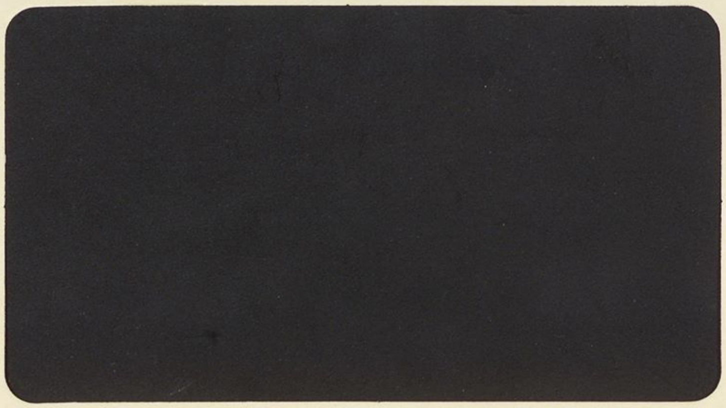
PRILAGAJANJE POLINOMOV Z ORTOGONALNIMI POLINOMI BINOMSKIH FUNKCIJ

Dr. Marijan BLEJEC

INŠTITUT ZA STATISTIKO IN OPERACIJSKO RAZISKOVANJE

RCEF

RAZISKOVALNI CENTER EKONOMSKE FAKULTETE
UNIVERZE V LJUBLJANI



PRILAGAJANJE POLINOMOV Z ORTOGONALNIMI POLINOMI BINOMSKIH FUNKCIJ

Dr. Marijan BLEJEC

INŠTITUT ZA STATISTIKO IN OPERACIJSKO RAZISKOVANJE

Ljubljana 1969

Prilagajanje polinomov z ortogonalnimi polinomi binomskih funkcij

O. Uvod. Prilagajanje polinomov ekvidistantnim empiričnim vrstam je pogost primer pri regresijski analizi in analizi časovnih vrst.

Posamezne metode, ki rešujejo ta problem, imajo svoje tehnične in vsebinske prednosti in pomanjkljivosti. Tako npr. uporaba binomskih funkcij poenostavlja tehniko izračunavanja parametrov prilagojenega polinoma, ortogonalni polinomi pa imajo predvsem analitične prednosti. Obravnavana metoda kombinira obe omenjeni metodi in tako združuje prednosti obeh.

1. Binomske funkcije

1.1 Binomski koeficienti. Obravnavana metoda je zasnovana na binomskih funkcijah, ki imajo za osnovo binomske koeficiente. Binomski koeficient je definiran z

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)(a-2)\ \dots\ (a-b+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \dots\dots\ b} \tag{1}$$

Po tej definiciji velja, da je

$$\binom{-a}{b} = \frac{(-a)(-a-1)(-a-2)\ \dots\dots\ (-a-b+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \dots\dots\dots\ b} = (-1)^b\binom{a+b-1}{b} \tag{2}$$

Iz definicije binomskega koeficienta sledi

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1} \tag{3}$$

Znano je, da je

$$\sum_{b=0}^{m} \binom{n-a}{m-b}\binom{a}{b} = \binom{n}{m} \tag{4}$$

in

$$\sum_{a=b}^{n-m+b} \binom{n-a}{m-b}\binom{a}{b} = \binom{n+1}{m+1} \tag{5}$$

Ker je po definiciji

$$\binom{a}{0} = 1 \; ; \; \binom{0}{0} = 1 \tag{6}$$

v posebnem primeru, da je b=o, 5 degenerira v

$$\sum_{a=0}^{n-m} \binom{n-a}{m} = \sum_{a=0}^{n} \binom{a}{m} = \binom{n+1}{m+1} \tag{7}$$

Iz lastnosti binomskih koeficientov sledi zveza

$$\binom{u}{r}\binom{u}{p} = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m}\binom{r+m}{p}\binom{u}{r+m} \tag{8}$$

$$r \geqslant p$$

1.2 <u>Binomske funkcije</u>. Kot binomsko funkcijo stopnje r definirajmo celo racionalno funkcijo od x

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)\;....\;(x-r+1)}{1\;.\;2\;.\;\;\;\;\;\;\;\;r} \tag{9}$$

ki ima formalno obliko binomskega koeficienta reda r Binomska funkcija je z 9 definirana za vse vrednosti x. Za cele pozitivne vrednosti za x se njene vrednosti ujemajo z vrednostmi ustreznih binomskih koeficientov.

Za binomsko funkcijo definirajmo prve diference kot

$$\Delta\binom{x}{r} = \binom{x+1}{r} - \binom{x}{r} = \binom{x}{r-1} \qquad (10)$$

Druge diference slede iz prvih

$$\Delta^2\binom{x}{r} = \Delta\left[\Delta\binom{x}{r}\right] = \binom{x}{r-2} \qquad (11)$$

S kompletno indukcijo pridemo do splošnega izraza, da je diferenca stopnje k za binomsko funkcijo enaka

$$\Delta^k\binom{x}{r} = \binom{x}{r-k} \qquad (12)$$

Če definiramo kumulativo binomske funkcije K $\binom{x}{r}$ z

$$K\binom{x}{r} = \sum_{x=o}^{x-1}\binom{x}{r} = \binom{x}{r+1} \qquad (13)$$

je druga kumulativa

$$K^2\binom{x}{r} = K\left[K\binom{x}{r}\right] = K\binom{x}{r+1} = \binom{x}{r+2} \qquad (14)$$

in s podobnim sklepanjem kot za diference kumulativa stopnje k

$$K^k\binom{x}{r} = \binom{x}{r+k} \qquad (15)$$

Glede na definiciji diferenc in kumulativ se obe operaciji dopolnjujeta v tem smislu, da je med operatorjema Δ^k in K^k zveza

$$\Delta^k = K^{-k} \quad ; \quad K^k = \Delta^{-k} \qquad (16)$$

Za operatorje Δ in K velja, da so asociativni, distributivni in komutativni

$$\triangle^k K^j = K^j \triangle^k = K^{j-k} = \triangle^{k-j} \qquad (17)$$

Iz definicije diferenc in kumulativ 12 in 15 sledi, da je

$$\triangle^o \binom{x}{r} = K^o \binom{x}{r} = \binom{x}{r} \qquad (18)$$

Polinom binomskih funkcij stopnje t

$$Y(x) = \sum_{r=o}^{t} a_r \binom{x}{r} \qquad (19)$$

je cela racionalna funkcija stopnje t

Ker je zaradi lastnosti binomskih koeficientov za cele vrednosti x

$$\binom{x}{r} \begin{cases} = o & \text{, če je } x < r \\ = 1 & \text{če je } x = r \end{cases} \qquad (20)$$

in zaradi 6 velja, da je

$$\triangle^k Y(x) = \triangle^k \sum_{r=o}^{t} a_r \binom{x}{r} = \sum_{r=o}^{t} a_r \triangle \binom{x}{r} = \sum_{r=o}^{t} a_r \binom{x}{r-k} \qquad (21)$$

Za x = o sledi iz 21, če upoštevamo 6 in 20

$$\triangle^r Y(o) = a_r \qquad (22)$$

Parameter a_r v polinomu binomskih funkcij je vrednost diference stopnje r v polinomu binomskih funkcij za x=o.

1.3 Zaradi zgornjih lastnosti dobimo s sistematičnim postopnim kumuliranjem iz parametrov a_r vrsto vrednosti polinoma Y(x) za cele vrednosti x.

Za polinom tretje stopnje je npr.

	$\Delta^3 Y$	$\Delta^2 Y$	ΔY	Y
0	$\Delta^3 Y_o = a_3$	$\Delta^2 Y_o = a_2$	$\Delta Y_o = a_1$	$Y_o = a_o$
1	$\Delta^3 Y_1$	$\Delta^2 Y_1 = \Delta^2 Y_o + \Delta^3 Y_o$	$\Delta Y_1 = \Delta Y_o + \Delta^2 Y_o$	$Y_1 = Y_o + \Delta Y_o$
2	$\Delta^3 Y_2$	$\Delta^2 Y_2 = \Delta^2 Y_1 + \Delta^3 Y_1$	$\Delta Y_2 = \Delta Y_1 + \Delta^2 Y_1$	$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1$
K	$\Delta^3 Y_k$	$\Delta^2 Y_k = \Delta^2 Y_{k-1} + \Delta^3 Y_{k-1}$	$\Delta Y_k = \Delta Y_{k-1} + \Delta^2 Y_{k-1}$	$Y_k = Y_{k-1} + \Delta Y_{k-1}$

Iz a_2 in kumuliranjem tretjih diferenc dobimo vrsto drugih diferenc, iz a_1 in kumuliranjem drugih diferenc vrsto prvih diferenc, iz a_o in kumuliranjem prvih diferenc pa vrsto vrednosti polinoma Y_x za cele vrednosti x.

1.4 <u>Kumulative stvarnih vrst.</u> Po podobnem postopku kot za kumulative binomskih funkcij izračunamo po obrazcu

$$K^{k+1}\ Y_{x+1} = K^{k+1}\ Y_x + K^k_x\ Y_x \tag{23}$$

kumulative iz vrste statističnih podatkov Y_x, s tem, da so $K^r Y_o = o$, če je $r \neq o$

Če nakažemo postopek za izračun kumulativ za vrsto z N=6 členi, dobimo:

$K^o Y_x$	$K^1 Y_x$	$K^2 Y_x$	$K^3 Y_x$
Y_o	o	o	o
Y_1	Y_o	o	o
Y_2	Y_o+Y_1	Y_o	o
Y_3	$Y_o+Y_1+Y_2$	$2Y_o+Y_1$	Y_o
Y_4	$Y_o+Y_1+Y_2+Y_3$	$3Y_o+2Y_1+Y_2$	$3Y_o+Y_1$
Y_5	$Y_o+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$	$4Y_o+3Y_1+2Y_2+Y_3$	$6Y_o+3Y_1+Y_2$
6	$Y_o+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5$	$5Y_o+4Y_1+3Y_3+Y_4$	$10Y_o+6Y_1+3Y_2+Y_3$

$$C_o = \sum_{x=o}^{N-1} \binom{N-x-1}{o} Y_x \qquad C_1 = \sum_{x=o}^{N-1} \binom{N-x-1}{1} Y_x \qquad C_2 = \sum_{x=o}^{N-1} \binom{N-x-1}{2} Y_x$$

Iz primera je nakazana struktura kumulativ in struktura vsot členov v kumulativni vrst C_o, C_1, C_2. Člen za x=N v kumulativni vrsti stopnje k+1 je obenem vsota členov od x=o do x=N-1 v kumulativni vrsti stopnje k.

Kot je nakazano za splošne N za C_o, C_1 in C_2, pa moremo strukturo posplošiti na poljuben s. Tako velja, da je

$$C_S = \sum_{x=o}^{N-1} K^S Y_x = K^{S+1} Y_N = \sum_{x=o}^{N-1} \binom{N-x-1}{s} Y_x \qquad (24)$$

2. Ortogonalni polinomi binomskih funkcij

2.1 Definirajmo ortogonalni polinom binomskih funkcij

$$X_p = \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{x}{r} \tag{25}$$

z naslednjo temeljno lastnostjo:

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p X_q = \begin{cases} \sum_{x=o}^{N-1} X_p^2 & ; \text{če je } p = q \\ o & ; \text{če je } p \neq q \end{cases} \tag{26}$$

Ker moremo binomsko funkcijo $\binom{N-x-1}{s}$ pisati kot polinom ortogonalnih polinomov do stopnje s

$$\binom{N-x-1}{s} = \sum_{k=o}^{s} C_k X_k \tag{27}$$

dobimo, če koristimo 25 in 5

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p \binom{N-x-1}{s} = \sum_{r=o}^{p} b_r^p \sum_{x=o}^{N-1} \binom{x}{r}\binom{N-x-1}{s} = \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{N}{r+s+1} \tag{28}$$

ali, če koristimo 24 in 25

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p \binom{N-x-1}{s} = \sum_{k=o}^{s} C_k \sum_{x=o}^{N-1} X_p X_k = \begin{cases} 0 & s = o,1 \ldots (p-1) \\ C_p & s = p \end{cases} \tag{29}$$

Iz 28 in 29 dobimo sistem enačb za parametre ortogonalnega polinoma b_r^p.

$$\begin{aligned} \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{N}{r+s+1} &= 0 \qquad s=o,\ 1,\ 2 \ldots (p-1) \\ \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{N}{r+p+1} &= C_p \qquad s=p \end{aligned} \tag{30}$$

V matrični obliki moremo ta sistem pisati kot

$$bB = c \tag{31}$$

pri čemer je b vektor parametrov b_r^p, B matrika binomskih koeficientov $\binom{N}{r+s+1}$, c pa vektor, (o,o,o ... C_p), za katerega so vse vrednosti razen zadnje enake o, zadnja C_p pa je od r neodvisna količina.

Če sistem enačb 31 rešimo, dobimo da je

$$b = c.B^{-1} \tag{32}$$

oziroma zaradi narave vektorja c

$$b_r^p = \sum_{s=o}^{p} c_S \frac{B_{rs}^p}{B^p} = C_p \frac{B_{rp}^p}{B^p} = B_{rp}^p \tag{33}$$

Ker sta C_p in B^p (determinanta binomskih koeficientov) od r neodvisna, so parametri b_r^p ortogonalnega polinoma X_p proporcionalni kofaktorjem B_{rp}^p, ki ustrezajo členom r v vrsti p v matriki binomskih koeficientov. Ker proporcionalitetni faktor ne vpliva na ortogonalnost polinoma, b_r^p izenačimo z B_{rp}^p.

Ako proučimo kofaktor B_{rp}^p

$$B_{rp}^p = (-1)^{p+r} \left| \binom{N}{k+s+1} \right|_{pr} =$$

$$= (-1)^{p+r} \left| \begin{array}{cccc|cccc} \binom{N}{1} & \binom{N}{2} & \cdots & \binom{N}{r} & \binom{N}{r+2} & \cdots & \binom{N}{p} & \binom{N}{p+1} \\ \binom{N}{2} & \binom{N}{3} & \cdots & \binom{N}{r+1} & \binom{N}{r+2} & \cdots & \binom{N}{p+1} & \binom{N}{p+2} \\ \hline \binom{N}{s} & \binom{N}{s+1} & \cdots & \binom{N}{r+s+1} & \binom{N}{r+s+1} & \cdots & \binom{N}{p+s-1} & \binom{N}{p+s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{N}{p} & \binom{N}{p+1} & & \binom{N}{r+p-1} & \binom{N}{r+p+1} & \cdots & \binom{N}{2p-1} & \binom{N}{2p} \end{array} \right| \tag{34}$$

spoznamo, da moremo parametre b_r^p dalje reducirati. Če upoštevamo lastnost binomskih koeficientov 3, s postopnim seštevanjem vrst v kofaktorju B_{pr} dobimo, da je

$$B_{pr}^{p} = (-1)^{p+r} \left| \binom{N}{k+s+1} \right|_{pr} = (-1)^{p+r} \left| \binom{N+s}{k+s+1} \right|_{pr} \tag{35}$$

Iz kolon v zadnji determinanti v 35 moremo izpostaviti faktorje v skupnem izrazu

$$\frac{\prod_{k=o}^{p} (p-k)!\ [N]^{k+1}}{(p-r)!\ [N]^{r+1}} = K \tag{36}$$

iz vrst pa faktorje v skupnem izrazu

$$\prod_{s=o}^{p-1} \frac{[N+s]^{s}}{(p+s+1)!} = R \tag{37}$$

Tako ostane za izračun le še determinanta

$$\left| \binom{p+s+1}{p-k} \right|_{pr} = d \tag{38}$$

Nova oblika kofaktorja B_{pr}^p je

$$B_{pr}^{p} = (-1)^{p+r}.K.R.d \tag{39}$$

Od členov v 39 je od r odvisen samo $1/(p-r)!\ N^{r+1}$ v K, in determinanta d. Zato moremo parametre ortogonalnega polinoma ponovno reducirati. Po drugi redukciji so b_r^p proporcionalni

$$b_r^p \propto \frac{(-1)^{p+r}}{(p-r)!\ [N]^{r+1}} \left| \binom{p+s+1}{p-k} \right|_{pr} \tag{40}$$

Determinanto

$$\left|\binom{p+s+1}{p-k}\right|_{pr} = \begin{vmatrix} \binom{p+1}{p} & \binom{p+1}{p-1} & \cdots & \binom{p+1}{p-r} & \binom{p+1}{p-r-2} & \cdots & \binom{p+1}{o} \\ \binom{p+2}{p} & \binom{p+2}{p-1} & \cdots & \binom{p+2}{p-r} & \binom{p+2}{p-r-2} & \cdots & \binom{p+2}{o} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{2p}{p} & \binom{2p}{p-1} & \cdots & \binom{2p}{p-r} & \binom{2p}{p-r-2} & \cdots & \binom{2p}{o} \end{vmatrix} \qquad (41)$$

izračunamo s sukcesivnim odštevanjem po dve zaporedni vrsti, če upoštevamo 10.

Z dosledno uporabo te operacije dobimo, da je

$$\left|\binom{p+s+1}{p-k}\right|_{pr} = \binom{p+r}{r} \qquad (42)$$

Ako izraz v 40 pomnožimo z od r neodvisnim členom $[N]^{p+1}$ in upoštevamo 42, dobimo, da so parametri ortogonalnega polinoma stopnje p proporcionalni

$$b_p^r \propto (-1)^{p+r}\binom{N-r-1}{p-r}\binom{p+r}{r} \qquad (43)$$

ortogonalni polinom pa enak

$$X_p = \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p+r}\binom{N-r-1}{p-r}\binom{p+r}{r}\binom{x}{r} = \sum_{r=o}^{p} b_p^r \binom{x}{r} \qquad (44)$$

2.2 Izračunanje izraza $S_p = \sum_{x=o}^{N=1} X_p^2$. Za kasnejša

izračunavanja je pomembna vrednost izraza $\sum_{x=o}^{N-1} X_p^2$

Ortogonalni polinom X_p moremo pisati v obliki

$$X_p = \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p+r} \binom{p+r}{r} \cdot \binom{N-r-1}{p-r} \cdot \binom{x}{r} =$$

$$= \binom{2p}{p} \cdot \binom{x+p}{p} + \sum_{r=o}^{p-1} c_r \binom{x}{r} = \binom{2p}{p} \cdot \binom{x+p}{p} + \sum_{k=o}^{p-1} d_k X_k \qquad (45)$$

Prvi člen vsebuje najvišjo (p-to) potenco iz ortogonalnega polinoma, ostanek pa je možno izraziti z linearno zvezo ortogonalnih polinomov do stopnje p-l.

Zaradi lastnosti ortogonalnih polinomov, ki so dane z njihovo definicijo 26 in zaradi 45 velja

$$\sum X_p^2 = \sum_{x=o}^{N-1} X_p \left[\binom{2p}{p} \cdot \binom{x+p}{p} + \sum_{k=o}^{p-1} d_k X_k \right] = \binom{2p}{p} \sum_{x=o}^{N-1} X_p \binom{x+p}{p} =$$

$$= \binom{2p}{p} \sum_{x=o}^{N-1} \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p+r} \binom{p+r}{r} \binom{N-r-1}{p-r} \binom{x}{r} \binom{x+p}{p} \qquad (46)$$

Ker je s preureditvijo

$$\binom{x}{r} \binom{x+p}{p} = \binom{p+r}{r} \binom{x+p}{p+r} \qquad (47)$$

velja dalje

$$\sum X_p^2 = \binom{2p}{p} \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p+r} \binom{p+r}{r}^2 \binom{N-r-1}{p-r} \sum_{x=o}^{N-1} \binom{x+p}{p+r} \qquad (48)$$

Če upoštevamo 5 dobimo

$$\sum_{x=o}^{N-1} \binom{x+p}{p+r} = \binom{N+p}{p+r+1} \qquad (49)$$

s preureditvijo pa

$$\binom{N+p}{p+r+1}\cdot\binom{N-r-1}{p-r} = \binom{N+p}{2p+1}\cdot\binom{2p+1}{p+r+1} \tag{50}$$

Če upoštevamo zveze 49 in 50, dobimo iz 48

$$\sum X_p^2 = \binom{2p}{p}\cdot\binom{N+p}{2p+1}\sum_{r=o}^{p}(-1)^{p+r}\binom{p+r}{r}^2\cdot\binom{2p+1}{p+r+1} \tag{51}$$

Iz zveze 8 dobimo v posebnem primeru

$$\binom{p+r}{r}^2 = \sum_{m=o}^{p}\binom{p}{m}\cdot\binom{p+m}{p}\cdot\binom{p+r}{p+m} \tag{52}$$

S preureditvijo dobimo, da velja

$$\binom{p+r}{p+m} = \binom{p+r}{r-m} = (-1)^{r-m}\binom{-p-m-1}{r-1} \tag{53}$$

Razen tega je tudi

$$\binom{2p+1}{p+r+1} = \binom{2p+1}{p-r} \tag{54}$$

Če upoštevamo 52, 53 in 54, dobimo, da je dalje

$$\sum_{r=o}^{p}(-1)^{p+r}\binom{p+r}{r}^2\cdot\binom{2p+1}{p+r+1} = \sum_{m=o}^{p}(-1)^{p+m}\binom{p}{m}\binom{p+m}{p}\sum_{r=o}\binom{-p-m-1}{r-m}\binom{2p+1}{p-r} =$$

$$= \sum_{m=o}^{p}(-1)^{p+m}\binom{p}{m}\cdot\binom{p+m}{p} = (-1)^p\sum_{m=o}^{p}\binom{p}{m}\cdot(-1)^m\cdot\binom{p+m}{p} =$$

$$= (-1)^p\sum_{m=o}^{p}\binom{p}{p-m}\cdot\binom{-p-1}{m} = (-1)^p\cdot\binom{-1}{p} = (-1)^{2p} = 1 \tag{55}$$

če dvakrat upoštevamo zvezo 4 med binomskimi koeficienti. Če vnesemo rezultat iz 55 v 51, dobimo končno

$$S_p = \sum_{x=o}^{N-1} X_p^2 = \binom{2p}{p} \cdot \binom{N+p}{2p+1} \tag{56}$$

3. <u>Prilagoditev polinoma ortogonalnih polinomov stvarni vrsti</u>

3. 1 Predpostavljajmo, da je vrsta stvarnih podatkov dana z modelom

$$Y_x = \sum_{p=o}^{n} \dot{A}_p X_p + U_x \tag{57}$$

kot vsota polinoma racionalnih funkcij stopnje n $\sum_{p=o}^{n} A_p X_p$ in slučajnostne komponente U_x.

Pogoj, ki ga po metodi najmanjših kvadratov postavljamo na oceno prilagojenega polinoma, je

$$\sum_{x=o}^{N-1} \left(Y_x - \sum_{p=o}^{n} \bar{A}_p X_p \right)^2 = \text{Min} \tag{58}$$

Zaradi lastnosti ortogonalnih polinomov iz 26, sistem normalnih enačb degenerira v

$$\sum_{x=o}^{N-1} Y_x X_p = A_p \sum_{x=o}^{N-1} X_p^2 \tag{59}$$

Iz zveze 59 dobimo, da je

$$A_p = \frac{\sum\limits_{x=o}^{N-1} Y_x X_p}{\sum\limits_{x=o}^{N-1} X_p^2} \tag{60}$$

Medtem ko smo $\sum\limits_{x=o}^{N-1} X_p^2$ že izračunali (56), moramo izraz

$\sum\limits_{x=o}^{N-1} Y_x X_p$ šele proučiti.

Če upoštevamo 44, dobimo, da je

$$\sum_{x=o}^{N-1} Y_x X_p = \sum_{x=o}^{N-1} \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p+r} \binom{p+r}{r} \binom{N-r-1}{p-r} \binom{x}{r} Y_x \tag{61}$$

Zaradi 2 in 5 velja, da je

$$\binom{x}{r} = \sum_{s=o}^{r} (-1)^s \binom{N-s-1}{r-s} \binom{N-x-1}{s} \tag{62}$$

Če vnesemo 52 v 61, dobimo dalje

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p Y_x = \sum_{r=o}^{p} \sum_{s=o}^{r} (-1)^{p+r+s} \binom{p+r}{r} \binom{N-r-1}{p-r} \binom{N-s-1}{r-s} \sum_{x=o}^{N-1} \binom{N-x-1}{s} Y_x \tag{63}$$

S preureditvijo spoznamo, da je

$$\binom{N-r-1}{p-r} \binom{N-s-1}{r-s} = \frac{\left[N-r-1\right]^{p-r}}{(p-r)!} \frac{\left[N-s-1\right]^{r-s}}{(r-s)!} =$$

$$= \binom{N-s-1}{p-s} \binom{p-s}{p-r} \tag{64}$$

Če upoštevamo 64 in 24, je

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p Y_x = \sum_{s=o}^{p} (-1)^{p+s} \binom{N-s-1}{p-s} C_s \sum_{r=s}^{p} (-1)^r \binom{p-s}{p-r} \binom{p+r}{r} \tag{65}$$

Ker je $\binom{p-s}{p-r} = o$ ako je $r < s$ in zaradi 2 in 4 je

$$\sum_{r=}^{p} (-1)^r \binom{p-s}{p-r} \cdot \binom{p+r}{r} = \sum_{r=o}^{p} \binom{p-s}{p-r} \cdot \binom{-p-1}{r} = \binom{-s-1}{p} = (-1)^p \binom{p+s}{s} \tag{66}$$

in končno, ako to zvezo vnesemo v 65 in upoštevamo 43

$$\sum_{x=o}^{N-1} X_p Y_x = \sum_{s=o}^{p} (-1)^{2p+s} \binom{N-s-1}{p-s} \cdot \binom{p+s}{s} C_S = (-1)^p \sum_{s=o}^{p} b_p^s C_S \tag{67}$$

3.2 Prilagojeno funkcijo Y(x), ki je dana z ortogonalnim polinomom

$$Y(x) = \sum_{p=o}^{n} A_p X_p \tag{68}$$

transformiramo v polinom binomskih funkcij, če upoštevamo 25

$$Y(x) = \sum_{p=o}^{n} A_p X_p = \sum_{p=o}^{n} A_p \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{x}{r} = \sum_{r=o}^{n} \binom{x}{r} \sum_{p=r}^{n} A_p b_r^p =$$

$$= \sum_{r=o}^{n} D_r^n \binom{x}{r} \tag{69}$$

Pri tem so

$$D_r^n = \sum_{p=r}^{n} A_p b_r^p \tag{70}$$

parametri prilagojenega polinoma binomskih funkcij. Tako dan prilagojen polinom je glede na pomen parametrov, ki sledi iz 22, neposredna osnova za izračunanje osnovni vrsti Y_x prilagojene vrste $Y(x)$.

3.3 Iz simetrije ortogonalnih polinomov proučevanega tipa vemo, da je

$$X_p\left[(N-1)-x\right] = (-1)^p X_p(x) \tag{71}$$

Na novo izhodišče $x_o = N-1$ transformirana prilagojena funkcija $Y'(x)$ pa je zaradi 2, 53 in 71 enaka

$$Y'(x) = \sum_{p=o}^{n} A_p(-1)^p X_p(N-1-x) = \sum_{p=o}^{n} (-1)^p A_p \sum_{r=o}^{p} b_r^p \binom{N-x-1}{r} =$$

$$= \sum_{p=o}^{n} (-1)^{p+r} A_p b_r^p \binom{x-N-r}{r} \tag{72}$$

Za dobljeno fransformirano funkcijo so parametri D_r^p

$$\bar{D}_r^n = \sum_{p=o}^{n} (-1)^{p+r} A_p b_r^p = \Delta Y \; (x = N-r-1) \tag{73}$$

diferenca stopnje r za x=N-r-1.

Zgornja ugotovitev je posebno pomembna pri ekstrapolaciji prilagojene vrste vnaprej.

4. Analiza variance komponent za prilagojeni polinom

4.1 Ako vzamemo, da je v modelu proučevane vrste

$$Y_x = \sum_{p=o}^{n} A_p X_p + U_x \qquad x = o,1,\ldots(N-1) \tag{74}$$

U_x slučajna variabla za zakonitostjo porazdelitve $U_x = :N(o,\sigma^2)$, moremo z analizo variance preskusiti značilnost posameznih komponent prilagojenega polinoma. Pri eksperimentalnem delu često nastopi problem, da preskušamo značilnost linearne, kvadratične, kubične itd. komponente. Manj je zgornja predpostavka upravičena pri proučevanju časovnih vrst. Vendar tudi pri časovnih vrstah, ne glede na neizpolnjene pogoje, ki so osnova za analizo variance, dostikrat nastopi problem razstavljanja vsote kvadratov, na doprinose posameznih komponent. Ta analiza je potrebna pri odločitvi, katera funkcija je primerna kot funkcija, ki jo prilagodimo ali pri analizi, koliko posamezna komponenta doprinese k skupni vsoti kvadratov oziroma variabilnosti podatkov.

Zaradi lastnosti 26 ortogonalnih polinomov in zaradi 60 dobimo, da je vsota kvadratov odklonov stvarnih vrednosti od vrednosti prilagojenega polinoma SK_R

$$SK_R = \sum_{x=o}^{N-1} (Y_x - \sum_{p=o}^{n} A_p X_p)^2 = \sum_{x=o}^{N-1} Y_x^2 - \sum_{p=o}^{n} A_p \sum_{x=o}^{N-1} Y_x X_p =$$

$$= \sum_{x=o}^{N-1} Y_x^2 - \sum_{p=o}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{x=o}^{N-1} Y_x X_p\right)^2}{\sum\limits_{x=o}^{N-1} X_p^2} . \qquad (75)$$

Pri tem je

$$SK_p = \frac{\left(\sum\limits_{x=o}^{N-1} Y_x X_p\right)^2}{\sum\limits_{x=o}^{N-1} X_p^2} \qquad (76)$$

prispevek komponente p k skupni vsoti kvadratov $\sum_{x=o}^{N-1} Y_x^2$.

Pri predpostavkah, ki veljajo za preskušanje hipotez z analizo variance, posamezni členi SK_p nastopajo s po eno stopinjo prostosti, SK_R pa z N-n-1 stopinjami prostosti.

Tako moremo z F-preskusom izraza

$$F = \frac{SK_p}{se^2} \; ; \quad se^2 = \frac{SK_R}{N-\eta-1} \tag{77}$$

z $m_1=1$ in $m_2=$ N-n-1 stopinjami prostosti preskušati značilnost linearne (p=1), kvadratične (p=2) itd. komponente.

Varianca za oceno parametrov A_p je

$$\mathrm{Var}\, A_p = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{x=o}^{N-1} X_p^2} = \frac{\sigma_e^2}{\binom{2p}{p}\binom{N+p}{2p+1}} \tag{78}$$

a ocene variance

$$\mathrm{var}\, A_p = \frac{s_e^2}{\sum_{x=o}^{N-1} X_p^2} = \frac{s_e^2}{\binom{2p}{p}\binom{N+p}{2p+1}} \tag{79}$$

4.2 <u>Kovarianca in korelacijski koeficient med odkloni stvarnih vrednosti od vrednosti prilagojenih polinomov.</u>

Če vrsti Y_x prilagodimo polinom stopnje n $\sum A_p^y X_p$, vrsti Z_x pa polinom stopnje ℓ $\sum A_r^z X_r$, je kovarianca med odkloni stvarnih vrednosti od prilagojenih polinomov enaka

$$C_{YZ} = \frac{\sum\limits_{x=o}^{N-1}\left(Y_x - \sum\limits_{p=o}^{n} A_p^y X_p\right)\left(Z_x - \sum\limits_{p=o}^{\ell} A_p^z X_p\right)}{N} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{x=o}^{N-1} Y_x Z_x - \sum\limits_{p=o}^{n} \dfrac{\left(\sum\limits_x Y_p X_p\right)\left(\sum\limits_x Z_p X_p\right)}{\sum X_p^2}}{N} = \frac{K_{YZ}}{N} \qquad (80)$$

$\gg \ell$

glede na 77 pa je vrednost korelacijskega koeficienta

$$r_{YZ} = \frac{K_{YZ}}{\sqrt{SK_R^y \cdot SK_R^z}} \qquad (81)$$

5. Matrike koeficientov ortogonalnih polinomov binomskih funkcij

5.1 Splošna matrika koeficientov ortogonalnih polinomov binomskih funkcij

V tabeli 2 podajamo splošno matriko koeficientov b_r^p iz 43 in vsote kvadratov vrednosti ortogonalnih polinomov $S_p = \sum X_p^2$ iz 56 za poljuben N za p=o,1,2,... 10 in p.

$$\left[\, b : S \,\right] \qquad (82)$$

Ker moremo za posamezne p, vrste koeficientov še dalje reducirati tako, da vrsto v matriki bS delimo z največjim skupnim mnogokratnikom, v nadaljevanju podajamo, katerim pogojem mora zadoščati N, da je vrsta deljiva z ustreznimi divizorji za p = 1 do p = 10. Npr.: p=7 :2 N=4(mod 8) pomeni: koeficiente ortogonalnega polinoma b_r^7 S_7 so deljivi z 2,če je število členov N v proučevani vrsti enako 4 modulo 8.

Tabela 1. Redukcijski faktorji koeficientov bS

p=1	:2	N=1(mod 2)
p=2	:2	N=2(mod 4)
	:3	N=1,2(mod 3)
p=3	:2	N=2(mod 4)
	:4	N=1,3(mod 4)
	:5	N=2,3(mod 5)
p=4	:2	N=4(mod 8)
	:5	N=1,2,3,4(mod 5)
	:7	N=3,4(mod 7)
p=5	:2	N=1,4,7(mod 8)
	:4	N=3,5(mod 8)
	:3	N=1,2,7,8(mod 9)
	:9	N=4,5(mod 9)
	:7	N=2,3,4,5(mod 7)
p=6	:2	N=3,4(mod 8)
	:4	N=2(mod 4)
	:3	N=3,4,5,6(mod 7)
	:7	N=1,2,3,4,5,6(mod 7)
	:11	N=5,6(mod 11)
p=7	:2	N=4(mod 8)
	:4	N=2(mod 4)
	:8	N=1(mod 2)
	:3	N=2,3,4,5,6,7(mod 9)
	:11	N=4,5,6,7(mod 11)
	:13	N=6,7(mod 13)

p=8	:3	N=1,2,4,5,7,8(mod 9)
	:5	N=2,3 (mod 5)
	:11	N=3,4,5,6,7,8 (mod 11)
	:13	N=5,6,7,8 (mod 13)
p=9	:2	N=1,3 (mod 4)
	:5	N=1,2,3,4(mod 5)
	:11	N=2,3,4,5,6,7,8,9(mod 11)
	:13	N=4,5,6,7,8,9(mod 13)
	:17	N=8,9(mod 17)
p=10	:2	N=6(mod 8)
	:11	N=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10(mod 11)
	:13	N=3,4,5,6,7,8,9,10 (mod 13)
	:17	N=7,8,9,10(mod 17)
	:19	N=9,10(mod 19)

5.2 Matrika koeficientov ortogonalnih polinomov binomskih funkcij za p = 1(1)5 in N= 1(1)50

Za N=1 do N=50 so v tabeli 3 dani koeficienti ortogonalnih polinomov do pete stopnje p = 1(1)5. To je obseg, v katerem rešujemo običajno probleme prilagajanja polinomov. Če je N $>$ 50 ali p med 6 in 10 $5 < p \leqslant 10$, izračunane koeficiente ne moremo koristiti, ker presegajo okvir tabeliranih koeficientov. V tem primeru koeficiente izračunamo iz prvega dela splošne matrike koeficientov v tabeli 2. Za primere, da je p$>$ 10 pa koristimo zadnjo splošno vrsto koeficientov v isti tabeli.

Tabela 2.
Splošna matrika koeficientov ortogonalnih polinomov binomskih funkcij b/S b_r^p

r	10	9	8	7	6	5
						252
					924	$-462\binom{N-6}{1}$
				3432	$-1716\binom{N-7}{1}$	$792\binom{N-6}{2}$
			12870	$-6435\binom{N-8}{1}$	$3003\binom{N-7}{2}$	$-1287\binom{N-6}{3}$
		48620	$-24310\binom{N-9}{1}$	$11440\binom{N-8}{2}$	$-5005\binom{N-7}{3}$	$2002\binom{N-6}{4}$
	184756	$-92378\binom{N-10}{1}$	$43758\binom{N-9}{2}$	$-19448\binom{N-8}{3}$	$8008\binom{N-7}{4}$	$-3003\binom{N-6}{5}$

p	p-1	p-2	r
$\binom{2p}{p}$	$-\binom{2p-1}{p-1}\binom{N-p}{1}$	$\binom{2p-2}{p-2}\binom{N-p+1}{2}$	$(-1)^{p+r}\binom{p+r}{r}\binom{N-r-1}{p-r}$

4	3	2	1	0		S_p	p
				1	:	$\binom{N}{1}$	0
			2	$-\binom{N-1}{1}$	:	$2\binom{N+1}{3}$	1
		6	$-3\binom{N-2}{1}$	$\binom{N-1}{2}$	:	$6\binom{N+2}{5}$	2
	20	$-10\binom{N-3}{1}$	$4\binom{N-2}{2}$	$-\binom{N-1}{3}$	:	$20\binom{N+3}{7}$	3
70	$-35\binom{N-4}{1}$	$15\binom{N-3}{2}$	$-5\binom{N-2}{3}$	$\binom{N-1}{4}$	:	$70\binom{N+4}{9}$	4
$-126\binom{N-5}{1}$	$56\binom{N-4}{2}$	$-21\binom{N-3}{3}$	$6\binom{N-2}{4}$	$-\binom{N-1}{5}$	:	$252\binom{N+5}{11}$	5
$210\binom{N-5}{2}$	$-84\binom{N-4}{3}$	$28\binom{N-3}{4}$	$-7\binom{N-2}{5}$	$\binom{N-1}{6}$	:	$924\binom{N+6}{13}$	6
$-330\binom{N-5}{3}$	$120\binom{N-4}{4}$	$-36\binom{N-3}{5}$	$8\binom{N-2}{6}$	$-\binom{N-1}{7}$	:	$3432\binom{N+7}{15}$	7
$495\binom{N-5}{4}$	$-165\binom{N-4}{5}$	$45\binom{N-3}{6}$	$-9\binom{N-2}{7}$	$\binom{N-1}{8}$	:	$12870\binom{N+8}{17}$	8
$-715\binom{N-5}{5}$	$220\binom{N-4}{6}$	$-55\binom{N-3}{7}$	$10\binom{N-2}{8}$	$-\binom{N-1}{9}$	:	$48620\binom{N+9}{19}$	9
$1001\binom{N-5}{6}$	$-286\binom{N-4}{7}$	$66\binom{N-3}{8}$	$-11\binom{N-2}{9}$	$\binom{N-1}{10}$	:	$184756\binom{N+10}{21}$	10

2	1	0		p
$(1)^{p+2}\binom{p+2}{2}\binom{N-3}{p-2}$		$(-1)^{p}\binom{N-1}{p}$	$\binom{2p}{p}\binom{N+p}{2p+1}$	p
	$(-1)^{p+1}\binom{p+1}{1}\binom{N-2}{p-1}$			

Tabela 3. Matrike reduciranih koeficientov ortogonalnih polinomov binomskih funkcij b | S

N = 1						1	: 1	N = 2						1	: 2
													2	-1	: 2
N = 3						1	: 3	N = 4						1	: 4
					1	-1	: 2						2	-3	: 20
				6	-3	1	: 6					2	-2	1	: 4
											20	-10	4	-1	: 20
N = 5						1	: 5	N = 6						1	: 6
					1	-2	: 10						2	-5	: 70
				2	-3	2	: 14					3	-6	5	: 84
			5	-5	3	-1	: 10				10	-15	12	-5	: 180
		70	-35	15	-5	1	: 70			14	-14	9	-4	1	: 28
									252	-126	56	-21	6	-1	: 252
N = 7						1	: 7	N = 8						1	: 8
					1	-3	: 28						2	-7	: 168
				2	-5	5	: 84					2	-6	7	: 168
			1	-2	2	-1	: 6				4	-10	12	-7	: 264
		14	-21	18	-10	3	: 154			14	-28	30	-20	7	: 616
	42	-42	28	-14	5	-1	: 84		84	-126	112	-70	30	-7	: 2184
N = 9						1	: 9	N = 10						1	: 10
					1	-4	: 60						2	-9	: 330
				6	-21	28	: 2772					1	-4	6	: 132
			5	-15	21	-14	: 990				10	-35	56	-42	: 8580
		14	-35	45	-35	14	: 2002			10	-30	45	-40	18	: 2860
	18	-36	40	-30	15	-4	: 468		12	-30	40	-35	20	-6	: 780

N = 11

					1	:	11
				1	-5	:	110
			2	-9	15	:	858
		5	-20	36	-30	:	4290
	2	-7	12	-12	6	:	286
3	-9	14	-14	9	-3	:	156

N = 12

					+1	:	12
				2	-11	:	572
			6	-30	55	:	12012
		4	-18	36	-33	:	5148
	7	-28	54	-60	33	:	8008
18	-63	112	-126	90	-33	:	15912

N = 13

					1	:	13
				1	-6	:	182
			2	-11	22	:	2002
		1	-5	11	-11	:	572
	14	-63	135	-165	99	:	68068
7	-28	56	-70	55	-22	:	6188

N = 14

					1	:	14
				2	-13	:	910
			1	-6	13	:	728
		10	-55	132	-143	:	97240
	14	-70	165	-220	143	:	136136
28	-126	280	-385	330	-143	:	235144

N = 15

					1	:	15
				1	-7	:	280
			6	-39	91	:	37128
		5	-30	78	-91	:	39780
	70	-385	990	-1430	1001	:	6.466.460
126	-630	1540	-2310	2145	-1001	:	10.581.480

N = 16						1	:	16
					2	-15	:	1.360
				2	-14	35	:	5.712
			20	-130	364	-455	:	1.007.760
		14	-84	234	-364	273	:	470.288
	12	-66	176	-286	286	-143	:	201.522

N = 17						1	:	17
					1	-8	:	408
				2	-15	40	:	7.752
			1	-7	21	-28	:	3.876
		2	-13	39	-65	52	:	16.796
	6	-36	104	-182	195	-104	:	100.776

N = 18						1	:	18
					2	-17	:	1.938
				3	-24	68	:	23.256
			2	-15	48	-68	:	23.256
		2	-14	45	-80	68	:	28.424
	36	-234	728	-1365	1560	-884	:	6.953.544

N = 19						1	:	19
					1	-9	:	570
				2	-17	51	:	13.566
			5	-40	136	-204	:	213.180
		14	-105	360	-680	612	:	2.288.132
	3	-21	70	-140	170	-102	:	89.148

N = 20						1	:	20
					2	-19	:	2.660
				2	-18	57	:	17.556
			20	-170	612	-969	:	4.903.140
		35	-280	1020	-2040	1938	:	22.881.32o
	42	-315	1120	-2380	3060	-1938	:	31.201.800

	N = 21				1	:	21
				1	-10	:	770
			6	-57	190	:	201.894
		5	-45	171	-285	:	432.630
	14	-119	459	-969	969	:	5.720.330
63	-504	1904	-4284	5814	-3876	:	121.687.020

	N = 22				1	:	22
				2	-21	:	3.542
			1	-10	35	:	7.084
		2	-19	76	-133	:	96.140
	14	-126	513	-1140	1197	:	8.748.740
28	-238	952	-2261	3230	-2261	:	40.562.340

	N = 23				1	:	23
				1	-11	:	1.012
			2	-21	77	:	35.420
		1	-10	42	-77	:	32.890
	14	-133	570	-1330	1463	:	13.123.110
2	-18	76	-190	285	-209	:	340.860

	N = 24				1	:	24
				2	-23	:	4.600
			6	-66	253	:	394.680
		20	-210	924	-1771	:	17.760.600
	2	-20	90	-220	253	:	394.680
36	-342	1520	-3990	6270	-4807	:	177.928.920

	N = 25				1	:	25
				1	-12	:	1.300
			2	-23	92	:	53.820
		5	-55	253	-506	:	1.480.050
	10	-105	495	-1265	1518	:	14.307.150
6	-60	280	-770	1265	-1012	:	7.803.900

N = 26					1	:	26
				2	-25	:	5.850
			1	-12	50	:	16.380
		10	-115	552	-1150	:	7.803.900
	14	-154	759	-2024	2530	:	40.060.020
12	-126	616	-1771	3036	-2530	:	48.384.180

N = 27					1	:	27
				1	-13	:	1.638
			6	-75	325	:	712.530
		1	-12	60	-130	:	101.790
	14	-161	828	-2300	2990	:	56.448.210
63	-693	3542	-10626	18975	-16445	:	2.032.135.560

N = 28					1	:	28
				2	-27	:	7.308
			2	-26	117	:	95.004
		4	-50	260	-585	:	2.103.660
	7	-84	450	-1300	1755	:	19.634.160
42	-483	2576	-8050	14950	-13455	:	1.354.757.040

N = 29					1	:	29
				1	-14	:	2.030
			2	-27	126	:	113.274
		5	-65	351	-819	:	4.207.320
	14	-175	975	-2925	4095	:	107.987.880
21	-252	1400	-4550	8775	-8190	:	500.671.080

N = 30					1	:	30
				2	-29	:	8.990
			3	-42	203	:	302.064
		10	-135	756	-1827	:	21.360.240
	70	-910	5265	-16380	23751	:	3.671.587.920
36	-450	2600	-8775	17550	-16965	:	2.145.733.200

	N = 31				1	:	31
				1	-15	:	2.480
			2	-29	145	:	158.224
		5	-70	406	-1015	:	6.724.520
	2	-27	162	-522	783	:	4.034.712
2	- 26	156	-546	1131	-1131	:	9.536.572
	N = 32				1	:	32
				2	-31	:	10.912
			2	-30	155	:	185.504
		4	-58	348	-899	:	5.379.616
	2	-28	174	-580	899	:	5.379.616
4	-54	336	-1218	2610	-2697	:	54.285.216
	N = 33				1	:	33
				1	-16	:	2.992
			6	-93	496	:	1.947.792
		1	-15	93	-248	:	417.384
	14	-203	1305	-4495	7192	:	348.330.136
18	-252	1624	-6090	13485	-14384	:	1.547.128.656
	N = 34				1	:	34
				2	-33	:	13.090
			1	-16	88	:	62.832
		10	-155	992	-2728	:	51.477.360
	14	-210	1395	-4960	8184	:	456.432.592
84	-1218	8120	-31465	71920	-79112	:	46.929.569.232
	N = 35				1	:	35
				1	-17	:	3.570
			2	-33	187	:	290.598
		5	-80	528	-1496	:	15.775.320
	70	-1085	7440	-27280	46376	:	14.834.059.240
21	-315	2170	-8680	20460	-23188	:	4.045.652.520

		N = 36			1	:	36
				2	-35	:	15.540
			6	-102	595	:	3.011.652
		20	-330	2244	-6545	:	307.618.740
	7	-112	792	-2992	5236	:	191.407.216
126	-1953	13888	-57288	139128	-162316	:	199.046.103.984

		N = 37			1	:	37
				1	-18	:	4.218
			2	-35	210	:	383.838
		1	-17	119	-357	:	932.178
	14	-231	1683	-6545	11781	:	980.961.982
3	-48	352	-1496	3740	-4488	:	152.877.192

		N = 38			1	:	38
				2	-37	:	18.278
			1	-18	111	:	109.668
		2	-35	252	-777	:	4.496.388
	2	-34	255	-1020	1887	:	25.479.532
12	-198	1496	-6545	16830	-20757	:	3.286.859.628

		N = 39			1	:	39
				1	-19	:	4.940
			6	-111	703	:	4.496.388
		5	-90	666	-2109	:	33.722.910
	2	-35	270	-1110	2109	:	32.224.114
18	-306	2380	-10710	28305	-35853	:	9.860.578.884

		N = 40			1	:	40
				2	-39	:	21.320
			2	-38	247	:	567.112
		20	-370	2812	-9139	:	644.482.280
	70	-1260	9990	-42180	82251	:	49.625.135.560
4	-70	560	-2590	7030	-9139	:	644.482.280

		N = 41			1	:	41
				1	-20	:	5.740
			2	-39	260	:	641.732
		5	-95	741	-2470	:	47.900.710
	14	-259	2109	-9139	18278	:	2.481.256.778
14	-252	2072	-9842	27417	-36556	:	10.376.164.708
		N = 42			1	:	42
				2	-41	:	24.682
			3	-60	410	:	1.629.012
		2	-39	312	-1066	:	9.075.924
	14	-266	2223	-9880	20254	:	3.084.805.724
252	-4662	39368	-191919	548340	-749398	:	4.389.117.671.484
		N = 43			1	:	43
				1	-21	:	6.622
			2	-41	287	:	814.506
		1	-20	164	-574	:	2.676.234
	14	-273	2340	-10660	22386	:	3.815.417.606
21	-399	3458	-17290	50635	-70889	:	39.541.600.664
		N = 44			1	:	44
				2	-43	:	28.380
			2	-42	301	:	913.836
		20	-410	3444	-12341	:	1.257.829.980
	7	-140	1230	-5740	12341	:	1.173.974.648
6	-117	1040	-5330	15990	-22919	:	4.162.273.752
		N = 45			1	:	45
				1	-22	:	7.590
			6	-129	946	:	9.203.634
		5	-105	903	-3311	:	92.036.340
	10	-205	1845	-8815	19393	:	2.934.936.620
9	-180	1640	-8610	26445	-38786	:	12.006.558.900

		N = 46			1	:	46
				2	-45	:	32.430
			1	-22	165	:	285.384
		10	-215	1892	-7095	:	429.502.920
	2	-42	387	-1892	4257	:	143.167.640
12	-246	2296	-12341	38786	-58179	:	27.214.866.840

		N = 47			1	:	47
				1	-23	:	8.648
			2	-45	345	:	1.271.256
		1	-22	198	-759	:	4.994.220
	14	-301	2838	-14190	32637	:	8.518.474.580
6	-126	1204	-6622	21285	-32637	:	8.629.104.120

		N = 48			1	:	48
				2	-47	:	36.848
			6	-138	1081	:	12.712.560
		4	-90	828	-3243	:	92.620.080
	14	-308	2970	-15180	35673	:	10.301.411.120
252	-5418	52976	-297990	979110	1533939	:	19.208.385.771.120

		N = 49			1	:	49
				1	-24	:	9.800
			2	-47	376	:	1.566.040
		5	-115	1081	-4324	:	167.230.700
	14	-315	3105	-16215	38916	:	12.408.517.940
14	-308	3080	-17710	59455	-95128	:	74.451.107.640

		N = 50			1	:	50
				2	-49	:	41.650
			1	-24	196	:	433.160
		10	-335	2256	-9212	:	770.715.400
	70	-1610	16215	-86480	211876	:	372.255.538.200
28	-630	6440	-37835	129720	-211876	:	372.255.538.200

Tabela 4. Vrednosti binomskih koeficientov $\binom{x}{r}$

$r = 1(1)5 \quad x = 1(1)50$

x= $\binom{x}{1}$	$\binom{x}{2}$	$\binom{x}{3}$	$\binom{x}{4}$	$\binom{x}{5}$	x= $\binom{x}{1}$	$\binom{x}{2}$	$\binom{x}{3}$	$\binom{x}{4}$	$\binom{x}{5}$
o	o	o	o	o	25	300	2300	12650	53130
1	o	o	o	o	26	325	2600	1495o	6578o
2	1	o	o	o	27	351	2925	1755o	8o73o
3	3	1	o	o	28	378	3276	2o475	9828o
4	6	4	1	o	29	4o6	3654	23751	118755
5	1o	1o	5	1	3o	435	4o6o	274o5	1425o6
6	15	2o	15	6	31	465	4495	31465	169911
7	21	35	35	21	32	496	496o	3596o	2o1376
8	28	56	7o	56	33	528	5456	4o92o	237336
9	36	84	126	126	34	561	5984	46376	278256
1o	45	12o	21o	252	35	595	6545	5236o	324632
11	55	165	33o	462	36	63o	714o	589o5	376992
12	66	22o	495	792	37	666	777o	66o45	435897
13	78	286	715	1287	38	7o3	8436	73815	5o1942
14	91	364	1oo1	2oo2	39	741	9139	82251	575757
15	1o5	455	1365	3oo3	4o	78o	988o	9139o	658oo8
16	12o	56o	182o	4368	41	82o	1o66o	1o127o	749398
17	136	68o	238o	6188	42	861	1148o	11193o	85o668
18	153	816	3o6o	8568	43	9o3	12341	12341o	962598
19	171	969	3876	11628	44	946	13244	135751	1o86oo8
2o	19o	114o	4845	155o4	45	99o	1419o	148995	1221759
21	21o	133o	5985	2o349	46	1o35	1518o	163185	137o754
22	231	154o	7315	26334	47	1o81	16215	178365	1533939
23	253	1771	8855	33649	48	1128	17296	19458o	17123o4
24	276	2o24	1o626	425o4	49	1176	18424	211876	19o6884
					5o	1225	196oo	23o3oo	211876o

Tabela 5. F (l,m) za preskušanje značilnosti za komponente z m_1=l stopinjami prostosti

m	α				m	α			
	o,lo	.o5	.ol	.ool		.lo	.o5	.ol	.ool
l	39,86	161,44	4o52,2	4o53oo	26	2,91	4,23	7,72	13,74
2	8,53	18,51	98,5o	998,5	27	2,9o	4,21	7,68	13,61
3	5,54	lo,13	34,12	167,o	28	2,89	4,2o	7,64	13,5o
4	4,54	7,71	21,2o	21,2o	29	2,89	4,18	7,6o	13,39
5	4,o6	6,61	16,26	47,18	3o	2,88	4,17	7,56	13,29
6	3,78	5,99	13,75	35,51	31	2,87	4,16	7,53	13,2o
7	3,59	5,59	12,25	29,25	32	2,87	4,15	7,5o	13,12
8	3,46	5,32	11,26	25,42	33	2,86	4,14	7,47	13,o4
9	3,36	5,12	lo,56	22,86	34	2,86	4,13	7,44	12,97
lo	3,28	4,96	lo,o4	21,o4	35	2,85	4,12	7,42	12,9o
11	3,22	4,84	9,65	19,69	36	2,85	4,11	7,4o	12,83
12	3,18	4,75	9,33	18,64	37	2,85	4,11	7,37	12,77
13	3,14	4,67	9,o7	17,81	38	2,84	4,1o	7,35	12,72
14	3,1o	4,6o	8,86	17,14	39	2,84	4,o9	7,33	12,66
15	3,o7	4,54	8,68	16,59	4o	2,84	4,o8	7,31	12,61
16	3,o5	4,49	8,53	16,12	41	2,83	4,o8	7,3o	12,56
17	3,o3	4,45	8,4o	15,72	42	2,83	4,o7	7,28	12,52
18	3,ol	4,41	8,29	15,38	43	2,83	4,o7	7,26	12,48
19	2,99	4,38	8,18	18,o8	44	2,82	4,o6	7,25	12,44
20	2,97	4,35	8,1o	14,82	45	2,82	4,o6	7,23	12,4o
21	2,96	4,32	8,o2	14,59	46	2,82	4,o5	7,22	12,36
22	2,95	4,3o	7,95	14,38	47	2,82	4,o5	7,21	12,32
23	2,94	4,28	7,88	14,19	48	2,81	4,o4	7,19	12,29
24	2,93	4,26	7,82	14,o3	49	2,81	4,o4	7,18	12,26
25	2,92	4,24	7,77	13,88	5o	2,81	4,o3	7,17	12,23

Tabela je za m > 3o prirejena iz tabele za t-porazdelitev

iz zveze: $F_{\alpha=P}(l,m) = t^2_{\alpha=2P}(m)$

6. Obrazec OPBF

Obr. OPBF 1 je prirejen za analizo statističnih vrst z vrednostmi na enake razmake.

Ker je predvideno, da potrebne vsote kumulativ za stvarne vrste C_p in kumulative iz parametrov prilagojenega polinoma izračunamo na računski stroj z registrirnim trakom z uporabo subtotalov, je v prvem delu le tabela z oznako členov (stolpec 2), osnovno stvarno vrsto podatkov Y_x (stolpec 3) in prilagojeno vrsto podatkov Y(x) (stolpec 4). Obseg te tabele dopušča vrste z do N=50 členi (tolikšen je obseg tabel izračunanih matrik koeficientov za izračunanje ortogonalnih polinomov).

V podolžnem delu obrazca je v stolpcih 5 do 10 prostor za vsote kumulativ C_p (za prilagoditev parabol do n = 5 stopnje) in matriko koeficientov ortogonalnih polinomov b iz tabele 3 za ustrezen N.

V kolono 11 vpisujemo vrednosti produktov koeficientov b in vektorja C' bC'.

V stolpec 12 iz matrike koeficientov prepišemo vrednosti za S.

V stolpec 14 vpišemo izračunane parametre ortogonalnih polinomov A_p, ki jih dobimo tako, da bC' delimo z S, upoštevaje E oziroma spremembo predznaka za lihe parametre, kar je naznačeno v stolpcu 13.

V stolpcu 16 je v glavi predviden prostor za vsoto kvadratov vrednosti členov stvarne vrste $\sum Y_x^2$. Vsota kvadratov pride v poštev, če analiziramo variabilnost oziroma vsoto kvadratov odklonov. V nadaljnje vrste te kolone vpisujemo ustrezne prispevke posameznih komponent k skupni vsoti kvadratov. Te količine so, kot je nakazano v

X	Y	Y_x	Y/x/
1	2	3	4
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			
49			

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	C_o	$(Cb')_p = G_p$	S_p	E	$A_p = \frac{(11)(13)}{12}$	$\frac{\sum Y_x^2}{Sk_p}$	$(11)^2 : 12 = Sk_p$	$F_p = \frac{SK_p}{s_e^2}$
								1		0		
								-1		1		
								1		2		
								-1		3		
								1		4		
								-1		5		

b: 0, 1, 2, 3, 4, 5

D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	D_o	$D = A'b$
-1	1	-1	1	-1	1	G

$\bar{D}_5$ $\bar{D}_4$ $\bar{D}_3$ $\bar{D}_2$ $\bar{D}_1$ $\bar{D}_o$ $\bar{D}$

$\sum Y_x^2 - \sum SK_p = SK_R$ N-p-1

$SK_R : (N-p-1) = s_e^2$ 1,00

Prilagoditev ortogonalnih polinomov binomskih funkcij

Vrsta: ....
....

glavi obrazca, enake $(bC')^2/E$, kar sledi iz obrazca 77.

V shemi je nakazano kako izračunamo vsoto kvadratov odklonov stvarnih vrednosti od prilagojene krivulje (ki ni nujno polinom pete stopnje) SK_R. Če so izpolnjeni pogoji za analizo variance izračunamo na nakazan način še oceno variance za slučajnostne vplive s_e^2.

V koloni 17 izračunani F_p je osnova za analizo variance. V pomožni tabeli so dane kritične vrednosti $F_a(1,N-n-1)$, ki služijo za osnovo pri presojanju o značilnosti posameznih komponent.

Ko ugotovimo, do katere stopnje so komponente značilne in presodimo izvor značilnosti, glede na pomen prilagojene funkcije izračunamo koeficiente funkcije binomskih polinomov D_r. D_r je produkt $A'b$ vektorja parametrov A in matrike koeficientov b.

Če iščemo koeficient prilagojenega polinoma binomskih funkcij z izhodiščem na koncu vrste, pri izračunavanju koeficientov glede na obrazec 74 upoštevamo še vektorja predznakov E in G. Te koeficiente izračunamo kot $H = AE'bG'$.

Iz dobljenih koeficientov prilagojenega binomskega polinoma dobimo prilagojeno vrsto s postopnim kumuliranjem, kot je nakazano v odstavku 1.3.

7. Primeri za uporabo

7.1 Izračunanje vrste ortogonalnega polinoma

Zaradi pomena koeficientov polinomov binomskih funkcij, ki je razviden iz 44, iz tabeliranih koeficientov b_p^r dobimo vrsto za ortogonalni polinom s kumuliranjem, kakor je prikazano v 1.3.

Če vzamemo za primer ortogonalni polinom za tretjo stopnjo za N = 15 je funkcija ortogonalnega polinoma dana z polinomom binomskih funkcij

$$X_3(x) = -91 + 78\binom{x}{1} - 3o\binom{x}{2} + 5\binom{x}{3}.$$

vrsta za obravnavani polinom pa je:

x	$\Delta^3 X_3$	$\Delta^2 X_3$	$\Delta^1 X_3$	X_3
o	5	-3o	78	-91
1		-25	48	-13
2		-2o	23	35
3		-15	3	58
4		-1o	-12	61
5		- 5	-22	49
6		o	-27	27
7		5	-27	o
8		1o	-22	-27
9		15	-12	-49
10		2o	3	-61
12		25	23	-58
13		3o	48	-35
14		35	78	+13
15		4o	1o3	+91

7.2 Prilagajanje polinoma stvarnim vrstam

Za primer vzemimo časovno vrsto indeksov industrijske proizvodnje blaga za široko potrošnjo v SFRJ v razdobju 1952-1967 (Vir: SG-68)

Čeprav predvidevamo, da izračunamo vsote kumulativ na računski stroj z registrirnim trakom, zaradi sistema podajamo izračun kumulativ:

Leto	$Y_x=K^o$	K^1	K^2	K^3	K^4	K^5	
1952	18	o					
1953	21	18	o				
1954	24	39	18	o			
1955	27	63	57	18	o		
1956	3o	9o	12o	75	18	o	
1957	37	12o	21o	195	93	18	
1958	4o	157	33o	4o5	288	111	
1959	46	197	487	735	693	399	
196o	54	243	684	1222	1428	1o92	
1961	58	297	927	19o6	265o	252o	
1962	64	355	1224	2833	4556	517o	
1963	75	419	1579	4o57	7389	9726	
1964	87	494	1998	5636	11446	17115	
1965	95	581	2492	7634	17o82	28561	
1966	1oo	676	3o73	1o126	24716	45643	
1967	99	776	3749	13199	34842	7o359	
		875	4525	16948	48041	105201	180714
		C_o	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5

Iz tabele 3 matrik koeficientov ortogonalnih polinomov za N=16 je v shemo v stolpce 5-10 prepisana matrika b v stolpec 12 pa vektor S v ustrezno vrsto pa vektor C.

Dalje je:

$(C'b)_o \;=\; 875.1 = 875$

$(C'b)_1 \;=\; 4525.2 \;+\; 875.(-15) \;=\; -4075$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$(C'b)_5 \;=\; 180714.12 + 105201.(-66) + .. + 875.(-143) = 2415$

Od vsote $\sum Y_x^2 = 18^2 + 21^2 + \ldots\ldots + 100^2 + 99^2 = 60451$

odštevamo v stolpcu 16 prispevke posameznih komponent:

$$(C'b)_o^2 : S_o = 875^2 : 16 = 47851,56$$

$$(C'b)_1^2 : S_1 = (-4075)^2 : 1360 = 12210,02$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(C'b)_5^2 : S_5 = 2415^2 : 201.552 = 28,94$$

Če ni predvidena analiza variance ali analiza vsote kvadratov odklonov, stolpci 15 - 17 odpadejo iz analize in preidemo na izračuna parametrov A_p, do stopnje, ki je določena po drugih merilih, ne pa z analizo variance.

V shemi je po zgornjih navodilih izvršena analiza časovne vrste. Ker je za primer, da prilagodimo vrsti z N = 16 členi polinom pete stopnje število stopinj prostosti N-n-l = 10, so m = 10 ustrezne kritične vrednosti iz tabele 5:

α =	o,lo	o,o5	o,ol	o,ool
F(1,10)	3,28	4,96	lo,o4	21,o4

Če primerjamo izračunane vrednosti za F s teoretičnimi, ugotovimo, da sta linearna in kvadratična komponanta visoko značilni. Značilne pa so tudi vse nadaljnje:kubična komponenta (F=17,69) na ravni α = o,ol, komponenta 4. stopnje pa na ravni α = o,ool (F = 22,26), komponenta 5. stopnje pa na ravni α = o,ol (F = 12,ol). Iz tega sklepamo, da je primerna funkcija trenda parabola druge stopnje, večja ali manjša značilnost drugih komponent pa je rezultat krajših ali daljših ciklov. Čim višja je stopnja komponente, tem krajši cikel izraža.

Po tej analizi se odločimo, da kot trend izračunamo polinom in vrsto za parabolo druge stopnje:

Parametri prilagojenega polinoma ortogonalnih polinomov

$$A_p = \frac{(C'b)_p\, E_p}{S_p} \quad \text{so:}$$

$$A_o = \frac{875.1}{16} = 54,6875$$

$$A_1 = \frac{(-4075)(-1)}{1360} = 2,9963$$

$$A_2 = \frac{1171.1}{5712} = 0,2050$$

Iz njih pa so izračunani parametri prilagojenega polinoma binomskih funkcij $D = A'b$

$$D_o = 54,6875.1 + 2,9963.(-15) + 0,2050.35 = 16,9180$$

$$D_1 = 2,9963.2 + o,2050(-14) = 3,1226$$

$$D_2 = 2,2050.2 = 0,4100$$

Medtem ko je prilagojena funkcija Y(x) pisana z ortogonalnimi polinomi:

$$Y(x) = 54,6875 + 2,9963\ X_1 + 0,2050\ X_2$$

kot polinom binomskih funkcij pa

$$Y(x) = 16,9180 + 3,1226\binom{x}{1} + 0,4100\binom{x}{2}$$

Vrsto trenda dobimo s kumuliranjem:

1952	0,4100	3,1226	16,9180
1953	"	3,5326	20,04
1954		3,9426	23,57
1955		4,3526	27,52
1956		4,7626	31,87
1957		5,1726	36,63

x		Y_x	Y(x)
1	2	3	4
0	1952	18	16,92 +
1	53	21	20,04 +
2	54	24	23,57 +
3	55	27	27,52 −
4	56	30	31,87 −
5	57	37	36,63 −
6	58	40	41,80 −
7	59	46	47,39 −
8	60	54	53,39 +
9	61	58	59,78 −
10	62	64	66,59 −
11	63	75	73,82 +
12	64	87	81,45 +
13	65	95	89,49 +
14	66	100	97,94 +
15	67	99	106,81 −
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			
49			

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	C_0	$(C'b)_p = G_p$	S_p	E	$A_p = \frac{(11)(13)}{(12)_p}$	ΣY^2 / SK_p	60451,00 / $(11)^2 : (12) = SK_p$	$F_p = \frac{SK_R}{p\, s_e^2}$
80714	105201	48041	16948	4525	875							
N=16				0	1	875	16	1	54,6875	0	47851,56	÷
			1	2	−15	(−1) −4075	1360	−1	2,9963	1	12210,02	5.056,4
		b 2	2	−14	35	1171	5712	1	0,2050	2	240,06	99,61
	3	20	−130	364	−455	(−1) 6555	1007760	−1		3	42,64	17,69
4	14	−84	234	−364	273	−5023	470288	1		4	53,65	22,26
5 12	−66	176	−286	286	−143	(−1) 2415	201552	−1		5	28,94	12,01
D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	D_0				$\Sigma Y^2 - \Sigma SK_p =$	SK_R	24,13	N−p−1 10
			0,4100	+3,1226	16,9180							
−1	1	−1	1	−1	1				$SK_R : (N-p-1) =$	s_e^2	2,41	1,00
$\bar{D}_5$ 5	$\bar{D}_4$ 4	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$							

Prilagoditev ortogonalnih polinomov binomskih funkcij

Vrsta: Indeksi industrijske proizvodnje za osebno potrošnjo

1958	0,4100	5,5826	41,8o
1959		5,9926	47,39
196o		6,4o26	53,39
1961		6,8126	59,78
1962		7,2226	66,59
1963		7,6326	73,82
1964		8,o426	81,45
1965		8,4526	89,49
1966		8,8626	97,94
1967			106,81

7.3 Primerjava parametrov ortogonalnih polinomov

Vrste parametrov ortogonalnih polinomov za različne, a sorodne časovne vrste, izračunane iz enakih časovnih razdobij, so med seboj primerljive. Z njimi primerjalno analiziramo značilnosti proučevanih časovnih vrst.

Vzemimo za primer časovne vrste za indekse industrijske proizvodnje po namenu proizvodnje v razdobju 1952-1967. Parametri ortogonalnih polinomov A_p so naslednji:

komponenta	Namen proizvodnje: sredstva dela	material za reprodukcijo	blago za široko potrošnjo
A_o	58,oooo	59,o625	54,6875
A_1	2,91oo	2,839o	2,9963
A_2	o,1572	o,1297	o,2o5o
A_3	o,oo52	o,oo55	o,oo65
A_4	ö,oo75	o,oo7o	o,o1o7
A_5	o,oo85	o,o13o	o,o12o

S primerjavo parametrov po namenu proizvodnje analiziramo, da so vsi parametri dinamike od 1. do 4. stopnje za proizvodnjo široke potrošnje največji. To kaže na največjo dinamiko v proizvodnji te skupine artiklov. Tako vzpon (linearna komponenta), kot hitrost povečevanja (kvadratična komponenta) sta znatno večji za tretjo skupino artiklov. Manjša razlika je v tretji stopnji, večja pa je zopet pri komponenti četrte stopnje, kar izraža značilnost, da so tudi ciklični odkloni najzaznavnejši pri tretji skupini proizvodov.

7.4. Prilagoditev polinoma z izhodiščem na koncu vrste

Kot primer za izračunanje parametrov za prilagojeno funkcijo v zadnjem členu vrste vzemimo indeks fizičnega obsega uvoza v SFRJ v razdobju 1958-1966 (Vir: Indeks 1/69), kateremu prilagodimo polinom druge stopnje. Najprej izračunamo potrebne kumulative. Izračun kumulativ je nakazan, čeprav je prikladneje izračunati kumulative na računski stroj z registrirnim trakom z uporabo subtotala brez pisanja.

Izračunanje kumulativnih vrst za indeks fizičnega obsega uvoza v SFRJ.

Leto			
1958	57	o	o
1959	59	57	o
1960	7o	116	57
1961	76	186	173
1962	73	262	359
1963	84	335	621
1964	1oo	419	956
1965	89	519	1375
1966	108	6o8	1894
	716	25o2	5435
	C_o	C_1	C_2

Če iz obrazca OPBF 1 nakažemo samo del, ki se tiče izračunavanja parametrov, dobimo iz zgornjih podatkov:

C_2	C_1	C_o	b'C	B_p	E_p	A_p
5435	25o2	716				
b		1	716	9	1	79,556
	1	-4	-362	6o	-1	-6,o33
6	-21	28	116	2772	1	o,o42
1	-1	1	G			
.252						
	6,915					
		lo4,864				

$$Y(x) = 104,864 + 6,915\binom{x-1}{-1} + 0 \cdot 252\binom{x-2}{2}$$

Iz teh parametrov dobimo za prilagojen polinom binomskih funkcij ekstrapolirane vrednosti s postopnim kumuliranjem

1964	.252		
1965	"	6,916	
1966	"	7,167	104,864
1967	"	7,419	112,o
1968	"	7,671	119,5

Z " je naznačeno, da se parameter .252 ponavlja. Prilagojeno vrsto dobimo na znan način preko sheme v 1.3. Vrsto prvih diferenc dobimo, če kumulativno prištevamo vrednosti 6,915 $\triangle^2$ Y = .252 (6,915 + o,252 = 7,167 ; 7,167 + o,252 = 7,419 itd.). Da dobimo prilagojeno osnovno vrsto, pa izračunanemu parametru lo4,864 kumulativno prištevamo ustrezne prve diference (lo4,864 + 7,167 = = 112,o31 ; 112,o31 + 7,419 = 119,45o itd.)

7.5 Izračunanje prilagojene funkcije in vrste za primer, da se za že obračunano vrsto vrsta osnovnih podatkov zveča za en člen Y_N.

Pogosto se pri proučevanju časovnih vrst časovna vrsta, ki smo jo analizirali, tekoče ažurira in poveča za en člen. Tako npr. moremo časovno vrsto za indeks fizičnega obsega uvoza v SFRJ v razdobju 1958-1966 dopolniti s podatkom za leto 1967 in iskati prilagojeno funkcijo za novo- za en člen podaljšano časovno vrsto. V tem primeru je izračun količin za en člen podaljšano vrsto $\bar{C}_p$ skrajšan, ker moremo izkoristiti količine C_p za starokrajšo časovno vrsto. Če z $\bar{C}_p$ zaznamujemo kumulativne vsote za novo časovno vrsto z N+1 členi, z Y_N nov N-1 člen v stvarni časovni vrsti, z C_p pa kumulativne vsote za staro časovno vrsto z N členi, izračunamo količine $\bar{C}_p$ na splošno po naslednjih obrazcih:

$$\bar{C}_o = C_o + Y_X \quad ; \quad \bar{C}_1 = C_1 + C_o \quad ; \quad \bar{C}_2 = C_2 + C_1$$

splošno $\bar{C}_p = C_p + C_{p-1}$

V primeru indeksov fizičnega obsega za uvoz v SFRJ v razdobju 1958 - 1967 izračunamo $\bar{C}_p$ iz C_p za vrsto 1958-1966 sistematično takole: $Y_{1967} = 115$

Y_X

1967 $Y_{67} = 115$	$C_o = 716$	$C_1 = 25o2$	$C_2=5435$
	$+ 115$	$+ 716$	$+25o2$
$\bar{N} = N+1=1o$	$\bar{C}_o = 831$	$\bar{C}_1 = 3218$	$\bar{C}_2=7937$

Parametre za podaljšano časovno vrsto z N=1o členi izračunamo podobno kot za prvotno vrsto z N=9 členi.

Rezultati oziroma ekstrapolacija na novi osnovi je naslednja:

1965	.386		
1966	"	7,866	
1967	"	8,252	113,865
1968	"	8,638	112,12
1969	"	9,024	130,76

Jasno je, da moremo z večkratno uporabo obrazcev izračunati kumulativne vrednosti časovno vrsto podaljšano za poljubno število členov.

7.6 Izračunanje posamičnih vrednosti prilagojenega polinoma

S tabelo 4 binomskih koeficientov izračunavamo posamezne člene prilagojene funkcije.

Vzemimo za primer ekstrapolacijo prilagojenega polinoma za indeks blaga za široko potrošnjo v SFRJ za leto 1969. Iz tabele je razvidno, da je za leto 1969 x = 17.

Glede na koeficiente prilagojenega polinoma binomskih funkcij in vrednosti binomskih koeficientov za x = 17 je ekstrapolirana vrednost

$$Y(x=17) = D_0\binom{17}{0} + D_1\binom{17}{1} + D_2\binom{17}{2} = 16{,}1980.1. + $$

$$+ 3{,}1226.17 + 0{,}4100.136 = 125{,}04$$

7.7 Izračunanje korelacijskih koeficientov iz odklonov stvarne vrste od prilagojene vrste

Za primer vzemimo časovni vrsti za indekse industrijske proizvodnje sredstev dela Y_x in materiala za reprodukcijo Z_x v razdobju 1952-1967.

Nakazani izračun postopno daje korelacijske koeficiente odklonov od polinomov o., 1., ... 5. stopnje.

	S_p	G_pY	G_pZ	SK_RY	KYZ	SK_RZ	$r_{YZ.p}$
				65662,oo	66285,oo	66983,oo	
	16	928	945	-53824,oo	-5481o,oo	-55814,o6	
0				11838,oo	11475,oo	11168,94	o,9979
	139o	-3861	-3958	-1127o,o3	-1o994,13	-1o724,69	
1				567,97	48o,87	444,25	o,9573
	5712	898	741	-141,18	-116,49	- 96,13	
2				426,79	364,38	348,12	o,9453
	1oo776o	5224	5533	- 27,o8	- 28,68	- 3o,38	
3				399,71	335,7o	317,74	o,942o
	47o28o	-33o9	-3518	- 26,32	- 24,75	- 23,28	
4				373,39	31o,95	294,46	o,9378
	2o1552	172o	2617	- 14,68	- 22,33	- 33,98	
5				358,71	288,62	26o,48	o,9451

Iz zgornjega primera je razvidna tehnika izračunanja korelacijskih koeficientov in vpliv eliminacije posameznih stopenj na korelacijske koeficiente. Za obravnavani vrsti podatkov razen od $r_{YZ.o}$ med seboj niso zelo različni, kar kaže na določene značilnosti proučevanih časovnih vrst. Dinamika, ki ni pogojena s komponentami do petega tipa je v obeh vrstah zelo podobna kar izzove razmeroma visoke korelacijske koeficiente tudi po eliminaciji smeri razvoja do polinoma pete stopnje.

LITERATURA

M. Blejec, Prilagajanje polinomov binomskih funkcij po metodi najmanjših kvadratov. Ekonomski zbornik, VIII. letnik, Ljubljana, 1966

R.A. Fischer, Statistical Methods for Research Workers, Edinburgh, 13. izdaja, 1963

H. Gebelein, Zahl und Wirklichkeit, Leipzig, 1943