Tetivni večkotniki

Cyclic Polygons

Vladimir Kadum

Σ Povzetek

V članku predstavimo tetivne večkotnike. Natančneje sta obravnavana trikotnik in tetivni štirikotnik. Predstavljene vsebine niso vključene v redni učni načrt (na Hrvaškem), se pa lahko na zelo učinkovit način predelajo z učenci, ki so nadarjeni za matematiko in se željo naučiti tudi kaj novega.

Ključne besede: tetivni večkotniki, trikotnik, štirikotnik, učni načrt, nadarjeni učenci

Σ Abstract

The article presents cyclic polygons. The triangle and cyclic quadrilateral are described in detail. The presented topics are not included in the regular curriculum (in Croatia), but can be examined very efficiently with pupils who are gifted in mathematics and willing to learn more.

Key words: *cyclic polygons, triangle, quadrilateral, curriculum, gifted pupils*

α Uvod

Večkotnike, ki jim lahko očrtamo krožnico, imenujemo *tetivni večkotniki.* Stranice večkotnika so tetive očrtane krožnice. Od tu izvira tudi ime.

Tetivni večkotnik z najmanjšim številom stranic ($n = 3$), ki je tudi najbolj raziskan in najbolj poznan, je *trikotnik*. Že stari Grki so o njem veliko vedeli.

Če štirikotniku lahko očrtamo krožnico, temu štirikotniku pravimo tetivni štirikotnik. Štirikotnik je tetiven, če in samo če je vsota nasprotnih kotov enaka 180°. Ptolemejev izrek pa poda zvezo med stranicami in diagonalama štirikotnika. Tetivni štirikotnik je popolnoma določen s svojimi stranicami. Ploščino tetivnega štirikotnika izračunamo po *Heronovi formuli*.

Na podoben način definiramo tudi tetivni večkotnik.

β Trikotnik

V nadaljevanju si bomo pogledali nekatere pomembne zveze, ki veljajo v trikotniku.

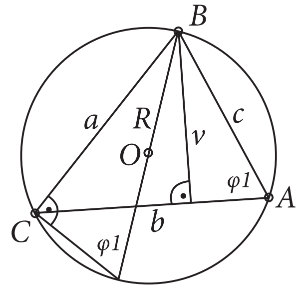
TRDITEV 1.

Naj bo ABC poljuben trikotnik, pri katerem so $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CA|$ stranice, P ploščina in R polmer očrtane krožnice. Takrat velja enakost

$$4PR = abc. \quad (1)$$

Dokaz:

Najprej predstavimo dokaz, ki ga lahko najdemo tudi v osnovnošolskih učbenikih in ki so ga dobro poznali že stari Grki. V dokazu bomo uporabili podobnost trikotnikov in enakost obodnih kotov. Opazujmo sliko 1.



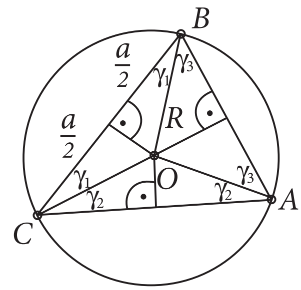
[Slika 1] *Trikotnik ABC*

Veljajo enakosti

$a : 2R = v : c, \quad av = 2P.$

Od tu sledi enakost (1).

S pomočjo slike 2 bomo enakost (1) izpeljali še na drug način.



[Slika 2] *Trikotnik ABC*

Zapišemo

$2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 180°,$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 90°,$

$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin\gamma_3,$

$\cos\gamma_1 \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 = \sin\gamma_3.$

Zaradi preglednosti in krajšega zapisa bomo uvedli oznake: $c_1, c_2, s_1, s_2, s_3,$ pri čemer so

$c_1 = \cos\gamma_1, \quad c_2 = \cos\gamma_2,$

$s_1 = \sin\gamma_1, \quad s_2 = \sin\gamma_2, \quad s_3 = \sin\gamma_3.$

Velja torej

$$c_1 c_2 = s_1 s_2 + s_3. \quad (2)$$

Zapišimo $s_i = \sqrt{1-c_i^2}$ (i = 1, 2, 3). Iz enakosti (2) s kvadriranjem pridemo do enakosti, v kateri ne nastopa koren. Tako dobimo naslednje enakosti

$$c_1^2 c_2^2 = s_1^2 s_2^2 + 2 s_1 s_2 s_3 + s_3^2,$$

$$(2 s_1 s_2 s_3)^2 = (c_1^2 c_2^2 - s_1^2 s_2^2 - s_3^2)^2,$$

$$4s_1^2s_2^2s_3^2 = c_1^4c_2^4 + s_1^4s_2^4 + s_3^4 - 2c_1^2c_2^2s_1^2s_2^2 - 2c_1^2c_2^2s_3^2 + 2s_1^2s_2^2s_3^2. \qquad (3)$$

Ker je

$$c_1 = \frac{a}{2R}, \quad c_2 = \frac{b}{2R},$$

$$s_1^2 = 1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2, \; s_2^2 = 1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2, \; s_3^2 = 1-\left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

lahko enakost (3) zapišemo v obliki

$$16\, P^2 R^2 = a^2 b^2 c^2,$$

kjer je

$$16P^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Z direktnim računom lahko preverimo, da velja

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

kjer je s polovica obsega, tj. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Tako smo izpeljali Heronovo formulo, ki jo uporabljamo za izračun ploščine trikotnika s podanimi stranicami.

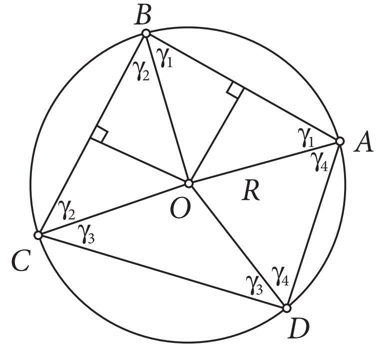
δ Tetivni štirikotnik

TRDITEV 2.

Naj bo $ABCD$ poljuben tetivni štirikotnik, pri katerem so $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, P ploščina in R polmer očrtane krožnice. Tedaj velja enakost

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16P^2}. \qquad (5)$$

Dokaz. Opazujmo sliko 3.



[Slika 3] *Poljubni tetivni štirikotnik ABCD*

Veljajo enakosti

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 180°, \qquad (6)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{a}{2R}, \; \cos\gamma_2 = \frac{b}{2R},$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{c}{2R}, \quad \cos\gamma_4 = \frac{d}{2R}. \qquad (7)$$

Iz enakosti (6) lahko izpeljemo naslednje enakosti

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180° - (\gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos(\gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2 = -\cos\gamma_3\cos\gamma_4 + \sin\gamma_3\sin\gamma_4. \qquad (8)$$

Uvedemo oznake $c_1, c_2, c_3, c_4, s_1, s_2, s_3, s_4$ tako, da je

$$c_i = \cos\gamma_i, \quad s_i = \sin\gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Vsoto $c_1c_2 + c_3c_4$ krajše označimo z s, enakost (8) pa zapišemo v obliki

$$s_1s_2 + s_3s_4 = s. \qquad (9)$$

S kvadriranjem preoblikujemo zapis do enakosti, v kateri bodo vrednosti s_1, s_2, s_3, s_4 na drugo ali na četrto potenco. S tem se izognemo zapisom s koreni. Na sliki 3 opazimo še nekatere enakosti, na primer,

$$s_1 = \sqrt{1-c_1^2} = \sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2}$$

Situacija je podobna kot v predhodni trditvi.

S kvadriranjem enakosti (9) dobimo enakosti

$$s_1^{\,2}s_2^{\,2} + 2\,s_1s_2s_3s_4 + s_3^{\,2}s_4^{\,2} = s^2,$$

ali

$$2\,s_1s_2s_3s_4 = s^2 - s_1^{\,2}s_2^{\,2} - s_3^{\,2}s_4^{\,2}.$$

S kvadriranjem predhodne enakosti dobimo

$$4s_1^{\,2}s_2^{\,2}s_3^{\,2}s_4^{\,2} =$$
$$=s^4+s_1^{\,4}s_2^{\,4}+s_3^{\,4}s_4^{\,4}-2s^2s_1^{\,2}s_2^{\,2}-2s^2s_3^{\,2}s_4^{\,2}+2s_1^{\,2}s_2^{\,2}s_3^{\,2}s_4^{\,2} \quad (10)$$

Da smo se znebili korenov v izrazih za s_1, s_2, s_3, s_4 sta bili potrebni dve zaporedni kvadriranji.

Če zdaj vstavimo v enakost (10) namesto c_1, c_2, c_3, c_4 ustrezne izraze navedene pod (7) in s pomočjo njih izrazimo s_1, s_2, s_3, s_4, dobimo enakost, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kjer je s polovica obsega, tj.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

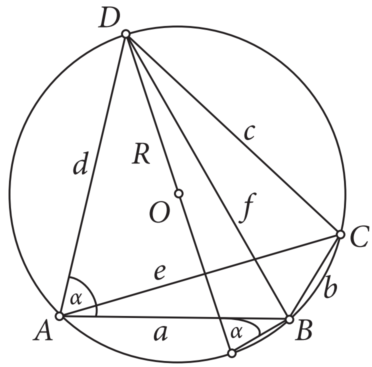
S pomočjo Heronove formule

$$P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad (11)$$

lahko izračunamo ploščino tetivnega štirikotnika s podanimi stranicami. Njeno pravilnost bomo videli ob alternativnem dokazu trditve 2.

Dokazovanje trditve 2 na alternativni način je lahko zelo zanimivo. Pri tem opazujemo, kako se na različne načine odkrivajo resnice v matematiki.

Opazujmo sliko 4.



[Slika 4] *Tetivni štirikotnik ABCD*

Ker sta nasprotna kota v tetivnem štirikotniku suplementarna, nam kosinusni izrek da naslednje enakosti

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \quad (12)$$

Od tu sledi

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}. \quad (13)$$

Glede na zgoraj uporabljeno enakost sklepamo, da je

$$1+\cos\alpha = \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)},$$

$$1-\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)},$$

ali, ker je $1+\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$,

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$,

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)},$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}.$$

Ker je $a + b + c + d = 2s$, lahko zapišemo enakost

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}, \qquad (14)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}, \qquad (15)$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

Če vstavimo v enakost (12) vrednosti za *cos* navedeno pod (13), dobimo enakost

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}. \qquad (16)$$

Podobno je

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$$

in

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ad+bc}. \qquad (17)$$

Če pomnožimo (16) in (17) ter korenimo, dobimo enakost

$ef = ac + bd.$

Imenujmo še Ptolomejev izrek za tetivni štirikotnik. Ptolomej jo je brez uporabe trigonometrije dokazal pred več kot dva tisoč leti. Ker trigonometrija takrat še ni bila razvita, je bil njegov dokaz seveda drugačen.

Dodajmo, da z deljenjem enakosti (16) in (17) dobimo enakost

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Tej enakosti pravimo Ptolomejev izrek za tetivni štirikotnik.

Za dokaz Heronove formule (11) bomo ploščino štirikotnika napisali kot vsoto ploščin dveh trikotnikov

$$P = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

ali

$$P = (ad+bc)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Z vstavljanjem izrazov za $\sin\frac{\alpha}{2}$ in $\cos\frac{\alpha}{2}$ navedenih pod (14) in (15), dobimo enakost (11).

Iz slike 4 opazimo povezavo

$$f = 2R\sin\alpha,$$

od tu sledi enakost

$$R^2 = \frac{f^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Z uporabo navedenih izrazov za $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ in $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ zapišemo zgornjo enakost v obliki (5).

γ Na kratko o tetivnih večkotnikih z več kot štirimi stranicami

Najprej predstavimo naslednjo trditev.

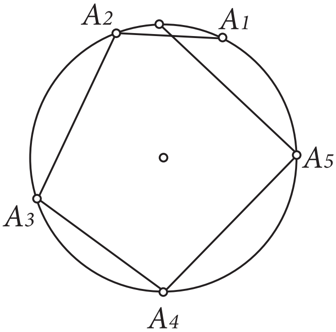
TRDITEV 3.

Naj bo n poljubno naravno število, ki ni manjše od 3, in naj bodo $a_1, a_2, ..., a_n$ poljubne dolžine stranic, za katere velja, da je vsaka od njih manjša od seštevka preostalih $n - 1$ dolžin. Tedaj obstaja vsaj en tetivni večkotnik z n stranicami, katerega dolžine stranic so $a_1, a_2, ..., a_n$.

Vsebino trditve se da intuitivno enostavno videti (naloga 1). Vzemimo na primer, da so podane dolžine stranic poljubnega petkotnika:

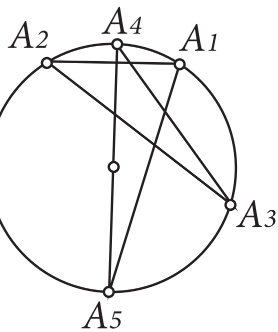
$a_1 = 2\ cm$,
$a_2 = 3.5\ cm$,
$a_3 = 3\ cm$,
$a_4 = 3.7\ cm$,
$a_5 = 3.6\ cm$.

Krožnica na sliki 5 bi morala biti malo večja, da bi bila očrtana petokotniku, z znanimi dolžinami stranic.



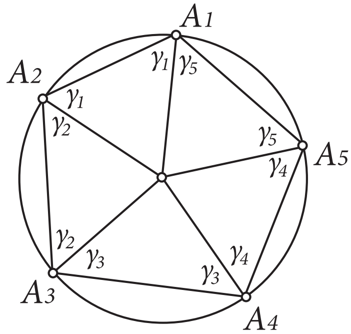
[Slika 5] *Poljubni petkotnik*

Tetivni štirikotnik je s svojimi stranicami natanko določen. V primeru več kot štirih stranic pa obstaja več različnih tetivnih večkotnikov z enako dolgimi stranicami. V zgoraj navedenem primeru za dane dolžine stranic obstaja še en petokotnik. Prikazan je na sliki 6.



[Slika 6] *Tetivni petkotnik*

Pri splošnih tetivnih večkotnikih je zelo težko s pomočjo dolžin stranic izračunati polmer večkotniku očrtane krožnice. Za primer si poglejmo petkotnik na sliki 7.



[Slika 7] *Petkotnik*

Iz enakosti

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 3 \cdot 90°$,

in z uporabo trigonometrijskih funkcij za sinus in kosinus (kot v trditvi 2) dobimo enačbo, v kateri moramo odpraviti korene, ki nastopajo pri sinusih. Na koncu vrednosti trigonometrijskih funkcij napišemo kot funkcije stranic večkotnika.

Na koncu si postavimo še nekaj vprašanj, ki so povezana s trditvijo 3:

1. V trditvi 3 privzamemo, da je najdaljša stranica krajša od vsote dolžin ostalih stranic. Zakaj je ta pogoj sploh potreben? (V nasprotnem primeru stranic ne moremo skleniti v večkotnik. Za obstoj trikotnika je na primer potrebna veljavnost trikotniške neenakosti za njegove stranice.)
2. Obstajajo tetivni štirikotniki z enako dolgimi stranicami in različnimi polmeri očrtanih krožnic, vendar se pri drugačnih polmerih nesosedne stranice večkotnika lahko sekajo.

3. Obstaja le en tetivni štirikotnik z dolžinami stranic $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 3\ cm$. Ugotovite, zakaj ne obstaja še kakšen drug.

ζ Viri in literatura:

1. Dörrie, H. (1965), 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution. Dover Publications, Inc. (Originally published in German under the title of Triumph der Mathematik)
2. Fuss, N. (1797), De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quamcircumscribere licet. Nova acta acad. sci. Petrop. 10, St. Petersburg, 103-125
3. Griffiths, P. – Harris, J. (1978), On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. Enseign. Math. 31-40
4. Poncelet, J. W. (1865), Traité des propriétés projectives des figures. Paris, (first ed. in 1822).
5. Radić, M. i Kadum (2005), Tangencijalni i tetivni poligoni. Bicentrički poligoni. Pula: IGSA