSŠ.

R. Lipnik (2017). **Matematika skozi vprašanja in kriterije**, v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#166. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

M. Pučnik Belavič, M. Kerin (2017). **Spremljanje učenca tujca**, v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#172. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

J. Senekovič (2017). **Prostornina prizme in formativno preverjanje**, v KUPM 2016 – Zbornik povzetkov, https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/#180. (21. 11. 2017). Ljubljana: ZRSŠ.

Revija Vzgoja in izobraževanje s prilogo Učiteljev glas, letnik 45, št. 5-6, 2014. Ljubljana: ZRSŠ. https://www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica/podrobno?publikacija=125 (21. 11. 2017).

Revija Vzgoja in izobraževanje s prilogo Učiteljev glas, letnik 48, št. 5-6, 2017. Ljubljana: ZRSŠ.

J. Grah in ostali (2017). **Vključujoča šola**. Priročnik za učitelje in druge strokovne delavce. Ljubljana: ZRSŠ.

Formativno spremljanje v podporo učenju

Priročnik za učitelje in strokovne delavce

Ada Holcar Brunauer, Cvetka Bizjak, Marjeta Borstner, Janja Cotič Pajntar, Vineta Eržen, Mihaela Kerin, Natalija Komljanc, Saša Kregar, Urška Margan, Leonida Novak, Zora Rutar Ilc, Sonja Zajc, Nives Zore

Priročnik obsega 7 zvezkov, zbranih v mapi, cena 12,40 €. **Že 5. ponatis.**

Nagrada za oblikovanje

Na Slovenskem knjižnem sejmu 2017 je oblikovalec priročnika Davor Grgičević prejel **nagrado za oblikovanje** v kategoriji učbeniki in priročniki.

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Priročnik za učitelje matematike

Izid pomlad 2018

Vseboval bo dva vsebinska dela:

1. **različna preizkušena orodja** (grafične organizatorje, učne liste, opore za razmišljanje, vprašanja …),
2. **nabor učnih ur**, ki so jih izvedli učitelji razvojniki s poudarkom na elementih formativnega spremljanja.

V ospredje je postavljen učenec in njegova vloga pri oblikovanju lastne učne poti.

P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Najava

4. mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike

Vljudno vas vabimo na **4. mednarodno Konferenco o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018**, ki bo 27. in 28. junija 2018 v Kongresnem centru Laško.

Konferenca je namenjena učiteljem razrednega pouka, učiteljem matematike v osnovnih in srednjih šolah in strokovnjakom na področju matematičnega izobraževanja.

Primarni namen konference ostaja predstavitev novih in izvirnih pristopov k učenju in poučevanju matematike po vsej vertikali in za vse izobraževalne programe.

4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018 nadaljuje svojo povezovalno vlogo ter združuje učitelje razrednega pouka, učitelje matematike v osnovnih in srednjih šolah ter strokovnjake na področju matematičnega izobraževanja.

Vsebine konference

- **Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem** (Inquiry Based Mathematics Education - IBME)

  Aktivna vloga učenca pri usvajanju matematičnega znanja je z vidika uporabnosti in trajnosti naučenega zelo pomembna. V procesu preiskovanja učenec zastavlja svoja vprašanja in postavlja hipoteze, o njih razpravlja s sošolci in učiteljem ter poroča o uporabljanih pristopih, strategijah in ugotovitvah. Poročajte nam o svojih izkušnjah pri tovrstnem delu v razredu in osvetlite tako pozitivne kot negativne vidike.

- **Algebra**

  Algebrske vsebine so za učence velikokrat izziv. Je algebra težka sama po sebi? Kako se je učiti in naučiti? Kakšen je pomen predformalne algebre? Kako se kaže uporabnost algebrskih vsebin v vsakdanjem življenju? Kako je algebra povezana z drugimi vejami matematike? Če imate odgovor na katerega od teh vprašanj, ga delite z nami.

- **Odnos do matematike in motivacija za učenje**

  Mednarodne raziskave so pokazale, da kljub zaznanemu dvigu dosežkov pri matematiki motivacija za učenje matematike ostaja na precej nizki stopnji. Predstavite nam svoja razmišljanja in primere na to temo ter prispevajte k preseganju negativnih stališč do učenja matematike.

Osrednje konferenčne vsebine se med seboj prepletajo in povezujejo z razvijanjem matematične pismenosti, formativnim spremljanjem, smiselno uporabo tehnologije, medpredmetnim povezovanjem …

Delo konference bo potekalo v obliki plenarnih predavanj z vabljenimi predavatelji, delavnic, predstavitev ter okrogle mize.

Gradivo konference bo dosegljivo na spletni strani konference, kjer boste lahko prebirali zbornik razširjenih povzetkov konference in si ogledali predstavitve predavateljev. Prispevki bodo objavljeni v reviji Matematika v šoli.

Vabljeni k aktivnemu sodelovanju s svojimi prispevki.

Pomembni datumi:

- Rok za oddajo prispevka v obliki razširjenega povzetka: **31. 3. 2018**
- Rok za povratno informacijo avtorjem: **10. 5. 2018**
- Rok za prijavo na konferenco: do zapolnitve mest

Konferenca je brez kotizacije.

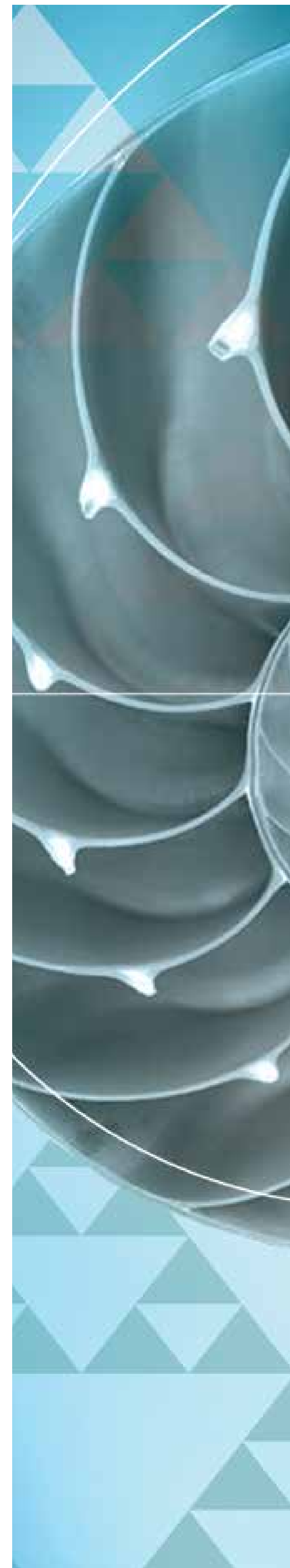
Oddaja prispevka v obliki razširjenega povzetka in prijava na konferenco poteka na spletni strani konference http://www.zrss.si/kupm2018 v zavihku Prijava.

Veselimo se strokovnega srečanja z vami!

Organizacijski in programski odbor KUPM 2018

Mathematics in school

2 2017, Volume 23



CONTENTS

ISSN 1318-010X