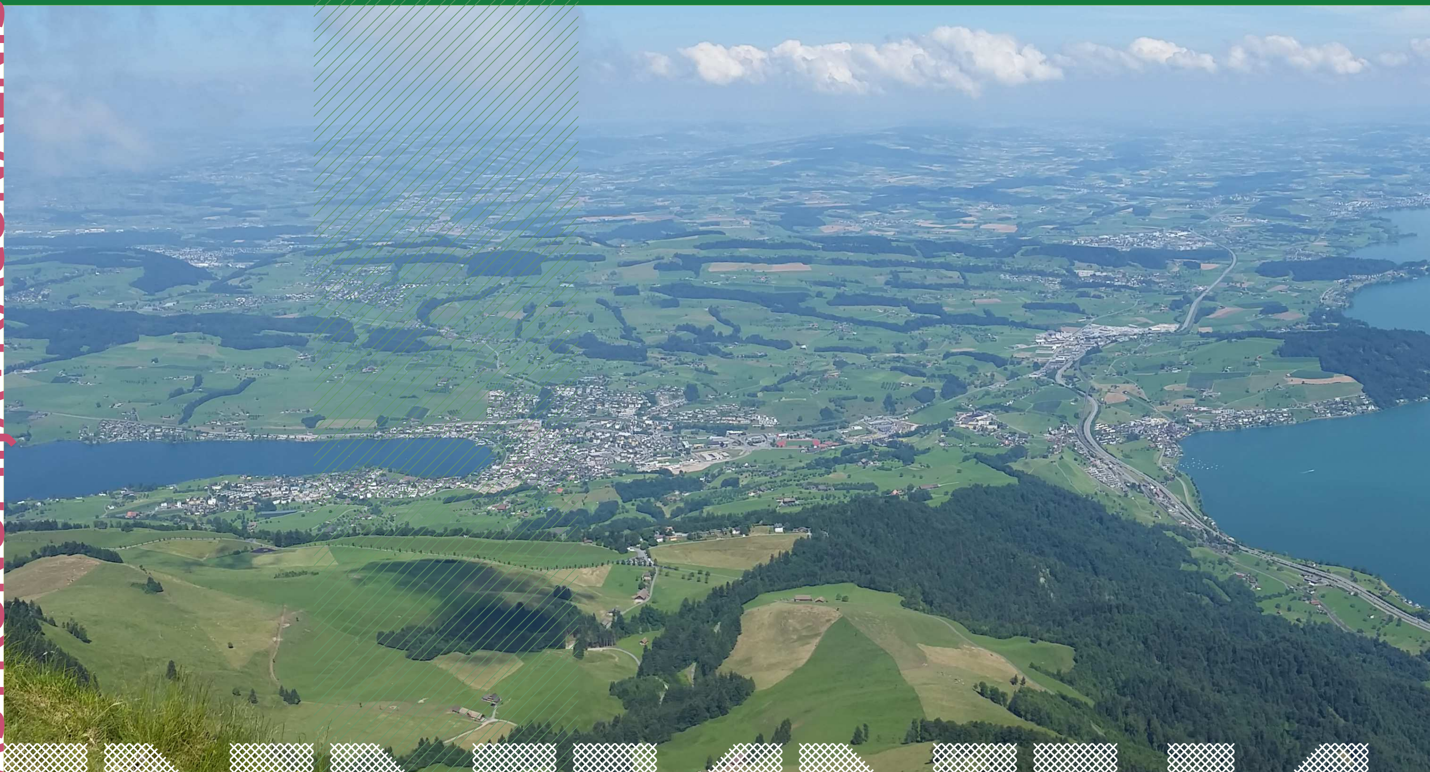
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

2

PRESEK LETNIK 44 (2016/2017) ŠTEVILKA 2



PRESEK

→ HOLDITCHEV IZREK

→ POSKUSI S SVETLOBO

→ OLIMPIJSKA DOMAČA NALOGA EKSCENTRIČNOST LUNINE ORBITE

→ NEKAJ ALGORITMOV ZA GENERIRANJE PERMUTACIJ

ISSN 0351-6652

9 770351 665425

Preprečevanje divjega lova

Zaradi rogov in oklov divji lovci vsako leto pobijejo na tisoče nosorogov in slonov. Ker živali naseljujejo ogromna območja, je žal nemogoče zagotoviti zadostno število čuvajev. Zato lahko divji lovci skoraj brez strahu, da bi jih ujeli, ubijajo in bogato služijo. V zadnjem času je skupina računalnikarjev zbrala podatke o lokacijah živali, preteklem divjem lovu in vremenu. Nato so s pomočjo verjetnostnega računa in teorije grafov ob primernem času na ustrezna mesta poslali drone in čuvaje. Med prvim preizkusom algoritma so čuvaji uspeli aretirati divje lovce le nekaj minut potem, ko so izstopili iz svojega vozila, še preden so uspeli preplezati ograjo, za katero sta bila nosoroginja in njen mladič.

Nameščanje patrulj je primer prostorsko-časovnega optimizacijskega problema. Njihova dejanja so koordinirana tako, da maksimiziramo določeno količino, v našem primeru število živih živali. Ker je iskanje najboljše rešitve časovno zelo zahtevno, čuvaji pa se morajo odzvati zelo hitro, so raziskovalci privzeli nekaj dodatnih predpostavk. S tem so problem olajšali in tako uspeli najti strategije, ki sicer morda niso najboljše možne, a so hkrati uspešne in izračunljive v realnem času. S temi rešitvami so s pomočjo čuvajev uspeli ustaviti divje lovce in jim preprečiti vrnitev na lovišča.

Bolj radovedni bralci si lahko preberejo članek *APE: Data-Driven, Behavioral Model Based Anti-Poaching Engine*, ki so ga leta 2014 napisali N. Park, E. Serra, T. Snitch in V. S. Subrahmanian.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 44, šolsko leto 2016/2017, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2016/2017 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

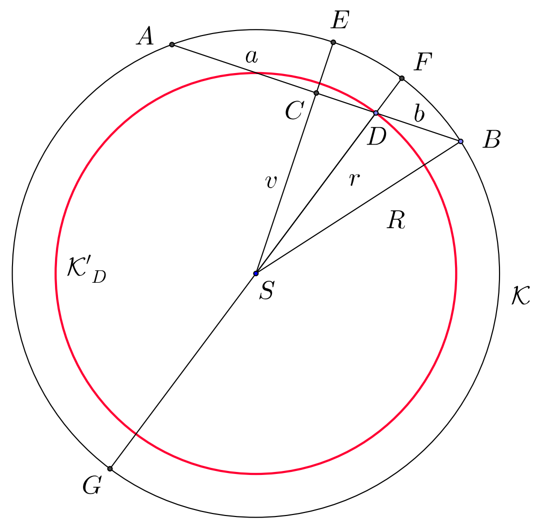
Kazalo

Slika na naslovnici: Rigi je gora, ki kraljuje nad mestom Luzern, z njegovega vrha pa se odpira pogled na mnoga prelepa jezera. Ob pravem vremenu je ta sicer množična turistična atrakcija še vedno nadvse čarobna. Za vzpon na 1798 m nadmorske višine pa je potreben le krajši sprehod, saj je možno večino poti opraviti z gorsko železnico.

Holditchev izrek

↓↓↓
Marko Razpet

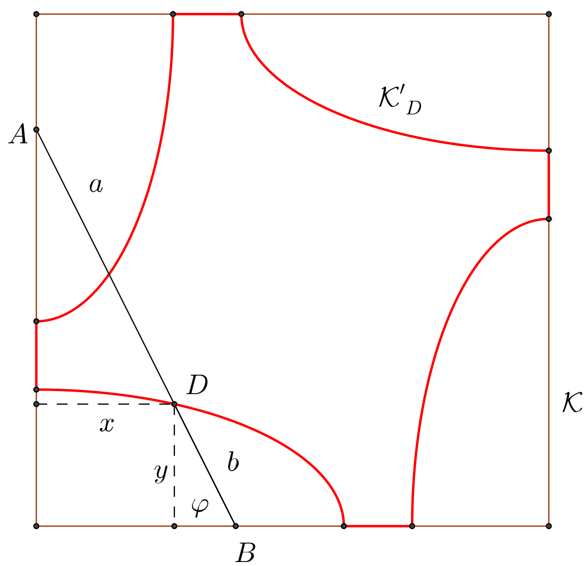
→ **Krožnici $\mathcal{K}$ s polmerom R in središčem S včrtamo tetivo AB izbrane dolžine $t = |AB|$. Tetiva krožnice je vsaka daljica, ki povezuje dve točki te krožnice. Najdaljša tetiva krožnice je premer te krožnice. Točka D naj tetivo AB razdeli na dva dela z dolžinama $a = |AD|$ in $b = |BD|$, točka C pa naj bo središče tetive AB. Pri tem je seveda $0 < t \leq 2R$ in $a + b = t$. Če točki A in B enkrat zakrožita po $\mathcal{K}$ in pri tem ves čas tetiva AB ohranja svojo dolžino, točka D pri tem na tej tetivi ne spreminja svoje lege. To pomeni, da se razdalji $|AD|$ in $|BD|$ ne spreminjata. Očitno se tudi razdalje $|SC|$, $|CD|$ ter $|SD|$ ne spreminjajo, zato D opiše krožnico $\mathcal{K}'_D$ s polmerom $r = |SD|$ in središčem v S. Ne da bi karkoli izgubili na splošnosti, lahko privzamemo, da je $a \geq b$.**



SLIKA 1.
Točka D na tetivi AB krožnice $\mathcal{K}$ zariše rdeče obarvano krožnico $\mathcal{K}'_D$.

Pri vsem tem je najbolj zanimivo to, da je ploščina P kolobarja med obema krožnicama $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'_D$ odvisna samo od a in b, in sicer je $P = \pi ab$. Tega ni težko dokazati. V pravokotnem trikotniku SBC (slika 1) sta kateti $|SC| = v$, $|CB| = (a+b)/2$, hipotenuza pa R. V pravokotnem trikotniku SDC pa sta kateti v in $|CD| = a-(a+b)/2 = (a-b)/2$. Po Pitagorovem izreku veljata relaciji $R^2 = v^2 + (a+b)^2/4$, $r^2 = v^2 + (a-b)^2/4$, iz katerih sledi $R^2 - r^2 = (a+b)^2/4 - (a-b)^2/4 = ab$. Za ploščino kolobarja takoj dobimo $P = \pi(R^2 - r^2) = \pi ab$. S tem smo trditev, izrečeno na začetku odstavka, potrdili. Lahko pa uporabimo tudi izrek, ki pove, da za odseke sekajočih se tetiv AB in FG (slika 1) velja enakost $|AD| \cdot |DB| = |GD| \cdot |DF|$ oziroma $ab = (R+r)(R-r) = R^2 - r^2$. Iz te zveze ravno tako sledi $P = \pi ab$.

Obravnavo smo začeli s krožnico. Kaj pa dobimo, če namesto nje vzamemo kakšno drugo sklenjeno krivuljo? Poglejmo, kakšno krivuljo $\mathcal{K}'_D$ dobimo v primeru, ko je dana krivulja $\mathcal{K}$ obod kvadrata. Tako kot pri krožnici lahko tudi sedaj govorimo o tetivah. Za razliko od krožnice, katere tetive vedno ležijo v krogu, ki ga omejuje, pa tetive oboda kvadrata lahko ležijo na tem obodu ali pa v kvadratu. Dolžina tetive AB tedaj ne more biti daljša od diagonale kvadrata. Če je dolžina tetive daljša od stranice kvadrata, novo krivuljo sicer dobimo, toda le-ta sama sebe seka. Takrat lik med obodom kvadrata in novo krivuljo ni dobro opredeljen. Zato moramo privzeti, da dolžina tetive ne presega stranice kvadrata. Ko je eno krajišče tetive na eni stranici kvadrata, drugo pa na sosednji, točka D opiše četrtino eliptičnega loka. Ustrezna elipsa ima za polosi ravno a in b. Kako to vidimo? Vzemimo (slika 2) spodnjo stranico kvadrata za os x, levo navpično pa za os y pravokotnega koordinatnega sistema. Naj bo φ kot, ki ga tetiva, ki ima krajišči na teh oseh, oklepa z osjo x. Potem je abscisa točke S enaka $x = a\cos\varphi$, ordinata pa $y = b\sin\varphi$. Koordinati točke D zadoščata enačbi $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, kar je enačba elipse s polo-



SLIKA 2.
Točka D na tetivi AB oboda kvadrata zariše rdeče obarvano krivuljo.

sema a in b in središčem v spodnjem levem oglišču kvadrata. Ker je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, upoštevamo samo eliptični lok v prvem kvadrantu. Za preostala tri oglišča pridemo do podobnega sklepa.

Krivulja $\mathcal{K}'_D$ je sestavljena iz štirih skladnih eliptičnih lokov, ki ustrezajo elipsi s polosema a in b, in sicer tistih lokov, ki povezujejo sosedni temeni te elipse. Če je dolžina tetive manjša od stranice kvadrata, sestavljajo krivuljo $\mathcal{K}'_D$ še štiri na obodu kvadrata ležeče daljice, ki te eliptične loke povezujejo. Ker je ploščina četrtine take elipse enaka $\pi ab/4$, je ploščina lika med obodom kvadrata in krivuljo $\mathcal{K}'_D$ spet enaka $P = \pi ab$. Poskusimo lahko še s kakšno drugo sklenjeno krivuljo. V veliko pomoč nam je pri tem lahko GeoGebra.

Kar smo ugotovili, ni nič posebnega, če ne bi veljal splošnejši izrek, ki ga je leta 1858 formuliral britanski matematik Hamnet Holditch (1800–1867). Še prej pa smo dolžni nekaj pojasnil. Krožnica in obod kvadrata sta *sklenjeni krivulji*. Omejujeta konveksna lika, v tem primeru krog oziroma kvadrat. *Konveksni lik* je tak lik, ki vsebuje vse daljice, katerih krajišča so v tem liku. Krivulja, ki omejuje konveksni lik, je *sklenjena konveksna krivulja*. Tetiva AB take krivulje je poljubna daljica s krajiščema na tej krivulji. Tetiva AB leži v celoti v liku, ki ga sklenjena konveksna krivulja omejuje. V splošnem krivulja lahko seka sama sebe v kakšni točki. Taki točki rečemo *samopresečišče krivulje*. Sedaj smo pripravljeni, da navedemo napovedani izrek.

Holditchev izrek. *Naj bo $\mathcal{K}$ sklenjena konveksna krivulja. Točka D naj deli njeno tetivo AB na odseka dolžin a in b. Pri tem mora biti vsota $a + b$ taka, da vse tetive s to dolžino ležijo znotraj krivulje $\mathcal{K}$. Če krajišči A in B tetive enkrat obkrožita krivuljo $\mathcal{K}$ in tetiva pri tem ves čas ohranja svojo dolžino, točka D pa na njej ne spreminja svoje lege, potem točka D opiše krivuljo $\mathcal{K}'_D$. Če le-ta nima samopresečišč, je ploščina lika med krivuljama $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'_D$ neodvisna od oblike krivulje $\mathcal{K}$, odvisna je le od dolžine tetive AB ter lege točke D na njej in je enaka $P = \pi ab$.*

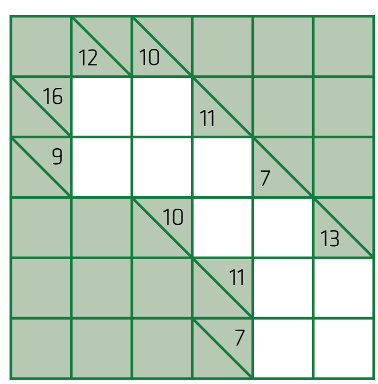
Izreka ni tako lahko dokazati kot v primeru krožnice ali oboda kvadrata in se mu bomo odpovedali. Dokaz lahko poiščemo v primerni matematični literaturi.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

52. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Aljoša Brlogar

→ **Najboljši osnovnošolci s šolskih tekmovanj so se v soboto, 16. aprila 2016, pomerili v 23 regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Državnega tekmovanja so se lahko udeležili učenci od petega do devetega razreda glede na dosežke šolskega tekmovanja. V letošnjem šolskem letu je bilo tekmovanje dvostopenjsko, prvič pa so na državnem tekmovanju sodelovali tudi petošolci in šestošolci. Na šolah, kjer smo imeli izpeljano državno tekmovanje, so organizatorji pripravili prijetne prireditve.**

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V petem razredu smo podelili 55 zlatih Vegovih priznanj, v šestem razredu 61, v sedmem razredu 59, v osmem 60 in v devetem 60 zlatih Vegovih priznanj. Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj 60 % točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet v Benetke. Z ladjo smo obiskali tudi otoka Burano in Murano. Povabili smo 161 najboljših učencev. Izlet je bil za učence nepozaben.

Nagrade, ki so bile podeljene v Cankarjevem domu, so prejeli najbolje uvrščeni tekmovalci, in sicer:

5. razred

I. nagrada

- Benedikt Praznik, OŠ Žiri
- Lapo Farolfi, OŠ Alojz Gradnik, Števerjan (I)
- Nik Brence, OŠ Pohorskega odreda Slovenska Bistrica

6. razred

I. nagrada

- Nik Vodovnik, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka
- Alexander Gaydukov, OŠ Franca Rozmana Staneta, Ljubljana
- Miha Perpar, OŠ Stična
- Alja Šlenc, OŠ Medvode
- Maks Babič, OŠ 8 talcev Logatec
- Tia Rozoničnik, OŠ Frana Roša, Celje
- Martin Steblovnik, III. OŠ Celje

7. razred

I. nagrada

- Jure Kobe, OŠ Brusnice
- Peter Lekše, OŠ Šmartno pod Šmarno goro
- Blaž Mevlja, OŠ Srečka Kosovela Sežana
- Jakob Čelig, OŠ dr. Jožeta Pučnika, Črešnjevec

II. nagrada

- Vid Hočevar, OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana
- Matija Likar, OŠ bratov Polančičev Maribor
- Luka Černesl, OŠ Gorišnica

8. RAZRED

I. nagrada

- Nejc Amon, I. OŠ Celje
- Marija Jezeršek, OŠ Preserje pri Radomljah
- Jan Malej, OŠ Koper
- Jakob Schrader, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- Gal Zmazek, OŠ Ljudski vrt Ptuj

II. nagrada

- Eva Igličar, OŠ Naklo

III. nagrada

- Tjaša Drobnič, OŠ Louisa Adamiča, Grosuplje
- Martin Mlinšek, OŠ Vodice
- Jaka Vrhovnik, OŠ Mozirje

9. RAZRED

I. nagrada

- Jan Genc, OŠ Franca Rozmana-Staneta, Maribor
- Tevž Lotrič, OŠ Predoslje Kranj
- Ana Opalič, OŠ Šmarje pri Jelšah

II. nagrada

- Primož Pliberšek, OŠ dr. Jožeta Pučnika, Črešnjevec

III. nagrada

- Lovro Verk, OŠ Prežihovega Voranca, Maribor
- Pia Povšič Vesel, OŠ Trnovo, Ljubljana

SLIKA 1. Udeleženci Kenguru nagradnega izleta v Benetke, junij 2016

Poskusi s svetlobo – 1. del

Andrej Likar in Nada Razpet

→ **Ob mednarodnem letu svetlobe (2015) smo na strokovnem srečanju DMFA Slovenije, ki je potekalo na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, postavili ne povsem standardne šolske poskuse, ki so vezani na svetlobo. Za izvajanje nekaterih od njih ni težko najti optičnih pripomočkov, kot so leča, ravno zrcalo, kozmetično zrcalo, potrebno pa je nekaj pridnosti in spretnosti, da poskuse tudi postavimo.**

Pri vsakem poskusu smo navedli potrebne pripomočke, jih fotografirali, zapisali, kako poskus izvedemo, in dodali še kratko razlago ter navedli, kje v literaturi lahko o fizikalnem ozadju poskusov izvemo kaj več.

Poskusi so razdeljeni v več skupin:

- Prostorske slike
- Preslikave z ravnimi zrcali
- Ukrivljena zrcala
- Sestavi ukrivljenih zrcal
- Preslikave z lečo
- Poskusi z laserskim kazalnikom
- Valovna optika
- Polarizacija svetlobe in optična aktivnost
- Ukrivljeno zrcalo s folijo.

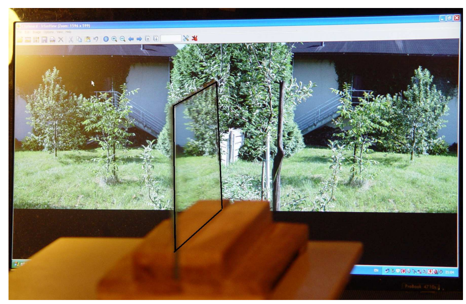
Upamo, da bo ta spomin na leto svetlobe koga od bralcev Preseka vzpodbudil, da se bo kakega poskusa lotil sam.

Prostorske slike

Opazovanje slik, ki pričarajo globino, je znano že zelo dolgo časa. Danes si lahko ogledamo filme z iluzijo prostora. Predmete v naravi gledamo z obema očesoma. Ker se sliki na mrežnicah levega in desnega očesa nekoliko razlikujeta, lahko možgani pridelajo vtis globine. Za vtis globine pri opazovanju slik potrebujemo ločeni sliki za vsako oko, ki sta usklajeni kot pri opazovanju predmeta v naravi. Tudi tu možgani zlijejo obe sliki v prostorsko sliko.

Kako naj torej postavimo poskus? Lahko narišemo eno sliko tako, kot bi jo videlo levo oko, drugo pa tako, kot bi jo videlo desno. Namesto risanja lahko naredimo dve fotografiji, eno za levo in eno za desno oko. Ob gledanju moramo omogočiti, da vsako oko gleda svojo sliko. To lahko naredimo na več načinov. Uporabimo lahko ravno zrcalo, stereoskop, se potrudimo in zlijemo sliki z bolščanjem ali uporabimo anaglifne slike.

Uporaba ravnega zrcala



SLIKA 1.
Sliki na računalniškem zaslonu in postavitev zrcala

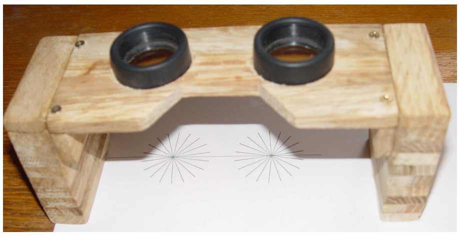
Pripomočki: podstavek, zrcalo (ali prizma), sliki.

Navodilo. Fotografijo, ki smo jo naredili za desno oko, zrcalno obrnemo okrog navpične zrcalne ravnine. Obe sliki potem postavimo na računalniški zaslon eno poleg druge (slika 1). Zrcaljenje in postavitev omogočajo številni grafični programi, mi smo uporabili IrfanView. Zrcalo naj bo med obema očesoma. Postavimo ga tako, da z levim očesom gledamo levo sliko, z desnim pa v zrcalu ponovno obrnjeno desno sliko. Zrcalo počasi vrtimo, da se sliki zlijeta v eno. Ko se zlijeta, smo slepi za ozadje. Namesto zrcala lahko uporabimo prizmo.

Stereoskop

S stereoskopom gledamo ustrezni sliki udobno skozi leči, pri čemer se na gledanje ni potrebno posebej privajati. Leči na doma izdelanem stereoskopu sta bili odviti iz zavrženega manjšega daljnogleda. Razmik med lečama in oddaljenost od slike morata biti taki, da z vsakim očesom gledamo svojo sliko, ki se zlije v eno.

Navodilo. Izdelajte stereoskop in ustrezne slike ter opazujte prostorske slike. Preberite članek v Preseku, ki podrobno opisuje izdelavo stereoskopa in ustreznih slik.



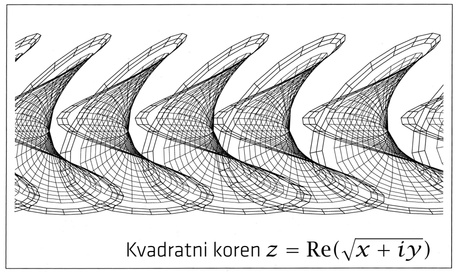
SLIKA 2.
Stereoskop domače izdelave

Pripomočki: stereoskop, slike.

Stereogrami

Potem so tu še stereogrami. Ko gledamo stereogram z obema očesoma, ne smemo gledati hkrati iste točke. Stereograme gledamo tako, kot se zazremo v daljavo, nekako bolščimo vanje. Zanimive stereograme najdete v publikaciji Boruta Jurčiča Zlobca, Stereogrami, pa tudi na spletu.

Navodilo. Navodila za gledanje stereogramov so različna. Pred obe očesi postavite kazalec ene roke. Zazrite se v oddaljen predmet. Ko boste namesto enega videli dva kazalca, poglejte na sliko.



SLIKA 3.
Stereogram iz knjige *Stereogrami* Boruta Jurčiča Zlobca

Anaglifne slike

Prostorske slike lahko ustvarimo z računalniškimi programi. To so tako imenovane anaglifne slike. Programi tvorijo sliki za levo in desno oko, ki sta različno obarvani. Sliki sta prekriti, rdeče obarvane črte so namenjene gledanju z desnim, modro obarvane pa z levim očesom. Za gledanje slik zato potrebujemo očala z rdečim in modrim filtrom. Primera anaglifnih slik smo narisali s programom GeoGebra.

Pripomočki: računalnik, modro-rdeča očala.

Navodilo. Nataknite očala in poglejte sliko. Enkrat imejte rdeče obarvan del očal na levem, drugič pa na desnem očesu. Kaj opazite?

Literatura

[1] A. Likar, *Pričarajmo prostorsko sliko*, Obzor. mat. fiz. **62**, 6, 2015, 218–222.

[2] B. Jurčič Zlobec, *O streogramih*, Logika & Razvedrilna matematika, 1994–1995, 3, 5–8.

[3] B. Jurčič Zlobec, *Stereogrami*, Math 1994.

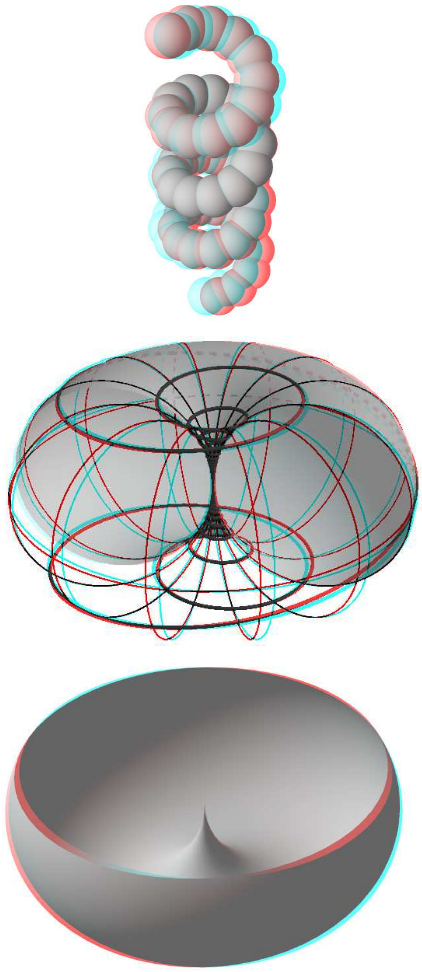
[4] M. Vencelj, *Stereoskopske slike, narejene s programom perspectus*, Presek, **21**, 1993/94, 5, 319–320.

[5] T. Baccei, *Magično oko*, Založba Obzorje, Maribor, 1994.

Ravna zrcala

Kalejdoskop

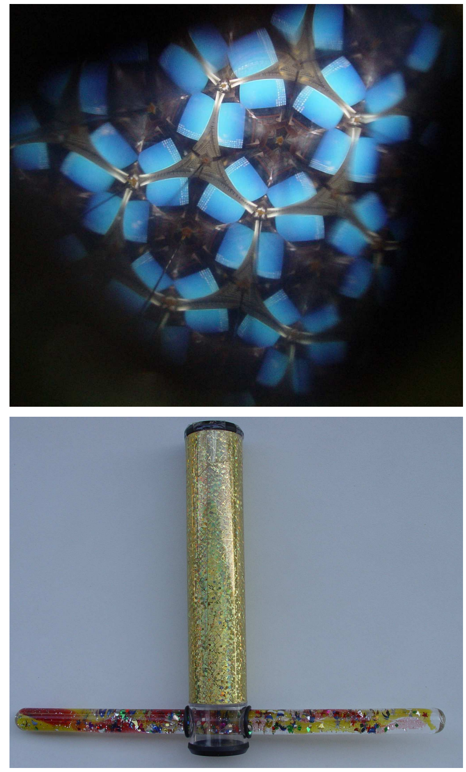
Kalejdoskop simetrično preslika povsem naključno porazdelitev barvnih steklenih drobcev. Simetrična slika nas navduši. Da lahko večkratne slike v cevasto postavljenih zrcalih udobno opazujemo, morajo biti drobci blizu cevi.



SLIKA 4.
Anaglifne slike

Pripomočki: trije enako veliki ravni zrcalni trakovi, tulec, paus papir, kos črnega kartona, lepilni trak, škarje, prozorna škatlica z majhnimi predmeti.

Navodilo. Tri ravne zrcalne trakove zalepimo tako, da tvorijo plašč tristrane prizme (slika 6). Zrcalne površine naj gledajo druga drugo. V prozorno škatlico damo koščke obarvanega stekla ali prosojne barvne plastike. Iz črnega kartona izrežemo krog z luknjo za gledanje. Namesto prozorne škatlice lahko odrežemo približno 5 mm visok valj. Na enem koncu ga zapremo s paus papirjem, vanj nasujemo nekaj koščkov obarvanega stekla ali plastike in nato drugo ploskev zapremo s prozorno folijo za živila. Namesto zrcal lahko uporabimo zrcalno tapeto.



SLIKA 5.
Pogled skozi kaledoskop (zgoraj). Industrijski kalejdoskop (spodaj).

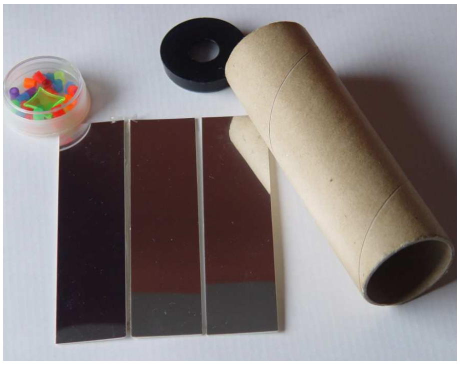
Na tržišču lahko najdemo tudi kalejdoskope, ki imajo na eni strani gibljivo krožno ploščo (z večjim premerom, kot je premer valja) z luknjami, ki so prekrite z barvnim steklom. Krog vrtimo okrog osi, ki je na plašču valja. Najdemo tudi take, kjer tvori sliko debela okrogla leča na enem koncu kalejdoskopa. Pri njem ne potrebujemo steklenih drobcev, sliko spreminjamo z lego kalejdoskopa.

Poglejte še skozi industrijsko izdelan kalejdoskop. Palica z barvnimi delci naj bo nagnjena tako, da bodo delci v tekočini padali.

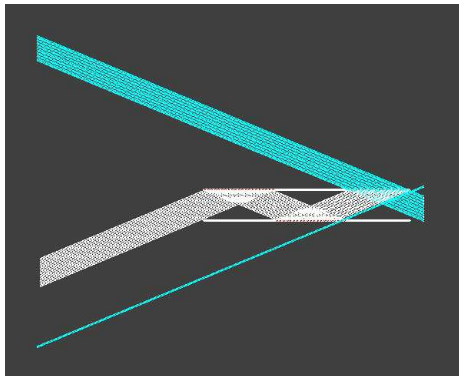
Blizu postavljena vzporedna zrcala

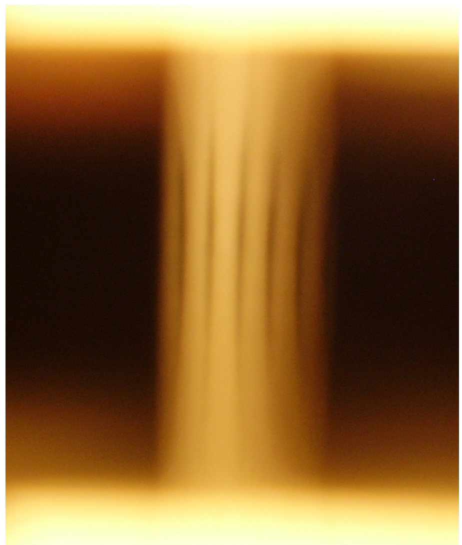
Pripomočki: mikrometrski vijak.

Navodilo. Spreminjajte razdaljo med zrcalnima koncema mikrometrskega vijaka in glejte skozi špra-



SLIKA 6.
Sestavni deli kalejdoskopa (zgoraj). Izdelava kalejdoskopa (spodaj).





SLIKA 7.
Vzporedni žarki iz oddaljenega zaslona se na dveh blizu postavljenih ravnih zrcal večkrat odbijejo (zgoraj). Pogled skozi režo, ki jo tvorita zelo blizu postavljeni vzporedni zrcalni ploskvi mikrometra (spodaj).

njo. Zakaj se pojavljajo svetle in temne proge, ko gledamo v belo svetilo? Če bi šlo za interferenčne proge, bi bile le-te obarvane.

Ravna zrcala pod kotom

Slike v večih ravnih zrcalih istega predmeta lahko zlijemo v zanimive kompozicije

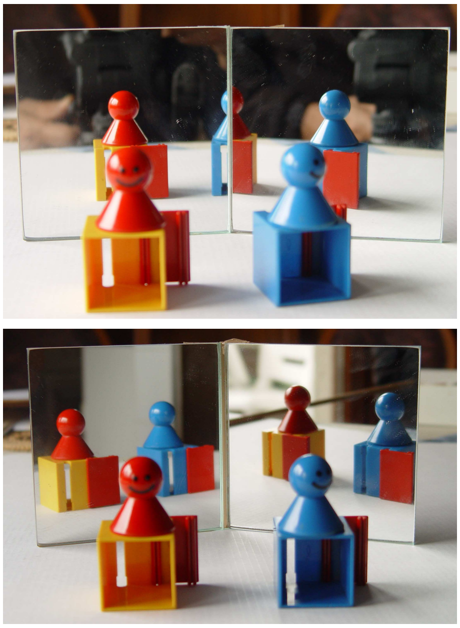
Navodilo. Postavite dva predmeta tako, kot kažeta sliki. Glejte v smeri stika med zrcaloma. Počasi spreminjajte kot med zrcaloma. Kaj opazite? Koliko slik vidite? Ali so vse slike zrcalno simetrične? Kaj pa, če premaknete glavo in ne gledate v smeri stika med zrcaloma?

Tri med seboj pravokotno postavljena zrcala

Slike, ki jih opazujemo v treh, medsebojno pravokotnih zrcalih, so nenavadne in nudijo obilo sveže snovi za zagrete učence. Na trgu najdemo celo igračo, ki ni nič drugega, kot so ta zrcala.

Pripomočki: tri enaka ravna zrcala, ki jih zlepimo pod pravim kotom, da tvorijo koordinatne ravnine.

Navodilo. Poglejte se v zrcala. Kaj opazite? Zrcala dvignite s podlage oziroma jih bolj ali manj nagnite



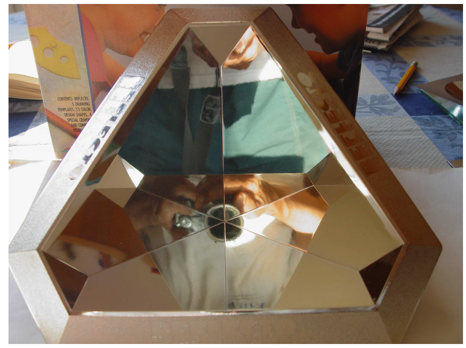
SLIKA 8.
Tri oziroma štiri slike dveh predmetov

SLIKA 9.
Koliko je ura?

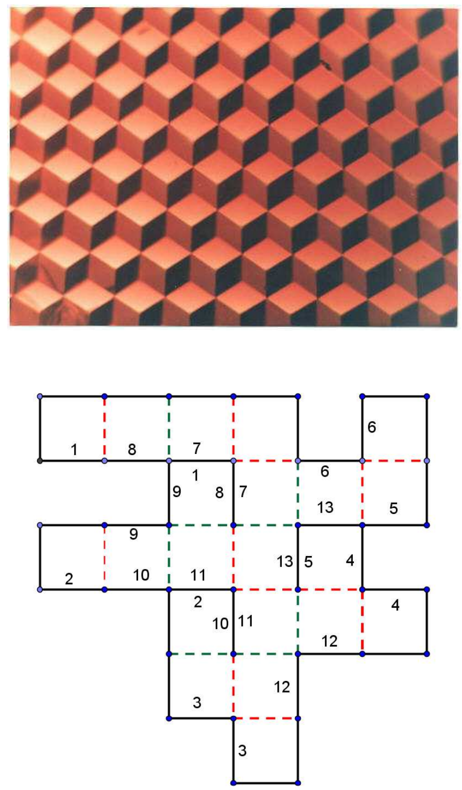
proti sebi. Kaj opazite? Zrcala počasi sukajte okoli osi, ki gre skozi skupno oglišče zrcal. Kaj opazite?

Odsevnik

Pripomočki: skica za izdelavo odsevnika (slika 11 spodaj), alu folija ali zrcalna tapeta, karirast papir, lepilo, škarje, kresnička.



SLIKA 10.
Tri med seboj pravokotna zrcala



SLIKA 11.
Odsevnik (zgoraj). Shema za izdelavo odsevnika (spodaj).

Navodilo. Po črnih črtah zarežemo s škarjami. Rdeče črte pomenijo *pregib na hrib*, zelene pa *pregib na dolino*. Na odsevnik posvetimo s svetilko iz različnih smeri. Izdelajte še odsevnike, ki so predlagani v dodatni literaturi.

Literatura

[1] B. Rovšek, *Odsevnik – kako deluje in kako ga naredimo*, Naravoslovna solnica, **13**, 2, 2009.

[2] N. Razpet, *Dve ravni zrcali*, še neobjavljeno.

[3] J. L. P. Ribeiro, *Are You Ready, Kids? It's SpongeBob Triclops!*, The Physics Teacher **53**, 2015, 298–299.

[4] A. Likar, *Skrivljena zrcala*, Presek, **26**, 1998/99, 2, 66–70.

Ukrivljena zrcala

Pri ukrivljenih zrcalih si pomagamo s prozornimi folijami, odbojnimi izolacijskimi plastičnimi folijami, ki jih najdemo v avtomobilskem paketu prve pomoči, kromiranimi zajemalkami in igračami. Parabolična zrcala, narejena za optične poskuse, pa so za šolsko rabo mnogo predraga.

Preslikave s plastično folijo

Pripomočki: prozorna plastična folija, črn karton, majhen predmet.

Navodilo. Prozorno folijo pritrdite na črn karton in tako narejeno zrcalo postavite navpično. Pred zrcalo postavite predmet. Zrcalo z obeh strani počasi ukrivljajte proti sebi. Ob koncu poskusa naj ima zrcalo obliko plašča valja (konkavno cilindrično zrcalo). Opazujte, kaj se dogaja s slikami. Poskus ponovite še s kosom zrcalne tapete. Poskusite slike še konstruirati.

Realna slika s cilindričnim zrcalom

Pripomočki: valjasta posoda, kos zrcalne tapete, predmet.

Navodilo. Zrcalno tapeto položite v valjasto posodo, kot kaže slika 13. V posodo postavite predmet (spreminjajte višino predmeta), pojavi se »viseča« slika predmeta.

SLIKA 12.
Gibko zrcalo s plastično folijo (zgoraj). Slika v konkavnem cilindričnem zrcalu (spodaj).

Igranje s cilindričnim zrcalom

Pripomočki: okrogla plošča, kos zrcalne tapete, predmet za preslikavo.

Navodilo. Kos zrcalne tapete počasi upogibajte tako, da bo imela na koncu obliko dela plašča valja (konkavno cilindrično zrcalo). Opazujte sliko predmeta. Mi smo za poskuse uporabili okroglo kuhinjsko desko.

Najprej je slika zrcalna (ko tapeta ni upognjena), potem se slika razteguje, nato vidimo pri straneh še

SLIKA 13.
»Viseča« slika predmeta v cilindričnem zrcalu

delne slike, ko pa ima zrcalo obliko plašča valja, pa slika ni več zrcalna.

Nato zrcalo počasi vrtite okrog vodoravne osi, kot kažejo slike 15. Opazujte, kako se spreminja položaj slike. Z zrcalom preslikajte še svoj obraz.

Komentar. Kot med desko in podlago označimo z α. Ko je kot $\alpha = 45°$, je slika postavljena navpično, ko pa je kot $\alpha = 180°$, pa je slika obrnjena. Slika se torej zasuka za 2α.

Oblikujte še konveksno cilindrično zrcalo in ponovite poskuse, ki ste jih opravili s konkavnim cilindričnim zrcalom. Opišite razlike. (Več o konkavnem cilindričnem zrcalu bo objavljeno v enem od naslednjih Presekov.)

»Mirage«

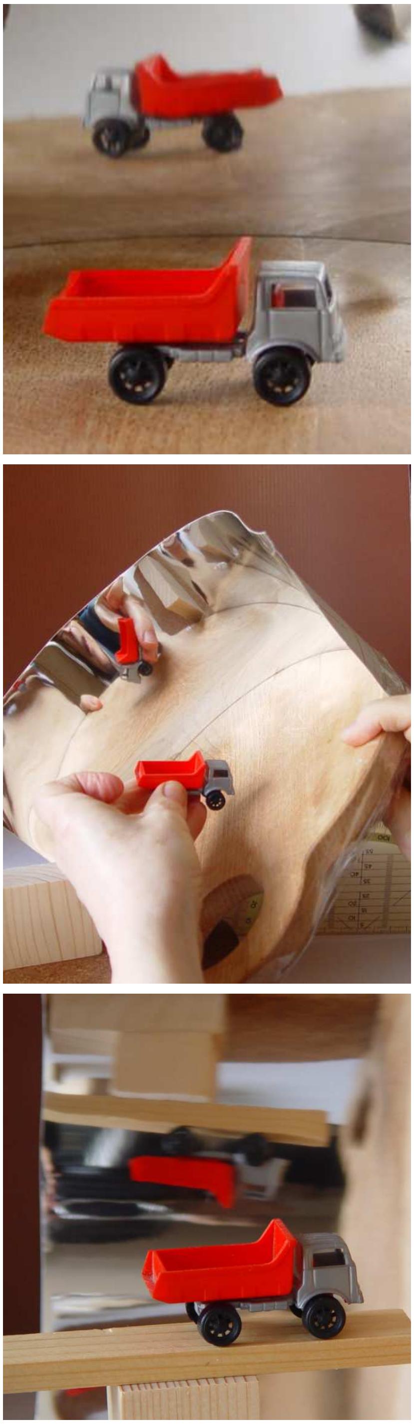
Na tržišču lahko najdemo posebno optično igračo, sestavljeno iz dveh konkavnih zrcal, od katerih ima ena odprtino. Predmet postavimo na *dno* konkavnega zrcala in ga pokrijemo s prav takim zrcalom z odprtino. Nad odprtino opazimo »plavajoč« predmet.

Doma narejen »Mirage«

Tudi sami lahko izdelamo napravo, s katero gledamo lebdeče slike. Eno od njih smo izdelali z zajemalko in ravnim zrcalom s prozorno odprtino.

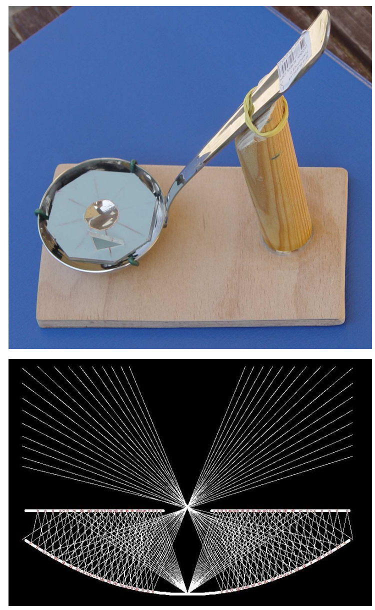
Pripomočki: zajemalka, podstavek z valjem, elastika, kroglica kot predmet.

SLIKA 14.
Počasi ukrivljamo zrcalno tapeto in opazujemo sliko avtomobilčka.



SLIKA 15.
Cilindrično zrcalo vrtimo okrog vodoravne osi.

SLIKA 16.
Miraževa slika kovanca



SLIKA 17.
Mirage z zajemalko, ki ga lahko izdelamo sami (zgoraj). Potek žarkov od predmeta na dnu proti prozorni odprtini (spodaj).

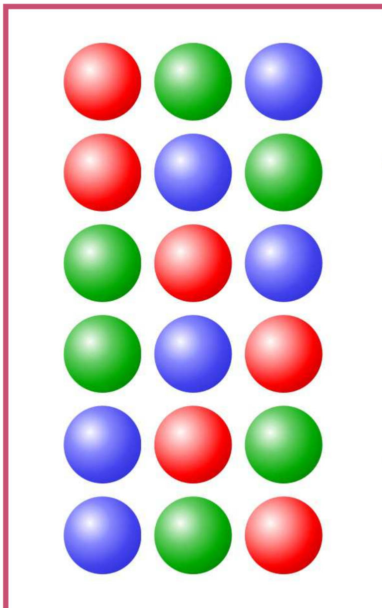
Navodilo. Premikajte kroglico in opazujte njeno realno sliko. Kam moramo postaviti predmet, da lahko opazujemo sliko?

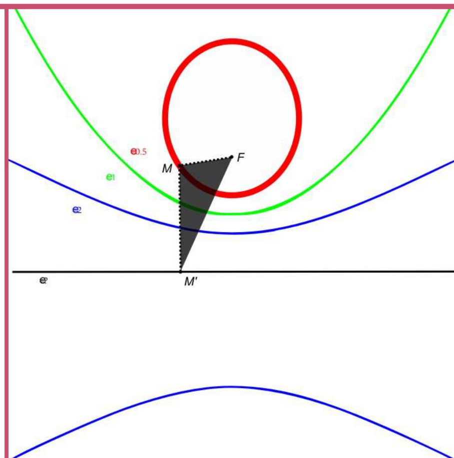
Školjčna postavitev dveh konkavnih krogelnih zrcal

Pri uporabi kopalniških konkavnih zrcal si pomagamo s *školjčno* postavitvijo, kjer prav tako opazujemo lebdečo sliko primerno postavljenega predmeta.

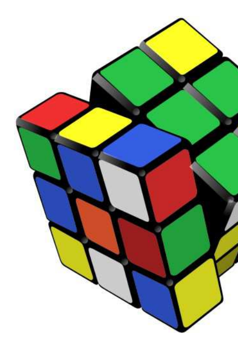
18 nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka





AVTOR MARKO BOKALIČ
MAJHEN STROK
ZA PRESTOLONASLEDNIKA DOLOČEN SIN VLADARJA
ODNAŠANJE MATERIALA Z DEŽJEM, ODPLAKOVANJE
ODSEK NA KROŽNICI
VRSTA VRBE
CENTILITER
NEKDANJI MATERIAL ZA KRITINO, SKRIL
SREDIŠČE ZASAVJA
DEŠČICA S KOLESCI, SKEJT
3
KRAJ PRI CELJU
NEKD. NOTR. MINISTER (ANDREJ)
3. OSEBA ŽENSKEGA SPOLA
LOŠČ
KINETIČNA, POTENCIALNA, ELEKTRIČNA ?
TV NOVINARKA (TEA)
NACE JUNKAR
PLINASTA FAZA SNOVI
PISATELJICA PEROCI
STROKOVNJAKINJA ZA ROMANSKE JEZIKE
MANICA JANEŽIČ
DEL KONJSKE OPREME
KRAJ PRI KAMNIKU
RUSKOAM. SKLADAT. (DIMITRI)
ROK GOLOB
BESEDILO
DMFA
DEL SKAKALIŠČA
NAŠ POKOJNI FIZIK, AVTOR UČBENIKOV
AMERIŠKI PISATELJ (CONRAD POTTER)
MATEMATIK VADNAL
STRAHOTA
DEL STROKOVNJAK ZA AFRIŠKO KULTURO
13
PRVI MOŽ SAMOSTANA
NEKDANJA TOVARNA V TRŽIČU
GRAF
AMERIŠKI DENAR
AVTO ZA PREVOZ BLAGA
2
NAJHITREJŠA ZVER
BARIERA
EVIN MOŽ
OSEBA IZ *KRSTA PRI SAVICI*
GRŠ. ČRKA
NAJVIŠJI VRH PIRENEJEV (PICO)
POKOJNI AM. ROCKER TURNER
RIMSKA 2
DALJŠI MOŠKI SUKNJIČ
15
TLA POD VODO
GOROVJE NA AVS.-IT. MEJI NAD ZILJSKO DOLINO
POBUDNIK
VLADAR V MONAKU IN LIHTENŠTAJNU
NAŠA NAJREDKEJŠA ZVER
ALEKSANDER ČEFERIN
NEPORABLJEN DEL
RAZPORED ŠOLSKIH UR
ODPRTINA V STENI
GORSKI TRAVNIK V GORENJ. OKOLJU
REKA V KIRGIZIJI IN KAZAHSTANU
RAZGLABLJAVEC
JOSIP BROZ
1
KRAJ PRI POREČU
NEMŠKI SKLADATELJ
6
BABILONSKA BOGINJA LJUBEZNI
11
KILOVOLT
KRAJ PRI OPATIJI
IRSKI PEVEC
SANJE, SNOVI
RUSKA JUHA IZ MESA IN ZELENJAVE
ODTENEK, TANČINA
NIKELJ
RIMSKA 4
RAZLIČNA SAMOGLASNIKA
PRIPADNIK SRBSKE NACIONALISTIČNE VOJSKE
KRVOSKRUNSTVO
NAŠ PEVSKI TRIO
CERVANTESOV JUNAK (DON)
TUR, OGNOJEK



ORANŽNA PRILOGA JEDEM Z ŽARA

PESNIK FRITZ

NEPRETIRANOST

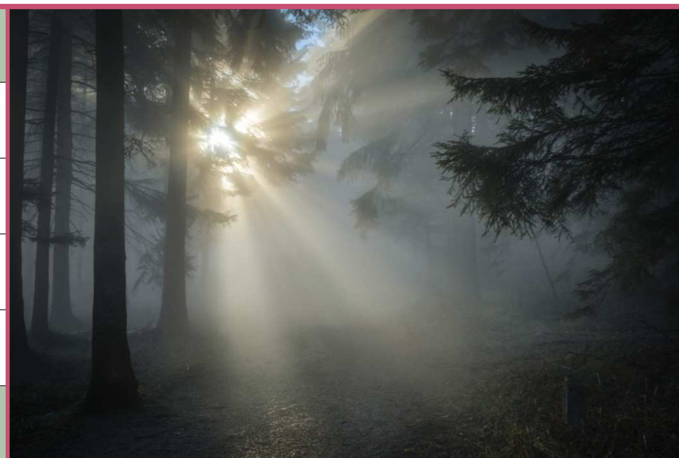
"KONEC" DRŽAVE

PEVEC IN KITARIST PRESLEY

DEL HLODA ZA IZDELOVANJE DEŠČIC ZA OBODE SIT

HRVAŠKO OBMEJNO NASELJE OB DONAVI

BERAČICA IZ VORANČEVE *JAMNICE*



12

NAŠ BOREC ZA S. MEJO (FRANJO)

KRAJ PRI MARIBORU

8

ENOTA ZA ELEKTRIČNO NAPETOST

IGRALKA ZALTA

MI, VI, ?

GLASBENI INTERVAL

SISTEMATSKA KATEGORIJA ŽIVIH BITIJ, RED

ŽLAHTNI PLIN

DRŽAVA NA ZAH. OBALI INDIJE

BOJAZLJIVEC, OMAHLJIVEC

NAŠ LITERARNI ZGODOVINAR (JANKO)

TEKOČINA, KI SE IZLOČI

PRIPRAVA ZA ČIŠČENJE ZEMLJE S PLUGA

MATEMATIČNA KONSTANTA

TRETJI PROGRAM RADIA SLOVENIJA

KRALJEVIČ IZ *MAHABHARATE*

IZRAELSKI PARLAMENT

KRAJ NAD DVOROM PRI ŽUŽEMBERKU

RENIJ

PIŠČAL IZ LUBJASTE CEVKE

MLEČNI IZDELEK

MINERAL, RAZLIČEK ORTOKLAZA

IZDELEK ZA PRIVEZOVANJE

VINSKO ŽGANJE

IZDELOVALEC OPANK

BIBLIJSKI OČAK

SISTEMATIČNO VPISOVANJE PODATKOV

10

OKTOBER

CEVKASTA KEMIJSKA POSODICA

FRANCOSKI SKLADATELJ (RENE)

PRIMERNA, DOPUSTNA KOLIČINA ALI STOPNJA

DVOBOJEVALEC

4

EDVARD RUSJAN

PEVKA SIRK

BOLEZEN GIBALNEGA SISTEMA

POZIMI VIDNO ZODIAKALNO OZVEZDJE

VELIKA SLADKOVODNA RIBA

EPOHA

POKOJNI ENIGMATIK LESKOVŠEK

ŠPANSKI JUNAK

IZVOZ

NAŠA EVROPSKA POSLANKA TOMC

AM. IGRALEC (CHRISTOPHER)

HILLARY CLINTON

14

PRISTANIŠČE NA SEVERU ČILA

7

NEKDANJI AVSTRIJ. SMUČAR (STEPHAN)

DEKOR

KALCIJ

KRAK CEVNE ALI ŽIČNE NAPELJAVE

KILOMETER

SAMARIJ

NIZOZ. FIZIK (SIMON VAN DER)

ELI WALLACH

CITROENOV OLDTAJMER

KLANČINA ZA LAŽJI DOSTOP

STIK DVEH PLOSKEV

NEKDANJE PAPEŽEVO POKRIVALO

5

PESNIŠKI IZRAZ ZA VEK

FRANCE KRIŽANIČ

9

OZRAČJE

dMFA

RAHEL NIHAJ SEM IN TJA

PODZEMNA ŽIVAL

DOTIK DVEH GIBAJOČIH SE TELES

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. decembra 2016**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani

SLIKA 18.
70-stopinjski razpor dveh konkavnih krogelnih zrcal

Pripomočki: konkavni zrcali v okvirju, stojalo, priževe, predmet.

Navodilo. Postavite predmet tako, da boste videli realno sliko. Kje je lahko predmet in kje je realna slika predmeta? Spreminjajte kot med zrcaloma. Kako to vpliva na lego slike?

Konstruirajte sliko pri školjčni postavitvi z enim od programov za dinamično geometrijo.

Literatura

[1] A. Likar, *Odboj svetlobe in zrcala*, Presek, **42**, 5, 2014/2015, 13–15.

[2] A. Likar, N. Razpet, *Večkratni odboji svetlobe na konkavnih zrcalih*, Presek, **43**, 6, 2015/2016.

[3] A. Sieradzan, *Teaching geometrical optics with the »optic mirage«*, Phys. Teach. **43**, 2005, 254–256.

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

	3	1				5	2
7	5						
	7				3		6
				8			5
					8		
		3		7		4	
8		5			6		
6			1				

→→→ **REŠITEV BARVNI SUDOKU**

4	3	1	8	6	7	5	2
7	5	6	2	1	4	3	8
1	7	8	5	4	3	2	6
3	6	2	4	8	1	7	5
2	1	4	7	5	8	6	3
5	8	3	6	7	2	4	1
8	4	5	3	2	6	1	7
6	2	7	1	3	5	8	4

× × ×

IPHO 2016: Zürich, Švica

Tomaž Cvetko

Od 11. do 17. julija letos je v Zürichu potekala 47. mednarodna fizikalna olimpijada. Na njej je sodelovalo 400 dijakov srednjih šol iz 86-ih držav. Slovenska ekipa se je po desetih urah tekmovanja in po tednu, polnem vtisov, domov vrnila s štirimi bronastimi medaljami in pohvalo.

»Tu dum tu dum,« se je 9. julija zvečer zaslišalo po ljubljanski glavni železniški postaji, ko je redni nočni vlak, ki povezuje Beograd in Zürich, odpeljal s perona. Po enajstih urah zatiskanja oči pred skoraj neizbežno budnostjo na policah-posteljah spalnega vagona smo prispeli v najdražje mesto v Evropi – Zürich. Na postaji sta nas pričakala predstavnik organizatorjev in vodič slovenske ekipe. Že je bilo slutiti, da Švicarji ničesar niso prepustili naključju. Nedelja je bila namenjena prihodu in registraciji, popoldne pa so si ekipe lahko ogledale mesto v spremstvu vodičev, saj je odlični javni prevoz omogočil hitro in svobodno gibanje po največjem švicarskem mestu.

V ponedeljek se je mednarodna fizikalna olimpijada tudi uradno začela. Otvoritvena slovesnost je potekala v t. i. kampusu Irchel, kjer se nahaja velik del univerze v Zürichu. Te pa ne gre zamenjevati s züriškim ETH, ki je samostojno organizacijo olimpijade zavrnil. Otvoritev je potekala hitro in brez zapletov, ker so namesto prihoda ekip na oder predvajali zelo simpatične grafike z znamenitostmi držav. Ob tem se je nekoliko izgubilo slovesno vzdušje, ki ga je reševala svečana zaobljuba tekmovalcev in vodij ekip, da bodo na olimpijadi sodelovali pošteno. Popoldanski program je bil izredno zanimiv, saj so na univerzi pripravili kratke delavnice z različnih področij znanosti in mnogi smo si želeli, da le-te ne bi tako hitro minile, kar se zgodi res redko. Sledila je še ekskurzija na PSI (Paul Scherrer Institute), kjer so nam predstavili raziskave na področju strukture beljakovin, ki jih omogoča tamkajšnji sinhrotron SLS (Swiss Light Source).

Torek je bil dan E, dan za eksperimentalni del tekmovanja. Tekmovalci smo bili razdeljeni v dve skupini, tako da je polovica tekmovala dopoldne, polovica pa popoldne. Slovenska ekipa si je najprej ogledala poslopja züriške hidroelektrarne, kjer skrbijo, da je mesto s 400 000 prebivalci preskrbljeno z energijo. Da je Švica ena najbogatejših držav sveta, potrjuje tudi dejstvo, da so ob vodnem zajetju za nekaj manj kot 10 milijonov evrov zgradili prehod za ribe, ki ga dnevno prečka okoli 30 rib.

SLIKA 1.
Skupinska slika

Eksperimentalni del tekmovanja je letos postregel z dvema zelo raznolikima problemoma. Prvi je bil namenjen določanju električne prevodnosti dvorazsežnih vzorcev. S štiritočkovno sondo, ki je omogočala, da voltmeter ni bil vezan neposredno na priključke vira napetosti, je bilo najprej potrebno določiti upor celotnega, z grafitom prevlečenega lista papirja. Upor takega lista je odvisen tudi od samih razsežnosti lista, saj tokovi po grafitu tečejo po vseh možnih poteh in je na manjšem kosu papirja možnih poti manj. Z merjenjem tokov na različno širokih kosih papirja smo dobili vrednosti funkcije, ki opisuje geometrijski popravek upora, z linearizacijo pa še parametre te funkcije. Problem je postal nekoliko bolj visokotehnološki in po občutku aplikativen, ko smo na podoben način določali lastnosti tanke silicijeve rezine, prevlečene s kromom. Nadgradnja v tem delu je bila posebna merilna tehnika, ki je zaradi simetrije obšla težave glede geometrijskih lastnosti vzorca. Končni rezultat meritev je bila specifična upornost kroma.

Drugi problem je bil sicer časovno nekoliko manj zahteven, a za izvedbo nekoliko bolj neprijeten. Šlo je za simulacijo faznih prehodov, ki so jo dosegli z zelo izvirno napravo: zvočnikom in makovimi semeni, ki so poskakovala v posodici, pritrjeni na membrano zvočnika. Prek vezja je bil zvočnik priključen na žagasti vir enosmerne napetosti, ki smo mu lahko spreminjali amplitudo, makova semena pa so bila analogija delcem, ki imajo pri določeni temperaturi (amplitudi napetosti) določeno stopnjo urejenosti. Ta so bila lahko v enem od dveh stanj. V neurejenem stanju so imela makova zrna dovolj energije, da so naključno preskakovala med dvema predeloma posodice, torej se je v obeh delih nahajalo podobno število semen. Pri manjših amplitudah nihanja membrane zvočnika so bila zrna v čedalje bolj urejenem stanju, večina semen je ostajala v predelu, kjer so bila na začetku. Eden od ciljev tega eksperimenta je bila tudi določitev kritične amplitude nihanja, pri kateri semena preidejo v neurejeno stanje, kar je analogno npr. vrelišču določene snovi. V principu je bil problem zelo lep in zanimiv, a potrebno je bilo opraviti veliko meritev v kratkem času in ni mi potrebno posebej omenjati, da štetje petdesetih makovih semen ni enostavno opravilo, ki bi ga kdorkoli želel opravljati trikrat na minuto. Pomanjkanje meritev je v nadaljevanju naloge kaj hitro pripeljalo do slepe ulice, saj so nelinearni grafi zahtevali razmeroma veliko izmerjenih točk. Po drugi strani pa je problem ponujal tudi nekaj »podarjenih« točk, saj smo morali sami zasnovati merilno tehniko za določanje velikosti amplitude nihanja membrane zvočnika. Za ta del je estonski predstavnik, ki je sestavil mehanizem za povečevanje amplitude (za njeno lažje odčitavanje), dobil tudi nagrado za najbolj kreativno rešitev.

Po eksperimentalnem delu tekmovanja je sledil dan za počitek, ki so ga organizatorji namenili ekskurziji v Liechtenstein, malo, a zelo bogato državo, ki je k organizaciji olimpijade primaknila nezanemarljiv znesek iz svojih bančnih rezerv. Država, ki šteje zgolj 36 000 prebivalcev, živi v tesnem sožitju s sosedo Švico, med drugim si delijo tudi valuto, švicarski frank. Ponavadi nekajmesečna potovanja, nekajdnevni izleti in pa krajše ekskurzije ne zadostujejo, da bi turist lahko spoznal deželo ali celo videl vse njene lepote, toda v primeru Liechtensteina ne bom preveč pretiraval, če trdim, da smo v enem dnevu videli vse, kar se je videti dalo. Glavno mesto Vaduz bi celo v Sloveniji veljalo za majhno mesto, a je izredno lepo urejeno, na njegovih ulicah pa je razstavljenih toliko kipov in skulptur kot v malokaterem muzeju. Po ogledu mesta smo se z avtobusom odpeljali v gore, ki predstavljajo vzhodno mejo z Avstrijo (zahodna meja s Švico poteka po reki Ren). Gorska pokrajina z mnogimi slapovi je očarala tudi nas, pa se štejemo za prebivalce alpske države. Žal je naš obisk zmotil dež, tako da je demonstracija sokolarstva odpadla in smo se morali zadovoljiti z zelo živo pripovedjo o ljubezni med sokolarjem in njegovimi pticami v eni od tamkajšnjih gostiln. Zvečer so nas pogostili v večnamenski dvorani in nam predstavili liechtensteinsko gospodarstvo, podjetja s sedežem v tej državi in tu nekje je hierarhična povezava med »veliko« Slovenijo in »majhnim« Liechtensteinom nekoliko zvodenela. V Liechtensteinu ne poznajo brezposelnosti, država pa je tudi ena redkih, ki nimajo dolga, temveč razprave o fiskalni politiki v 25-članskem parlamentu zaznamujejo predvsem pogovori o razporejanju bančnih rezerv.

Teoretični del tekmovanja je potekal v četrtek, 14. julija. Organizatorji so v skrbi za pravočasen začetek vse tekmovalce na prizorišče prepeljali že uro prezgodaj in s pisanjem smo začeli okoli 40 minut pred uradnim pričetkom. Tekmovalci smo se soočili s tremi problemi. Prvi problem sta predstavljali dve nalogi s področja mehanike, drugi problem je bil s področja električnih krogov, pri tretjem problemu pa smo se spoprijeli z velikim hadronskim trkalnikom in teorijo relativnosti.

Prva naloga se je vseskozi vrtela (bolj ali manj dobesedno) okoli valjev. Najprej smo obravnavali lesen valj, ki je imel v svoji notranjosti na neznanem mestu kovinski valj neznanih dimenzij. Preko posrednih meritev bi želeli izmeriti točno lokacijo in dimenzije valja. Posredni meritvi bi izvedli s postavitvijo valja na klanec v statičen položaj in z merjenjem nihajnega časa valja okoli njegove simetrijske osi. Naloga tekmovalcev je bila izraziti dimenziji (polmer in višino) malega valja z znanimi količinami. Drugi del naloge je obravnaval dokaj znano idejo vrteče se vesoljske postaje, ki bi s centripetalnim pospeškom simulirala težnost. Težava se je pojavila, ko sta se dva astronavta na omenjeni vesoljski postaji začela prepirati, ali so na Zemlji ali na nekem vrtečem se objektu. Najprej sta se trditev odločila preveriti z vzmetnim nihalom, a se je po obravnavi izkazalo, da bi imelo oddaljevanje in približevanje uteži Zemlji podoben učinek kot nihanje v končno velikem vrtečem se valju. V naslednjem poskusu želi eden od astronavtov svoj prav dokazati s spuščanjem telesa s stolpa v vesoljski postaji, a zaradi njegove prevelike vneme pri višini stolpa in Coriolisove sile telo pade točno na mesto pod stolpom (kakšno naključje!). Zadnje upanje za dokaz o vrteči se vesoljski postaji astronavt položi v vzmetno nihalo, ki se lahko prosto giblje v vodoravni smeri (tangentno na tla ladje) in na vpliv Coriolisove sile nanj. Tudi na koncu naloge ostaneta astronavta vsak na svojem bregu, naveličani pa so tudi ostali člani odprave.

SLIKA 2.
Skulptura v CERN-u

Drugi problem je posegel na področje dinamike v električnih krogih, ki pa je v slovenskih srednjih šolah pa tudi na krožkih redko obravnavamo, zato smo vsi člani ekipe drugo teoretično nalogo reševali slabše kot ostale dele tekmovanja. Naloga tekmovalcev je bila obravnava elementa X z nelinearno I–V karakteristiko. V prvem delu smo se ukvarjali z osnovnimi lastnostmi elementa, kot je npr. upor na posameznih vejah karakteristike. V drugem delu je bil element X uporabljen v vezju, ki je prek nekaj korakov postalo osnova za anteno za radijsko valovanje. Tretji del se je ukvarjal z uporabo bistabilnih nelinearnih elementov (elementa X) za modeliranje bioloških procesov, v tem primeru za delovanje nevrona. Element X se je zaradi svojih posebnih lastnosti obnašal različno pri različnih časih vzbujanja z določeno napetostjo.

Pri tretjem problemu smo se ukvarjali z velikim hadronskim trkalnikom (LHC), ki se v okviru CERN-a nahaja prav v švicarski Ženevi (podzemni del je sicer večinoma na francoski strani meje). Naloga je temeljila na teoriji relativnosti, ki jo je utemeljil Albert Einstein, sicer močno povezan z univerzo v Zürichu. Tretjo nalogo je dobro reševala celotna slovenska ekipa, za kar gre zahvala mentorjema in drugim predavateljem na pripravah, ki so nam v zelo kratkem času dobro predstavili sicer neznano snov in nam s tem omogočili omembe vredne rezultate na tekmovanju. Tretji problem je bil strukturiran tako, da smo najprej obravnavali mehanizme pospeševanja delcev, relativistično odvisnost hitrosti od preletene pospeševalne napetosti, z dimenzijsko analizo smo določili izraz za sevalno moč, pri vsakem koraku pa smo tudi konkretno izračunali vrednosti za delce pri določeni energiji. V drugem delu smo se ukvarjali z identifikacijo delcev na osnovi različnih časov preleta detektorja. Delci z enakimi gibalnimi količinami in različnimi masami imajo različne hitrosti, torej za prelet določene poti potrebujejo različne čase. Določiti je bilo potrebno najmanjšo dolžino detektorja, da bi lahko zanesljivo ločili med nabitim kaonom in nabitim pionom z enakima gibalnima količinama. V sklepnem delu naloge smo iz podanih »izmerjenih« podatkov računali mase delcev in jih identificirali.

Po zaključku tekmovalnega dela je večina ekipe čutila veliko olajšanje, čeprav je bilo nekaj misli usmerjenih tudi v skrb glede rezultatov. Še isti dan nas je nagovoril Derek Muller, bolj znan pod imenom svojega Youtube kanala Veritasium. Njegov nastop je bil v svojem bistvu motivacijski govor o prihodnosti fizike in njegove besede, ki so imele nekoliko vizionarski pridih, so v avditoriju požele veliko navdušenje. Sledila je vmesna zabava (grobi prevod iz Midterm Party) z mentorji ekip, bila pa je to v svojem bistvu pogostitev s predstavitvijo nekaterih švicarskih običajev.

V zadnjih dveh dneh pred zaključno prireditvijo sta sledili še ekskurziji v CERN in na goro Rigi. V CERN-u smo si ogledali njihove strežniške prostore in tako imenovano tovarno antimaterije. Nekaj časa smo imeli na voljo tudi za bližnji interaktivni muzej, ki se nahaja v izjemno atraktivni leseni krogli in je že samo zaradi tega vreden obiska. Po kosilu smo se odpravili še v muzej Rdečega križa, ki se nahaja v Ženevi, nedaleč stran od poslopja OZN. V muzeju smo spoznali delovanje Rdečega križa v različnih kriznih situacijah. Njihova stalna razstava obsega predstavitev treh področij delovanja te organizacije: obrambo človekovega dostojanstva, ponovno vzpostavljanje družinskih vezi in zmanjševanje tveganja naravnih nesreč. Zanimiva je bila tudi tokratna začasna razstava o samopodobi in idealu lepote skozi čas. Za ekskurzijo na goro Rigi smo imeli jasen in sončen dan, tako da smo se za razliko od mentorjev in prejšnje polovice tekmovalcev na 1798 metrih višine kopali v soncu in ne v megli. Na goro smo se pripeljali z zobato železnico, ki je značilna posebej za Švico. Nato smo se sprehodili nekaj metrov do vrha in uživali v pogledu na mnoga jezera, ki so se lesketala v dolinah švicarskih Alp. Po pobočju gore smo se nato odpravili proti železnici, ki je vodila na drugo stran hribovja, proti Luzernu in jezeru, ob katerem je mesto nastalo. V Luzernu smo si ogledali znameniti lesen most s poslikanimi oboki, po katerem je mesto tudi najbolj poznano. Po kratkem ogledu mesta s svojimi vodiči smo se z avtobusi odpravili proti našemu hotelu v Zürichu.

SLIKA 3.
Vzpon na Rigi

V nedeljo smo končno dočakali podelitev nagrad. Aleksej Jurca, Tomaž Cvetko, Jakob Robnik (vsi trije Gimnazija Bežigrad) in Luka Govedič (II. Gimnazija Maribor) smo prejeli bronasto medaljo, Jernej Debevc pa pohvalo. Lanskega uspeha, pet bronastih medalj, nam žal ni uspelo ponoviti. Obakrat smo se olimpijade udeležili trije tekmovalci in vsi domov prinesli medalje z bronastim sijajem. Prav tako je spodbudno dejstvo, da se prihodnje leto zdaj že izkušena Aleksej Jurca in Luka Govedič znova podajata v fizikalni boj in, kdo ve, morda pa bo kmalu na slovenskih vratovih nihala medalja še kakšne druge barve.

Podelitev medalj je popestrila orgelska izvedba skladb iz serije filmov Vojna zvezd, drugače pa so Švicarji vse zopet izvedli hitro in učinkovito: tekmovalce so v velikih skupinah klicali na oder, imena so sicer brali po vrstnem redu, medalje pa izročali kot po tekočem traku brez ozira na sočasnost omembe imena in prejema medalje. Po tednu Švici lahko rečem, da stereotip o švicarski natančnosti do velike mere drži, saj ni bilo čisto nič prepuščeno naključju. Celo gorske poti so bile na mestih tlakovane, ob poti pa so kar na bregu zgradili še igrišča za minigolf, kar je razumljivo, saj morajo za visoko ceno ponuditi luksuzno storitev. Mesta so čista in celo blokovsko naselje v neposredni bližini letališča je delovalo mondeno. Morda pa je dobro merilo delovanja družbe število nezaklenjenih (in nato neukradenih) koles, ki jih je bilo moč videti vsepovsod po Zürichu. In zato za mnoge Švica še vedno ostaja obljubljena dežela.

× × ×

Olimpijska domača naloga – ekscentričnost Lunine orbite

Andrej Guštin

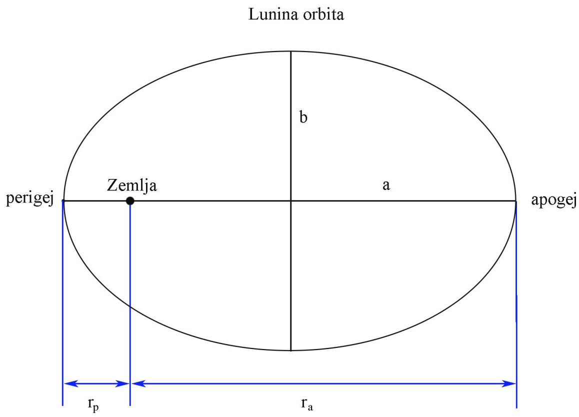
Letošnja 10. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike bo šele decembra v Indiji. V slovensko olimpijsko ekipo so se po napornih in številnih izbirnih preskusih uvrstili: Luka Govedič, II. gimnazija Maribor; Urban Ogrinec, Gimnazija in Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Anže Jenko, Aleksej Jurca in Jakob Robnik, vsi Gimnazija Bežigrad.

Za poletne priprave na olimpijado so dijaki dobili tudi praktično nalogo, ki se na prvi pogled zdi zelo enostavna: Na podlagi lastnih opazovanj, kot veš in znaš, določi ekscentričnost Lunine orbite.

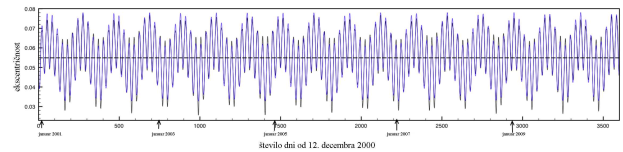
Srednješolci o orbitah planetov in satelitov zvedo malo. Pri predstavitvi gravitacijskega zakona in njegove uporabe pri opisu gibanja planetov okoli Sonca ali Lune oziroma umetnih satelitov okoli Zemlje se navadno zadovoljimo z aproksimacijo krožnih orbit. Le srednješolci, ki jim učitelji povedo za Keplerjeve zakone, zvedo nekaj o gibanju vesoljskih teles po eliptičnih tirnicah. Navadno ni časa za poglabljanje v elemente orbite (npr. ekscentričnost, ki govori o tem, kako »razpotegnjena« je elipsa). Kje so šele opisi »nevšečnosti«, ki jih prinaša dejstvo, da se z Zemljo gibljemo na vrtečem se in krožečem se vrtiljaku, ki pogled na orbite teles v Osončju močno izkrivlja. Tako so v heliocentričnem opazovalnem sistemu orbite planetov eliptične, toda Lunina orbita okoli Zemlje ne. O tem smo v Preseku že obširno pisali. Prav orbita Lune je zelo zahteven zalogaj za matematično formulacijo. Predstavljali bi si, da je njena orbita v geocentričnem opazovalnem sistemu enostavna elipsa, kot se po Keplerju pač to spodobi (slika 2).

SLIKA 1.
Foto: Andrej Guštin

Pokaže pa se, da je gibanje Lune zaradi gravitacijskih vplivov Sonca in gibanja Zemlje zelo zapleteno. Ob ščipu in mlaju, ko je Luna najdlje in najbližje Soncu, gravitacijska sila Sonca deluje v smeri povečanja razdalje med Luno in Zemljo. Ko je Luna v kvadraturi, deluje v smeri zmanjševanja razdalje med Zemljo in Luno.



SLIKA 2.
Elementi eliptične orbite okoli Zemlje.



SLIKA 3.
Izračunane spremembe ekscentričnosti Lunine orbite za obdobje desetih let. JPL/Solar System Dynamics

Lunina orbita je torej zelo zapletena. Na primer, spreminja se ekscentričnost Lunine orbite, ki niha okoli srednje vrednosti (slika 3).

Drugi zelo očiten primer je precesija osi Lunine orbite okoli Zemlje. To pomeni, da si apogej in perigej (Zemlji najbolj oddaljena in najbližja točka Lunine orbite) ne sledita v enakih časovnih razmikih, kot si sledijo Lunine mene, in ne kolikor traja obhodni čas Lune okoli Zemlje (siderski obhodni čas). Ta precesija je znatna, saj znaša nekaj več kot 40 stopinj letno. O tem pojavu nas pogosto opominjajo javna občila, čeprav ne vedo za pojav. Novinarji namreč radi poročajo o veliki polni Luni, ki ni vsak mesec … A vrnimo se k domači nalogi naši olimpijcev.

Privzemimo, da se Luna giblje po eliptični orbiti okoli Zemlje. Ekscentričnost e zapišemo kot (glej sliko 2)

- $$e = \frac{a - r_p}{a},$$

kjer je a velika polos orbite, r_p pa oddaljenost Lune v perigeju.

Iz slike lahko razberemo, da velja:

- $$2a = r_p + r_a,$$

kjer je r_a oddaljenost Lune v apogeju.

S tem izrazom v enačbi za ekscentričnost orbite nadomestimo a in dobimo:

- $e = (r_p - r_a)/(r_p + r_a)$ oziroma
  $e = (1 - r_p/r_a)/(1 + r_p/r_a)$.

Ta formulacija ekscentričnosti kar sama od sebe ponuja metodo za njeno merjenje. Iz enačbe vidimo, da je ekscentričnost povezana z razmerjem oddaljenosti Lune od Zemlje v apogeju in perigeju. Navidezni zorni kot Lune ϕ na nebu je odvisen od premera Lune $2R$ in njene oddaljenosti r od nas: $\mathrm{tg}(\phi/2) = R/r$ oziroma, ker je zorni kot majhen (približno 0,5 stopinje) kar $\phi = 2R/r$.

Zorni kot Lune je torej obratno sorazmeren z njeno oddaljenostjo. Sledi, da je razmerje zornih kotov Lune ob dveh oddaljenosti Lune, npr. v apogeju in perigeju:

- $$r_p/r_a = \phi_a/\phi_p$$

Ekscentričnost lahko sedaj zapišemo le z navideznimi zornimi koti Lune ob perigeju in apogeju:

- $$e = (1 - \phi_a/\phi_p)/(1 + \phi_a/\phi_p).$$

Če hočemo torej določiti ekscentričnost Lunine orbite, moramo le meriti njen navidezni zorni kot in ugotoviti, kdaj je ta največji in najmanjši.

Poglejmo, kako sta se naloge lotila dva olimpijca. Njune rezultate bomo zamolčali, lahko pa do njih pridete z malo astronomskega znanja in matematične telovadbe. Vabimo pa tiste, ki jih mika praktična astronomija, da tudi sami poskusijo izmeriti ekscentričnost Lunine orbite, morda uspejo izmeriti tudi spremembe njene velikosti.

Merjenje ekscentričnosti Lunine orbite – Urban Ogrinec

Za metodo merjenja navideznega premera Lune na nebu sem izbral merjenje časa prehoda Lune prek zornega polja v teleskopu. Pri tem sem uporabil Newtonov teleskop z goriščno razdaljo $f_{ob} = 1000$ mm in premerom objektiva $D = 200$ mm, na nemški ekvatorialni montaži brez sledenja. Pri opazovanjih sem uporabil okular z goriščno razdaljo $f_{ok} = 32$ mm in navideznim zornim poljem $\phi_{ok} = 70°$.

Meritve sem opravil 8. avgusta 2016, ko je bila Luna v perigeju, in 6. septembra 2016, ko je bila v apogeju. Luno sem postavil na skrajni konec zornega polja v okularju (2. dotik) – že prej sem preveril, v katero smer bo Luna zaradi vrtenja Zemlje potovala, tj. približno po rektascenziji. Čas potovanja Lune prek zornega polja sem meril do naslednjega stika z robom zornega polja (3. dotik).

Izmerjeni časi:

- $t_{\text{perigej}} = 7{,}18(1 \pm 0{,}012)$ minut,
  $t_{\text{apogej}} = 7{,}45(1 \pm 0{,}011)$ minut.

Naloga 1

Iz Urbanovih podatkov izračunaj ekscentričnost Lunine orbite.

- Povečava P teleskopa: $P = f_{ob}/f_{ok}$
- Zorno polje $\phi_{\text{(zorno polje)}}$ v okularju teleskopa: $\phi_{\text{(zorno polje)}} = \phi_{ok}/P$

Upoštevaj vrtenje Zemlje in to, da se Luna giblje okoli Zemlje.

Vprašanje Ali bi moral upoštevati tudi to, da Luna ni na nebesnem ekvatorju?

Ekscentričnost Lunine orbite – Anže Jenko

Vsak ugoden dan za opazovanje med 20. 8. in 15. 9. 2016 sem s fotoaparatom fotografiral Luno. Pri tem sem pazil, da so bile fotografije narejene z enako goriščno razdaljo objektiva. Na uspelih fotografijah sem kar na računalniškem ekranu izmeril premer Lunine ploskvice. Ugotovil sem, na katerih posnetkih je bil navidezni premer Lune največji in najmanjši (slike 4), in iz njih določil ekscentričnost Lunine orbite.

a)
b)
c)
d)

SLIKA 4.
a) Luna blizu prvega apogeja. b) Luna blizu prvega perigeja. c) Luna blizu drugega apogeja. d) Luna blizu drugega perigeja.

Naloga 2

Na podlagi Anžetovih fotografij izračunaj ekscentričnost Lunine orbite.

Vprašanje Ali je pri tej meritvi pomembno, kakšne so ekvatorialne koordinate Lune?

× × ×

Nekaj algoritmov za generiranje permutacij

Aleksander Vesel

→ Denimo, da imamo številčno ključavnico s tremi števkami. Koliko gesel moramo preizkusiti, če smo geslo pozabili, a vemo, da je sestavljeno iz števk 1, 2 in 3? (Vseh gesel je seveda šest: 123, 132, 213, 231, 312, 321.)

Zgornja naloga je preprost primer razvrščanja elementov neke množice v vsa možna zaporedja. Zanimajo nas torej urejene izbire vseh elementov (pri čemer ponavljanje elementov ni dovoljeno), neko tako izbiro pa imenujemo *permutacija*. Število permutacij v množici z n elementi je enako $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, pri čemer z zapisom $n!$ označimo *fakulteto* naravnega števila n. Opazimo lahko, da število permutacij zelo hitro narašča glede na število elementov v množici. V primeru pozabljene PIN številke, ob predpostavki, da poznamo vse štiri števke, ne pa tudi njihovega vrstnega reda, je tako potrebno preizkusiti že $4! = 24$ različnih gesel. Število permutacij za množice z največ 10 elementi je prikazano v tabeli 1.

V tem prispevku nas bodo zanimali algoritmi za konstruiranje vseh permutacij množice z n elementi. Brez izgube splošnosti bomo pri tem privzeli, da permutiramo množico prvih n naravnih števil $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za vsako konstruirano permutacijo bomo izvedli algoritem *obišči permutacijo*, ki predstavlja poljubno operacijo (na primer izpis) nad permutacijo. V nadaljevanju bomo uporabili tudi algoritem *zamenjaj*(x, y), ki zamenja vrednosti spremenljivk x in y.

Osnovni rekurzivni algoritem

V izrazu za število permutacij množice z n elementi

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

opazimo, da ga lahko za $n > 0$ zapišemo kot število permutacij množice z $n-1$ elementi pomnoženi z n oziroma

- $n! = n \cdot (n-1)!\,.$ (1)

Pri tem velja $0! = 1$. Za podajanje vrednosti fakultete naravnega števila n smo torej uporabili fakulteto števila $n-1$. Izraz (1) je zato primer *rekurzivne formule*. Rekurzija je močno orodje tudi pri razvoju algoritmov. Pravimo, da je algoritem *rekurziven*, če kliče samega sebe.

Ker smo število permutacij izrazili z rekurzivno formulo, lahko intuitivno pričakujemo, da bo možno rekurzijo uporabiti tudi pri konstrukciji permutacij. Rekurzivna zveza $n! = n \cdot (n-1)!$ pomeni, da lahko permutacije množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ pridobimo iz permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, pri čemer vsaki permutaciji množice $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ dodamo element n na vsa možna mesta (teh je ravno n).

Poglejmo si primer permutacij množice $\{1, 2, 3\}$, ki jih skonstruiramo iz permutacij množice $\{1, 2\}$.

Elementa 1 in 2 lahko razvrstimo na dva načina: 12 in 21. Sedaj vsako od permutacij dopolnimo s številom 3. Za permutacijo 12 tako dobimo

- **3**12, 1**3**2, 12**3**,

za 21 pa

- **3**21, 2**3**1, 21**3**.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

TABELA 1.
Število permutacij za množice velikosti največ 10

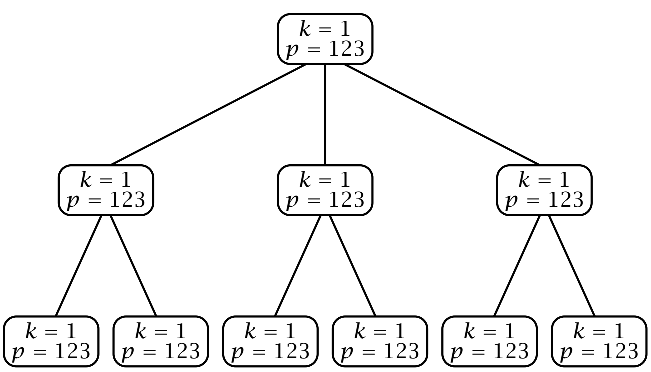
Algoritem 1: permutacije

Vhod: *Naravni števili n in k, zaporedje $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.*
Izhod: *Vse permutacije elementov zaporedja.*

```
begin
    if k=1 then
        obišči permutacijo(n, p)
    else
        for i := 1 to n do
            zamenjaj(p_i, p_k);
            permutacije(k − 1,n,p);
            zamenjaj(p_i, p_k);
        end
    end
end
```

Postopek se zdi enostaven, a je pri zapisu algoritma potrebno nekaj previdnosti. Predvsem se je potrebno izogniti nepotrebnemu shranjevanju permutacij, še posebej zato, ker njihovo število glede na vrednost n hitro narašča.

Postopek je predstavljen v Algoritmu 1 (permutacije). Algoritem vzame za osnovo poljubno permutacijo dolžine n, ki je predstavljena kot zaporedje $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Pri prvem klicu algoritma je vrednost parametra k enaka n. Algoritem za vse vrednosti i med 1 in k zamenja i-ti in k-ti element zaporedja, rekurzivno pokliče samega sebe s parametrom $k - 1$ ter nato spet zamenja i-ti in k-ti element zaporedja. Algoritem se zaključi z obiskom permutacije, ko k doseže vrednost ena.



SLIKA 1.
Delovanje algoritma permutacije za $n = 3$

Predstavimo delovanje Algoritma 1 s parametri $n = 3$, $k = 3$ in $p = (1, 2, 3)$ (glej sliko 1). Algoritem sproži tri rekurzivne klice za $k = 2$ ter $p = (3, 2, 1)$, $p = (1, 3, 2)$ ter $p = (1, 2, 3)$. Vsak od teh rekurzivnih klicev sproži še dva rekurzivna klica za $k = 1$, ob vsakem od teh rekurzivnih klicev algoritem obišče trenutno permutacijo shranjeno v p. Vrstni red obiskanih permutacij je: 231, 321, 312, 132, 213, 123.

Urejeno zaporedje permutacij

Včasih je zaželeno, da algoritem vrne urejeno zaporedje permutacij. Ko govorimo o urejenosti, ponavadi mislimo *leksikografsko urejenost*. Če gre za permutacije števk, je to kar običajna urejenost po velikosti, saj npr. permutacija $p = (1, 2, 3)$ na naraven način predstavlja število 123. Če pa so elementi množice črke, je leksikografska urejenost kar abecedna urejenost.

Predstavljeni algoritem tokrat ne bo rekurziven. Osnova algoritma je postopek, predstavljen v Algoritmu 2, ki za dano permutacijo p poišče naslednjo permutacijo v leksikografski ureditvi.

Algoritem najprej poišče najbolj desni element zaporedja, ki je manjši od svojega desnega soseda in ga označi z indeksom k. Če takšen element ne obstaja, je permutacija p največja, zato naslednja permutacija ne obstaja. V tem primeru dobi k vrednost 0 in algoritem se zaključi z vrednostjo *obstaja* = *false*. Če je $k > 0$, algoritem poišče najbolj desni element zaporedja, ki je večji od p_k, ter ju zamenja. Elemente z indeksi od $k + 1$ do n nato preuredi tako, da predstavljajo najmanjšo možno vrednost. Algoritem se zaključi z vrednostjo *obstaja* = *true*.

Kot primer si poglejmo potek algoritma za permutacijo $p = (3, 4, 2, 1)$. Algoritem najprej ugotovi, da se najbolj desni element zaporedja p, ki je manjši od svojega desnega soseda, nahaja na prvem mestu, zato je $k = 1$ in $p_k = 3$. Najbolj desni element zaporedja p, ki je večji od 3, se nahaja na drugem mestu, zato je $j = 2$ in $p_j = 4$. Algoritem zamenja elementa 3 in 4, nato pa preuredi elemente podzaporedja (3,2,1) v (1,2,3). Permutacija, ki jo vrne algoritem, je tako $p = (4, 1, 2, 3)$.

Algoritem 3, ki poišče vse permutacije v urejenem vrstnem redu, generiranje permutacij začne z najmanjšo permutacijo $p = (1, 2, \ldots, n)$. Permutacijo p v zanki spreminja tako dolgo, dokler obstaja večja permutacija.

Algoritem 2: naslednja

Vhod: *Naravno število* n*, zaporedje* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Izhod: *Boolova vrednost* $obstaja$*, nova vrednost* p.

```
begin
    k := n − 1;
    while p_k > p_{k+1} do
        k := k − 1;
    end
    if k = 0 then
        obstaja := false
    else
        obstaja := true;
        j := n;
        while p_k > p_j do
            j := j − 1;
        end
        zamenjaj(p_k,p_j);
        r := n; s := k + 1;
        while r > s do
            zamenjaj(p_r,p_s);
            r := r − 1; s := s − 1;
        end
    end
end
```

Hitro generiranje permutacij

Generiranje permutacij pogosto uporabljamo pri reševanju številnih pomembnih kombinatoričnih problemov. Zelo znan je *problem trgovskega potnika*, ki je bil v Preseku že opisan. Ponovimo na kratko definicijo problema. Dana je množica mest $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Za vsak par mest c_i, c_j je znana cena povezave od mesta c_i do mesta c_j, ki jo označimo z $d_{i,j}$. Trgovski potnik mora začeti pot v enem od mest, obiskati vsa preostala mesta s seznama ter se vrniti v izhodišče tako, da bo skupna cena poti čim manjša. Poiskati torej želimo takšno zaporedje mest $(c_{\pi_1}, c_{\pi_2}, \ldots, c_{\pi_n})$ iz C, da bo vrednost izraza $d_{\pi_1,\pi_2} + d_{\pi_2,\pi_3} + \ldots + d_{\pi_{n-1},\pi_n} + d_{\pi_n,\pi_1}$ najmanjša možna.

Problem trgovskega potnika spada med probleme, ki jih ne znamo rešiti s hitrimi algoritmi, torej z algoritmi, ki bi omogočali izračun rešitve v sprejemljivem času tudi za večje število vhodnih podatkov.

Algoritem 3: leksikografsko

Vhod: *Naravno število* n.
Izhod: *Zaporedje* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

```
begin
    p := (1, 2, ..., n);
    obstaja := true;
    obišči permutacijo(n, p);
    while obstaja do
        naslednja(p,n,obstaja);
        obišči permutacijo(n, p);
    end
end
```

Osnova reševanja problema je tako postopek, s katerim poiščemo vse permutacije množice C in izračunamo ceno pripadajočega krožnega obhoda.

Kot smo že povedali, število permutacij zelo hitro narašča glede na število elementov v množici, zato je problem rešljiv le za primere, ko je množica mest razmeroma majhna. Zato je zelo pomebno, da je delovanje algoritma kolikor je le mogoče hitro, kar pa je v precejšnji meri odvisno tudi od hitrosti generiranja permutacij.

Prvi predstavljeni algoritem, algoritem permutacije, je res enostaven, a ne spada med najhitrejše. Nova permutacija je generirana ob klicu algoritma za vrednost parametra $k = 1$, pred in po klicu algoritma pa se izvede algoritem zamenjaj. Število zamenjav, ki jih izvede algoritem, je zato vsaj dvakratnik števila generiranih permutacij. Algoritem, ki generira leksikografsko urejene permutacijem je nekoliko hitrejši, a ne bistveno. Med najhitrejše pa spada Heapov algoritem (glej Algoritem 4).

Spet je osnova poljubna permutacija $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Pri prvem klicu algoritma je vrednost parametra k enaka n. Algoritem za vse vrednosti i med 1 in k rekurzivno pokliče samega sebe s parametrom $k-1$ ter nato zamenja k-ti element zaporedja bodisi s prvim, če je k sod, bodisi z i-tim, če k lih. Algoritem se zaključi z obiskom permutacije, ko k doseže vrednost ena.

Algoritem deluje podobno kot algoritem pemutacije, le da se ob vsakem rekurzivnem klicu izvede samo ena zamenjava vrednosti. Skupno število zamenjav je tako približno enako številu generiranih permutacij. Predstavimo delovanje Algoritma 4 za parametre $n = 3$, $k = 3$ in $p = (1, 2, 3)$. Ker je k lih,

Algoritem 4: Heap

Vhod: *Naravni števili n in k, zaporedje $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.*
Izhod: *Vse permutacije elementov zaporedja.*

begin
  if k=1 **then**
    obišči permutacijo(n, p)
  else
    for i := 1 **to** n **do**
      heap($k-1$,n,p);
      if k je sod **then**
        zamenjaj(p_i, p_k);
      else
        zamenjaj(p_1, p_k);
      end
    end
  end
end

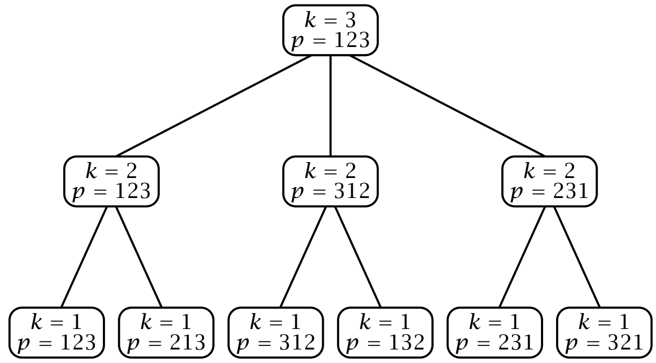
algoritem sproži tri rekurzivne klice za $k = 2$ ter po vsakem klicu zamenja prvi in zadnji element zaporedja. Vsak od teh rekurzivnih klicev sproži še dva rekurzivna klica za $k = 1$ ter po vsakem klicu zamenja drugi in i-ti element zaporedja. Delovanje algoritma za opisani primer je predstavljeno na sliki 2.

Za konec si v tabeli 2 poglejmo primerjavo časa izvajanja vseh predstavljenih algoritmov, realiziranih v programskem jeziku C++. Primerjava kaže, da je algoritem Heap skoraj dvakrat hitrejši od algoritma permutacije, medtem ko je algoritem leksikografsko nekje na sredini med njima. V vseh primerjanih programih je algoritem obišči permutacijo izpuščen.

Omenimo za konec še to, da bi bila algoritma permutacija in Heap nekoliko hitrejša, če bi ju zapisali nerekurzivno.

algoritem	čas (sekunde)
permutacije	10,107
leksikografsko	8,726
Heap	5,348

TABELA 2.
Čas izvajanja algoritmov za permutacije z 12 elementi



SLIKA 2.
Delovanje algoritma Heap za $n = 3$.

Literatura

[1] S. B. Maurer in A. Ralston, *Discrete Algorithmic Mathematics*, A K Peters/CRC Press, 2005.

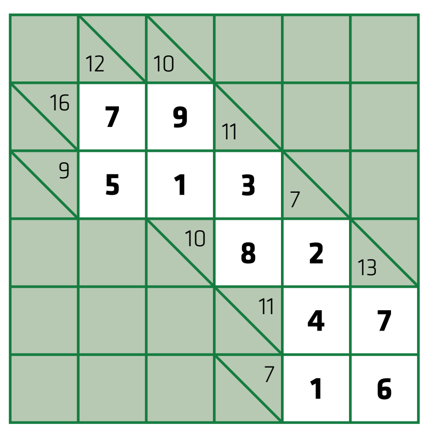
[2] S. Pemmaraju in S. Skiena, *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Cambridge University Press, 2009.

× × ×

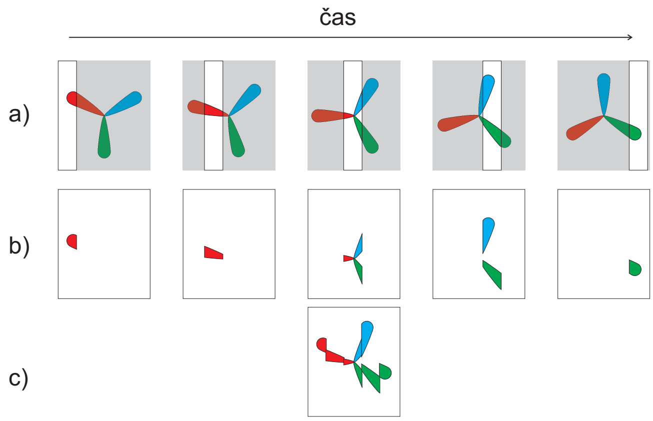
Križne vsote

REŠITEV S STRANI 29

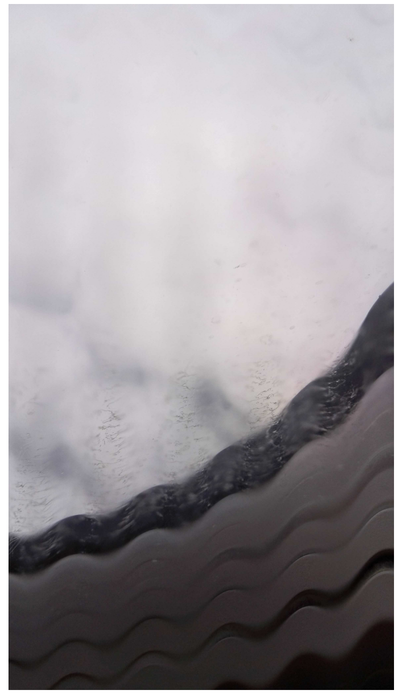
↓↓↓



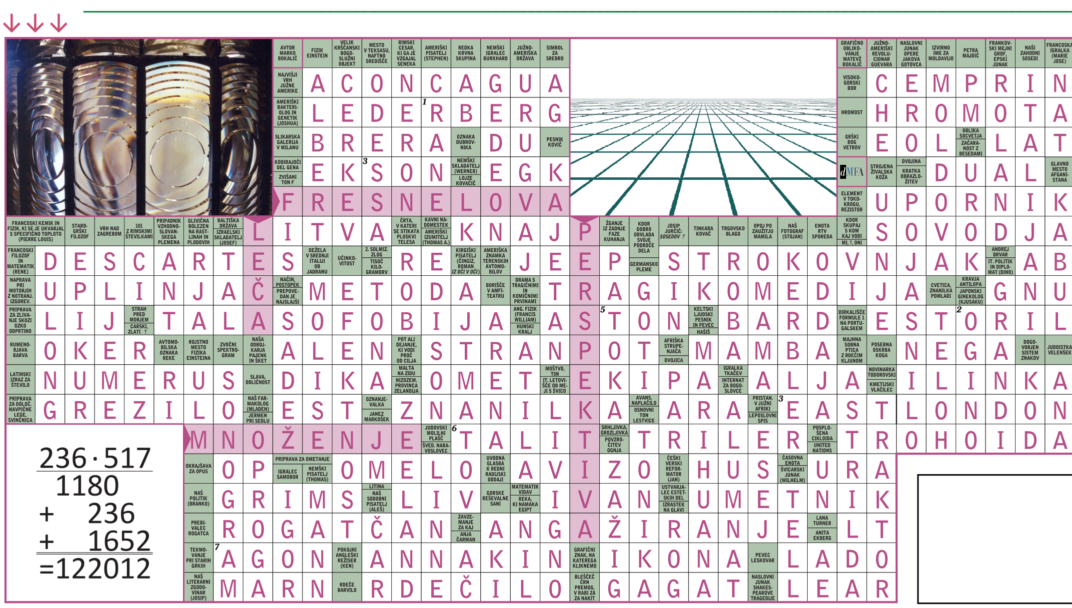
× × ×



SLIKA 2 K NARAVOSLOVNI FOTOGRAFIJI.
Telo (v našem primeru propeler z raznobarvnimi listi) se vrti v času osvetlitve. Zgornja vrstica kaže propeler v petih zaporednih trenutkih. V vsakem časovnem intervalu se propeler zavrti za 15°. Bel navpični trak ponazarja del fotografije, ki ga v tistem trenutku posname svetlobno tipalo. Tipalo na kader gleda tako, kot da bi se pred njim premikali razgrnjeni zavesi. Tipalo v nekem trenutku posname (npr.) le petino fotografije. Celotno fotografijo zajame v petih zaporednih časih, ki si sledijo od leve proti desni. Če se v tem času predmet spremeni (zavrti), bo naslednji pas fotografije posnel drugačno sliko (vrstica b). Posneti pasovi zloženi skupaj dajo popačeno sliko (c).



SLIKA 3 K NARAVOSLOVNI FOTOGRAFIJI.
Fotografija oblakov in roba letalskega okna. Kamera je bila naslonjena na okvir in zaradi tresljajev je slika popačena.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 44/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke 44. letnika Preseka je **Rosetta.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Urška Poje iz Ljubljane, Rajko Đudarić iz Celja in Ana Knap iz Preserj, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Zavesni zaklop

Aleš Mohorič

Tokratna naravoslovna fotografija kaže letalski propeler v mirovanju (slika 1a) in pa med vrtenjem (slika 1b). Na drugi sliki je propeler videti, kot bi bil iz gume, njegovi listi so ukrivljeni. V resnici ostane med vrtenjem propeler trden in zadrži svojo obliko. Njegova čudna oblika je posledica popačitve, ki nastane pri preslikavi.

Fotoaparat deluje tako, da z objektivom – zbiralno lečo – preslikamo predmet na svetlobno občutljivo ploskev. Nekdaj je bil to fotografski film, pri modernih, digitalnih fotoaparatih pa je to svetlobni polprevodniški detektor, ki ima gosto mrežo svetlobnih elementov, drobnih fotodiod. Fotografija mora biti pravilno osvetljena, drugače je na njej vse belo ali črno. Pravilno osvetlitev dosežemo na tri načine: spreminjamo velikost zenice, občutljivost svetlobnega detektorja ali čas osvetlitve. Velikost zenice spreminjamo z zaslonko. Na občutljivost na svetlobo vplivamo z vrsto filma ali ojačevalnim faktorjem, ki ga opiše podatek ISO. Običajna občutljivost (hitrost filma) ima ISO 100, spodobne digitalne kamere dosežejo ISO velikosti nekaj deset tisoč. Tretji način, s katerim vplivamo na osvetljenost fotografije, je čas osvetlitve. Tega spreminjamo z zaklopom. Zaklop je pregrada med objektivom in svetlobnim tipalom, ki se umakne za določen čas. Nekdaj so bili zaklopi mehanski ali v obliki zavese. Klasični zavesni zaklop deluje kot reža, ki potuje tik pred tipalom. Pri daljših časih je reža »širša« od tipala, pri kratkih časih osvetlitve pa ožja od tipala. Pri digitalnih kamerah zaklop lahko izvedemo elektronsko. Svetlobna tipala CCD omogočajo, da na celotnem tipalu začnemo in končamo z zajemom svetlobe na vseh svetlobnih elementih hkrati. Tipala tipa CMOS pa delujejo tako, da ob začetku osvetljevanja svetlobni element spraznimo in po določenem času zabeležimo količino svetlobe. Zaradi zgradbe tipala slike navadno ne moremo posneti hkrati s celotnega tipala ampak po pasovih. Take vrste zaklop imenujemo zavesni zaklop. Razlike med obema načinoma zajema slike običajno ne opazimo, ampak šele, ko se predmet hitro spreminja ali premika. Takrat se zgodi, da je kader na enem delu slike drugačen, kot na drugem, in pride do popačitve. Ta pojav je posledica drseče zavese in je shematično prikazan na sliki 2 na prejšnji strani.

SLIKA 1.
a) letalski propeler v mirovanju, b) med vrtenjem

Pogoji osvetlitve, v katerih opazimo pojav, morajo biti ravno pravi. Če je svetlobe malo, potem bo zaradi dolge osvetlitve predmet na fotografiji zabrisan, če je svetlobe veliko, pa lahko uporabimo kratek čas osvetlitve in dobimo ostro sliko. Popačitev je odvisna tudi od hitrosti elektronike v kameri in hitrosti, s katero se giblje telo. Slika 3 na prejšnji strani kaže fotografijo narejeno tako, da je bila kamera naslonjena na okenski okvir, ki se je tresel zaradi vrtenja motorjev.

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot šest milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Vsaki nalogi je dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR

14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že štiri knjige Matematičnega kenguruja:

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.