Pascalov aritmetični trikotnik

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Pascalov trikotnik binomskih koeficientov, ki ga nekateri imenujejo tudi aritmetični trikotnik oziroma Kitajski trikotnik, je v našem šolskem prostoru precej znan. V srednji šoli se uporablja predvsem kot pomoč pri računanju potenc dvočlenika ter pri verjetnosti in statistiki.

V prispevku je navedenih nekaj aktivnosti, s pomočjo katerih lahko pri osnovnošolcih krepimo sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje različnih matematičnih problemov. Predstavljene so le nekatere od aktivnosti v Pascalovem trikotniku, ki jih lahko izvajamo z osnovnošolskim znanjem. Verjamemo, da jih učitelji poznajo in izvajajo še več. Osredotočili smo se predvsem na tiste aktivnosti v Pascalovem trikotniku, ki jih lahko izvajamo in nadgradimo še v Leibnizevem harmoničnem trikotniku.

Ta prispevek je namreč zamišljen kot uvod k prispevku o Leibnizevem harmoničnem trikotniku, saj priporočamo, da pred preiskovanjem v Leibnizevem harmoničnem trikotniku učenci spoznajo in podrobno preiščejo Pascalov aritmetični trikotnik.

Ključne besede: Pascalov aritmetični trikotnik, preiskovanje, vzorci števil.

Potrebno predznanje učencev: seštevanje naravnih števil.

Priporočljivo (ni pa obvezno) predznanje: figurativna števila (števila, ki imajo geometrijsko obliko, če jih ustrezno grafično ponazorimo), Fibonaccijevo zaporedje, fraktali.

Pascal's Arithmetic Triangle

Abstract

Pascal's triangle of binomial coefficients, which some call arithmetic triangle or the Chinese triangle, is rather well known in Slovenian schools. In secondary school it is used mostly as an aid in calculating the powers of a binomial, and in probability and statistics.

This paper mentions a few activities which can be used to strengthen primary school pupils' ability to use mathematical reasoning to solve various mathematical problems. It presents only a few of the activities in Pascal's triangle which can be carried out at the primary school knowledge level. Teachers are undoubtedly familiar with and carry out others as well. The paper mostly focuses on those activities in Pascal's triangle which can be carried out and upgraded in the Leibniz harmonic triangle.

This paper has been conceived as an introduction to the paper on the Leibniz harmonic triangle, as it is recommended that pupils learn about and research Pascal's arithmetic triangle in-depth before performing inquiry in the Leibniz harmonic triangle.

Keywords: Pascal's arithmetic triangle, inquiry, number patterns.

Pupils' required prior knowledge: adding up natural numbers.

Recommended (but not mandatory) prior knowledge: figurate numbers (numbers that have a geometric shape when properly depicted graphically), Fibonacci sequence, fractals.

Uvod

Trikotna shema naravnih števil (glejte Sliko 1) se imenuje po francoskem matematiku, filozofu in fiziku Blaisu Pascalu (1623-1662), ker je o njej napisal Razpravo o aritmetičnem trikotniku, ki je izšla leta 1665, šele po njegovi smrti. To shemo nekateri avtorji imenujejo tudi Kitajski trikotnik, saj se na Kitajskem omenja že v 13. stoletju.

V nadaljevanju bomo Pascalov trikotnik binomskih koeficientov oziroma aritmetični trikotnik oziroma Kitajski trikotnik imenovali kar Pascalov trikotnik.

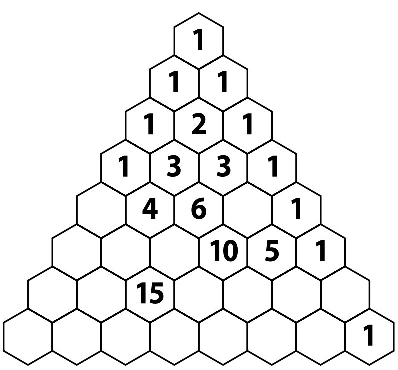
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Slika 1: Pascalov trikotnik

Pascalov trikotnik

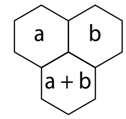
Ker v Pascalovem trikotniku nastopajo naravna števila, se lahko z njim srečajo že učenci v 1. in 2. vzgojno-izobraževalnem obdobju (VIO) osnovne šole.

Učenci naj preiskujejo shemo, v kateri so vpisana le nekatera števila, ubesedijo pravilo, po katerem so nanizana števila, ter po ugotovljenem pravilu dopolnijo manjkajoča števila v shemi in zapišejo še nekaj naslednjih vrstic Pascalovega trikotnika. (Glejte Sliko 2.)



Slika 2: Za lažje ločevanje števil in za ugotavljanje lastnosti števil po vrsticah naj bodo posamezna števila v shemi Pascalovega trikotnika vpisana v enake like (npr. šestkotnike, kvadrate …).

Učenci so sposobni že v 1. VIO ugotoviti, da se vsaka vrstica Pascalovega trikotnika začne in konča s številom 1, vsako število v notranjosti Pascalovega trikotnika pa je dobljeno kot vsota števil nad njim. Velja:



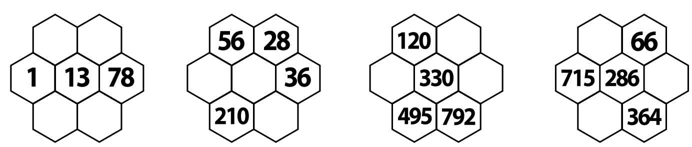
Ker po navadi izpolnjujemo števila v shemo Pascalovega trikotnika od zgoraj navzdol, učenci z računanjem števil v naslednjih vrsticah nimajo težav, razen če se v nekem primeru zmotijo in imajo od tam dalje vse narobe. Večinoma tudi niso dovolj vztrajni, da bi s števili izpolnili dovolj vrstic, potrebnih za nadaljnje preiskovanje. Zato jim za preiskovanje lastnosti števil v Pascalovem trikotniku ponudimo shemo, ki je izpolnjena vsaj do 16. vrstice.

Učenci lahko samostojno ugotovijo, da je zaradi komutativnosti seštevanja shema simetrična glede na navpično somernico.

Ugotovijo, da se vsaka vrstica začne in konča z 1, torej z najmanjšim številom, proti notranjosti, oziroma proti navpični somernici pa se velikost števil veča in tako največje število v vrstici leži tik ob somernici oziroma na njej.

Glede na starost in sposobnost učencev lahko težavnost aktivnosti in število vrstic v Pascalovem trikotniku večamo. Učenci lahko samostojno ugotovijo, da je število vrstic v Pascalovem trikotniku neskončno.

Po ugotovljenem pravilu naj učenci dopolnijo še nekatere izseke iz Pascalovega trikotnika.

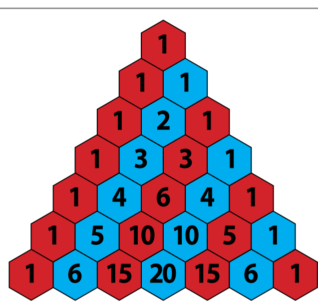


Slika 3: Posamezni izseki iz Pascalovega trikotnika, s pomočjo katerih preverimo, ali učenci razumejo, kako dopolnjujejo shemo

Lastnosti števil po vrsticah

V preiskovalnih aktivnostih učenci hitro ugotovijo, da za števila, ki so zapisana v isti vrstici Pascalovega trikotnika, veljajo zanimive zakonitosti. Glede na starost in sposobnosti učencev so lahko

Preglednica 1: Vsota števil na lihih in sodih mestih

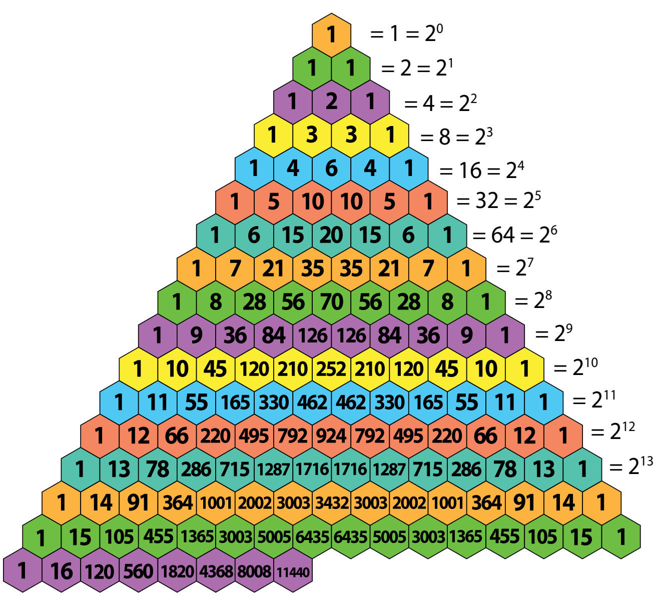
Vrstica		Vsota števil na lihih mestih	Vsota števil na sodih mestih
1.		1	
2.		$1 = 2^0$	$1 = 2^0$
3.		$1 + 1 = 2 = 2^1$	$2 = 2^1$
4.		$1 + 3 = 4 = 2^2$	$3 + 1 = 4 = 2^2$
5.		$1 + 6 + 1 = 8 = 2^3$	$4 + 4 = 8 = 2^3$
6.		$1 + 10 + 5 = 16 = 2^4$	$5 + 10 + 1 = 16 = 2^4$
7.		$1 + 15 + 15 + 1 = 32 = 2^5$	$6 + 20 + 6 = 32 = 2^5$
n.		2^{n-2}	2^{n-2}

Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

njihove ugotovitve zelo različne. Učenci lahko isto ugotovitev ubesedijo na različne načine, kar je odvisno od predhodnih izkušenj posameznika s preiskovanjem in ne nazadnje od njegovih sposobnosti opazovanja (prirojenih ali pridobljenih z vajo). Pa navedimo nekatere njihove ugotovitve.

a) Sledi nekaj ugotovitev učencev, ki veljajo za števila v **vodoravnih vrsticah**.

- Vsota števil v spodnji vrstici je dvakrat večja od vsote števil v predhodni zgornji vrstici. To pa zato, ker je vsako število iz zgornje vrstice dvakrat uporabljeno za pridobivanje števil spodnje vrstice (enkrat levo in drugič desno) kot eden izmed dveh seštevancev.
- Vsota števil, ki je v posamezni vrstici na lihih mestih, je z izjemo prve vrstice enaka vsoti števil, ki je v tej vrstici na sodih mestih. Obe vsoti lahko zapišemo kot potenci števila 2 (glejte preglednico 1).
- Iz obeh prejšnjih ugotovitev sledi, da je tudi vsota števil po posameznih vrsticah enaka vrednosti potence števila 2 (glejte Sliko 4). Če seštejemo vsoti števil na sodih in lihih mestih, ki sta enaki, dobimo dvakratnik potence števila 2, ki je tudi potenca števila 2. Torej: $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Vsota števil v n-ti vrstici je 2^{n-1}.



Slika 4: Vsota števil v posameznih vodoravnih vrsticah Pascalovega trikotnika je enaka potenci števila 2

- Alternirajoča vsota števil po vrsticah je z izjemo prve vrstice enaka 0, kar sledi iz druge ugotovitve in preglednice 1.

$$1 = 1$$
$$1 - 1 = 0$$
$$1 - 2 + 1 = 0$$
$$1 - 3 + 3 - 1 = 0$$
$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$
$$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$$
$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

- Če vsako število v polju Pascalovega trikotnika obravnavamo kot števko, so v vrsticah zapisane vrednosti potenc števila 11.

$$1 = 11^0$$
$$11 = 11^1$$
$$121 = 11^2$$
$$1331 = 11^3$$
$$14641 = 11^4$$

Ups! To očitno velja le za vrstice, v katerih so samo enomestna števila. Kaj pa v vrsticah, v katerih so tudi večmestna števila? V naslednji vrstici bi potemtakem morala biti zapisana vrednost potence $11^5 = 161051$, zapisana pa so števila:

1	5	10	10	5	1

.

Pa uporabimo lastnost pisnega seštevanja in »1 štejemo naprej«.

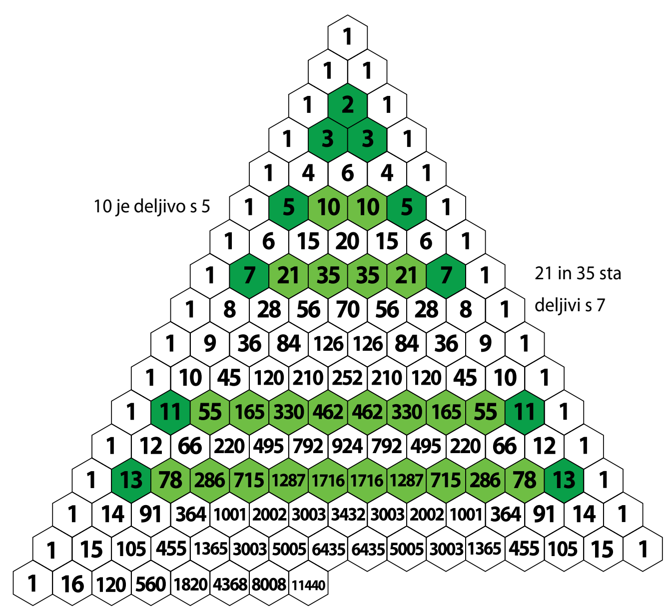
1	5	10	10	5	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	5 + 1	0 + 1	0	5	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	6	1	0	5	1

Torej je tudi v vrstici

1	5	10	10	5	1

ponazorjena vrednost potence $11^5 = 161051$.

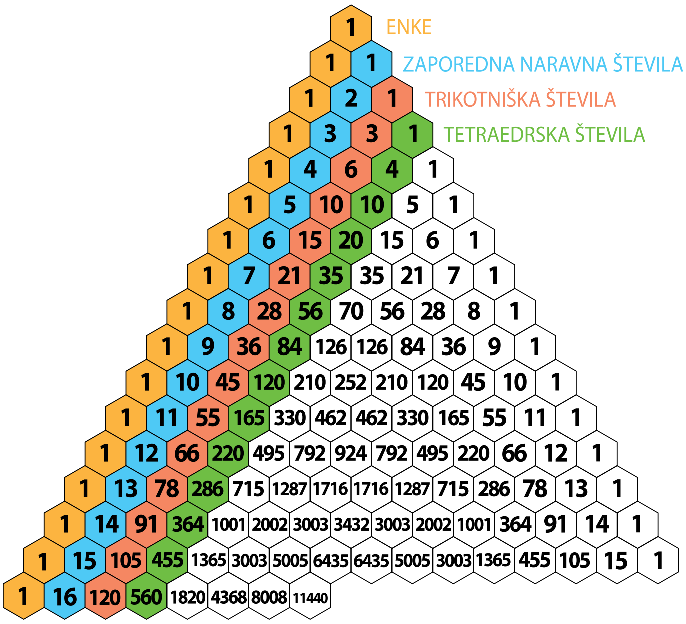
- V vrstici, ki ima v drugem in predzadnjem polju praštevilo, so tudi vsa števila med tema dvema prašteviloma deljiva s tem praštevilom. Npr.: števila 78, 286, 715, 1287 in 1716 so deljiva s 13 (glejte Sliko 5).



Slika 5: V vrstici, ki ima v drugem in predzadnjem polju praštevilo, so tudi vsa števila med tema dvema prašteviloma deljiva s tem praštevilom.

b) **Poševne vrstice** (vrstice, ki so vzporedne stranici trikotnika, ob kateri ležijo same enke): (Zapisane ugotovitve veljajo za poševne vrstice, ki potekajo v smeri od desno zgoraj do levo spodaj (glejte sliko 6) in tudi za vrstice, ki potekajo v smeri od levo zgoraj proti desno spodaj – ugotovili smo namreč že, da je shema simetrična glede na navpično somernico.)

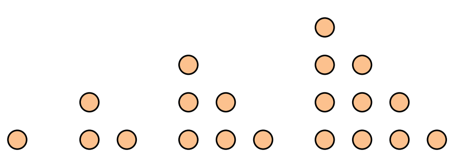
Če učenci že poznajo **figurativna števila** (glejte vir [3], stran 281–283), jih usmerimo na preiskovanje lastnosti števil znotraj poševnih vrstic.



Slika 6: Obarvane so nekatere poševne vrstice Pascalovega trikotnika

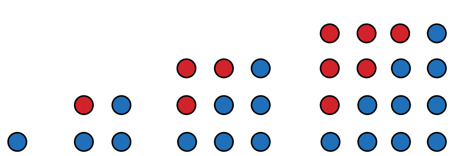
Ugotovijo lahko, da za števila v poševnih vrsticah velja:

- V prvi poševni vrstici so same enke (v vsaki celici je število 1).
- V drugi poševni vrstici so zapisana zaporedna naravna števila.
- V tretji poševni vrstici so zaporedna **trikotniška števila** (števila, ki predstavljajo število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko trikotnika): 1, 3, 6, 10, 15 …

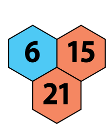


– Števila v tretji poševni vrstici oziroma trikotniška števila so vsote zaporednih naravnih števil od 1 dalje:
1 = **1**, 1 + 2 = **3**, 1 + 2 + 3 = **6**, 1 + 2 + 3 + 4 = **10**,
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15** …

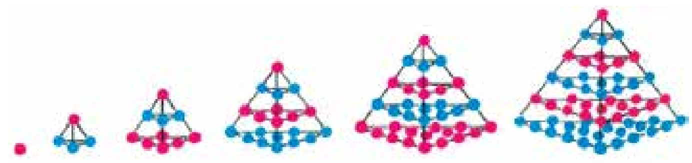
– Če seštevamo po dve zaporedni (trikotniški števili) števili v tretji poševni vrstici, dobimo popolne kvadrate števil – **kvadratna števila** (Število *m* je kvadratno tedaj in le tedaj, kadar lahko razmestimo *m* točk v obliko kvadrata.):
$1 + 3 = \mathbf{4} = 2^2$, $3 + 6 = \mathbf{9} = 3^2$, $6 + 10 = \mathbf{16} = 4^2$,
$10 + 15 = \mathbf{25} = 5^2$, $15 + 21 = \mathbf{36} = 6^2$ …



– Kvadrat števila iz druge poševne vrstice je enak vsoti desnega in spodnjega števila v tretji poševni vrstici. Primer: $6^2 = 15 + 21$.



- V četrti poševni vrstici so zapisana **tetraedrska števila** (števila, ki predstavljajo število objektov, ki jih lahko razmestimo v obliko tetraedra)**:** 1, 4, 10, 20, 35, 56 …



– Tetraedrska števila so vsote zaporednih trikotniških števil:
1 = **1**, 1 + 3 = **4**, 1 + 3 + 6 = **10**, 1 + 3 + 6 + 10 = **20**,
1 + 3 + 6 + 10 + 15 = **35**, 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = **56**
…

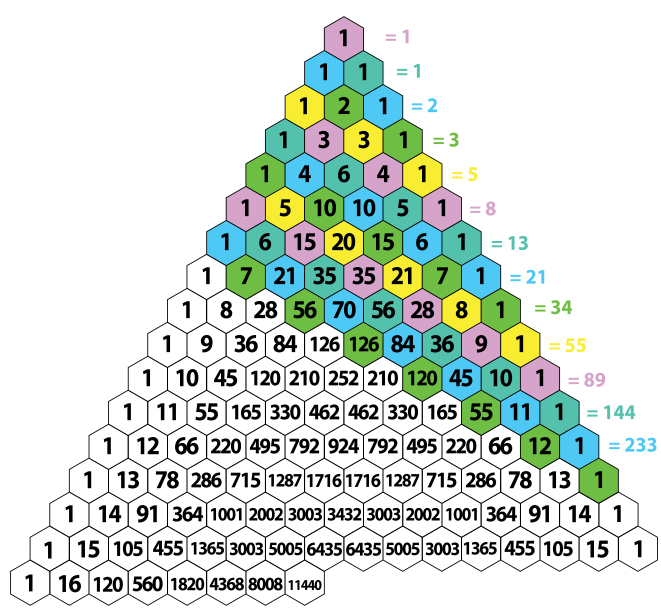
- *n*-to število v peti poševni vrstici je vsota prvih *n* (tetraedrskih) števil iz četrte poševne vrstice: 1 = **1**, 1 +4 = **5**, 1 + 4 + 10 =**15**, 1 + 4 + 10 + 20 = **35**, 1 + 4 +10 + 20 + 35 = **70**, 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = **126** …

Podobna trditev velja za vse vrstice, kar bomo podrobneje pokazali v naslednjem poglavju z naslovom Nogavice. Velja: **Vsota prvih *n* števil iz neke poševne vrstice je enaka *n*-temu številu iz naslednje poševne vrstice.**

c) Lastnosti števil v **položno-poševnih vrsticah**:

Vsota števil po spodaj obarvanih položno-poševnih vrsticah (glejte Sliko 7) tvori **Fibonaccijevo zaporedje**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 …

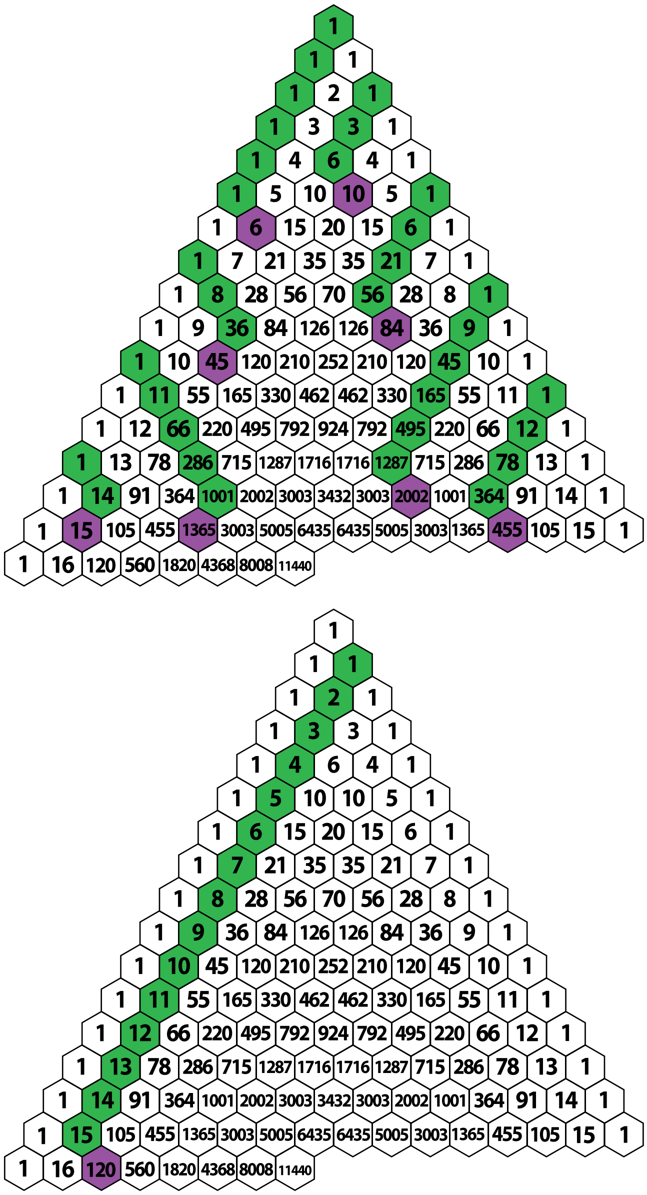
Fibonaccijeva števila, ki določajo Fibonaccijevo zaporedje, so določena tako, da je vsako **število** od tretjega naprej vsota predhodnih dveh (1 + 1 = **2**, 1 + 2 = **3**, 2 + 3 = **5**, 3 + 5 = **8**, 5 + 8 = **13**, 8 + 13 = **21**, 13 + 21 = **34** …).



Slika 7: Vsota števil po obarvanih vrsticah tvori Fibonaccijevo zaporedje

Nogavice

Lastnosti števil, ki jih pokriva skupna nogavica (oziroma hokejska palica, kot jo imenujejo nekateri), smo sicer ugotovili že v prejšnjem poglavju **Lastnosti števil po vrsticah** (pri poševnih vrsticah). Ker je za nekatere navedene ugotovitve potrebno malo več matematičnega znanja, za učence iz prvega VIO prilagodimo preiskovalno aktivnost z zgodbico o nogavicah, ki jih otroci v anglosaških deželah v prednovoletnem času obešajo na novoletno jelko za darila.



Sliki 8 in 9: Nogavice na Pascalovem trikotniku

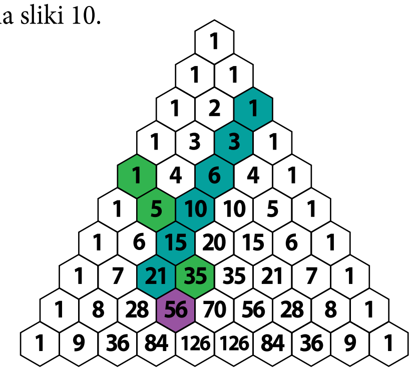
Že učenci v prvem VIO lahko ugotovijo, da so števila v Pascalovem trikotniku, ki jih pokriva ista nogavica, povezana na prav poseben način. Vse nogavice se začenjajo v enki na robu Pascalovega trikotnika, lahko so različno dolge, vse pa imajo enako veliko stopalo. Vsota števil v zeleno obarvanem delu nogavice je enaka številu, ki je v prstih nogavice (v vijoličasto obarvanem polju). Prsti nogavice v vijoličastem polju morajo biti v naslednji poševni vrstici od zeleno obarvanega dela nogavice.

S slike 9 razberemo, da velja:
1 + 14 = 15, 1 + 11 + 66 + 286 + 1001 = 1365, 1 + 8 + 36 = 45,
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, 1 + 3 + 6 = 10, 1 + 6 + 21 + 56 = 84,
1 + 9 + 45 + 165 + 495 + 1287 = 2002, 1 + 12 + 78 + 364 = 455.

Posebej uporabne pa so nogavice iz druge poševne vrstice Pascalovega trikotnika (glejte Sliko 9), saj lahko v prstih nogavice, ki so v tretji poševni vrstici, preberemo vsoto zaporednih naravnih števil od 1 dalje. Npr: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120.

Število v notranjosti Pascalovega trikotnika, ki je dobljeno kot vsota dveh števil (naj bo ***a*** levo in ***b*** desno) nad njim, je enako tudi vsoti števil, ki se »vzpenjajo« od števila ***a*** po vzporednici leve stranice Pascalovega trikotnika in vsoti števil, ki se »vzpenjajo« od števila ***b*** po vzporednici desne stranice Pascalovega trikotnika.

Učenci 1. VIO pa lahko to ugotovitev zapišejo tako, da je vsako število iz notranjosti Pascalovega trikotnika v prstih dveh različnih nogavic (proti levi in proti desni strani do enke na robu Pascalovega trikotnika). Tako lahko s pomočjo nogavic Pascalovega trikotnika npr. število 56 zapišemo kot vsoto na dva načina 1 + 5 + 15 + 35 = 56 in 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56, kot je ponazorjeno na sliki 10.



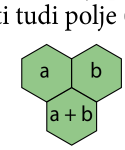
Slika 10: Število 56 je v prstih dveh nogavic v Pascalovem trikotniku

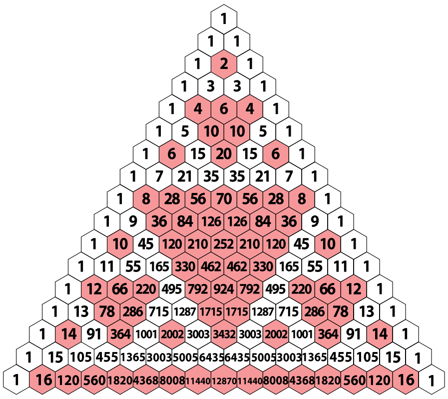
Večkratniki

Z učenci 5. razreda smo pri dodatnem pouku preiskovali lastnosti števil v Pascalovem trikotniku. Med drugim smo s pomočjo žepnega računala ugotavljali, ali so števila v njem večkratniki določenega števila. Seveda učenci še niso poznali pravil za deljivost, ločili so le liha in soda števila. Vsak učenec je v shemi Pascalovega trikotnika barval večkratnike drugega števila (slike 11–19).

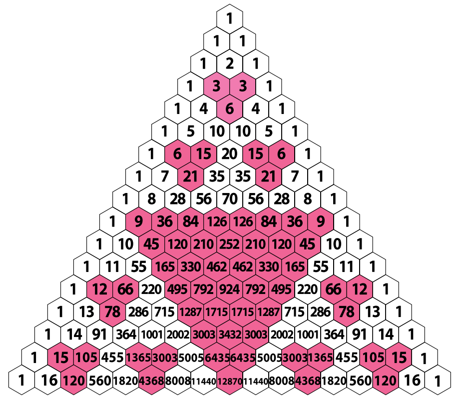
Ko smo končali z barvanjem, smo razvrstili vse pobarvane sheme in jih primerjali. Ko so učenci ugotovili vzorec barvanja števil, so hitro našli kakšno napako pri barvanju sošolca (npr. da so pozabili pobarvati vse večkratnike števil 2 oziroma 4, da 165 ni večkratnik števila 8) in to preverili še z žepnim računalom. Ob storjenih napakah so se ogromno naučili. S pomočjo žepnega računala so ob barvanju večkratnikov samostojno odkrili pravilo za deljivost z 2, s 3, s 5, z 9 in z 10.

Presenetili so me z ugotovitvijo, da so »vsi obarvani trikotniki obrnjeni navzdol«. Skupaj smo ugotovili, da če sta dve števili deljivi z nekim številom, je tudi njuna vsota deljiva s tem številom. Torej, če sta obarvani dve sosednji polji (celici) v isti vodoravni vrstici, moramo pobarvati tudi polje (celico) pod njima.

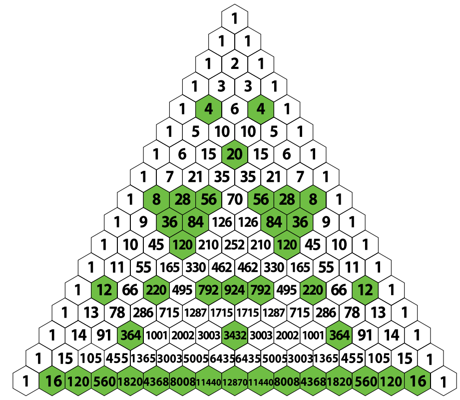




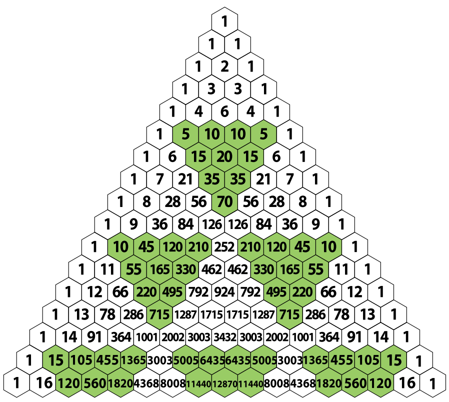
Večkratniki števila 2



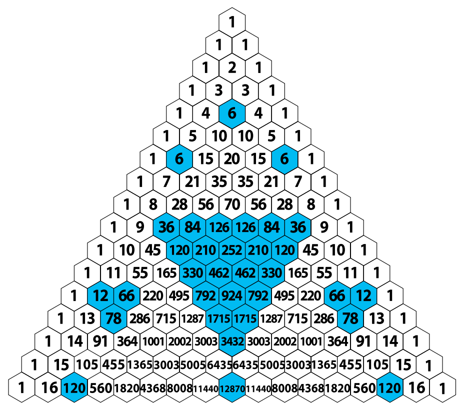
Večkratniki števila 3



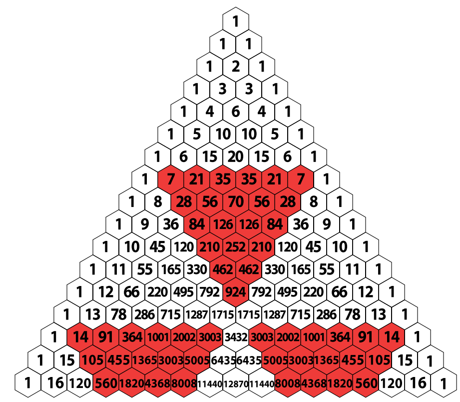
Večkratniki števila 4



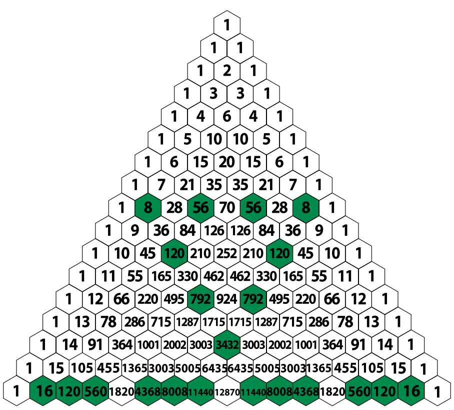
Večkratniki števila 5



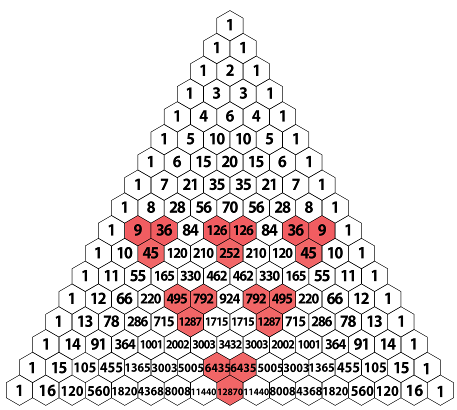
Večkratniki števila 6



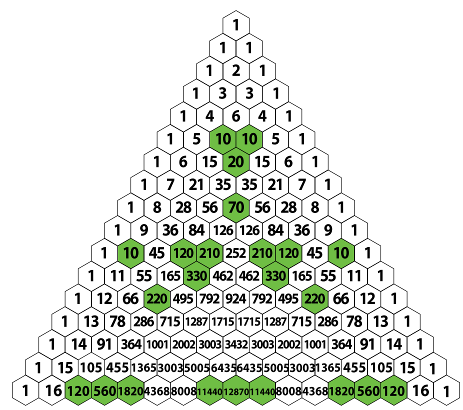
Večkratniki števila 7



Večkratniki števila 8



Večkratniki števila 9



Večkratniki števila 10

Slike 11–19: V Pascalovem trikotniku so učenci barvali večkratnike posameznih števil

Prav s pomočjo te ugotovitve so našli napako pri barvanju večkratnikov števila 4, ki jih je na sliki 14 barval eden od učencev.

Ko smo skozi liste s Pascalovimi trikotniki pogledali proti svetlobi, smo iskali skupne večkratnike različnih števil. Npr.: Ker so bili večkratniki števila 2 na prvem listu drugačne barve kot večkratniki števila 5 na drugem listu, smo skozi oba lista videli z obema barvama obarvane skupne večkratnike, to so večkratniki števila 10.

Podobno aktivnost sem kasneje še večkrat izvedla s starejšimi učenci. Pri preiskovanju smo se medpredmetno povezali tudi z biologijo in ugotovili, da se lastnost »je večkratnik« »recesivno deduje« navzdol po obarvanem trikotniku (pri tolmačenju recesivnosti smo števila v shemi razumeli kot hipotetične monoploidne organizme).

Ker želimo pridobiti čim več različno obarvanih shem, naj vsak učenec v razredu barva večkratnike drugega števila (idealno je, če za preiskovanje pridobimo obarvane sheme od večkratnikov števila 2 do večkratnikov števila 24). Za iskanje skupnih večkratnikov je priporočljivo, da vsak učenec pri barvanju uporabi drugo barvo.

Z učenci 3. VIO smo pred barvanjem večkratnikov v Pascalovem trikotniku preiskali lastnosti števil po vrsticah Pascalovega trikotnika. (Glejte sliko 5.) Kot smo že zapisali, so ugotovili: v vodoravni vrstici, ki ima v drugem (in predzadnjem) polju praštevilo, so vsa števila med tema dvema praštevilom deljiva s tem praštevilom. Primer: Števila 55, 165, 330 in 462, ki ležijo v isti vrstici med obema številoma 11, so deljiva s praštevilom 11.

Učenci so tudi s pomočjo te ugotovitve napovedali lego (v kateri vrstici se začne) in obliko (»navzdol obrnjen« trikotnik, saj je vsota dveh večkratnikov nekega števila tudi večkratnik tega števila) obarvanega vzorca večkratnikov za ta praštevila. Napovedi so seveda preverili še z računanjem in barvanjem večkratnikov teh praštevil.

Ugotovimo lahko: prvi, najvišje ležeči trikotnik z obarvanimi večkratniki praštevila n in hkrati eden izmed najmanjših obarvanih trikotnikov za ta večkratnik se začne v $(n + 1)$. vodoravni vrstici Pascalovega trikotnika. Stranice tega obarvanega trikotnika so dolge po $n - 1$ enot (oziroma polj v shemi Pascalovega trikotnika). Pri tem seveda eno samo obarvano polje pri večkratnikih števila 2 smatramo kot najmanjši obarvani »trikotnik« s stranico 1.

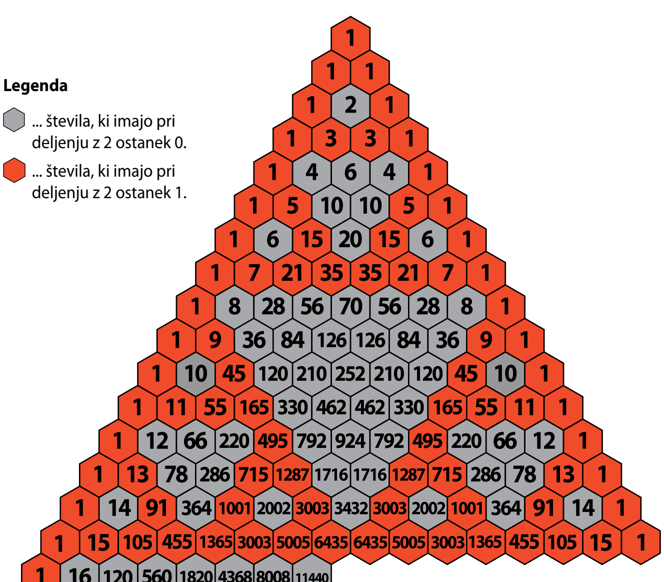
Če želimo izračunati število polj, ki smo jih obarvali za ta trikotnik, spet naletimo na trikotniška števila. Npr. Najvišje ležeči obarvani trikotnik z večkratniki števila 7, vsebuje $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ polj.

Ostanek pri deljenju

V naslednji aktivnosti smo v Pascalovem trikotniku z isto barvo obarvali še števila, ki imajo pri deljenju z izbranim številom enak ostanek. (Glejte priložene delovne liste.)

a) Ostanki pri deljenju z 2 (Slika 20)

Učenci so ugotovili, da gre (na sliki 20) za soda in liha števila ter da so podobno pobarvali shemo pri večkratnikih števila 2, le da so takrat ostala nepobarvana liha števila. Vse to smo povezali s fraktalom Sierpinski trikotnik.



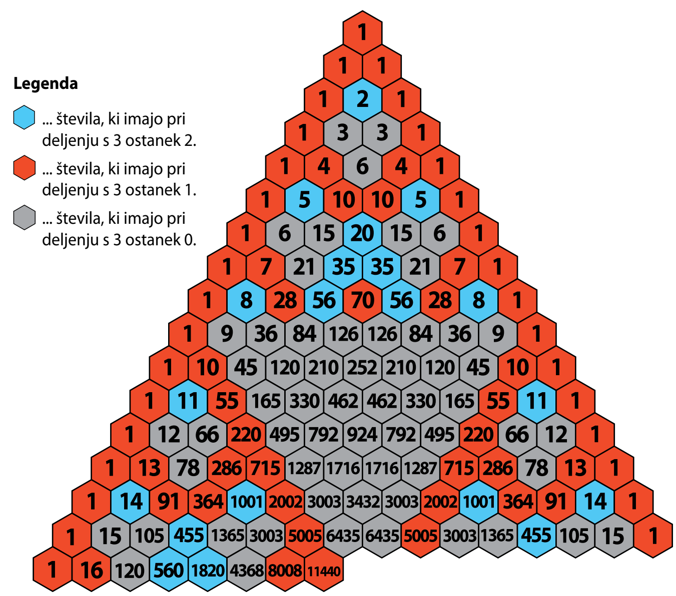
Slika 20: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju z 2 enak ostanek.

Že v prejšnjem poglavju (Večkratniki) in v tem poglavju (Ostanek pri deljenju) so učenci preiskovali vzorec pri barvanju. Ugotovili so, da so poleg prve in druge **vodoravne vrstice** v celoti pobarvane z rdečo še 4., 8., 16. vrstica, ter napovedali, da bo to veljalo tudi za 32. in 64. vrstico. Pravilnost svoje napovedi so preverili s pomočjo različnih spletnih aplikacij (uporabili smo vira [4] in [5]). V eni vrstici višje, torej v 3., 7., 15., 31., 63. vodoravni vrstici je sivo vsako drugo polje, ostala pa so rdeča. Torej je vsako polje pobarvano z rdečo v (2^n). vrstici, v $(2^n - 1)$. vrstici pa se izmenjujeta rdeče in sivo polje.

V 1. **poševni vrstici** so z rdečo pobarvana vsa števila. V 2. poševni vrstici je vsako drugo število sivo, ostala pa so rdeča. To so učenci ponazorili z vzorcem RSRSRSRSRS … , ki ima gradnik RS, v katerem so z R ponazorili rdeče pobarvano polje, s S pa sivo polje. Nekateri učenci so sicer vzorec oblikovali z oznakama za liha (L) in soda (S) števila, torej LSLSLSLSLS … , a zaradi naslednjih primerov v prispevku ohranjamo oznake za barve. Učenci namreč že vedo, da je vsako drugo zaporedno naravno število sodo oziroma parno. V 3. poševni vrstici se izmenjujeta po dve rdeči in dve sivi polji, torej imamo vzorec RRSSRRSSRRSS … z gradnikom RRSS. V 4. poševni vrstici se izmenjujeta eno rdeče in tri siva polja. Tako imamo vzorec RSSSRSSSRSSS … z gradnikom RSSS. V 5. poševni vrstici se izmenjujejo štiri rdeča in štiri siva polja. Torej imamo vzorec z gradnikom RRRRSSSS.

b) Ostanki pri deljenju s 3 (Slika 21)

Ostanki pri deljenju s 3 tvorijo bolj zapleten vzorec barvanja. Glejte sliko 21. Nekateri učenci so pri barvanju števil, ki imajo pri deljenju s 3 enak ostanek, nadaljevali barvanje še v naslednje vrstice Pascalovega trikotnika. Najprej so napovedali, kakšne barve bo polje, ga narisali in pobarvali, nato so pravilnost barvanja preverili še z računanjem.



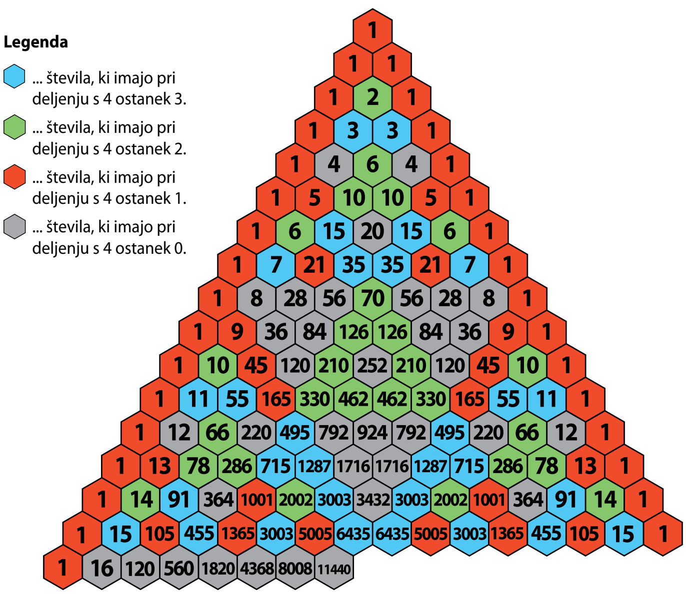
Slika 21: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 3 enak ostanek.

Ugotovili so, da se v 3. in 9. **vodoravni vrstici** izmenjujejo rdeča in modra polja. Enako so predvideli tudi za 18. vodoravno vrstico (ki na sliki 21 ni narisana). Toda v 18. vrstici je sodo število (18) polj, zato sta sredinski dve polji ob somernici enake barve, kar se zgodi tudi v 6. vrstici.

Vsa števila v 1. **poševni vrstici** so obarvana rdeče. V 2. poševni vrstici se v vzorcu ponavlja gradnik RMS (rdeča, modra, siva), torej imamo vzorec RMSRMSRMS … V 3. poševni vrstici se izmenjujejo eno rdeče in dve sivi polji, oziroma imamo gradnik RSS. Tako dobimo vzorec RSSRSSRSS … V 4. poševni vrstici se izmenjujejo 3 rdeča, 3 modra in 3 siva polja. Torej imamo v vzorcu gradnik RRRMMMSSS.

c) Ostanki pri deljenju s 4 (Slika 22)

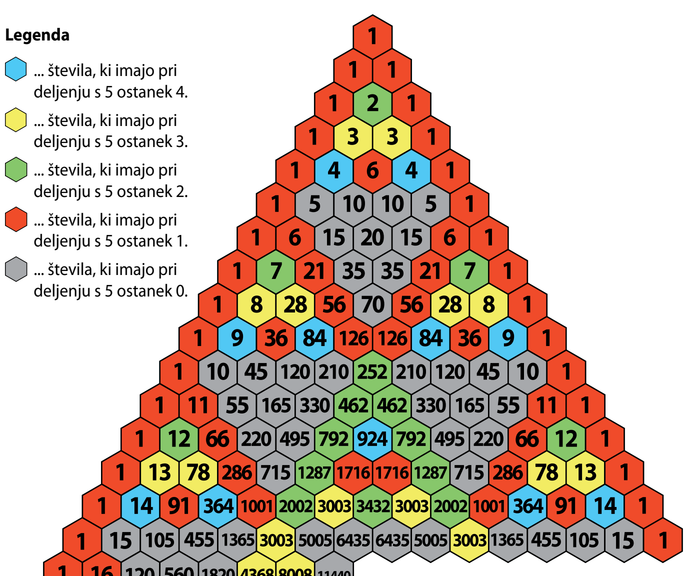
Tudi v primeru barvanja števil, ki imajo pri deljenju s 4 enak ostanek (glejte sliko 22), so preiskovali obarvane vzorce števil po vrsticah in napovedovali, katera barva bo npr. v 20. polju 2. poševne vrstice.



Slika 22: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 4 enak ostanek.

č) Ostanki pri deljenju s 5 (Slika 23)

Učenci že vedo, da je število deljivo s 5, če je zadnja števka 0 ali 5. Na podoben način so pri barvanju števil, ki imajo pri deljenju

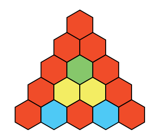


Slika 23: Z isto barvo so obarvana števila, ki imajo pri deljenju s 5 enak ostanek.

s 5 enak ostanek, zapisali, v katerem primeru bo ostanek 1, 2, 3 ali 4. Torej:

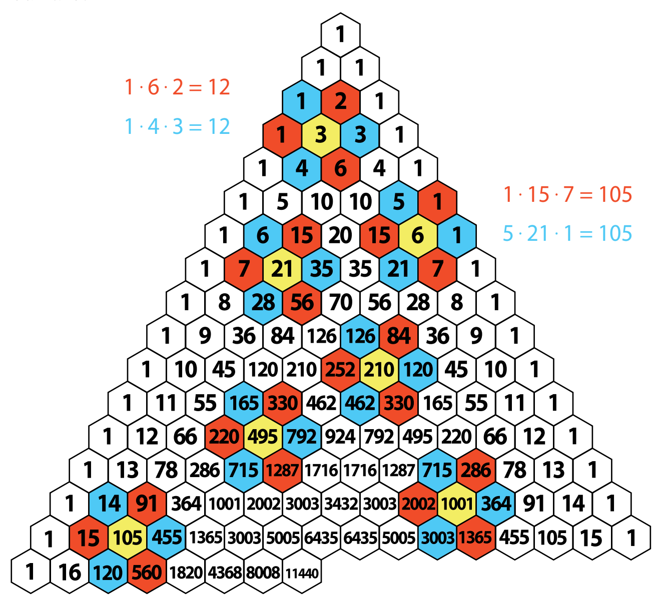
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 1, če je zadnja števka 1 ali 6.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 2, če je zadnja števka 2 ali 7.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 3, če je zadnja števka 3 ali 8.
- Število ima pri deljenju s 5 ostanek 4, če je zadnja števka 4 ali 9.

Poleg tega, da so ugotavljali vzorec barvanja v vodoravnih in poševnih vrsticah, so učenci ugotovili, da se na slikah del barvanja ravninskega vzorca večkrat ponovi. Tako se npr. na sliki 23 večkrat ponovi del barvanja vzorca:



Cvetovi

Učenci 2. VIO so preiskali lastnosti števil iz šestih cvetnih listov posameznega cveta, ki so kjerkoli na shemi Pascalovega trikotnika (glejte sliko 24). Pri preiskovanju so uporabljali žepno računalo.



Slika 24: Cvetovi na Pascalovem trikotniku

Ugotovili so, da za vse cvetove, ki so na Pascalovem trikotniku, velja:

- **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.** Primer:

  Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih:
  $15 \cdot 7 \cdot 56 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 5880$

  Zmnožek števil v modrih cvetnih listih:
  $6 \cdot 28 \cdot 35 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 5880$

Ugotovili so, da pri večjih številih sploh ni treba računati vrednosti zmnožka števil, ampak morajo ugotoviti, da v obeh zmnožkih nastopajo isti (pra)faktorji.

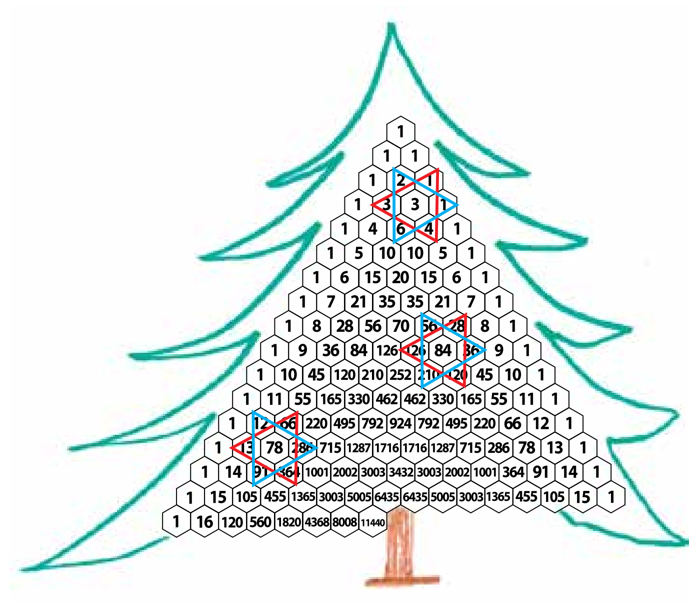
- Iz prve ugotovitve sledi, da je **zmnožek števil v vseh cvetnih listih istega cveta popoln kvadrat**.

  Torej: $15 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 35 = 5880^2$.

Preiskovali so tudi, če je število v rumenem polju cveta povezano s števili v cvetnih listih. Ugotovili so:

- Če seštejemo zmnožka števil v rdečih in modrih cvetnih listih, dobimo večkratnik števila iz rumenega polja. Npr.: Vsota $105 + 105 = 210$ je večkratnik števila 6.

Če izvajamo aktivnosti s Pascalovim trikotnikom v prednovoletnem času, lahko namesto cvetov narišemo zvezde, samo shemo Pascalovega trikotnika pa okrasimo kot novoletno jelko (slika 25). Učenci preiskujejo, kaj velja za števila v rdečih oziroma modrih trikotnikih znotraj iste zvezde.



Slika 25: Pascalov trikotnik kot novoletna jelka, okrašena z zvezdami

Zaključek

V eni sami trikotni shemi lahko najdemo ogromno idej za preiskovanje, napovedovanje, utemeljevanje, sklepanje ter iskanje vzorcev števil, posplošitev in zakonitosti. Prav ta red v matematiki, pravila in vzorci nas vedno znova očarajo in tako tudi učenci občutijo lepoto matematike. V naravi in matematiki je vse urejeno ter ima nek red in smisel. Ob preiskovalnih aktivnostih bo učenje matematike učencem v veliko zadovoljstvo ter navdih in spodbuda za nadaljnje delo, saj bo ob tem vsak od njih lahko uspešen.

Opisane aktivnosti so primerne za izvajanje pri rednem pouku matematike (za preiskovanje), pri dodatnem pouku, podaljšanem bivanju, dnevih aktivnosti, delavnicah za nadarjene …

Te aktivnosti pa lahko učenci prenesejo tudi v domače okolje in se v družini igrajo družabne matematične igre v razvedrilo starim in mladim. ■

Viri in literatura

[1] Enzensberger, H. M. (2000). *Številski hudiček: knjiga za vse, ki jim je matematika trn v peti.* Tržič: Učila.

[2] Hogben, L. (1976). *Matematika v nastajanju.* Ljubljana: Mladinska knjiga.

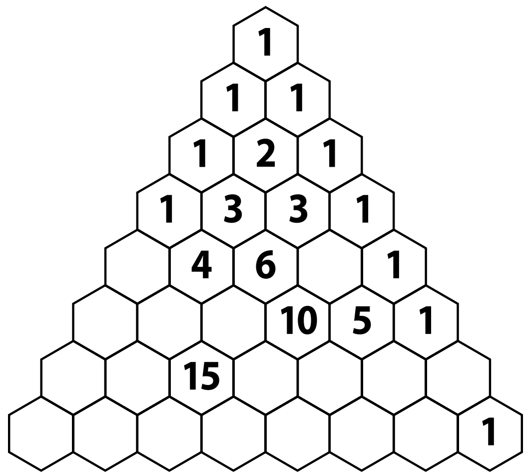
[3] Rajh, S. (2013). *Različni načini reševanja nalog z vzorci.* V Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

[4] http://www.shodor.org/interactivate/activities/ColoringMultiples/ (pridobljeno 20. 7. 2017)

[5] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml (pridobljeno 20. 7. 2017)

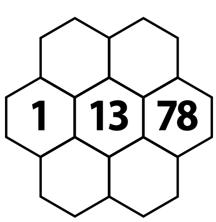
Pascalov trikotnik - preiskovanje števil

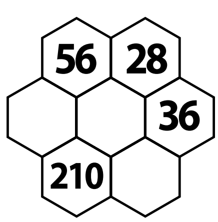
1. Ugotovi pravilo in dopolni manjkajoča števila v shemi.
Kaj velja za števila v shemi? Zapiši vse ugotovitve.

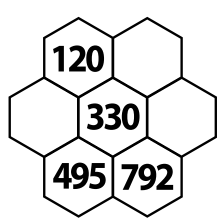


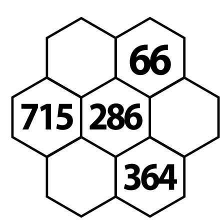
Doriši še nekaj vrstic sheme. Koliko vrstic bi lahko še dodal?

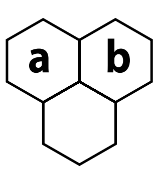
Po ugotovljenem pravilu dopolni še spodnje dele zgornje sheme.











2. Razišči lastnosti števil v shemi Pascalovega trikotnika.

Kaj ugotoviš?

Kaj velja za števila, ki ležijo v isti vrstici? Zapiši vse ugotovitve.

3. V shemi Pascalovega trikotnika pobarvaj večkratnike poljubnega števila.

Zapiši izbrano število. ____________

Kaj velja za obarvana števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

Obarvane sheme primerjaj s sošolci, ki so barvali večkratnike drugih števil. Kaj ugotovite?

4. V shemi Pascalovega trikotnika z isto barvo pobarvaj števila, ki dajo pri deljenju z 2 (3, 4, 5) enak ostanek. Zapiši ugotovitve.

Legendo si pobarvaj sam:

pri deljenju z 2:

… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 0.

… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 1.

pri deljenju s 3:

… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2.

… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1.

… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 0.

pri deljenu s 4:

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3.

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 2.

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 1.

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 0.

pri deljenju s 5:

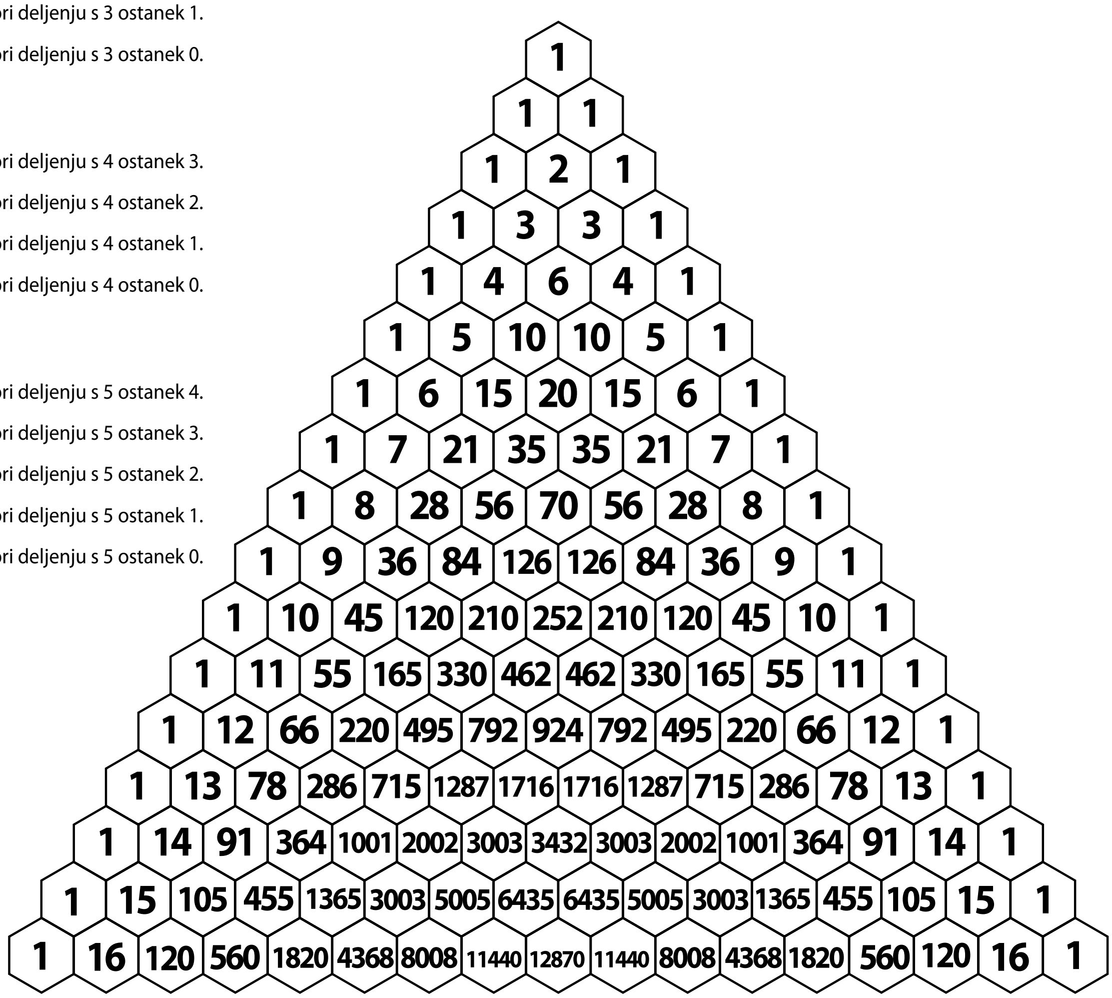
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 4.

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 3.

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 2.

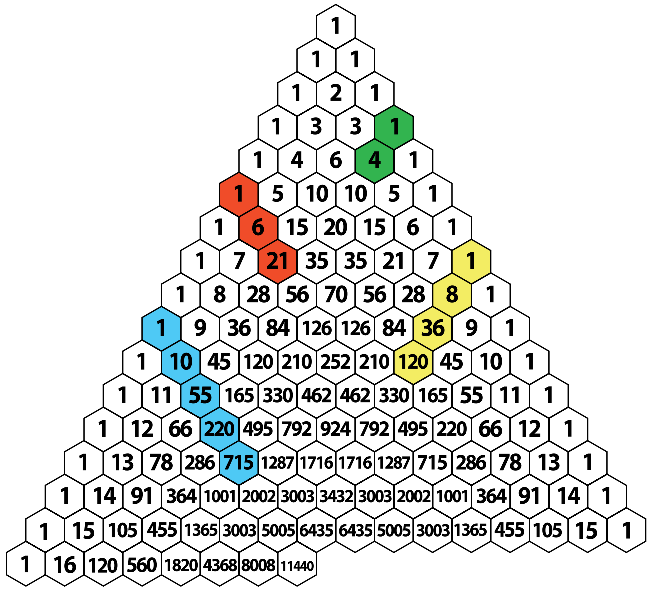
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 0.



5. Nogavice v Pascalovem trikotniku

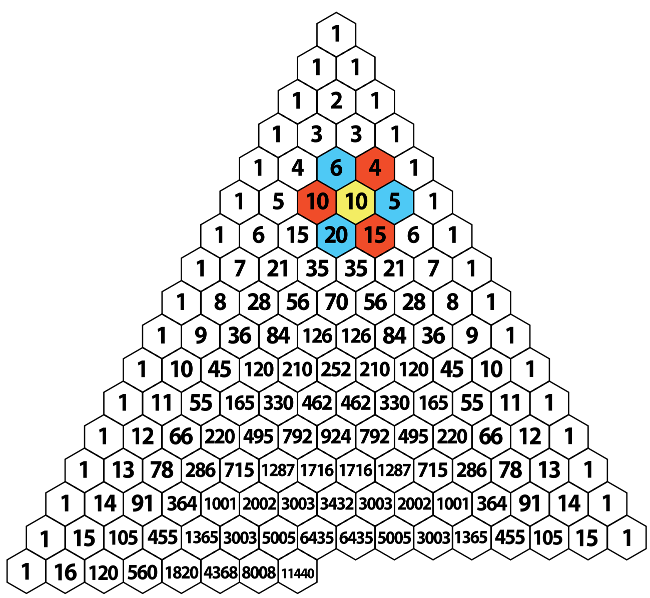
Kaj velja za števila v poljih pobarvanih z enako barvo?



Pobarvaj najbližje polje s številom, ki vsebuje vrednost vsote enako pobarvanih števil. Kaj ugotoviš? Še sam nariši nekaj primerov in računsko preveri ali tvoja ugotovitev vedno velja.

6. Cvetovi v Pascalovem trikotniku

Na shemi Pascalovega trikotnika je narisan cvet s šestimi cvetnimi listi. Preiskuj lastnosti pobarvanih števil. Kaj ugotoviš?



Kaj velja za števila v enako obarvanih cvetnih listih?

Kaj velja za števila zapisana v vseh cvetnih listih?

Še sam nariši nekaj cvetov na Pascalov trikotnik in preveri ali tvoja ugotovitev velja tudi za druge cvetove.