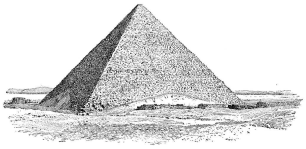
5

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK LETNIK 42 (2014/2015) ŠTEVILKA **5**

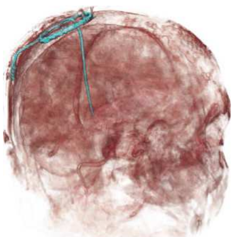
PRESEK

- → DIMENZIJE EGIPČANSKIH PIRAMID
- → PO SLEDEH NEKE NALOGE
- → ODBOJ SVETLOBE IN ZRCALA
- → ODPRAVE NA MARS
- → PRESLIKAVA TEKSTUR NA ENOSTAVNE 3D OBJEKTE

ISSN 0351-6652

9 770351 665258

Zdravljenje Parkinsonove bolezni



→ Misel na v možgane vsajeno elektrodo ni prav nič prijetna. Je pa takšna rešitev v veliko pomoč bolnikom s Parkinsonovo boleznijo in bolnikom z esencialno tresavico, ki bi sicer zelo težko v rokah obdržali karkoli za več kot trenutek. Pri takšnih težavah pomaga stimulacija notranjih delov možganov. Načrtovanje primerne stimulacije je lahko dolgotrajno in zahteva večkratne obiske pacientov. Pri novem pristopu si bistveno pomagajo z matematiko. Z njeno uporabo bistveno skrajšajo čas, ki je potreben za ustrezno nastavitev elektrod. Najprej z matematičnim modelom natančno opišejo možgane obolelega. Nato numerično rešijo sisteme diferencialnih enačb, ki opisujejo obnašanje nevronov. Tako lahko zdravniki v realnem času opazujejo rezultate različnih strategij in s tem pospešijo vrnitev bolnikov v normalno življenje.

Bistveni napredek na tem področju predstavlja združitev različnih vrst podatkov v ustrezni model, učinkovita predstavitev trirazsežnih slik in predstavitev informacij s pomočjo enostavnega tabličnega vmesnika. Tako lahko zdravnik z enim dotikom zaslona prikliče ustrezni model bolnikovih možganov in z uporabo modela predvidi klinične rezultate pri različnih načinih stimulacije. Moč matematike in računalniška vizualizacija s pomočjo tablic in pametnih telefonov sta tako hkrati enostavnejša za zdravnike in koristna za bolnike, ki kljub najmanjšemu potrebnemu številu obiskov zdravnika dobijo najboljšo možno terapijo.

Za več informacij si lahko preberete članek Christopherja R. Butsona in ostalih avtorjev, *Evaluation of Interactive Visualization on Mobile Computing Platforms for Selection of Deep Brain Stimulation Parameters*, ki je bil objavljen v reviji IEEE Transactions on Visualisation and Computer Graphics (zvezek št. 19) leta 2013.

MATEMATIČNI TRENUTKI

KOLOFON

→ **Presek**
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 42, šolsko leto 2014/2015, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2014/2015 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

© 2015 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1958

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: V petek, 20. marca 2015, je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z revijama Gea in Spika, Prirodoslovnim muzejem Slovenije in Elektrotehniško-računalniško strokovno šolo in gimnazijo Ljubljana organiziralo javno opazovanje delnega Sončevega mrka. Po ocenah organizatorjev si je mrk ogledalo okoli deset tisoč obiskovalcev. Foto: Miha Jeršek

Dimenzije egipčanskih piramid

↓↓↓
Borut Jurčič Zlobec

→ **Soočili se bomo z večkrat ponovljeno trditvijo, da sta v dimenzijah Keopsove piramide zakodirani števili ϕ (razmerje zlatega reza) in število π (razmerje med premerom in obsegom krožnice), kljub temu, da razmerje zlatega reza v Egiptu ni bilo nikjer omenjeno in tudi števila π niso poznali tako natančno, kot ga najdemo zakodiranega v dimenzijah Keopsove piramide. Ali so graditelji piramid poznali dejstva, ki niso zgodovinsko izpričana, ali pa je to čisto naključje? Pokazali bomo, da je naključno sovpadanje mnogo bolj verjetno, kot se zdi na prvi pogled. Poskušali bomo razložiti, kako so graditelji določali dimenzije in zakaj so te takšne, kakršne so. Predvsem se bomo posvetili razmerju stranic v trikotniku, ki ga tvorijo polovica roba osnovne ploskve piramide, višina piramide in višina njene stranske ploskve (glej sliko 2 zgoraj). Naša predpostavka bo, da je mere piramid določala predvsem pragmatičnost, kompromis med fizikalnimi lastnostmi materiala, preprostim zapisom mer v navodilih za gradnjo in seveda omejenost sredstev.**

Zlati rez v literaturi

Razmerje zlatega reza ima mnogo zanimivih lastnosti. Vendar pa se mu jih zelo rado pripisuje mnogo več, kot jih ima v resnici.

Razmerje zlatega reza je iracionalno in je v nekem smislu najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. Ta lastnost razmerja je odločilna, da naletimo nanj v naravi. Srečamo ga npr. pri proučevanju optimalne porazdelitve listov okoli stebla rastlin (filotaksa) in razporeditve semen v sončničnem cvetu.

Manj prepričljivo je povezovanje razmerja zlatega reza s sebi podobnimi spiralnimi strukturami v naravi, kot so spiralna struktura nautilusove hišice in spiralne strukture galaksij. Odločilna lastnost spirale pri nautilusovi hišici je njena sebi podobnost. Kot se je izrazil Jacob Bernoulli (1655–1705), *eadem mutata resurgo* (raste, vendar ostaja vedno enaka). Sebi podobnost v naravi je pogost pojav, verjetno zaradi ekonomičnosti genskega zapisa. Vendar pa sebi podobne spirale pripadajo razredu logaritemskih spiral, kjer je zlata spirala le poseben primer. Nastanek spiral v galaksijah se podreja drugačnim zakonom in v splošnem niso niti logaritemske.

Najbolj problematično pa je iskanje razmerja zlatega reza v glasbi, arhitekturi, slikarstvu, umetnosti in filozofiji nasploh. Pripisuje se mu močan pomenski naboj, ki velikokrat vodi v pretiravanje in napačne interpretacije. Zlati rez je bil predmet mistifikacij, tako v starem veku, pri grških filozofih, kot tudi v srednjem veku in je tudi v današnjem času. Poglejmo enega od sodobnih opisov zlatega reza.

Zlato razmerje pomeni vrata do razumevanja življenja. To razmerje imenujemo Zlato oziroma Božansko razmerje, ker predstavlja vrata za globlje razumevanje lepote, čudežnosti in duhovnosti življenja. Je skoraj neverjetno, da ima eno samo število tolikšen vpliv v naravi, človeški zgodovini, znanosti, umetnosti in v vsemirju v celoti.

Profesor računalniških znanosti univerze v Maine George Markowsky je preveril nekatere najbolj znane trditve na temo zlatega reza, zapisane v šolskih učbenikih in člankih. Presenečen je opazil, kako malo resnice je v teh trditvah. O svojih ugotovitvah je napisal članek z naslovom »Misconceptions about the Golden Ratio«, ki ga lahko najdete na naslovu `http://www.umcs.maine.edu/~markov/GoldenRatio.pdf`.

Razmerje zlatega reza, zlati pravokotnik in zlati trikotnik

To poglavje je namenjeno spoznavanju razmerja zlatega reza, zlatega pravokotnika in zlatega trikotnika.

Definicija 1 (Razmerje zlatega reza). *Razdelimo daljico na dva neenaka dela tako, da je razmerje med večjim in manjšim delom enako razmerju med celotno daljico in večjim delom. To razmerje imenujemo razmerje zlatega reza.*

V našem sestavku bomo razmerje zlatega reza označili s črko ϕ, v čast grškega filozofa in matematika Fidesa (500–432), ki je prvi omenil to razmerje. Če vzamemo, da je dolžina prvotne daljice enaka ϕ in dolžina večjega dela enaka 1, potem gornjo definicijo lahko zapišemo v matematični obliki takole:

$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi}{1},$$

od tod dobimo zvezo

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \tag{1}$$

Pozitivna rešitev enačbe je enaka

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398874989\ldots \tag{2}$$

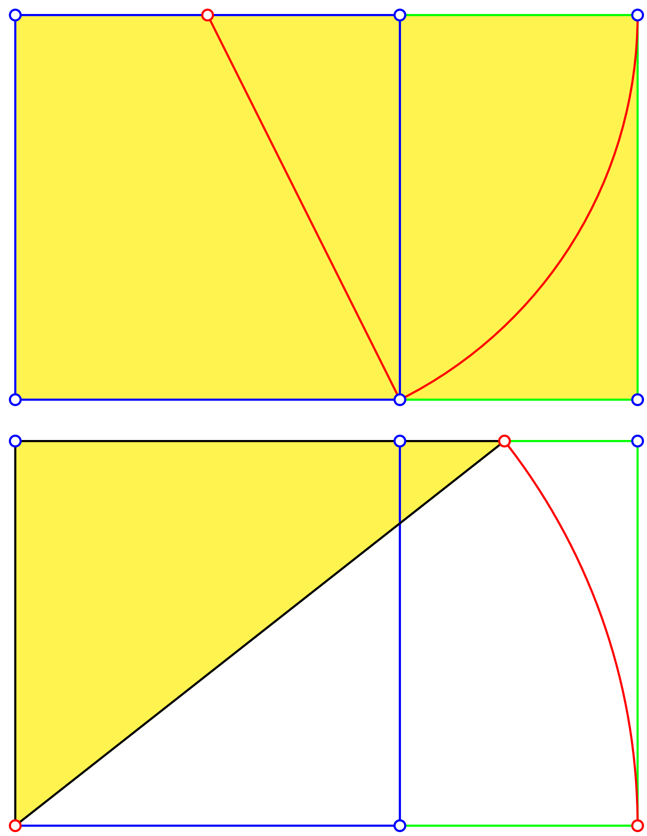
Pravokotnik z razmerjem stranic, ki je enako razmerju zlatega reza, ima naslednjo lastnost: če mu odstranimo kvadrat s stranico, enako krajši stranici, ostane pravokotnik, katerega razmerje stranic je ravno tako enako razmerju zlatega reza. Tak pravokotnik bomo imenovali *zlati pravokotnik*. Na sliki 1 zgoraj je prikazan postopek za načrtanje zlatega pravokotnika.

1. Najprej načrtamo kvadrat, nato razpolovimo eno od stranic.
2. Izberemo enega od nasprotnih oglišč, nato načrtamo krožnico s središčem v razpolovišču in izbranim ogliščem na obodu.
3. Presečišče krožnice z nosilko razpolovljene daljice je eno od oglišč zlatega pravokotnika.
4. Ostalo preberemo s slike 1 zgoraj.

Prepričajmo se, da je to res zlati pravokotnik. Naj bo dolžina stranice kvadrata enaka 1. Po Pitagorovem izreku je polmer krožnice enak $\sqrt{1+1/4} = \sqrt{5}/2$. Daljša stranica pravokotnika meri $(1+\sqrt{5})/2 = \phi$. Razmerje stranic je resnično enako razmerju zlatega reza.

V geometriji poznamo še en lik, ki je tesno povezan z razmerjem zlatega reza, to je *zlati trikotnik*. V knjigi Mysterium Cosmographicum (Skrivnosti sveta) Johannes Kepler (1571–1630) omenja razmerje zlatega reza v stavku:

V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorov izrek, drugi je razmerje zlatega reza.



SLIKA 1.
Zgoraj: zlati pravokotnik, spodaj: zlati trikotnik

Keplerjev trikotnik, včasih tudi zlati trikotnik, povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic

$$1 : \sqrt{\phi} : \phi.$$

Slika 1 spodaj prikazuje, kako načrtamo zlati trikotnik.

1. Najprej načrtamo zlati pravokotnik in si izberemo eno od oglišč.
2. Načrtamo krožnico s središčem v izbranem oglišču in polmerom, enakim daljši stranici.
3. Ostalo je razvidno s slike 1 spodaj.

Prepričajmo se, da smo res načrtali zlati trikotnik. Vzemimo, da je dolžina daljše stranice pravokotnika enaka ϕ in dolžina krajše enaka 1. V trikotniku označimo neznano kateto z x. Po Pitagorovem izreku je $\phi^2 - 1 = x^2$. Iz enačbe (1) sledi, da je $x^2 = \phi$ oziroma $x = \sqrt{\phi}$.

Zlati rez, zapisan v merah Keopsove piramide

Sledi ena od najpogosteje citiranih neresničnih zgodb v zvezi z dimenzijami egipčanskih piramid, ki jo pripisujejo grškemu zgodovinopiscu Herodotu (484–425). Zgodba pravi, da je ob neki priliki egipčanski svečenik zaupal Herodotu skrivnost Keopsove piramide v Gizi.

Svečenik: *Dimenzije Velike piramide so izbrane tako, da je površina kvadrata s stranico, enako višini piramide, enaka površini stranske ploskve.*

Egipčanske piramide so pokončne, pri večini od njih je osnovna ploskev kvadrat. Taka je tudi Keopsova piramida (glej sliko 2 zgoraj). Označimo višino piramide s h, stranico osnovnega kvadrata z b in višino stranske ploskve z s. Preprost račun nam da

$$h^2 = \frac{b\,s}{2}, \quad s^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Delimo zadnjo enačbo z $b^2/4$ in dobimo

$$\left(\frac{2h}{b}\right)^4 = \left(\frac{2h}{b}\right)^2 + 1,$$

označimo $r = \left(\frac{2h}{b}\right)^2$ in dobimo

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Edina pozitivna rešitev gornje enačbe je $r = \phi = (1+\sqrt{5})/2$. Od tod sledi, da je $2h/b = \sqrt{\phi}$. Trikotnik $(b/2, h, s)$ je zlati trikotnik, dolžine njegovih stranic so v razmerju $1 : \sqrt{\phi} : \phi$.

V resnici pa je v Herodotovi knjigi Zgodovina en sam odstavek, ki govori o veliki piramidi (glej zgoraj omenjeni članek Georgea Markowskega), ta pa se glasi:

Herodot: *Veliko piramido so gradili dvajset let. Stranica osnovnega kvadrata meri osemsto čevljev, njena višina meri ravno tako osemsto čevljev, površina je bila pokrita z gladkimi ploščami, ki so se natanko prilegale druga drugi. Kamniti bloki, iz katerih je narejena, merijo vsak od njih več kot trideset čevljev v dolžino.*

Herodot je napisal te vrstice dva tisoč let po izgradnji piramide. Mere, ki jih je podal, ne ustrezajo dejanskemu stanju. Z nekaj domišljije lahko zaslutimo, kako s prevračanjem besed iz gornjega odstavka pridemo do trditve o zvezi med kvadratom višine in ploščino stranske ploskve. Tu imamo ključne besede kvadrat, višina in površina, ostalo pa naredi domišljija in želja, da bi našli razmerje zlatega reza.

Pri Keopsovi piramidi je razmerje med višino in polovico osnovnega roba enako 14/11, kar je zelo blizu vrednosti $\sqrt{\phi}$. To naj bi napeljevalo, da je v teh piramidah zakodirano razmerje zlatega reza. Po drugi strani pa je vrednost $4/\sqrt{\phi}$ zelo blizu vrednosti π, zato nekateri trdijo, da je v egipčanskih piramidah zakodirano tudi število π oziroma njegova približna vrednost 22/7, ki pa je natančnejša, kot so jo poznali v tistem času. V skoraj tisoč let mlajšem dokumentu je omenjena vrednost 256/81 kot približek za π.

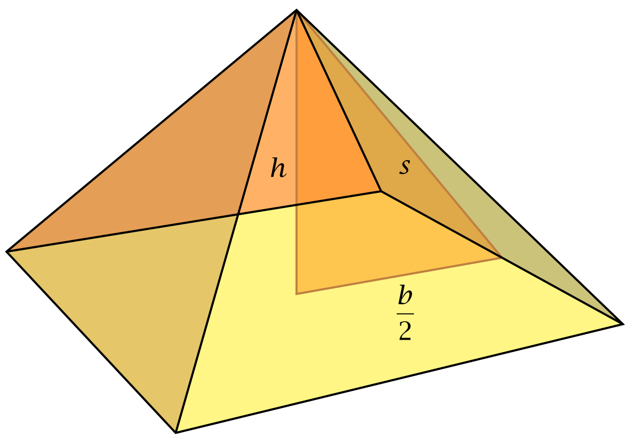
Merjenje kotov in dolžin v starem Egiptu

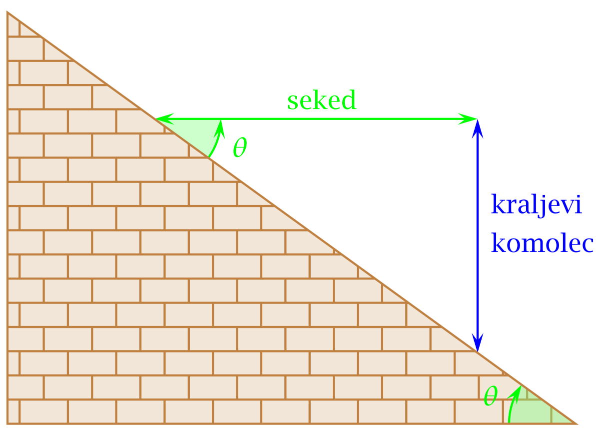
Razmerje dimenzij egipčanskih piramid bomo bolje razumeli, če si ogledamo njihov merski sistem. Osnova za merjenje dolžine je bil *kraljevi komolec*, ki je imel vlogo našega metra. Kraljevi komolec je meril 28 *palcev*. Dolžina enega palca ni bila natanko določena. S časom se je nekoliko spreminjala in se je gibala med 18,7 mm in 18,8 mm, tako se je dolžina kraljevega komolca gibala med 52,36 cm in 52,64 cm. Poleg kraljevega komolca so uporabljali še (navaden) *komolec*, ki pa je meril 24 palcev.

Kote so merili v stopinjah, vendar pa so v gradbeništvu in zemljemerstvu kote izražali v *sekedih*.

Seked kota je enak dolžini kotu priležne katete v pravokotnem trikotniku, merjene v palcih, če je dolžina nepriležne katete en kraljevi komolec (glej sliko 2 spodaj).

Pri pisanju sestavka nismo imeli na razpolago enako natančnih mer za vse piramide. V literaturi in na internetu se mere piramid niso vedno ujemale. Razlike so bile tudi do 50 cm. Pri pretvarjanju mer piramid iz metrov v komolce smo upoštevali načelo, da so dolžine osnovnih robov piramid, izražene v komolcih, zaokrožene. To je smiselno, ker so navodila za gradnjo tako preprostejša. Mere piramid smo izbrali v mejah, ki smo jih našli v literaturi in ki so najbolj ustrezale gornjemu načelu.





SLIKA 2.
Središčni pravokotni trikotnik piramide in seked. Zgoraj: trikotnik v piramidi, spodaj: seked.

Dimenzije egipčanskih piramid

Pri proučevanju dimenzij egipčanskih piramid se bomo omejili na razmerje stranic trikotnika, ki ga tvorijo polovični osnovni rob piramide, njena višina in višina stranske ploskve. Ker bomo ta trikotnik še velikokrat omenili, mu bomo dali delovno ime *središčni pravokotni trikotnik piramide* (glej sliko 2 zgoraj).

Pričakujemo, da so graditelje iz estetskega vidika privlačile piramide, ki imajo dodatne geometrijske simetrije. Gradili so pokončne piramide. Večinoma je osnovna ploskev imela kvadratno obliko. Izjema je piramida 3 v tabeli 1.

Med piramidami, ki imajo dodatne simetrije, izstopajo piramide, katerih središčni pravokotni trikotnik ima stranice v razmerju 3 : 4 : 5 (pitagorejska trojica). V tabeli 1 so te piramide označene z znakom ♣, to so piramide 5, 8, 9 in od 11 do 15. Naklonski kot stranskih ploskev teh piramid je $53°7'48''$. Naslednji primer so piramide, katerih stranske ploskve so enakostranični trikotniki. Naklonski kot teh piramid je $54°44'10''$. Pri teh piramidah je razmerje med višino in robom osnovne ploskve iracionalno. Temu se najbolj približata piramidi 18 in 22, z nekoliko slabšo natančnostjo na $1°$ jima sledita še piramidi 10 in 16. V tabeli sta prvi dve označeni z znakom ▲, drugi dve s slabšim ujemanjem pa smo označili s △. V tabeli ni piramide, katere osni presek bi bil enakostranični trikotnik, to je piramide z naklonskim kotom $60°$. Najbolj pa burijo domišljijo piramide 1, 4 in 7, katerih razmerje stranic v središčnem pravokotnem trikotniku se približa zlatemu trikotniku. Pogojno štejemo mednje tudi piramido 3, pogojno zato, ker nima kvadratnega tlorisa, vendar se dva od naklonskih kotov stranskih ploskev približata kotu $51°50'35''$, ki je značilen za ostale tri. V tabeli so te piramide označene z znakom ♠.

V začetku so gradili stopničaste piramide, nato so na prehodu med III. in IV. dinastijo začeli graditi piramide z ravnimi stranskimi ploskvami. Snefrujevo lomljeno piramido štejemo za prehodno piramido med obema načinoma gradnje (glej sliko 3 zgoraj levo). Pri tej piramidi so postavili temelje za naklonski kot $60°$. Zelo verjetno se je izkazalo, da bi bila v →

SLIKA 3.
Piramide. Zgoraj levo: lomljena piramida v Dahshurju, zgoraj desno: rdeča piramida v Dahshurju, spodaj levo: Keopsova piramida v Gizi, spodaj desno: Kefrenova piramida v Gizi.

tem primeru piramida preveč strma, konstrukcija ne bi vzdržala, verjetno bi bil problem pritrditve tlaka za stranske ploskve. Takoj po začetku gradnje so kot popravili na $54°50'$. Ta kot je zelo blizu kota, ki ga ima piramida z enakostraničnimi stranskimi ploskvami. Nekje na sredini gradnje so naklonski kot še enkrat popravili, to pot na $43°22'$. Ta kot se še enkrat ponovi pri Rdeči piramidi, ki je bila ravno tako zgrajena v času vladanja faraona Snefruja (glej sliko 3 zgoraj desno).

V tabeli najdemo še eno piramido z naklonskim kotom blizu $45°$, to je piramida 21, njen naklonski kot je $42°$. Ta piramida je med vsemi piramidami v tabeli 1 najbolj položna. Največji naklonski kot ima piramida 17. Njen naklonski kot je $57°15'53''$ in spada med srednje visoke piramide. Pri višjih piramidah bi moral biti kot manjši, da bi konstrukcija vzdržala. Seveda pa kot ni smel biti premajhen, po eni strani zaradi videza, strma piramida deluje mogočno, po drugi strani pa zaradi količine materiala, ki bi ga potrebovali za gradnjo. Naklonski koti stranskih ploskev piramid so v mejah od $42°$ do $56°$, to so meje, ki jih zasledimo pri lomljeni piramidi. V nadaljevanju si bomo ogledali še en kriterij pri izbiri dimenzij, ki je čisto praktičen. Kako zapisati čim bolj preprosta navodila za gradnjo? Videli bomo, kako so egipčanske dolžinske enote in merjenje kotov vplivali na določanje dimenzij.

Naklonski koti v egipčanskih piramidah

Keopsova piramida ima izjemno natančno določene dimenzije. Stranice osnovne ploskve se razlikujejo le za nekaj centimetrov. Tudi koti med robovi osnovne ploskve se razlikujejo od pravih za največ $2'$. Seked naklonskega kota pri Keopsovi piramidi je enak

Piramida			dimenzije			$(b/2)/h$	napaka	**
št.	faraon	mesto	b	h	b'	s/q	ε	
1	Snefru	Maidum	147,0	93,5	280	22/28	0′48″	♠
2	Snefru*	Dahshur	220,0	105,0	240	21/20	0′46″	□
3	Mikerin⋆	Giza	103,0	65,6	195	22/28	1′23″	♠
3	Mikerin	Giza	105,0	65,6	200	4/5	0′38″	□
4	Keops	Giza	230,3	146,6	440	22/28	0′31″	♠
5	Kefren	Giza	215,2	143,5	410	21/28	0′23″	♣
6	Sahure	Abusir	78,7	47,2	150	20/24	0′42″	♥
7	Niuserre’	Abusir	81,0	51,6	180	22/28	1′45″	♠
8	Neferirkare	Abusir	105,0	70,0	200	21/28	0′00″	♣
9	Userkaf	Sakkara	73,5	49,0	140	21/28	0′00″	♣
10	Unas	Sakkara	57,7	43,3	110	16/24	0′45″	△
11	Izezi	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1′02″	♣
12	Teti	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1′02″	♣
13	Pepi I	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1′02″	♣
14	Merenre	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1′02″	♣
15	Pepi II	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1′02″	♣
16	Senwosret III	Dahshur	105,0	78,7	200	16/24	1′00″	△
17	Amenemhat III	Dahshur	105,0	81,6	200	18/28	1′16″	♥
18	Amenemhat I	El-Lisht	78,7	55,1	150	20/28	0′17″	▲
19	Senusret I	El-Lisht	105,0	61,2	200	24/28	1′23″	♥
20	Amenemhat III	Hawara	99,7	57,7	190	19/22	0′37″	□
21	Senusret II	El-Lahun	105,0	47,2	200	10/9	1′48″	□
22	Khendjer	Sakkara	52,5	36,7	100	20/28	0′00″	▲

** Pomen oznak je opisan v besedilu članka.
* Rdeča piramida (glej sliko 3 zgoraj desno).
b' Osnovni rob, izražen v kraljevih komolcih.
’ Pri piramidi 7 je osnovni rob izražen v navadnih komolcih.
⋆ Piramida 3 nima kvadratnega tlorisa.

TABELA 1.
Dimenzije egipčanskih piramid.

22 palcev, odstopanje je manj kot 1′. Tudi druga največja (Kefrenova) piramida v Gizi ima natančno določene dimenzije. Seked naklonskega kota pri tej piramidi je 21 palcev, odstopanje pa je ravno tako manj kot 1′.

V tabeli 1 so zapisane dimenzije 22 piramid. V sedmem stolpcu tabele 1 je zapisano razmerje med polovičnim robom in višino piramide v idealiziranem primeru. Če je imenovalec enak 28, je števec enak sekedu. V osmem stolpcu je zapisana razlika med kotom, ki ga dobimo z idealiziranim razmerjem in razmerjem, ki je izračunamo iz podatkov v četrtem in petem stolpcu. Iz tabele 1 preberemo, da ima 16 od 22 piramid celoštevilčni seked. Pri nadaljnjih treh piramidah dobimo dobro ujemanje, če v definiciji za seked kraljevi komolec, ki meri 28 palcev, nadomestimo z navadnim komolcem, ki meri 24 palcev. Vidimo, da so v tabeli le štiri piramide, katerih seked kota se v nobenem primeru ne izraža celoštevilčno. To so piramide 2, 3, 20 in 21. V tabeli smo jih označili z znakom □. Za piramido 3 vemo, da nima kvadratnega tlorisa. Piramide s celoštevilčnim sekedom, ki ne spadajo v nobeno od teh kategorij, smo označili z znakom ♥.

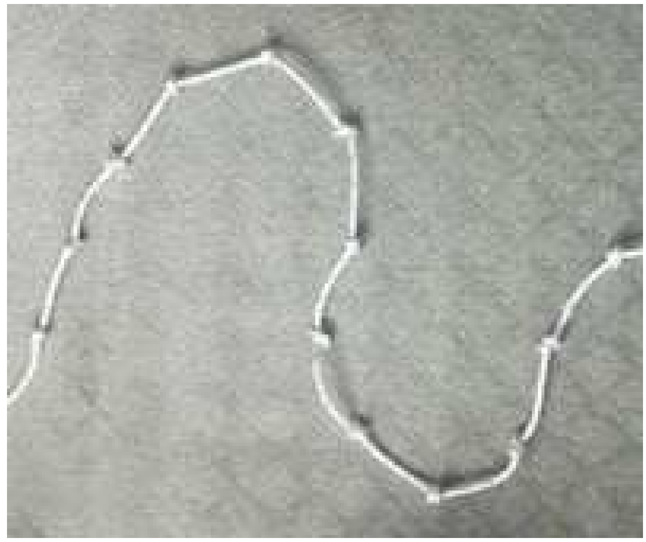
Zakaj meri seked naklonskega kota Keopsove piramide 22 palcev?

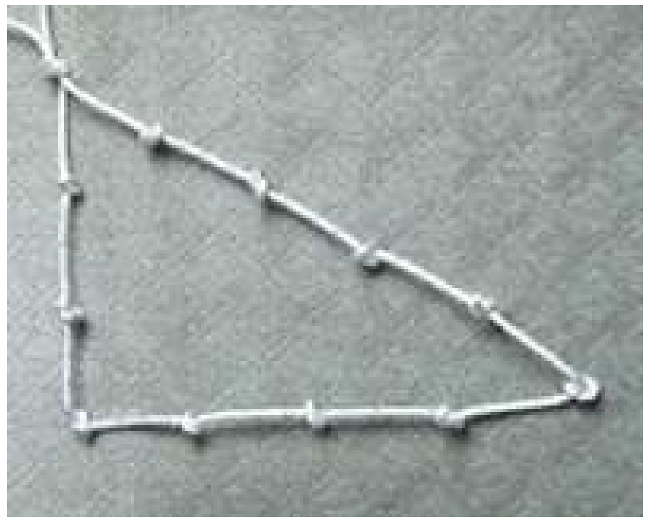
Pri sekedu 22 palcev se razmerje stranic v središčnem pravokotnem trikotniku približa razmerju stranic zlatega trikotnika. Ker zlati rez v zgodovini Egipta ni bil nikoli omenjen, ne smemo podleči skušnjavi, da bi trdili, da je bil zlati trikotnik namerno izbran. Seked 21 palcev bi bil razumljiv, ker je v mejah, v katerih se da varno graditi piramide; poleg tega je razmerje stranic središčnega pravokotnega trikotnika enako 3 : 4 : 5 (pitagorejska trojica). Pitagorejske trojice so uporabljali za določanje pravih kotov pri gradnji piramid (glej sliko 4).

Pitagorov izrek so v Egiptu poznali, vendar ga v tistem času niso imenovali tako, ker je moralo preteči več kot 1500 let, da je Pitagora ugledal luč sveta. Celoštevilčni sekedi naklonskih kotov piramid merijo 18, 20, 21, 22 in 24 palcev. V poštev pri gradnji velike piramide prideta seked 21 in 22 palcev, manjši so preveč tvegani, večji pa preveč potratni, kar se tiče gradbenega materiala. Vidimo, da izbira ni bila velika. Do začetka gradnje Keopsove piramide ni bilo uspešno dograjene večje piramide s sekedom, manjšim od 22 palcev. Lahko rečemo, da graditelji Keopsove piramide, vedoč, da gradijo največjo piramido doslej, niso hoteli tvegali in so izbrali seked 22 palcev. Šele po uspehu Keopsove piramide so pri gradnji Kefrenove tvegali seked 21 palcev.

Zaključek

Želeli smo poudariti, da so graditelji piramid izbirali dimenzije tako, da večinoma ustrezajo celoštevilčnemu sekedu, če upoštevamo, da je pri nekaterih potrebno kraljevi komolec nadomestiti z navadnim. Tudi pri piramidah, pri katerih seked ni celoštevilčen, se razmerje med višino in osnovnim robom izraža s kvocientom majhnih celih števil. Celoštevilčne podatke je preprosteje zapisati v navodila graditeljem. Izbor celoštevilčnega sekeda pri upoštevanju robnih pogojev, kot sta varčnost pri uporabi materiala in varnost, je zelo omejen. In lahko rečemo, da niso izbrali sekeda 22 palcev zaradi skritega zlatega trikotnika, ampak ker se nahaja v »zlati sredini« kompromisa med varnostjo in varčevanjem. V resnici je graditelje bolj privlačil seked 21 palcev, ker v sebi skriva pitagorejsko trojico, ki so jo brez dvoma poznali.





SLIKA 4.
Konstrukcija pravega kota. Zgoraj: $3 + 4 + 5 = 12$, spodaj: $3 : 4 : 5$.

× × ×

www.presek.si

Po sledeh neke naloge

Jens Carstensen in Alija Muminagić

→ Ko se v drugem letniku srednje šole učimo o kvadratni funkciji, običajno srečamo tudi naslednjo nalogo.

Naloga 1. Med vsemi pravokotniki z danim obsegom poiščite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Višino pravokotnika označimo z x, njegovo širino z y, obseg pa z o. Veljati mora

$$2x + 2y = o,$$

pri tem pa morata biti x in y takšna, da je ploščina

$$P(x, y) = xy$$

največja možna.

Iz $2x + 2y = o$ sledi $y = \frac{1}{2}(o - 2x)$ in ploščino lahko zapišemo kot $xy = \frac{x}{2}(o - 2x)$.

Nalogo smo prevedli na določanje maksimuma kvadratne funkcije

$$p(x) = -x^2 + \frac{o}{2}x.$$

Vodilni koeficient je negativen in funkcija ima maksimum pri

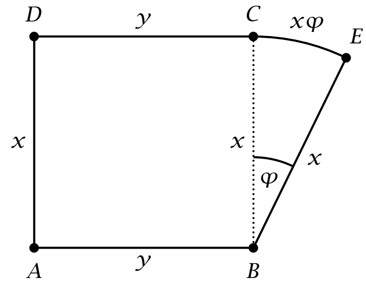
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{o}{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{o}{4}.$$

Tedaj je $y = \frac{1}{2}\left(o - 2 \cdot \frac{o}{4}\right) = \frac{o}{4}$. To pomeni, da ima največjo mogočo ploščino kvadrat s stranico $\frac{o}{4}$ in ploščino $\frac{o^2}{16}$.

Oglejmo si zdaj lik na sliki 1 in rešimo naslednjo nalogo.

Naloga 2. Naj bo dan kot φ. Od vseh likov z danim obsegom o, ki so narisani na sliki 1, poiščite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Ploščina lika na sliki 1 je enaka vsoti ploščine pravokotnika $ABCD$, ki ima višino x in širino y, in ploščine krožnega izseka CBE s polmerom x in središčnim kotom φ. Središčni kot φ lahko izrazimo



SLIKA 1.

v ločnih enotah kot razmerje dolžine loka in polmera krožnice $\varphi = \frac{l}{x}$, zato je $l = x\varphi$. Privzemimo, da je $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Ta privzetek je potreben, da se krožni izsek in pravokotnik ne prekrivata. Obseg lika je enak $o = 2x + 2y + x\varphi$ in od tu sledi

$$y = \frac{1}{2}(o - 2x - x\varphi). \tag{1}$$

Ploščina krožnega izseka CBE je $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi x^2 = \frac{1}{2}\varphi x^2$, ploščina lika na sliki 1 pa

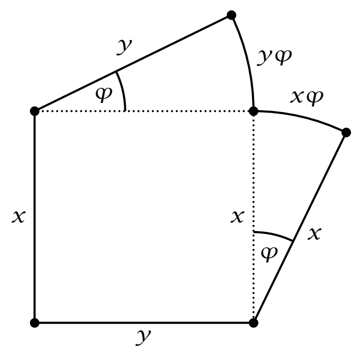
$$\begin{aligned} P &= xy + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &= x\frac{1}{2}(o - 2x - \varphi x) + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &= \frac{1}{2}x(o - 2x - \varphi x + \varphi x) \\ &= -x^2 + \frac{o}{2}x. \end{aligned}$$

Zelo zanimivo! Primerjajte z nalogo 1 in komentirajte.

Spremenimo nalogo 2 tako: Od vseh likov z danim obsegom, kot na sliki 2, določite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Uporabimo oznake s slike 2 in naj bo $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Obseg lika je

$$\begin{aligned} o &= 2x + 2y + x\varphi + y\varphi \\ &= 2(x + y) + \varphi(x + y) = (2 + \varphi)(x + y). \end{aligned}$$



SLIKA 2.

Od tu izrazimo

- $x + y = \dfrac{o}{2+\varphi}$ (2)
- $y = \dfrac{o}{2+\varphi} - x$ (3)

Seveda morata biti števili x in y nenegativni, zato mora veljati še

- $0 \le x, y \le \dfrac{o}{2+\varphi}$.

Ploščina lika je

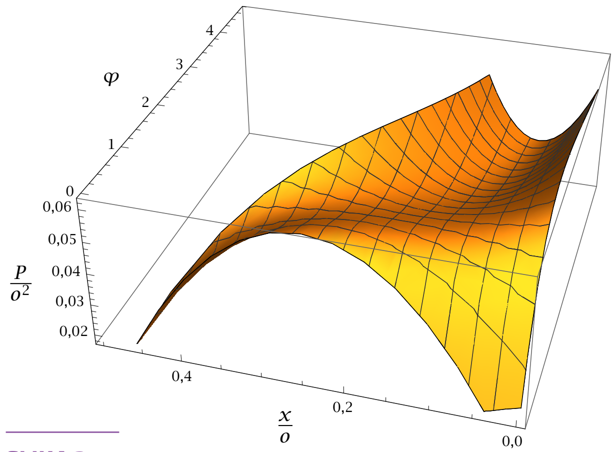
- $$\begin{aligned} P &= xy + \frac{1}{2}\varphi\left(x^2+y^2\right) \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi\left[(x+y)^2 - 2xy\right] \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi\,(x+y)^2 - \varphi xy \\ &= xy(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\,(x+y)^2 \\ &\overset{(2),(3)}{=\!=} x\left(\frac{o}{2+\varphi} - x\right)(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\frac{o^2}{(2+\varphi)^2} \\ &= (\varphi-1)x^2 + \frac{o(1-\varphi)}{\varphi+2}x + \frac{\varphi o^2}{2\,(\varphi+2)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Graf ploščine v odvisnosti od kota φ in x je prikazan na sliki 3.

Odvisno od kota φ, obravnavamo primere:

1. Če je $0 < \varphi < 1$, je vodilni koeficient parabole negativen in funkcija ima maksimum pri

   - $$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = \frac{-\dfrac{o(1-\varphi)}{\varphi+2}}{2(\varphi-1)} \\ &= \frac{o(\varphi-1)}{2(\varphi-1)(\varphi+2)} = \frac{o}{2(\varphi+2)}. \end{aligned} \tag{5}$$



SLIKA 3.

Takrat je

- $$\begin{aligned} y &\overset{(3),(5)}{=\!=} \frac{o}{2+\varphi} - \frac{o}{2(\varphi+2)} \\ &= \frac{2o-o}{2(\varphi+2)} = \frac{o}{2(\varphi+2)} \overset{(5)}{=\!=} x. \end{aligned} \tag{6}$$

   Ponovno je pravokotnik kvadrat.

2. Če je $\varphi = 1$, potem je

   - $P = \dfrac{\varphi o^2}{2(\varphi+2)^2} = \dfrac{1\cdot o^2}{2(1+2)^2} = \dfrac{o^2}{18}$

   in ploščina ni odvisna od razmerja stranic pravokotnika.

3. Če pa je $\varphi > 1$, je vodilni koeficient parabole pozitiven in v temenu dobimo minimum ploščine. Zato je maksimum dosežen nekje na robu območja, torej ali pri $x = 0$ ali pri $x = \frac{o}{2+\varphi}$. V obeh primerih lik na sliki 2 degenerira v krožni izsek s ploščino

   - $P = \dfrac{\varphi o^2}{2(\varphi+2)^2}$.

Literatura

[1] N. Lord, *Two surprising maximization problems*, The mathematical gazette, november 2013.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *En optimeringsopgave, 3*, sprejeto v objavo v LMFK-Bladet.

× × ×

Odboj svetlobe in zrcala

↓↓↓
Andrej Likar

→ **Ko iščemo slike, ki jih tvorijo zrcala, ne moremo mimo večkratnih odbojev. Skiciranje, ki smo se ga naučili pri geometrijski optiki, postane precej zapleteno in nepregledno. Zato je smiselno skiciranje prepustiti računalniku, ki sledi poti posameznim ozkim curkom svetlobe. Seveda pa potrebujemo ustrezen program, ki to omogoča. V prispevku bomo pokazali, kako lahko sorazmerno preprosto tak program napišemo in si s tem močno razširimo razumevanje zrcalnih sestavov, z majhno prilagoditvijo pa tudi lečjem.**

Pri sledenju svetlobe skozi prostor si pomagamo z ozkimi curki svetlobe, ki izhajajo iz svetil. Bistvena lastnost curkov je njihova smer, zato vpeljemo »žarke«, to je črte, ki kažejo smer širjenja svetlobe. Pojem žarkov je bil znan že v Starem Egiptu, kjer so Sonce slikali, kot ga slikajo danes otroci, torej z žarki, ki se radialno širijo od Sonca.

Na zglajeni površini se svetlobni curek odbije tako, da je vpadni kot α, merjen med curkom in pravokotnico p na površino, enak odbojnemu kotu α', ki ga merimo med smerjo odbitega curka in to pravokotnico, pri čemer pravokotnica ter vpadni in odbiti curek ležijo v isti ravnini. Smer pravokotnice p curek otipa sam; ko pa curke v skicah nadomestimo z žarki, moramo smer pravokotnice navesti. Pri odboju na zakrivljenih zrcalih je smer pravokotnice odvisna od točke T, ki jo žarek zadene. Pravokotnica sovpada s pravokotnico tangentne ravnine v tej točki. Pri sledenju žarkov moramo torej navesti vpadni žarek, točko T in pripadajočo smer pravokotnice p (glej sliko 1).

Sedaj je določitev smeri odbitega žarka prav preprosta. Če pripišemo smeri vpadnega žarka enotski vektor $\vec{k}_v$, smeri odbitega pa enotski vektor $\vec{k}_o$ in smeri pravokotnice enotski vektor $\vec{p}$ (glej sliko 2), sledi s kvadriranjem zveze

- $\vec{k}_v + x\vec{p} = \vec{k}_o$

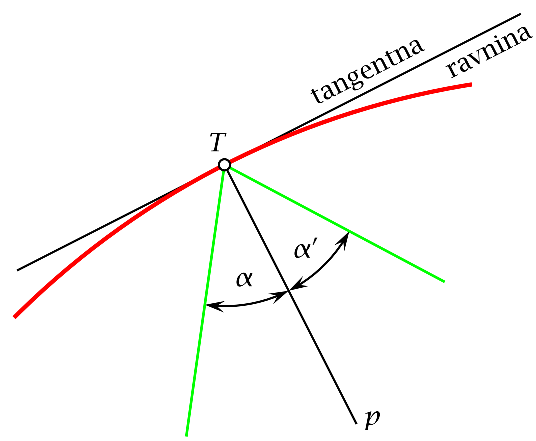
najprej za velikost razlike vekorjev $\vec{k}_v$ in $\vec{k}_o$:

- $x = -2\vec{k}_v \cdot \vec{p}\,.$

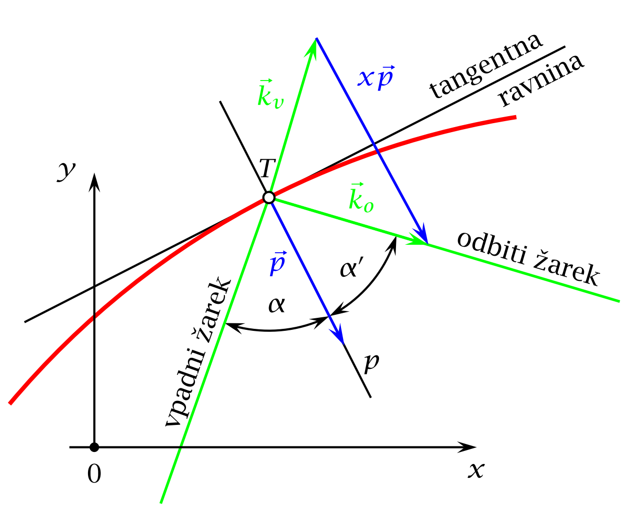
Za vektor odbitega žarka potem dobimo

- $\vec{k}_o = \vec{k}_v - (2\vec{k}_v \cdot \vec{p})\,\vec{p}\,.$

Na desni strani te enačbe je vse znano. Žarku potem sledimo takole: žarek od svetlobnega vira korakoma razširjamo in po vsakem koraku preverimo, če je žarek trčil ob ploskev, kjer naj se odbije. Ko ploskev doseže, obrnemo smer žarka skladno z odbojnim zakonom, saj imamo v točki trka vpisan enotski vektor



SLIKA 1.
Odboj žarka na zakrivljenem zrcalu v točki T. Z zeleno barvo sta označena vpadni in odbiti žarek, ki tvorita s pravokotnico p na tangentno ravnino enaka kota, torej $\alpha = \alpha'$.



SLIKA 2.
Vpadni in odbojni žarek opremimo z enotskima vektorjema $\vec{k}_v$ in $\vec{k}_o$, prav tako pravokotnico p z enotskim vektorjem $\vec{p}$. Pot do enačbe, ki povezuje vektorja $\vec{k}_v$ in $\vec{k}_o$, je tako preprosta.

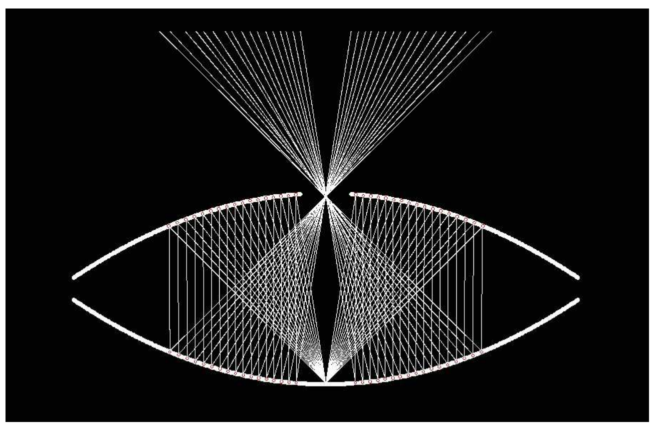
SLIKA 3.
Realno sliko predmeta, ki leži na temenu spodnjega zrcala, vidimo, kot da predmet plava v prostoru. Jasno vidimo sliko kovanca pa tudi kovanec sam na spodnjem delu odprtine.

$\vec{p}$. V večini primerov zadošča sledenje žarkov v ravnini tako, da so razmere pregledne.

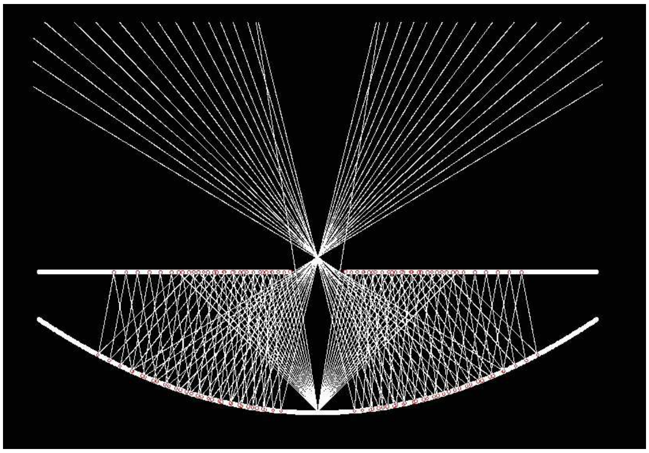
Odločiti se moramo še o gostoti mrežnih točk, kjer žarkom sledimo. Pri nas je to mreža s 1000×1000 točkami, kamor postavljamo odbojne krivulje.

Sedaj je čas, da predstavimo nekaj primerov.

Najprej bomo sledili žarkom v znani fizikalni igrači imenovani 3D Mirage, ki na res učinkovit način predstavi realno sliko predmeta. Sliko vidimo hkrati z obema očesoma, vsako oko vidi nekoliko drugačno sliko, celoten vtis pa je, kot da gledamo predmet, ki plava v prostoru (glej sliko 3). Realno sliko tvorita dve parabolični konkavni zrcali, ki sta postavljeni eno proti drugemu, optična os zrcal pa je navpična. Gorišče enega zrcala je v temenu nasprotnega zrcala. Točkasto svetilo, ki ga postavimo v teme spodnjega zrcala, se preslika v gorišče spodnjega zrcala, torej v teme zgornjega. V zgornjem zrcalu je središčna luknja, skozi katero opazujemo realno sliko svetila. Tak sestav zrcal je bil odkrit povsem po naključju pred ne več kot štiridesetimi leti, ko je tehnik fizikalnega oddelka kalifornijske univerze čistil parabolična zrcala protiletalskih reflektorjev iz 2. svetovne vojne. Opazil je prepričljivo realno sliko prašnih delcev na enem od zrcal, ki so bila skladiščena paroma eno proti drugemu. Luknja v zrcalih je bila že izvrtana za obločno luč, s katero so osvetljevali nočno nebo in iskali sovražna letala. Na sliki 4 vidimo žarke, ki se od točkastega svetila na dnu dvakrat odbijejo, preden se zberejo v točki na vrhu, kjer tvorijo realno sliko. Lahko si predstavljamo, da

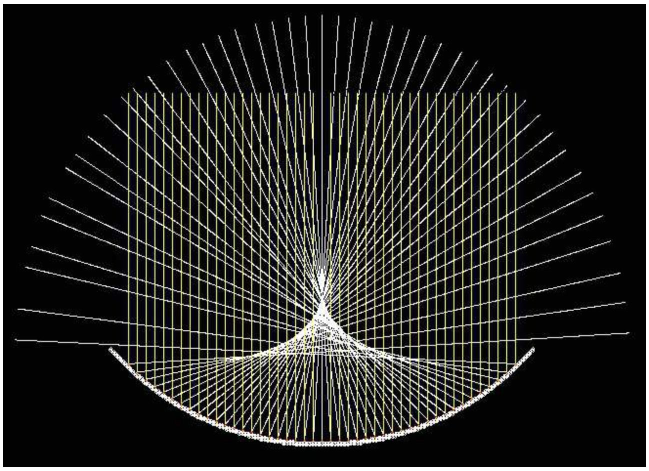


SLIKA 4.
Žarki, ki izhajajo iz točke na temenu spodnjega paraboličnega zrcala v igrači Mirage 3D, se zberejo na zgornji strani. Predmet, ki leži na temenu spodnjega zrcala, se preslika na zgornji strani, kjer je v zgornje zrcalo izvrtana luknja.

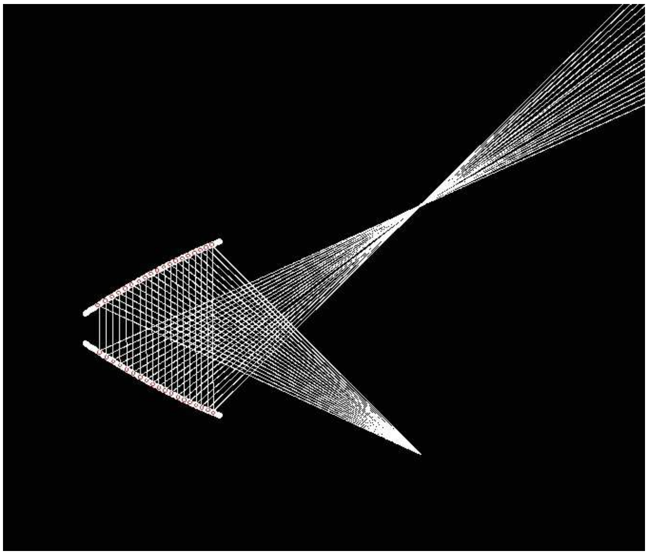


SLIKA 5.
Modificirana igrača Mirage 3D, kjer namesto zgornjega paraboličnega zrcala postavimo ravno zrcalo z luknjo.

lahko sliko udobno opazujemo hkrati z obema očesoma, kar pričara trodimenzionalnost. Seveda bomo videli tudi realno sliko razsežnega predmeta, ki ga postavimo blizu dna sestava. Realna slika je tako prepričljiva, da so gledalci osupli, ko slike ne morejo prijeti.



SLIKA 6.
Odbiti žarki iz oddaljenega svetila tvorijo na valjastem zrcalu kavstiko. Vzporedni curek vpadne svetlobe smo ponazorili z rumenimi žarki.



SLIKA 7.
»Školjčna« postavitev dveh sferičnih zrcal, ki dajo sliko podobno kot igrača Mirage 3D.

Igračo lahko tudi poenostavimo, če imamo na voljo le eno parabolično zrcalo. Namesto zgornjega zrcala lahko uporabimo ravno zrcalo z luknjo (glej sliko 5). Ker je igrača patentirana, bi se morda lahko patentni zaščiti na ta način izognili.

Naslednji zgled predstavi kavstiko, to je krivuljo, ki jo valjasto zrcalo naslika pri odboju žarkov, ki izhajajo iz oddaljenega svetila. Kavstike ni težko videti, le pozorni moramo biti nanjo. Najpogosteje jo vidimo na dnu skodelic, na katero posije Sonce. Na sliki 6 smo vzporedne žarke s Sonca obarvali rumeno.

Za konec si poglejmo še »školjčno« postavitev dveh zrcal, ki tvorita realno sliko predmeta drugače, kot smo vajeni pri enem konkavnem zrcalu (glej sliko 7). Poskus lahko izvedemo s kozmetičnimi zrcali, ki jih prodajajo v tehničnih trgovinah s kopalniško opremo.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ
DRUŽINA MILANSKIH VOJVOD V 15. STOL.
ŽENSKA OBLIKA OD PEK
NAŠA MOTO-KROSISTA (MATEVŽ IN JERNEJ)
NEVTRAL ZA MNOŽENJE IN DELJENJE
MODRO-CVETNA PREDIV-NICA
BOŠTJAN NACHBAR
LASTNOST EDINO VELJAV-NEGA PREDPISA
DELITEV TOČKE PRI ŠAHU
AMERIŠKI REŽISER (STEVEN)
FRANCOSKI FILMSKI KOMIK
NASIČEN OGLJIKO-VODIK V BENCINU
NAZIV
ELEMENT, KI VSAKEGA PRESLIKA VASE
GRŠKA ČRKA
KRAŠKA KOTANJA
TRŽAŠKO LETALIŠČE
STRMO PREPADNO GOROVJE NA SEVERU TOSKANE
RIMSKI PESNIK
PLINSKA SIGNALNA ŽARNICA
LATINSKI VEZNIK

dMFA
NORDIJSKI LJUDSKI PESNIKI IN PEVCI
BIKO-BOREC, TOREADOR
URŠKA HROVAT
ŠPORT Z LOPARJEM IN ŽOGICO
ALPSKA DOLINA OB SOČI
GERMAN. ORODJE ZA METANJE IN SUVANJE
LETALEC
DOBRO NADNA-RAVNO BITJE
NEMŠKO DEŽELNO SREDIŠČE
LETNI OBROK ODPLAČILA DOLGA IN OBRESTI
LASTNOST VALOVANJ
NAŠ ZOOLOG, KI JE DELOVAL V ZDA (ROMAN)
KARTA PRI TAROKU
ZOBNA GNILOBA
ŠVEDSKA LESTEV
IZVRŠNO IZVAJA VLADA
100 m^2
NEZADO-VOLJNEŽ
STARO NASELJE PRI ZADRU
CEVAST PODZEMNI PROSTOR
NJO
POKOJNI NEMŠKI DRŽAVNIK (JOHANNES)
RUSKI REVOLU-CIONAR
JUPITROVA LUNA
REKA V MESTU WEIMAR
POČASEN ŠPANSKI PLES
RIBJA KOŠČICA
ODVAJALO
RUSKO MESTO NA URALU
OKVIRNI NAČRT
VELIKA VEŽA V JAVNIH ZGRADBAH
DELEC Z VIŠKOM ALI MAN-ELEKT-RONOV
ALUMINIJ
TEMELJNA MATEMA-TIČNA RESNICA
BARIERE
DRŽAVA V SREDNJI AFRIKI
REKA V SZ. BOSNI
AKVA-RIJSKA RIBICA

LAHEK NASIČEN OGLJIKO-VODIK
ZAMISEL
ODPRTJE ZASLONKE
VZGOJNO-VARSTVENI ZAVOD
AMERIŠKA IGRALKA UKR. RODU (MILA)
NAŠ PISATELJ (FRAN)
ŠTEFAN VEVAR
PRVI SAVDSKI KRALJ
GIBALNA DEJAVNOST
MALIGNA NOVO-TVORBA
TACA VELIKE ZVERI
ŽEN. PEV-SKI GLAS
IZVAJALEC INTER-VENCIJE
AVSTRIJ. SMUČARKA FENNINGER
GERMANIJ
Z NJO SE PRED SPANJEM POKRI-JEMO

OPICA ZAMORSKA MAČKA
SOLI OCETNE KISLINE

NAŠE EKSPERIMENTALNO GLEDALIŠČE
GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
GOZDNA ZDRAVILNA RASTLINA, GOZDNI KOREN
SILICIJEV KARBID, ZELO TRDO BRUSILNO SREDSTVO
PRESTOLNICA OB TIBERI
REKA NA PELOPONEZU, EVROTAS
MOČVIRSKA TRAVA
USTALJENO ZAPOREDJE ČRK PISAVE
BRITANSKA PEVKA NEM. RODU (TANITA)
PROŽNA PROZORNA SNOV, NADOMESTEK ZA STEKLO
GLAVNO MESTO KENIJE
GRMUŠELJ
ELZA BUDAU
NEKDANJA RUSKA VESOLJSKA POSTAJA
KILOMETER
KALCIJ
NEMŠKI MATEMATIK (FERDINAND)
NAŠ IGRALEC (EVGEN)
LEA OGRIN
PRODUKT HITROSTI IN ČASA
DUHOVŠČINA
BAKREN RIMSKI NOVEC
OSREDNJA TIROLSKA REKA
PRORAČUN
ŠPORTNICA (ATLETINJA ALI ZIMSKA S SMUČMI)
TONE LAPAJNE
ORGANIZ. ZA EVROP. GOSPODAR. SODELOVANJE
TEKOČA MASA, KI JO IZBRUHA VULKAN
KNJIŽNI FORMAT, OSMERKA
LASTNOST JEDI
VOZILO ZA DRSENJE PO SENGU
JEZERO V TIBETU
SOL KROMOVE KISLINE
NAŠ IGRALEC (BORIS) MENIH
KULTURNO DRUŠTVO
IVAN PREGELJ
DRUŽINA LIHOPRSTIH KOPITARJEV
RIBIŠKI KAVELJČEK
JEDRSKA ELEKTRARNA
ENAKI ČRKI
IZROČITEV DOLOČENE VSOTE DENARJA
UDAREC PRI BOKSU
ZIDARSKO ORODJE, OMETAČA
POBOJ
RDEČECVETEN POLJSKI PLEVEL
SORTA BELEGA KROMPIRJA
ŽELJKO KOZINC
PREDSTOJNIŠTVO FAKULTETE
EVROPSKA UMETNOST. SMER
AFRIŠKI VELETOK
NEMŠKI PISATELJ (THOMAS)
VAŠKI ODBOR
NEKD. AM. FILM. IDOL (JAMES)
SORODNICA ČEŠNJE
MESTO V SZ. IRANU
OTO VRHOVNIK
NAŠA CELINA
RAVNOVESNO STANJE TELESA V TEKOČINI
MUSTROV RISANI LIK
ITAL. IME ZA IZOLO
ATLANTSKA LUKA V JZ. ŠPANIJI
MESARSKI OBRAT
OČKA V MEŠČAN. OKOLJU
BRISALEC
TELESNA TEKOČINA
IGRALKA ULLMANN
VELIK, NEVAREN PLAZILEC
AMERIŠKI IGRALEC TORN
PESNICA NOVY
NASLOVNA JUNAKINJA ROMANA IVA ZORMANA
JUŽNORUSKO MESTO OB ISTOIMEN. MORJU

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. maja 2015**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

×××

Večkratne sence

Nada Razpet

Ob lepem sončnem vremenu lahko opazujemo sence predmetov. Navadno vsak predmet meče le eno senco. Nas pa tokrat zanima, kdaj lahko na vodoravni podlagi poleg že *znane* sence opazimo še dodatne sence in od česa je odvisna njihova dolžina ter lega.

Opazovali bomo enojne, dvojne in trojne sence predmeta.

Potrebujemo:

- premično podlago (karton, desko, mizo),
- risalni list,
- primeren prostor ob hiši, kjer sta na navpični steni okno in steklena vrata (balkon ali terasa),
- karton za zaslon,
- dva manjša predmeta (tulca, kavni skodelici),
- lepo sončno vreme.

Za opazovanje izberite prostor na balkonu ali terasi, blizu okna ali steklenih vrat. Na premično vodoravno podlago položite risalni list in nanj predmet. Na listu naj bo vidna senca predmeta, imenovali jo bomo primarna senca. Premikajte podlago tako, da se bo na listu pojavila še ena senca. Včasih je potrebno podlago dvigniti in se oknu približati ali od njega oddaljiti. Da bo druga senca (recimo ji sekundarna senca) vidnejša, zastrite del sončne svetlobe. Opazujte, kako se legi in dolžini senc spreminjata v odvisnosti od časa pri nespremenjeni legi predmeta in steklenih površin. Nato na risalni list postavite še en predmet in opazujte, kakšni sta medsebojni legi primarnih oziroma sekundarnih senc. Poiščite še tretjo senco predmeta in ponovite opazovanja. Pri iskanju tretje sence si pomagajte s premikanjem lege okenskega krila ali steklenih vrat.

Odgovorite še na naslednja vprašanja:

- Kako ugotovite, ali je v danem trenutku možno videti sekundarni senci?
- Zakaj lahko dvojne (trojne sence) na vzhodni (zahodni) strani hiše opazujemo le ob določenih urah?
- Kako veste, katera senca je posledica absorpcije direktne (sončne) svetlobe in katera absorpcije od okna ali vrat odbite svetlobe?
- Ali se pri nespremenjeni legi predmeta čez dan spreminjajo lege in dolžine vseh senc?
- Kako na sekundarni senci vplivata spremenjeni legi steklenih površin?
- Ali lahko na južni strani hiše opazujemo dvojne in trojne sence ves dan?
- Naredite simulacijo nastanka senc z enim od prosto dostopnih računalniških programov (npr. z GeoGebro 5).

Literatura

[1] M. Čepič, *Svetlobni zajček?*, Presek, **34** (2006/2007), 2, str. 19.

[2] M. Čepič, *Svetlobni zajček in dvojna senca*, Presek, **34** (2006/2007), 3, 20–22.

× × ×

www.presek.si

www.obzornik.si

Kratko poročilo o 34. tekmovanju iz znanja fizike za Stefanova priznanja

Barbara Rovšek

Tudi v šolskem letu 2013/2014 se je tekmovanja iz znanja fizike udeležila približno četrtina generacij učencev 8. in 9. razreda, vseh skupaj je bilo 8687. Vsak tretji udeleženec je osvojil bronasto Stefanovo priznanje, vsak peti pa se je prebil na področno tekmovanje, ki je potekalo v 17 regijah po Sloveniji. Od 1737 udeležencev področnega tekmovanja jih je več kot polovica osvojila srebrno Stefanovo priznanje, vsak šesti udeleženec pa se je uvrstil na državno tekmovanje.

Na državnem tekmovanju, ki je potekalo 5. aprila 2014 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter Osnovni šoli Šturje v Ajdovščini, je tekmovalo 299 učencev, od katerih jih je 109 osvojilo zlata priznanja.

Državno tekmovanje se je odvijalo nekoliko drugače kot v preteklih letih. Celo preizkušnjo smo skrajšali s 180 minut na 160 minut, pa še nekaj časa za menjave skupin smo prihranili. Poleg tega je bila eksperimentalna naloga, ki jo je reševal vsak tekmovalec 80 minut, ena sama, pa zato malce obsežnejša (in proti koncu tudi bolj zapletena). Osmošolci so pri eksperimentalni nalogi raziskovali prehod svetlobe skozi planparalelno ploščico, devetošolci pa so v vodo potapljali dva valja in se ukvarjali z vzgonom. Kljub težkim nalogam smo, kot vedno, dobili zmagovalce. Čestitamo vsem tekmovalcem, nagrajencem ter njihovim mentorjem in mentoricam pa še posebej!

V 8. razredu je prejelo nagrade osem učencev:

1. nagrada

- Klemen Bogataj, OŠ Poljane, Ljubljana, mentor Edi Bajt;
- Jon Judež, OŠ Šmihel, Novo mesto, mentorica Milena Košak.

2. nagrada

- Marko Čmrlec, OŠ Dobrepolje, mentorica Renata Pelc;
- Juš Mirtič, OŠ Trzin, mentorica Jana Klopčič.

SLIKA 1.
Med državnim tekmovanjem v Ljubljani.

3. nagrada

- Žiga Trček, OŠ dr. Ivana Korošca Borovnica, mentorica Simona Trček;
- Miha Radež, OŠ Otočec, mentorica Andreja Grom;
- Gašper Lotrič, OŠ Predoslje Kranj, mentorica Erna Fajfar;
- Maša Krašovec, OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana, mentorica Polonca Štefanič.

V 9. razredu je prejelo nagrade osem učencev:

1. nagrada

- David Opalič, OŠ Šmarje pri Jelšah, mentorica Martina Petauer.

2. nagrada

- Luka Jevšenak, OŠ Mihe Pintarja Toleda, Velenje, mentor Dejan Zupanc;
- Gašper Jalen, OŠ Antona Tomaža Linharta, Radovljica, mentor Jože Stare;
- Martin Rihtaršič, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka, mentorica Majda Jeraj.

3. nagrada

- Luka Govedič, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica, mentor Valentin Strašek;
- Natan Dominko Kobilica, OŠ Trnovo, Ljubljana, mentorica Đulijana Juričić;
- Gregor Kikelj, OŠ Drska, mentorica Katja Pečaver;
- Filip Rutar, OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana, mentor Bojan Mlakar.

Razpis tekmovanja za novo šolsko leto, v katerem so zapisane vsebine tekmovanja, pravilnik tekmovanja in bilten 34. državnega tekmovanja, kjer najdete tudi naloge s tekmovanja z obširnimi rešitvami, so objavljeni na spletnih straneh DMFA Slovenije, `http://www.dmfa.si/fiz_OS/`.

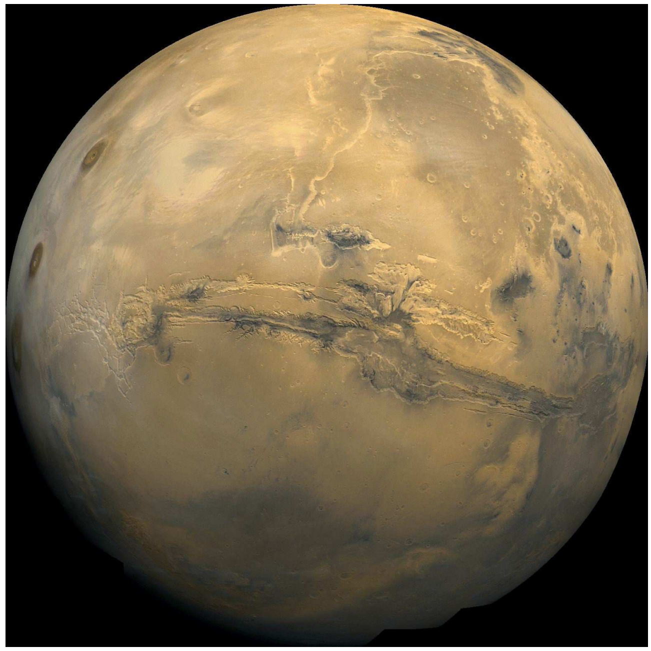
SLIKA 2.
Nagrajenci 34. tekmovanja osnovnošolcev za Stefanova priznanja na prireditvi Bistroumni 2014 v Cankarjevem domu v Ljubljani (foto: Jan Šuntajs).

×××

Odprave na Mars

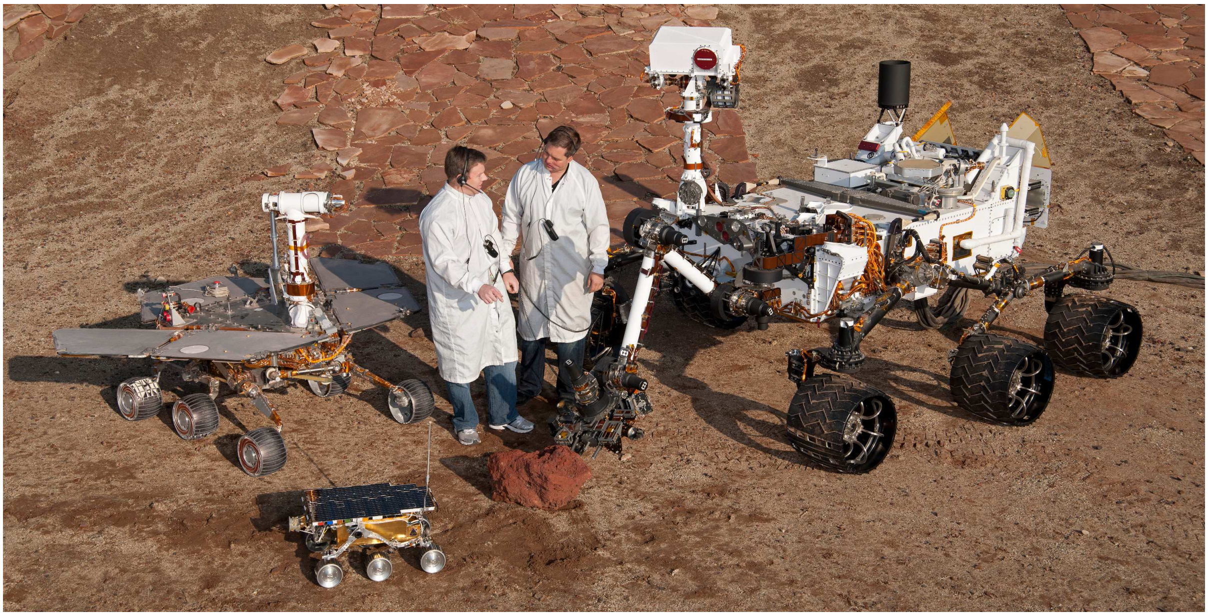
Tadeja Veršič

→ Rdeči planet trenutno gosti že četrto ameriško robotizirano vozilo Curiosity. Pred prihodom prvih sond in satelitov so ljudje razmišljali in verjeli v obstoj življenja ter vode na našem najbližjem sosedu – Marsu. Od obiska prvih sond se je to mnenje močno spremenilo. Na Mars smo poslali več satelitov in sond, v tem prispevku pa so omenjeni samo najpomembnejši med njimi. Planet, ki v Osončju še najbolj spominja na našo domačo Zemljo, je leta 1965 prva, za zelo kratek čas, pobližje pogledala vesoljska sonda Mariner 4. Pomembno izhodišče za nadaljnje misije na Mars, predvsem za pristanek robotiziranih sond, je postavil satelit Mariner 9. Izstreljen šest let po svojem najuspešnejšem predhodniku je v manj kot letu dni posnel skoraj celotno površje planeta. Potrdil je, da planet nima tekoče vode in kompleksnih oblik življenja. Odkritje ogromnega kanjona Valles Marineris, ki se razteza čez dobršni del planeta in spominja na veliko brazgotino, je razkrilo, da je bil Mars nekoč geološko precej aktivnejši. Danes njegovo pokrajino spreminjajo samo še številni meteoriti in vetrna erozija.



SLIKA 1.
Mars z velikim kanjonom Valles Marineris (Vir: NASA)

Mariner 9 je tlakoval pot za odhod robotiziranih sond in satelitov, in sicer Vikinga 1 in Vikinga 2 v 70-ih letih prejšnjega stoletja. Ko sta se sondi utirili v orbiti okoli Marsa, sta na njegovo površje spustili nepremični sondi. Le-ti sta opravili podrobne biokemične analize površja planeta ter nam vrsto kakovostnih orbitalnih posnetkov posredovali. Na njih je bilo očitno, da kompleksnega življenja ni, kar ne izključuje možnosti obstoja mikroskopskega življenja. Znanstvenike je zanimalo, ali je po površju Marsa kdaj tekla voda. Zaradi svoje pomembnosti za življenje na Zemlji je namreč obstoj tekoče vode dobra izhodiščna točka za nadaljnje raziskave. Posnetki iz orbite so nakazovali veliko število geoloških struktur, podobnim suhim rečnim strugam. S prekinitvijo radijske zveze s sondo Viking 1 na površju planeta leta 1982 se je ta program dokončno zaključil brez dokazov o obstoju življenja na Marsu. Kljub temu sta satelita Viking 1 in Viking 2 v orbiti in sondi na površju podkrepili predstavo o nekoč tekoči vodi na Marsu.

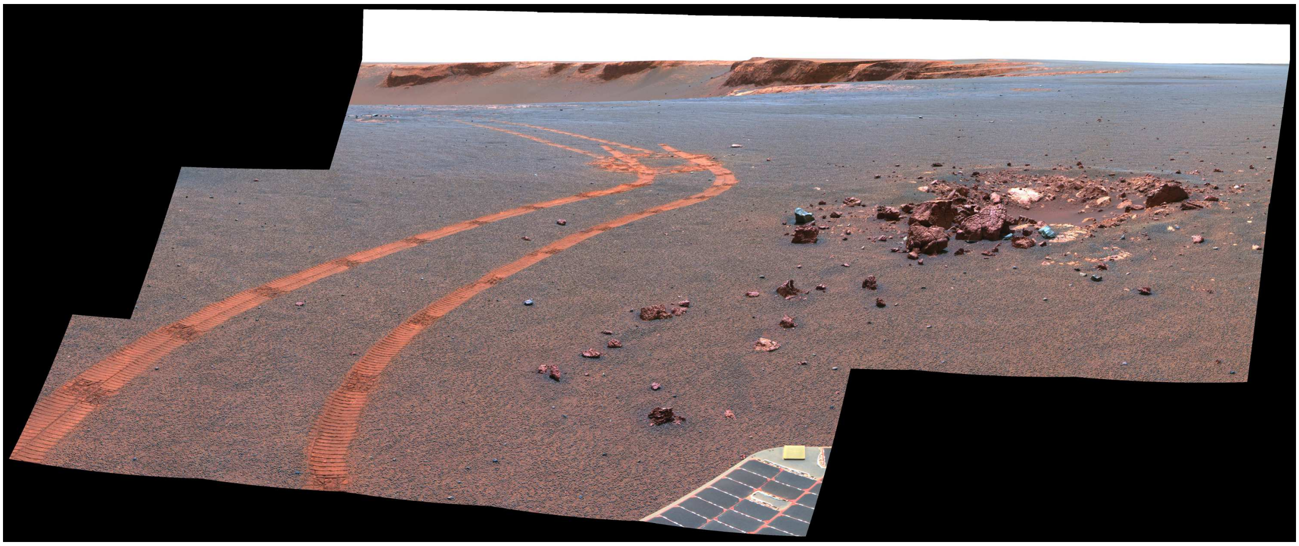


SLIKA 2.
Modeli roverjev Sojurner, Spirit in Opportunity ter Curiosity prikazujejo razvoj teh robotiziranih mobilnih fotografov, geologov in popotnikov, ki so jih pri NASI poslali na Mars. (Vir: NASA)

Pristajalna dela sond Viking se nista premikala po površju Marsa. Prva mobilna sonda se je po Marsu zapeljala šele leta 1997. Sojurner, ki ga je do Marsa pripeljalo pristajalno plovilo Pathfinder, je raziskoval kamnine v neposredni bližini kraja pristanka. Predvsem pa je bil namen misije preizkušanje vzdržljivosti opreme za nadaljnje mobilne raziskovalne sonde na Marsu.

V nadaljnjih podvigih na Mars sta izjemen uspeh poželi Nasini dvojčici Spirit (Duh) in Opportunity (Priložnost). Vozili sta pristali na nasprotnih straneh Marsove oble v začetku leta 2004 in daleč presegli predviden čas misije. Načrtovan čas delovanja posameznega roverja je bil 90 solov – marsovskih dni, kar je približno 92 zemeljskih. Medtem ko se Opportunity po več kot 3800 solih in 39 prevoženih kilometrih še vedno vztrajno premika, se je Spirit pred petimi leti na žalost ujel v mehke sedimente in se zagozdil. Po 2208 solih delovanja in osem prevoženih kilometrih se sonda Spirit ni več oglasila na klice in ukaze svojih skrbnikov na Zemlji. Podobno kot veliko pomembnih odkritij je tudi sonda Spirit v času svojega delovanja po naključju razkrila plasti silicijevega dioksida v obliki opala tik pod površjem, in sicer medtem ko so jo operaterji na Zemlji reševali iz mehke prsti. Zakaj je to tako veliko odkritje? Opal je poseben mineral iz silicijevega dioksida z visoko vsebnostjo vode in lahko nastane samo ob njeni prisotnosti, kar dokazuje, da je po Marsu nekoč tekla voda. Sestrski robotek Opportunity je med tem na drugi strani Marsa na planoti Meridiani Planum naletel na sedimentno kamnino hematit, ki prav tako na Zemlji nastaja večinoma v tekoči vodi. Znanstveniki predpostavljajo, da je to planoto nekoč pokrivalo kot Baltik veliko morje. Količine nekaterih ključnih mineralov v vzorcih kamnin, ki jih je analizirala sonda Spirit, so ostanek toplejšega in bolj vlažnega obdobja v zgodovini rdečega planeta. Sondi pa sta odkrili še več; na robu kraterja Endurance je Opportunity naletela na plast gline, ki nastaja v za življenje prijaznejši, pH nevtralni vodi.

Glavni namen preteklih misij je bilo iskanje znakov tekoče vode na površju Marsa, ki je ključna za življenje na Zemlji. Uspehi misij, kot sta Opportunity in Spirit, so pripomogli, da so pri načrtovanju roverja Curiosity, ki je na Mars poletel 26. novembra 2011, dodali instrumente za iskanje primitivnih oblik življenja. Ta novi robotek tako preverja mo-



SLIKA 3.
Sled, ki jo je za seboj na Marsu pustil Opportunity. (Vir: NASA)

žnost človeških misij na tem planetu. Pri izbiri geološko najzanimivejšega območja za pristanek najnovejšega prebivalca Marsa je ključno vlogo, skupaj s predhodniki, odigral tudi Marsov satelit – Mars Reconnaissance Orbiter, ki se je okrog planeta utiril marca 2006 in nam od takrat posredoval neprecenljive posnetke. Z nežnim pristankom na Marsu 6. avgusta 2012 se je zaključil prvi del potovanja roverja Curiosity. Za razliko od dvojčic Spirit in Opportunity Curiosity ne uporablja sončnih celic za proizvodnjo električne energije. Ima majhno jedrsko elektrarno, ki polni baterije in zagotavlja dovolj energije za delovanje vseh znanstvenih instrumentov ter kamer. Tako tudi več tednov trajajoči peščeni viharji sonde ne ovirajo pri raziskovanju.

Za kraj pristanka so znanstveniki izbrali krater Gale, saj so sateliti v orbiti okrog Marsa pokazali, da je to območje polno raznovrstnih sedimentov. To roverju omogoča dostop do plasti, nastalih v različnih obdobjih na Marsu. Cilji misije so med drugim iskanje znakov življenja, določanje geološke sestave površinskih kamnin, določanje ciklov kroženja vode in ogljikovega dioksida na planetu ter preverjanje sevanja na površju, slednje predvsem zaradi prihodnjih človeških odprav na ta Zemlji najbližji planet. Po uspešno zaključeni prvotni dvoletni misiji so upravljanje roverja podaljšali za nedoločen čas. Med njegova najpomembnejša odkritja sodi odsotnost metana v Marsovi atmosferi. Ta plin proizvajajo organizmi in ga Sončeva svetloba hitro uniči, zato bi sledi metana nakazovale na obstoj življenja. Zaradi odsotnosti magnetnega ščita je rover tudi zaznal povišane vrednosti sevanja, ki bi lahko predstavljale oviro za človeške odprave. Prav tako so posneli sledove vodne erozije na skalah okrog kraterja: še en dokaz o obstoju tekoče vode na Marsu. Septembra 2014 pa je robot prvič zbral vzorce kamnine iz Marsove gore. Z vgrajenim svedrom je zvrtal vzorce in potrdil vsebnost mineralov, ki jih je opazil že satelit Mars Reconnaissance Orbiter. Tako so se znanstveniki prepričali o pravilnosti analiz fotografij satelita.

Septembra lani sta se okrog Marsa uspešno utirila indijski raziskovalni orbiter in satelit MAVEN pod okriljem NASE. Cilj slednjega je spremljanje vremena na planetu in iskanje mehanizmov, odgovornih za postopno izgubo površinskih voda. V preteklih štirih desetletjih so posnete fotografije prikazale Mars kot hladen, kamnit in suh planet z rožnatim nebom. Vzorci tal so razkrili ostanke aktivne vulkanske preteklosti in obdobje pogostih padcev meteoritov ter znake močnih povodnji. Z vsako novo misijo izboljšani tehnološki dosežki odpirajo podrobnejši pogled v zgradbo Marsa in v njegovo preteklost.

× × ×

Preslikava tekstur na enostavne 3D objekte

Peter Žnuderl

Na računalniku, telefonu, tablici in drugod se vsakodnevno srečujemo s 3D modeli, npr. pri računalniških slikah, igricah, programih. Vsi ti modeli so sestavljeni iz osnovnih geometrijskih likov – najpogosteje trikotnikov. Vendar bi sami po sebi bili zelo dolgočasni, če ne bi imeli teksture (informacije o barvi, pa tudi senc, obliki površine) in osvetlitve. V tem članku si bomo pogledali nekaj načinov, kako na 3D objekte dodajamo teksture.

SLIKA 1.
3D objekt (desno spodaj), teksture (levo spodaj) ter kompozicija istega objekta s teksturo in osvetlitvijo (na sredini)

Teksture so 2D objekti – slike, 3D modeli pa v 3D prostoru definirani liki; tako nastane problem predstavitve 2D slik na 3D objektih. Obstaja več načinov preslikave 2D tekstur na objekte. V tem članku jih bomo omenili, posvetili pa se bomo enostavnejšim preslikavam na valje in krogle. Že za to pa bo potrebno nekaj znanja matematike. Računali bomo v radianih in uporabljali kotne funkcije ter sistem enačb z več neznankami.

Kako preslikavamo teksture?

Poznamo več načinov preslikave. Preslikava naprej in preslikava nazaj sta najbolj enostavni preslikavi uporabni za enostavne ploskve, npr. za kvadre, valje in krogle.

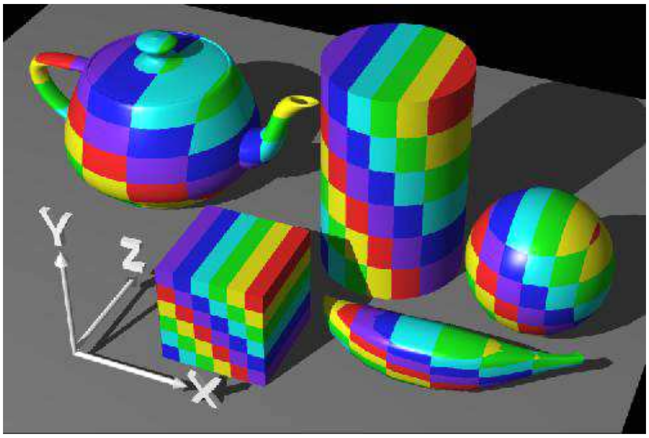
Pri preslikavi naprej je postopek sledeč: vsak piksel teksture preslikamo na objekt in objekt preslikamo na zaslon. Prvi korak imenujemo parametrizacija, drugega pa projekcija. Nato sledi še t. i. antialiasing, da slika nima žagastih robov ali lukenj v teksturi. Pri preslikavi nazaj računamo v obratni smeri. Za vsak piksel na zaslonu nas zanima, kateri del 3D objekta prikazuje in kateri del teksture leži na tistem delu objekta.

Parametrizacija

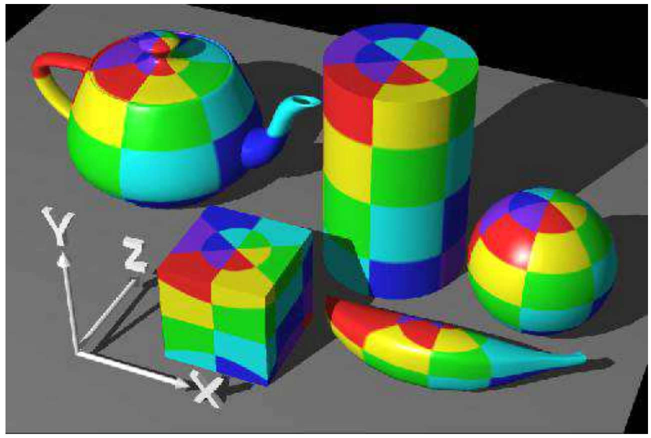
Posvetili se bomo prvemu koraku preslikave naprej, to je parametrizaciji.

Parametrizacija je podana z enačbami. Poznamo dimenzije teksture ter dimenzije objekta in podamo enačbo, po kateri lahko katero koli točko teksture preslikamo na pravilni del objekta. Enostavneje povedano, podali bomo enačbo, kako obleči teksturo na objekt.

Preslikava s pomočjo ravnine. Parametrizacijo lahko zelo poenostavimo, če pri njej ne upoštevamo koordinate z oziroma globine. Tako imajo vsi elementi z enakima koordinatama x in y tudi enako barvo, ne glede na to, ali se nahajo spredaj ali zadaj ali kje vmes. To pomeni, da povsod na stranskih površinah, razen povsem spredaj in povsem zadaj, dobimo črtast vzorec (glej sliko 2). Takšna preslikava je ravninska, saj si lahko predstavljamo, da slikamo teksturo tako, kot da bi jo obsijali iz ene ravnine.



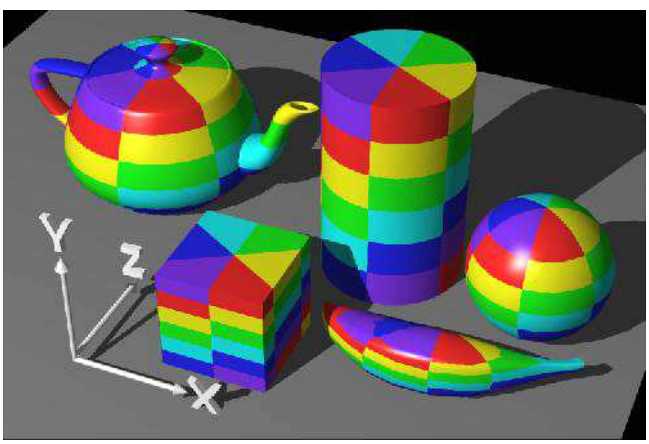
SLIKA 2.
Ploskovna preslikava teksture na različne objekte



SLIKA 4.
Objekti po preslikavi s pomočjo krogle

Preslikava s pomočjo valja. Drugi način je parametrizacija s pomočjo valja. Namesto ploskve tu teksturo oblečemo na valj in nato prežarčimo objekt z valjem. Predstavljajmo si, da vsak del valja oddaja svetlobo, proti objektu znotraj valja. Strani objekta tako dobijo pravilnejšo teksturo, vrh pa je še vedno precej spremenjen (glej sliko 3).

Preslikava s pomočjo krogle. Pri preslikavi s pomočjo krogle lahko posebej določamo teksturo vsakega dela objekta (pri preslikavi z valjem sta zgornja in spodnja ploskev preprosto iste barve kot zgornji oziroma spodnji del piksla na strani). Prihaja pa do popačitev na straneh pri oglatih površinah (glej sliko 4).



SLIKA 3.
Objekti po preslikavi s pomočjo valja

Preslikava na valj

Valj je precej preprosto določiti, saj gre pravzaprav le za zvit pravokotnik. Tako je koordinato v teksture (višino) potrebno le pomnožiti z razmerjem višine teksture ter višine valja in rezultat je y koordinata valja. Iz razmerja med širino teksture in velikostjo kota dela valja, na katerega želimo nanesti teksturo, pa lahko izračunamo prostorske x in z koordinate.

Koordinatni sistem teksture izberemo tako, da je višina teksture enaka 1 in širina teksture prav tako 1. V tem primeru preprosto preračunamo y koordinato po formuli $y = v \cdot h$, pri čemer je h v koordinata točke P, ki jo želimo preslikati. Koordinato x preračunamo po formuli $x = r \cdot \sin(2\pi \cdot u)$, z pa po formuli $z = r \cdot \cos(2\pi \cdot u)$.

v = višina teksture
u = širina teksture
x = širina valja
y = višina valja
z = globina valja
r = polmer valja

Primer. Preslikave točke P iz teksture v točko P' na valju.

Podatki:
višina valja $h = 2 \cdot v$
polmer valja $r = 1$
$P(0{,}2, 0{,}6)$

- $P'y = v \cdot h$
  $P'y = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$
  $P'x = r \cdot \sin(2\pi \cdot u)$
  $P'x = 1 \cdot \sin(2\pi \cdot u) = 0{,}95$
  $P'z = r \cdot \cos(2\pi \cdot u)$
  $P'z = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot u) = 0{,}31$

Rezultat:
P'(0,95, 1,2, 0,31)

Preslikava na kroglo

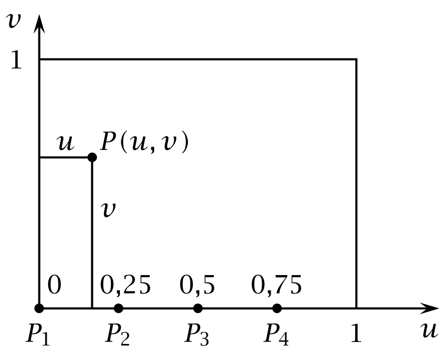
Objekt je podan s sferičnima koordinatama Φ in Θ (navpični in horizontalni kot):

- $\Theta = f(u, v)$,
  $\Phi = g(u, v)$.

Če sta f in g funkciji enega parametra, lahko zapišemo enačbi kot:

- $\Theta = au + b$,
  $\Phi = cv + d$.

Imamo dve enačbi s štirimi neznankami in štiri različne točke.



SLIKA 5.
Tekstura v 2D koordinatnem sistemu

Vedeti moramo kam bomo vpeli štiri točke teksture na objekt. Lahko so štiri oglišča pravokotne teksture, lahko pa so to poljubne točke znotraj. Če vemo, kam želimo postaviti te štiri točke, lahko z vstavljanjem Θ in Φ ter u in v dobimo enačbi, s katerimi lahko izračunamo pozicijo katerekoli točke na krogli.

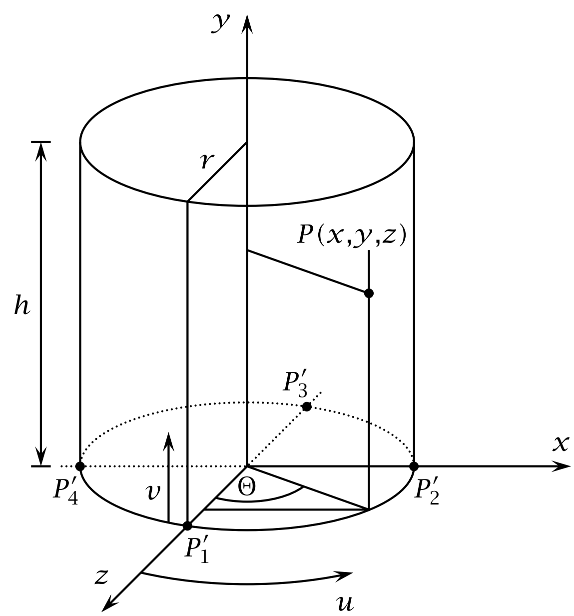
Za preračunanje pozicije točk iz sferičnih koordinat Φ in Θ v koordinate x, y, z, to storimo z naslednjimi enačbami:

- $x = r \sin\Theta \sin\Phi$,
  $y = r \cos\Phi$,
  $z = r \cos\Theta \sin\Phi$.

Primer. Dani sta enotska tekstura (slika 7) in del krogle, na katero jo želimo preslikati (slika 8).

V zgoraj navedeni enačbi za izračunanje formul za pridobivanje sferičnih koordinat vstavimo podatke:

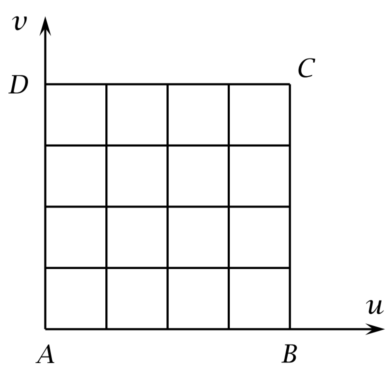
1. Za točki A in A' $(u = 0, v = 0)$ $(\Theta = 0, \Phi = \pi/2)$.
2. Za točki B in B' $(u = 1, v = 0)$ $(\Theta = \pi/2, \Phi = \pi/2)$.
3. Za točki C in C' $(u = 0, v = 1)$ $(\Theta = 0, \Phi = \pi/4)$.
4. Za točki D in D' $(u = 1, v = 1)$ $(\Theta = \pi/2, \Phi = \pi/4)$.



SLIKA 6.
Valj v 3D koordinatnem sistemu

Izračunamo a, b, c in d ter jih vstavimo v splošni formuli. Dobili smo formuli za izračun sferičnih koordinat za ta primer.

1. Vstavimo podatke točk A in A':
   - $\Theta = au + b$
   - $0 = a \cdot 0 + b$
   - $b = 0$
   - $\Phi = cv + d$
   - $\pi/2 = c \cdot 0 + d$
   - $d = \pi/2$
2. Vstavimo podatke točk B in B':
   - $\Theta = au + b$
   - $\pi/2 = a \cdot 1 + 0$ (Iz prejšnjega računa vemo, da je $b = 0$.)
   - $a = \pi/2$
   - $\Phi = cv + d$
   - $\pi/2 = c \cdot 0 + \pi/2$ (Iz prejšnjega računa vemo, da je $d = \pi/2$.)
   - $\pi/2 = \pi/2$ (c smo množili z 0, zato ga bomo morali pridobiti iz drugih računov.)
3. Vstavimo podatke točk C in C':
   - $\Theta = au + b$ (Ni več potrebno računati, saj že poznamo vse spremenljivke iz te enačbe.)
   - $\Phi = cv + d$
   - $\pi/4 = c \cdot 1 + \pi/2$ (Iz prejšnjega računa vemo, da je $d = \pi/2$.)
   - $c = -\pi/4$
4. Za točko D nam ni potrebno računati, saj smo že iz prvih treh enačb pridobili vse potrebne podatke.



SLIKA 7.
Enotska tekstura

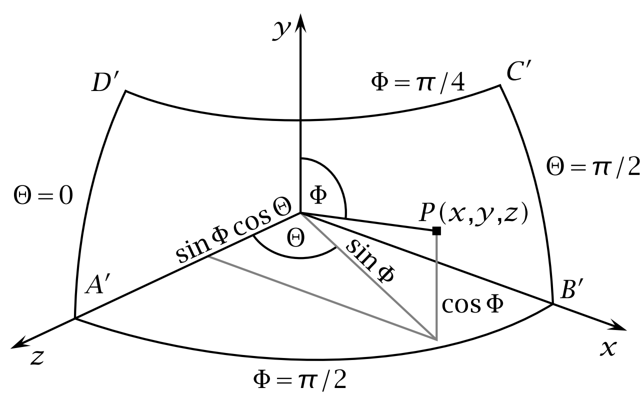
Sedaj lahko za poljubno točko P izračunamo položaj na krogli tako, da vstavimo koordinate iz teksture v spodnji formuli:

- $\Theta = (\pi/2)u$,
  $\Phi = (-\pi/4)v + \pi/2$.

Po formulah za preračunanje x, y in z koordinat iz Φ in Θ lahko te iste koordinate preračunamo še za xyz koordinatni sistem.

Primer. Naj bo v našem primeru $r = 3$ in računamo položaj točke P', pri čemer se točka P teksture nahaja na $P(0{,}75, 0{,}5)$.

- $x = r \sin\Theta \sin\Phi$
  $y = r \cos\Phi$
  $z = r \cos\Theta \sin\Phi$.
  $\Theta = (\pi/2)u = \pi/2 \cdot 0{,}75 = 3\pi/8$
  $\Phi = (-\pi/4)v + \pi/2 = (-\pi/4) \cdot 0{,}5 + \pi/2 =$
  $= 3\pi/8$
- $P'x = r \cdot \sin\Theta \cdot \sin\Phi$
  $P'x = 3 \cdot \sin(3\pi/8) \cdot \sin(3\pi/8)$
  $P'x = 3 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}92$
  $P'x = 2{,}54$
- $P'y = r \cdot \cos\Phi$
  $P'y = 3 \cdot \cos(3\pi/8)$
  $P'y = 3 \cdot 0{,}38$
  $P'y = 1{,}14$



SLIKA 8.
Del krogle, na katero slikamo teksturo.

- $P'z = r \cdot \cos\Theta \cdot \sin\Phi$
  $P'z = 3 \cdot \sin(3\pi/8) \cdot \cos(3\pi/8)$
  $P'z = 3 \cdot \sin(3\pi/8) \cdot \cos(3\pi/8)$
  $P'z = 3 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}38$
  $P'z = 1{,}05$

Rezultat:
P'(2,54, 1,14, 1,05)

Zaključek

Preslikava na kvader, valj ali kroglo je prvi korak lepljenja tekstur na objekte v računalništvu. Namen tekstur je, da računalniško izdelanim objektom dodajo več podrobnosti; virtualne stvaritve tako po izgledu približajo naravnim. Brez tekstur bi si težko predstavljali videoigre, animirane filme, 3D kompozicije; predmeti bi namreč delovali togo in plastično, saj povsem gladkih, enobarvnih površin v realnem svetu ne najdemo. Računalniški svet bi tako bil mnogo manj privlačen in raznovrsten, kot je sedaj.

Literatura

[1] `http://www.sharecg.com/v/52192/related/5/3D-Model/Fuel-Can`, dostopano: 16. 3. 2015.

[2] `http://escience.anu.edu.au/lecture/cg/Texture/printNotes.en.html`, dostopano: 16. 3. 2015.

[3] N. Guid, Skripta predmeta Računalniška animacija, 2014.

[4] `http://escience.anu.edu.au/lecture/cg/Texture/printNotes.en.html`, dostopano: 16. 3. 2015.

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Texture_mapping`, dostopano: 16. 3. 2015.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

	2				3		
1							
	3	8				4	
	5						
		4		1			
	7			8		6	4
			2				
4	6				5		2

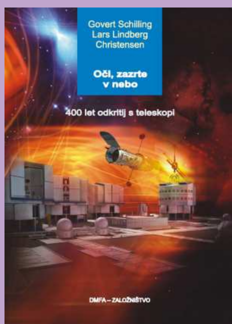
Rešitev barvni sudoku

8	2	6	5	4	3	7	1
1	4	3	7	5	8	2	6
7	3	8	1	2	6	4	5
6	5	2	4	7	1	3	8
2	8	4	6	1	7	5	3
5	7	1	3	8	2	6	4
3	1	5	2	6	4	8	7
4	6	7	8	3	5	1	2

× × ×

Astronomska literatura

Ob mednarodnem letu astronomije smo na enem mestu zbrali vse publikacije s področja astronomije, ki so na voljo pri DMFA–založništvu.

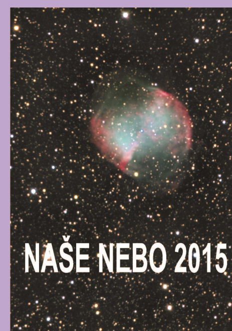


Govert Schilling in Lars Lindberg Christensen

OČI, ZAZRTE V NEBO
400 let odkritij s teleskopi

136 strani
format 17 × 24 cm
trda vezava, barvni tisk

24,99 EUR



Dintinjana, Fabjan, Mikuž, Zwitter

NAŠE NEBO 2015
Astronomske efemeride

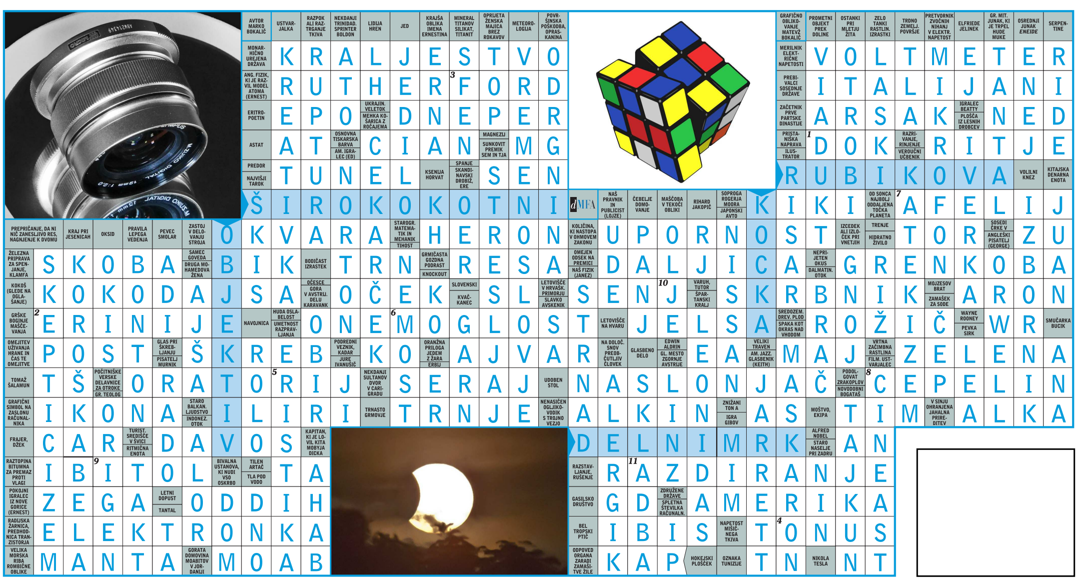
84 strani
format 16 × 23 cm
mehka vezava

10,00 EUR

Poleg omenjenih dveh ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 42/4

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke 42. letnika Preseka je **Deformacija.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Oscar Križanec iz Ptuja, Tanja Zanjkovič iz Ljutomera in Martin Avguštin iz Dolenjskih Toplic, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Senca plamena

Aleš Mohorič

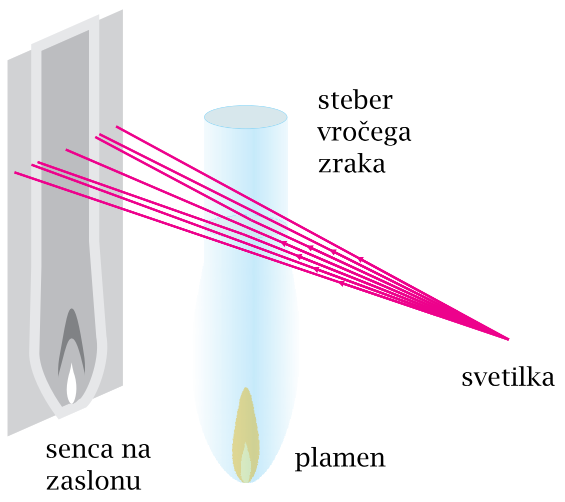
→ V prejšnji številki smo objavili fotografijo prižgane vžigalice in njene sence; na senci smo pogrešali senco plamena. To enostavno pojasnimo, saj je plamen redek kot plin in ne absorbira ali odbije svetlobe, kot jo absorbirajo in odbijajo trdna, neprozorna telesa. V spremnem besedilu smo tudi opozorili, da svetloba iz svetilke vendarle ne prepotuje plamena popolnoma neovirano. Plamen je vroč in segreje tudi zrak v okolici. Vroč zrak se zaradi naravne konvekcije dviga v stebru nad plamenom. Steber vročega zraka nad plamenom je raven in približno valjaste oblike, če je zrak v okolici plamena miren. Zrak se premeša že ob najmanjšem pišu; dovolj je že, da se sprehodimo dovolj blizu. Širine stebra ne moremo enostavno določiti, saj meja med vročim, dvigajočim se zrakom in hladnejšim, mirujočim zrakom v okolici ni ostra. Vseeno pa premer stebra lahko ocenimo na kak centimeter ali dva, tako kot je opisano v nadaljevanju.

SLIKA 1.
Goreča sveča in njena senca na zidu. Senca nastane zato, ker je pred svečo postavljena majhna svetilka, usmerjena proti zidu za svečo.

Naredimo fotografijo (slika 1) plamena sveče in njegove sence, ki nastane tako, da skozi plamen posvetimo s svetlo in majhno svetilko. Svetilka mora biti majhna, da bo senca karseda ostra. Podobno senco bi lahko opazili tudi ob sončni svetlobi, vendar bi imela tedaj senca manj oster in manj izrazit rob, ker Sonce ni točkasto svetilo. Senca, ki nastane na zaslonu (v našem primeru kar na zidu), razkriva plamen in steber vročega zraka, torej več, kot nam razkrije pogled naravnost v plamen. Tedaj namreč stebra vročega zraka ne vidimo.

Optične lastnosti prozorne snovi, kot je vroč zrak, opišemo z lomnim kvocientom. Ta je enak razmerju med hitrostjo svetlobe v vakuumu in hitrostjo svetlobe v snovi. Lomni kvocient je vedno večji od ena, saj svetloba v snovi potuje počasneje kot v praznem prostoru. Lomni kvocient zraka je zelo blizu 1 in izkaže se, da je v prvem približku razlika od ena kar sorazmeren gostoti zraka: $n - 1 \propto \rho$. Iz plinske enačbe $pV = \frac{m}{M}RT$ sledi, da je gostota plina obratno sorazmerna s temperaturo plina in odstopanje lomnega kvocienta od ena je obratno sorazmerno s temperaturo: $n - 1 \propto \frac{1}{T}$. Zrak ima pri temperaturi $T_0 = 15$ °C (to je 288 K) lomni kvocient enak 1,00028. Pri tem zanemarimo odvisnosti lomnega kvocienta od valovne dolžine svetlobe. Lomni kvocient zraka pri normalnem zračnem tlaku in poljubni temperaturi, pri kateri še velja približek idealnega plina, približno izračunamo z izrazom [1, 2]: $n(T) = 1 + 28 \cdot 10^{-5}\,\frac{T_0}{T}$. Pri visoki temperaturi (v stebru vročega zraka nad plamenom sveče lahko doseže tudi več sto stopinj Celzija) je lomni kvocient zraka manjši kot v zraku pri sobni temperaturi. Steber dvigajočega se vročega zraka ima zato podobno vlogo kot razpršilna cilindrična leča. Snop žarkov iz majhne svetilke, ki vpadajo na steber vročega zraka, se razprši približno tako, kot kaže slika 2. Žarki, ki potekajo skozi steber, se razklonijo in zato ima senca stebra na zaslonu temnejši del v sredini. Žarki, ki se razklonijo na robu stebra, se na zaslonu sekajo z žarki, ki potujejo mimo stebra, zato ima senca svetlejši rob. Širina sence na zaslonu je odvisna od lege svetilke, lege zaslona ter velikosti in temperature plamena.

Razlike v osvetljenosti sence so majhne, zato senco na fotografiji bolje vidimo, če povečamo kontrast. Tedaj postane bolj izrazit tudi šum. Izsek sence s poudarjenim kontrastom kaže slika 3.



SLIKA 2.
Steber vročega zraka nad svečo deluje kot razpršilna cilindrična leča in razprši žarke iz svetilke tako, da na zaslonu nastane temnejša senca stebra s svetlejšim robom.

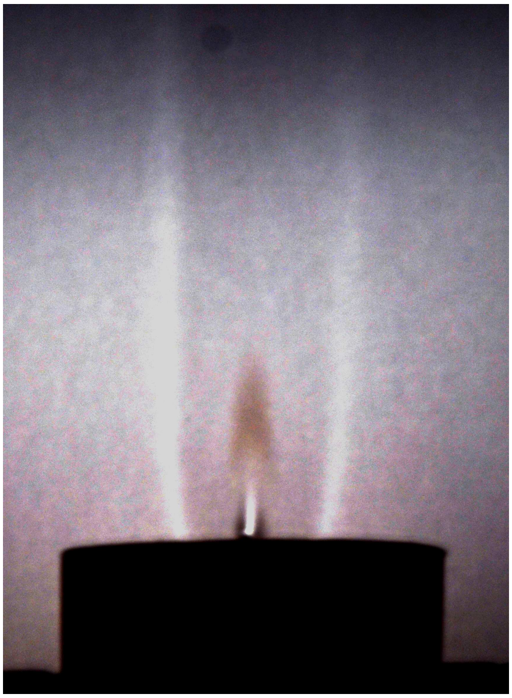
Na opisani način lahko s fotografiranjem senc proučujejo konvekcijski tok v prozorni tekočini, Machovo valovno čelo ali pa tok v okolici telesa, ki ga obliva tekočina (aero-, hidrodinamika). Z rezultati opazovanj lahko načrtujemo tehnološke izboljšave, npr. kako oblikovati vesoljsko sondo, da bo med vstopom v atmosfero njen let bolj stabilen [3].

Literatura

[1] P. E. Ciddor, *Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared*, Appl. Optics **35** 1996, 1566–1573.

[2] `http://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Documentation.asp`, dostop 25. 3. 2015.

[3] `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shadowgraph_Images_of_Re-entry_Vehicles_-_GPN-2000-001938.jpg`, dostop 25. 3. 2015.



SLIKA 3.
Senco plamena vidimo bolje, če povečamo kontrast na fotografiji.

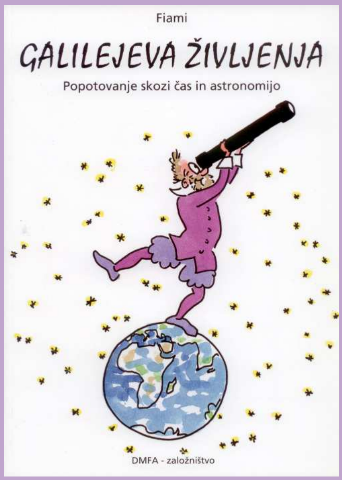
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.