PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 6
Strani 310–313

Marko Razpet:

ŠE O UPORABI REKURZIVNIH FORMUL

Ključne besede: računalništvo, matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/859-Razpet.pdf

ŠE O UPORABI REKURZIVNIH FORMUL

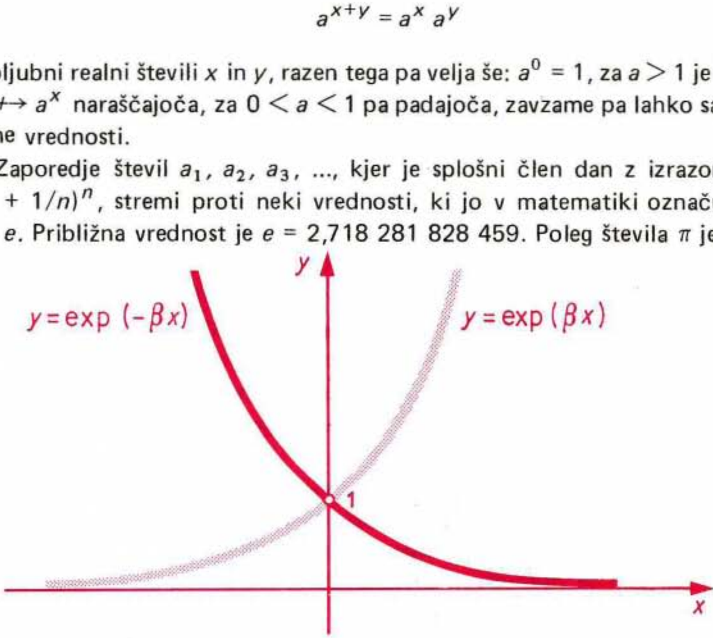
Nadaljujmo naša razmišljanja o uporabi rekurzivnih formul, ki smo jih začeli v četrti številki Preseka.

Najprej nekaj pojasnil v zvezi z eksponentno funkcijo. Naj bo a izbrano pozitivno število, različno od 1. Za vsako naravno število n definiramo $a^n = a.a...a$, kjer je v produktu n enakih faktorjev a. Posebej je $a^1 = a$. Za dve naravni števili m in n velja $a^{m+n} = a^m a^n$. Nato definiramo a^n za poljubno celo število n. Če je n negativno celo število, postavimo $a^n = 1/a^{-n}$. Za $n = 0$ postavimo $a^0 = 1$. Identiteta $a^{m+n} = a^m a^n$ velja potem tudi za dve poljubni celi števili m in n. V naslednjem koraku definiramo a^r za racionalna števila r. Če je r ulomek p/q, postavimo $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Nazadnje definiramo a^x, kjer je x realno število. To gre približno tako: izberemo poljubno zaporedje racionalnih števil $r_1, r_2, \ldots$, ki se z rastočim indeksom približujejo številu x. Opazujemo zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ To zaporedje z rastočim indeksom stremi k nekemu točno določenemu realnemu številu, ki ga označimo z a^x. Preslikava, ki vsakemu realnemu številu x priredi vrednost a^x, je eksponentna funkcija. Število a je njena osnova. Najpomembnejša lastnost eksponentne fukcije je:

$$a^{x+y} = a^x a^y \tag{1}$$

za poljubni realni števili x in y, razen tega pa velja še: $a^0 = 1$, za $a > 1$ je funkcija $x \mapsto a^x$ naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča, zavzame pa lahko samo pozitivne vrednosti.

Zaporedje števil $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kjer je splošni člen dan z izrazom $a_n = (1 + 1/n)^n$, stremi proti neki vrednosti, ki jo v matematiki označujemo s črko e. Približna vrednost je $e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459$. Poleg števila π je to eno



Slika 1

od najpomembnejših števil v matematiki. In ravno število e izberemo za osnovo eksponentne funkcije, ki jo bomo potrebovali. Dostikrat namesto e^x pišemo raje $\exp x$. Adicijski izrek (1) je potem

$$\exp(x+y) = \exp x \exp y \tag{2}$$

BASIC tudi pozna to funkcijo, to je funkcijo EXP.

Za pozitivno realno število β si oglejmo funkciji $x \mapsto \exp(\beta x)$ in $x \mapsto$ $\mapsto \exp(-\beta x)$. Prva je naraščajoča, in to tem bolj, čim večji je β, druga pa je padajoča. Čim večji je β, tem hitreje pada. Prvi ustreza zakon naravne rasti, drugi pa zakon radioaktivnega razpada.

Po tej pripravi si oglejmo krivuljo $y = A \exp(-\beta x)\sin(\omega x + \varphi)$. To je *krivulja dušenega nihanja*. Kasneje nekaj besed o njenem imenu. Število $\beta > 0$ bomo imenovali koeficient dušenja. Na računalniku bomo narisali to krivuljo podobno kot na začetku sinusoido. Najprej pa moramo priti do primerne rekurzivne formule. Abscisam $x_0 = 0$, $x_1 = \delta$, $x_2 = 2\delta$, ... priredimo ustrezne ordinate $y_0, y_1, y_2, \ldots$:

$$y_k = A \exp(-\beta x_k) \sin(\omega x_k + \varphi), \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vpeljemo pomožno zaporedje $z_0, z_1, z_2, \ldots$, kjer je $z_k = A \sin(\omega x_k + \varphi)$. Potem lahko zapišemo krajše

$$y_k = z_k \exp(-\beta x_k), \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz četrte številke Preseka že vemo, da velja

$$z_{k+1} = 2 z_k \cos(\delta\omega) - z_{k-1}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Odtod hitro dobimo zvezo

$$y_{k+1} = 2 y_k \exp(-\beta\delta) \cos(\delta\omega) - y_{k-1} \exp(-2\beta\delta) \tag{3}$$

Označimo

$$c = 2 \exp(-\beta\delta) \cos(\delta\omega), \quad d = \exp(-2\beta\delta)$$

Rekurzivno formulo (3) še enkrat prepišemo:

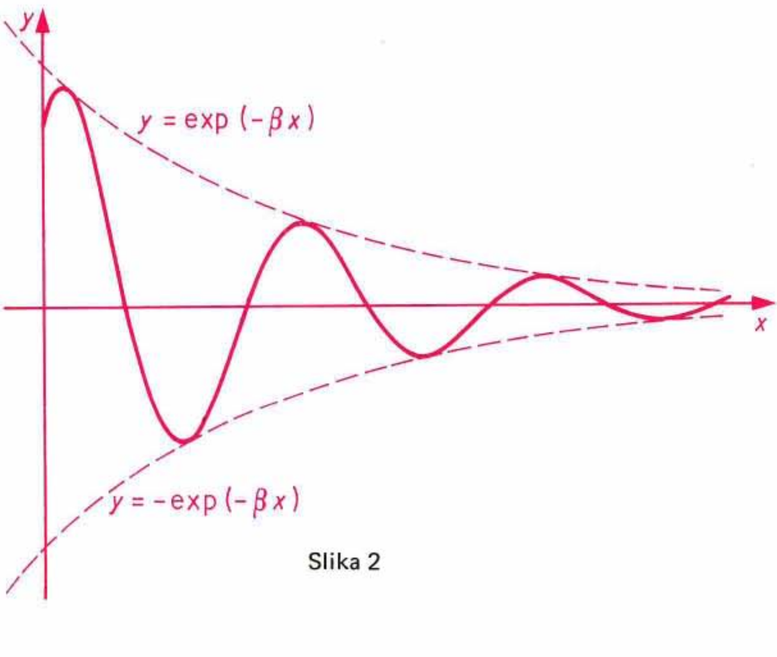
$$y_{k+1} = c\, y_k - d\, y_{k-1}, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Če poznamo y_0 in y_1, potem lahko postopoma izračunamo y_2, y_3 itd. Pri danih parametrih A, ω, φ, β in izbranem koraku δ imamo $y_0 = A \sin\varphi$ in $y_1 = A \exp(-\beta\delta) \sin(\delta\omega + \varphi)$.

Sedaj napišemo nov program, v katerem bomo lahko sami spreminjali vse omenjene parametre.

```
 10 LET m=50: LET a=70
 20 LET fi=PI/2: LET b=.09
 45 LET f=PI/m
 50 LET b1=EXP(-b*f)
 60 LET d=b1*b1
 90 PLOT 0,75: DRAW 255,0
100 LET y0=a*SIN fi
105 LET y1=a*b1*SIN( f+fi)
110 LET c=2*b1*COS f
120 FOR x=0 TO 255
130     PLOT x, y0+75
140     LET y2=c*y1-d*y0
150     LET y0=y1:  LET y1=y2
160 NEXT x
```

Krivuljo dušenega nihanja dobimo prav tako hitro kot sinusoido. V vrstici 10 lahko spremenimo amplitudo *a*, gostoto točk *m*. V vrstici 20 pa pomeni *fi* začetno fazo φ, medtem ko koeficient dušenja β predstavlja spremenljivka *b*.



Slika 2

Če abscisa x pomeni čas, potem sinusoida $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ opisuje časovno odvisnost odklona idealnega nihala od njegove mirovne lege. Zaradi trenja in upora zraka pa nihanje počasi zamre. Odkloni od mirovne lege pojemajo. Izkaže se, da ravno eksponentno z nekim koeficientom dušenja β, enačba $y = A \exp(-\beta x) \sin(\omega x + \varphi)$ pa opisuje tako nihanje. Videti je, kot da bi nekdo nihanje dušil, zato govorimo o dušenem nihanju. Ustrezno tudi krivuljo imenujemo krivulja dušenega nihanja.

Računalnik seveda ne računa natančno. Eno je število π in drugo konstanta PI, ki jo poznamo iz BASIC–a. Le nekaj decimalk števila π se skriva v PI. Poleg tega se vrednosti funkcij SIN, COS, EXP itd. razlikujejo od pravih vrednosti funkcij sin, cos, exp itd. Po množenju dveh števil, ki imata recimo 8 decimalk, produkt za računalnik ni znan na 16 decimalk, ampak zopet le na 8. Zaradi tega opisani programi med izvajanjem prinesejo v zanke FOR–NEXT napake. Med izvajanjem zank pa se zopet delajo računske operacije na nekaj decimalk. Lahko se zgodi, da napaka pri računanju števil y_k ostane v zmernih mejah, lahko pa tudi ne. Bralec naj poskusi, recimo, izračunati SIN($k\delta$) z BASIC–ovo funkcijo in po metodi rekurzivne formule hkrati. Spreminja naj δ in spusti število k precej visoko. Pride do kar znatnih odstopanj. Za načrtovanje sinusoid in podobnih reči pa je natančnost več kot dobra tudi po metodi, ki smo jo opisali v tem članku. Torej nekako vemo, zakaj nam je kontrola identitete $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ dala malo slabši rezultat. Lahko se zgodi, da se napake v zanki med seboj kompenzirajo. V programu iz četrte številke Preseka, kjer rišemo elipso, poskusimo, kaj se zgodi, če zgornjo mejo za spremenljivko t precej povečamo, tako da točka velikokrat obkroži elipso. Kakega siljenja v spiralo ni opaziti. Poskusite z elipso še na ta način, da vrednosti SIN in COS računate s tročleno rekurzivno formulo. Ali opazite kakšno zavijanje z elipse?

Bodi dovolj. Vsi ti zgledi nas poučijo, da se pri reševanju kakšnega prav posebnega problema včasih izplača ubrati kakšno posebno pot. V tem primeru so bile to kotne funkcije. Če ne drugega, je to primer, kako lahko čas izvajanja občutno skrajšamo.

Marko Razpet