MOČNIK

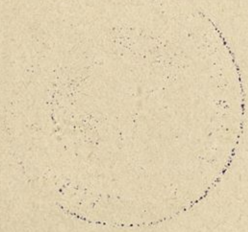
ARITMETIKA

II.

V platnu 1 gold. 10 kr.

V Ljubljani.
Ig. pl. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Mui
Stanislav Grošel



Aritmetika

za

nižje gimnazije.

Spisal

dr. Fr. vitez Močnik.

Po dvajsetem natisku poslovenil

J. Celestina.

Drugi del.

V Ljubljani.

Tiskala in založila Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1884.

Prvi oddelek.

O algebrajskih številih.

I. Pojasnila.

§ 1.

Nekatere količine so take, da se, ako jih zjedinimo, vsled svojega nasprotja ali po polnem ali deloma uničujejo. N. pr. 6 gl. imovine in 6 gl. dolga uničuje se po polnem, le-te količini sta si nasprotni; 10 gl. imovine in 6 gl. dolga uničuje se le deloma, kajti, če zjedinimo te dve količini, t. j. če poplačamo dolg, ostane še 4 gl. imovine. V takem nasprotji so tudi dobiček in izguba, dohodki in razhodki, mer naprej in mer nazaj, doba po kakem dogodku in doba pred njim, n. pr. doba pred in po Kristusovem rojstvu, toplotne in mrzlotne stopinje z ozirom na toplino ledišča, i. t. d.

Ta pojem nasprotja vsiljuje se nam tudi pri neimenovanih številih, če hočemo, da bode v obče môči odštevati dvoje števil. Pri odštevanji treba v naravni številni vrsti od števila, katero je kot minuend dano, za toliko jednot nazaj se pomakniti, kolikor jih ima subtrahend, in število, do katerega pridemo na ta način v številni vrsti, je iskana diferenca. To pa je le tedaj mogoče, kadar je minuend večji od subtrahenda ali prav tolik. Ako treba n. pr. od števila 6 število 4 odšteti, pomaknemo se v številni vrsti od števila 6 za 4 jednote nazaj in na ta način pridemo do števila 2; tedaj je $6 - 4 = 2$. Ako treba od števila 6 isto število 6 odšteti, pomaknemo se od števila 6 za 6 jednot nazaj ter pridemo do ničle, katera je izhodišče vsem naravnim številom; tedaj $6 - 6 = 0$.

Ako bi pa trebalo od števila 6 odšteti večje število, n. pr. 8, šteli bi najprej od števila 6 za 6 jednot nazaj ter prišli do ničle, a potem bi morali še za 2 jednoti nazaj šteti; le-to pa v naravni številni vrsti ni mogoče, ker se končuje pri ničli.

Da je môči tudi tedaj odštevati, kadar je minuend manjši od subtrahenda, za to treba števil, katera dobimo, če štejemo od ničle nazaj. V ta namen treba le številno vrsto, ki se do sedaj samo naprej brez konca razteza, po istem tvorbnem zakonu tudi od ničle nazaj raztegniti, in ob jednem primerno izraziti nasprotje med števili, katera dobimo, če štejemo jedenkrat od 0 naprej, drugokrat od 0 nazaj. Le-to pa dosežemo, ako imenujemo prvotna števila, katera dobivamo, štejoč od 0 vselej za jedno jednoto naprej, *pozitivna*, števila pa, katera dobivamo, ako se pomikamo po istem tvorbnem zakonu od 0 nazaj, *negativna* števila ter prva zaznamenujemo z znakom + (več, plus), druga pa z znakom — (menj, minus). Na ta način dobimo to-le dvostransko številno vrsto:

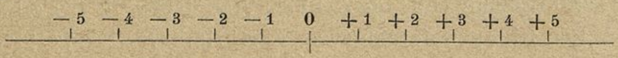
$$\ldots\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4\ldots\ldots$$

Pozitivna števila veljajo nam tu za prvotna števila naravne številne vrste, negativna pa so nova števila in le-ta izražujejo nasprotje pozitivnim številom.

Takó pomenja n. pr. —1 število, do katerega pridemo v raztegneni številni vrsti, štejoč od 0 za jednoto nazaj, ali število, od katerega treba za 1 jednoto naprej šteti, da pridemo do 0; —2 pomenja število, do katerega pridemo, štejoč od 0 za 2 jednoti nazaj, ali število, od katerega treba za 2 jednoti naprej šteti, da pridemo do 0.

Zatorej je zgoraj iskana diferenca $6 - 8 = -2$, tedaj negativno število.

Da si predočimo raztegneno številno vrsto in pozneje sledeče seštevanje in odštevanje pozitivnih in negativnih števil, vzemimo katero koli daljico za jednoto ter jo načrtajmo večkrat na neomejeno premo od točke 0 na desno in na levo, h krajiščem na ta način dobljenih dolžin pa zapišimo števila, katera nam one dolžine predstavljajo.



§ 2.

Števila, imajoča predznak (*Vorzeichen*), imenujemo *relativna* (vziralna) ali *algebrajska* števila nasproti prvotnim številom, katera zovemo *absolutna* (samoobsebna) *števila*.

Vsako algebrajsko število, n. pr. +4 ali —4, sestoji iz predznaka + ali — in iz absolutne vrednosti, tu 4. *Predznak* kaže, da je število na pozitivni ali negativni strani števílne vrste; **absolutna vrednost** pa pové, katero mesto ima število v vrsti pozitivnih ali negativnih števil.

Predznaka $+$ ne pišemo niti v začetku števílnega izraza niti za jednačajem; znaka $-$ ne smemo nikdar izpustiti. Število, pred katerim ne stoji nikakeršen znak, treba tedaj za pozitivno smatrati; n. pr. 4 pomenja toliko kakor $+4$.

Dve števili, imajoči jednako absolutno vrednost, a različna predznaka, imenujemo **nasprotni** (*entgegengesetzt*); n. pr. $+4$ in -4.

II. Četvero osnovnih računov z algebrajskimi števili.

1. Seštevanje.

§ 3.

Pri seštevanji dveh algebrajskih števil pomaknemo se v dvostransko raztegneni števílni vrsti od prvega števila v ono mer, katero zahteva predznak druzega števila, za toliko jednot dalje, kolikor jih ima absolutna vrednost druzega števila; število, do katerega na ta način pridemo, je iskana vsota.

Algebrajsko število, katero treba k druzemu prištevati ali od druzega odštevati, devamo med oklepaja; takó pomenja n. pr. $+3+(-4)$ vsoto, in $+3-(-4)$ diferenco števil $+3$ in -4.

Recimo, da nam treba izračunati n. pr. vsoto $+4+(+3)$. V ta namen pomaknemo se v števílni vrsti od $+4$ v pozitivno mer za 3 jednote dalje; na ta način pridemo do števila $+7$; tedaj je

$$+4+(+3)=+7.$$

Ako bi nam bilo iskati vsoto $+4+(-3)$, pomaknili bi se od števila $+4$ v negativno mer za 3 jednote dalje; takisto bi prišli do števila $+1$; tedaj je

$$+4+(-3)=+1.$$

Vzemimo dalje, da nam je izračunati vsoto $-4+(+3)$. Tu pomaknemo se od števila -4 v pozitivno mer za 3 jednote dalje ter pridemo do števila -1; torej je

$$-4+(+3)=-1.$$

Da dobimo slednjič vsoto $-4+(-3)$, pomaknemo se od števila -4 v negativno mer za 3 jednote dalje; na ta način pridemo do števila -7; tedaj je

$$-4+(-3)=-7.$$

Odtod izvajamo:

1.) Dvoje jednako zaznamenovanih števil seštevamo, ako postavimo pred vsoto njiju absolutnih vrednostij skupni predznak.

2.) Dvoje različno zaznamenovanih števil seštevamo, ako postavimo pred diferenco njiju absolutnih vrednostij predznak večjega števila.

Naloge.

1. $+6+(+2)$. *2.* $-7+(-3)$.
3. $-5+(+4)$. *4.* $+4+(-6)$.
5. $+16+(-11)$. *6.* $-15+(-25)$.
7. $+33+(+18)$. *8.* $+68+(-79)$.
9. $-1284+(-2351)$. *10.* $-2905+(+5107)$.
11. $+4238+(-3870)$. *12.* $-37181+(-4089)$.
13. $+12+(-15)+(+17)=-3+(+17)=+14$.
14. $-0{\cdot}35+(-5{\cdot}2)+(+0{\cdot}71)$.
15. $+378+(+709)+(-592)$.
16. $+1246+(+988)+(-799)+(-1091)$.
17. $-51345+(-10982)+(+27460)+(-8912)$.
18. $-38{\cdot}1354+(+90{\cdot}8642)+(-21{\cdot}3458)+(+3{\cdot}1087)$.
19. Nekdo ima 5242 gl. imovine in 2758 gl. dolga; koliko ima čiste imovine?
20. Prva punska vojska se je pričela leta 264. pred Kr. ter je trajala 23 let; kedaj je je bil konec?
21. Cesar Avgust je bil rojen leta 63. pred Kr. ter živel 77 let; kedaj je umrl?
22. Nekdo stopi 65krat naprej, potem 37krat nazaj, potlej pa zopet 48krat naprej; *a)* kolikokrat je stopil sploh; *b)* za koliko korakov se je oddalil od prvotnega mesta?

2. Odštevanje.

§ 4.

Diferenco dveh algebrajskih števil najdemo, ako se pomaknemo v dvostransko raztegneni številni vrsti od minuenda za toliko jednot dalje, kolikor jih ima absolutna vrednost subtrahendova, in sicer v tisto mer, ki je subtrahendovemu predznaku nasprotna; število, do katerega pridemo na ta način v številni vrsti, je iskana diferenca.

Tedaj je

$$
\begin{aligned}
+5-(+3) &= +2,\\
+5-(-3) &= +8,\\
-5-(+3) &= -8,\\
-5-(-3) &= -2.
\end{aligned}
$$

Prav takó računamo pa tudi, če prištejemo k minuendu vsakrat subtrahend z nasprotnim predznakom.

Kajti

$$
\begin{aligned}
+5+(-3) &= +2,\\
+5+(+3) &= +8,\\
-5+(-3) &= -8,\\
-5+(+3) &= -2;
\end{aligned}
$$

tedaj

$$
\begin{aligned}
+5-(+3) &= +5+(-3),\\
+5-(-3) &= +5+(+3),\\
-5-(+3) &= -5+(-3),\\
-5-(-3) &= -5+(+3).
\end{aligned}
$$

Algebrajsko število odštevamo tedaj od druzega algebrajskega števila, ako prištejemo k minuendu subtrahend z nasprotnim predznakom.

Naloge.

1. $+25-(+16)$. *2.* $-50-(-25)$.
3. $-31-(+58)$. *4.* $+107-(-93)$.
5. $+3\cdot43-(+2\cdot12)$. *6.* $-7\cdot04-(-48\cdot1)$.
7. $+1558-(-1374)$. *8.* $-6606-(+3419)$.
9. $-125-(+302)+(+287)$.
10. $+3640-(-2583)-(+4395)$.
11. $-395\cdot107+(-492\cdot864)-(-780\cdot312)$.
12. $+75386-(+28908)-(-54221)+(-13570)$.
13. $+34-[-25+(+16)]$.
14. $-56\cdot3-\{-93\cdot7+[+8\cdot94-(-6\cdot39)]\}$.
15. Rimsko državo so vladali cesarji od leta 30. pred Kr. do nje razpada, t. j. do leta 476. po Kr.; koliko let je trajalo v Rimu cesarstvo?
16. Celina Evrope leži med 36.° in 71.° severne širine, med 12.° zapadne in 63.° vzhodne dolžine (od Pariza); koliko stopinj razteza se *a)* v širino, *b)* v dolžino?

17. Izmed dveh teles, kateri se istodobno začneta pomikati od iste točke *a)* v isto mer, *b)* v nasprotni meri, preleti prvo v jedni minuti 783 *m*, drugo 828 *m*; za koliko bosta obedve čez jedno minuto drugo od druzega oddaljeni?

18. Reka sama požene parobrod vsako minuto za 65 *m* z vodo, parna sila sama pa vsako minuto za 412 *m*; koliko metrov prevozi parobrod v jedni minuti *a)* z vodo, *b)* proti vodi?

3. Množenje.

§ 5.

Da pomnožimo dvoje algebrajskih števil drugo z druzim, vzamemo multiplikand tolikokrat kot sumand, kakor zahteva absolutna vrednost multiplikatorjeva in to z neizpremenjenim predznakom, kadar je multiplikator pozitiven, z nasprotnim predznakom pa, kadar je multiplikator negativen.

Z ozirom na predznaka faktorjev mogoči so ti-le štirje slučaji:

$$+5 \,.\, +3,$$
$$-5 \,.\, +3,$$
$$+5 \,.\, -3,$$
$$-5 \,.\, -3.$$

Ako hočemo najprej $+5$ pomnožiti s $+3$, treba nam le multiplikand $+5$ sam 3krat kot sumand postaviti; tedaj je

$$+5 \,.\, +3 = +5 + (+5) + (+5) = +15.$$

Prav takó dobimo

$$-5 \,.\, +3 = -5 + (-5) + (-5) = -15.$$

Ako nam je dalje $+5$ pomnožiti z -3, treba multiplikand z nasprotnim predznakom, tedaj -5, vzeti 3krat kot sumand; zatorej je

$$+5 \,.\, -3 = -5 + (-5) + (-5) = -15.$$

Na isti način dobimo tudi:

$$-5 \,.\, -3 = +5 + (+5) + (+5) = +15.$$

Iz tega izvajamo:

1.) Dva jednako zaznamenovana faktorja dajeta pozitiven produkt, dva različno zaznamenovana faktorja dajeta negativen produkt.

2.) Absolutna vrednost produkta je jednaka produktu iz absolutnih vrednostij faktorjev.

Naloge.

1. $+9 \,.\, +7$. *2.* $-18 \,.\, -5$.
3. $-17 \,.\, +8$. *4.* $+43 \,.\, -6$.
5. $-12{\cdot}8 \,.\, +25$. *6.* $+30{\cdot}4 \,.\, -4{\cdot}5$.
7. $+457 \,.\, +99$. *8.* $-5678 \,.\, -11$.
9. $-3{\cdot}29 \,.\, +5{\cdot}49$. *10.* $-430{\cdot}2 \,.\, +880$.
11. $[-358 - (+417)] \,.\, -79$.
12. $[+7{\cdot}512 - (-2{\cdot}894)] \,.\, [-6{\cdot}037 + (+13{\cdot}963)]$.
13. Telo, pomikajoče se v premi črti vsako sekundo za 12 *m* *a)* naprej, *b)* nazaj, je sedaj v točki *A*; na kateri strani in v kateri razdalji od *A* bode ono čez 25 sekund? Na kateri strani in v kateri razdalji od *A* je bilo to telo pred 25 sekundami?

§ 6.

Ako nam je več nego dvoje algebrajskih števil drugo z druzim pomnožiti, treba zapomniti gledé produktovega predznaka to-le:

1.) Ako so vsi faktorji pozitivni, pozitiven je tudi produkt. N. pr.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 = +6 \,.\, +4 = +24.$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 \,.\, +5 = +24 \,.\, +5 = +120.$$

2.) Ako so vsi faktorji negativni, je produkt pozitiven, kadar je število faktorjev sodo, in negativen, kadar je število faktorjev liho. N. pr.:

$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 = +120 \,.\, -6 = -720.$$

3.) Ako je slednjič nekaj faktorjev pozitivnih, nekaj negativnih, je produkt pozitiven, kadar je število negativnih faktorjev sodo, in negativen, kadar je število negativnih faktorjev liho. N. pr.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 = +120 \,.\, -6 = -720.$$

Naloge.

1. $+13 \cdot +8 \cdot -7.$ *2.* $-38 \cdot -9 \cdot -6.$
3. $+315 \cdot -19 \cdot +10.$ *4.* $-20{\cdot}9 \cdot -1{\cdot}1 \cdot +8$
5. $-1356 \cdot -8 \cdot -8 \cdot -472.$
6. $-428 \cdot -376 \cdot -219 \cdot +105.$
7. $-78{\cdot}3 \cdot -0{\cdot}57 \cdot -1{\cdot}38 \cdot -27{\cdot}9.$
8. $-2{\cdot}906 \cdot +2{\cdot}076 \cdot -1{\cdot}49 \cdot -0{\cdot}89.$
9. $+137 \cdot -28 \cdot -119 \cdot +83 \cdot -75 \cdot -125.$
10. $-4315 \cdot -25 \cdot +368 \cdot -11 \cdot -49 \cdot +31.$
11. $+0{\cdot}96 \cdot -9{\cdot}9 \cdot -13{\cdot}8 \cdot +2{\cdot}7 \cdot -3{\cdot}4 \cdot +6{\cdot}3.$
12. $[-5431 - (+765)] \cdot [+8107 - (-959)] \cdot [+388 + (-399)].$

4. Deljenje.

§ 7.

Da zvemo, kakó je deliti dvoje algebrajskih števil, v to služi nam izrek, da mora dati kvocijent z divizorjem pomnožen dividend.

a) Ako nam je najprej $+12$ deliti s $+4$, biti mora kvocijent $+3$, kajti le pozitivno število $+3$ dati nam more, pomnoženo s pozitivnim številom $+4$, pozitiven produkt $+12$; tedaj

$$+12 : +4 = +3.$$

b) Vzemimo, da nam je $+12$ deliti z -4; tu moramo kvocijent 3 takó zaznamenovati, da dá, z -4 pomnožen, $+12$ za produkt; toda le negativno število dá z negativnim pomnoženo pozitiven produkt; kvocijent mora biti tedaj negativen, in zato velja:

$$+12 : -4 = -3.$$

c) Ako hočemo -12 deliti s $+4$, treba nam je iskati števila, katero dá, s $+4$ pomnoženo, število -12; le-to število more biti pa le -3; torej

$$-12 : +4 = -3.$$

d) Prav takó sklepajoč dobimo tudi:

$$-12 : -4 = +3.$$

1.) Kvocijent je tedaj pozitiven, kadar sta dividend in divizor jednako zaznamenovana, in negativen, kadar sta dividend in divizor različno zaznamenovana.

2.) Absolutna vrednost kvocijenta je jednaka kvocijentu iz absolutnih vrednostij dividenda in divizorja.

Naloge.

1. $+264 : +4$. *2.* $-4648 : -8$.
3. $+3840 : -30$. *4.* $-2568 : +12$.
5. $+106\cdot33 : -4\cdot9$. *6.* $-42\cdot435 : +34\cdot5$.
7. $+326393 : -529$. *8.* $-6709716 : -729$.
9. $-1234\cdot69037 : +24\cdot679$. *10.* $+462191832 : -79251$.
11. $-780937996 : -51862$.
12. $-8612175 \,.\, +90875 : +782925$.
13. $+40\cdot185 : [+1\cdot68 - (+0\cdot73)]$.
14. $[+560167 + (-135079)] : [-30 - (+93)]$.
15. Toplomer je kazal nekega dne zjutraj -8^0 R., o poldne $+2^0$ R., zvečer -6^0 R.; kolika je bila poprečna toplina onega dneva?

Drugi oddelek.

O občnih številih.

§ 8.

Vsako izmed števil, katero smo dosedaj upotrebljali ter pismeno s številkami izraževali, znači prav določeno množino jednot; ta števila imenujemo posebna števila (*besondere Zahlen*). Takó izražuje posebno število 7 često določeno množino jednot, kajti pod tem številom si ne moremo misliti niti več niti menj nego 7 jednot. Zarad tega svojstva posebnih števil morejo biti pa tudi računi, katere smo z njimi izvršili, le za posamične posebne slučaje veljavni; le-te račune treba vsikdar ponoviti, kadar se v podatku kaj izpremeni, bodi si izpremena še takó majhna. Da bi bili tudi občni računi mogoči, računi, veljavni za vse podobne slučaje in nezavisni od posebnih vrednostij, katere se v kaki nalogi nahajajo, treba je bilo uvesti nova števila, katera izražujejo lahko vsakeršno množino jednot in njih delov; ta števila zovemo zatorej občna števila (*allgemeine Zahlen*). Pokazalo se je, da so črke najpripravnejša znamenja takim občnim številom in to male latinske črke. Takó je n. pr. a občno število, katero more zaznamenovati katero koli množino jednot ali njih delov; a pomenja lahko 1, 2, 10, -20, $\frac{3}{5}$, ali tudi vsako drugo pozitivno ali negativno število. Le to treba pomniti, da mora pridržati vsaka črka vrednost, katero smo ji dali v početku računa, v vsem računu; ako damo številu a v kaki nalogi določeno vrednost, n. pr. 2, pridržati treba v tej nalogi za a vseskozi vrednost 2.

Nahajajo li se v kakem računu različne črke, to ti značijo v obče tudi prav toliko različnih števil; v posebnih slučajih pa je vender le mogoče, da imata dve črki isto vrednost.

Da so se izbrale ravno črke za znamenja občnim številom, temu je menda vzrok ta, da so se stavile s prva besede same v račun, a pozneje pridržale le njih početne črke. Pri računih s sorazmerji smo n. pr. dokazali, da izračunamo znesek procentov, ako pomnožimo vsoto, za katero procenti veljajo, s procenti ter produkt s 100 delimo. Ta izrek nam je môči izraziti v obče takó-le:

$$\text{znesek} = \frac{\text{vsoti} \times \text{procentom}}{100},$$

ali, ako zapišemo mesto besedij le njih početne črke

$$z = \frac{v \times p}{100}.$$

Tu lahko v pomenja katero koli veliko ali majhno vsoto, p kateri koli procent; z je potem število, izražujoče znesek, ki spada k dotični vsoti in k dotičnemu procentu. Izraz $z = \frac{v \times p}{100}$ predočuje nam tedaj zgoraj navedeni izrek v obče in vender takó jasno, da ga more čitati takój vsak, komur je znan pomen črk z, v, p.

V kako številno zvezo mesto občnih števil (črk) posebne številne vrednosti postavljati ter s temi zahtevane račune izvrševati, pravi se zamenjati (*substituieren*).

Ako treba n. pr. izraz $z = \frac{v \times p}{100}$ izračunati za številne vrednosti $v = 860$ in $p = 5$, dobili bi $z = \frac{860 \times 5}{100} = \frac{4300}{100} = 43$.

Nauk o računanji z občnimi števili imenujemo občno aritmetiko (*allgemeine Arithmetik*) in to zato, da jo razločujemo od posebne aritmetike (*besondere Arithmetik*), katera uporablja le posebna števila.

§ 9.

Ako se pomikamo v številni vrsti na obe dve strani za število a mesto za jedno jednoto, dobimo vrsto

$$\ldots -4a, \; -3a, \; -2a, \; -1a, \; 0, \; +1a, \; +2a, \; +3a, \; +4a, \; \ldots;$$

to vrsto zovemo vrsto mnogokratnikov od a. Pred a stoječa posebna števila $+3$, $+2$, $+1$, -1, -2, $-3\ldots$ imenujemo koeficijente števila a. Koeficijent je tedaj število, katero pové, kolikokrat treba postaviti za njim stoječe občno število v pozitivnem ali negativnem zmislu kot sumand; prvo velja, kadar ima predznak $+$, drugo, kadar ima predznak $-$. N. pr.:

$$+4a = +a + a + a + a = a \,.\, +4,$$
$$-4a = -a - a - a - a = a \,.\, -4.$$

Iz tega je razvidno, da moremo koeficijent občnega števila vsikdar za njegov multiplikator smatrati.

Koeficijenta 1 ne pišemo; tedaj pomenja a toliko kakor $1a$, in $-a$ toliko kakor $-1a$.

Kadar treba dvoje ali več s črkami izraženih števil drugo z druzim pomnožiti, navadno znak za množenje izpuščamo; n. pr.:

mesto $a \times b$ ali $a \,.\, b$ pišemo ab,
» $a \times b \times c$ ali $a \,.\, b \,.\, c$ pišemo abc.

Izraza abc ne smemo zamenjavati z izrazom $a + b + c$, kajti prvi izražuje produkt, drugi pa vsoto. Vzamemo li n. pr. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, to dobimo:

$$abc = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24,$$
$$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

§ 10.

Da bode môči odsle upotrebljati prikrajške, ki razumevanje izdatno polajšujejo, uvrstiti hočemo tu neki pojem in njega znamenje, dasi bodemo o njem še le pozneje obširnejše govorili.

Kadar treba več jednakih števil kot faktorje postaviti, tedaj zapišemo krajše tak faktor le jedenkrat, a zgoraj na desno pripišemo mu število, katero pové, kolikokrat je le-ta faktor vzeti. N. pr.:

mesto aa pišemo a^2,
» bbb » b^3,
» $xxxxx$ » x^5.

Produkt iz več jednakih faktorjev imenujemo **potenco** ali **vzmnož** (*Potenz*); število, katero pové, koliko je jednakih faktorjev, imenujemo **potenčni eksponent** (*Potenzexponent*), faktor pa **podlogo**, **osnovno število** ali **koren** (*Basis, Grundzahl, Wurzel*). Takó je b^3 potenca, 3 eksponent in b podloga. b^2 imenujemo tudi **kvadrat** in b^3 **kub** števila b. Eksponenta 1 ne pišemo; b pomenja tedaj toliko kakor b^1.

Pojem koeficijenta treba tedaj dobro razločevati od pojma eksponenta; kajti izraza

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a,$$

razločujeta se bistveno. Ako vzamemo n. pr., da je $a = 3$, potem je

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
$$a^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

§ 11.

Številni izraz, ki ima več z znakom $+$ ali $-$ zvezanih sestavin, imenujemo mnogočlensk izraz ali polinom (*mehrgliedriger Ausdruck, Polynom*), posamične, z znakom $+$ ali $-$ zvezane sestavine pa njega člene (*Glieder*). Izraz, ki ima dva člena, imenujemo tudi dvočlenec ali binom, točlensk izraz pa tročlenec ali trinom.

Takó so:

$$a + b, \quad 2m - 3n, \quad ax^2 - by^2$$

binomi,

$$a - b + c, \quad 2ax + 3by + 4cz, \quad 3a^3 - 2a^2b + ab^2$$

trinomi, in vse te količine mnogočlenski izrazi.

Izraz, ki ima le jeden člen, imenujemo jednočlensk izraz, jednočlenec ali monom; n. pr. a, $2ab$, $-3a^2x$.

Kadar se nahaja v mnogočlenskem izrazu več potenc iste podloge, urejamo jih zarad lažjega pregleda posamičnih členov navadno po potenčnih eksponentih one podloge. Ako začnemo z najvišjo potenco in pridejo za to nižje in nižje potence, pravimo, da je polinom urejen po padajočih (*fallend*) potencah skupne podloge; ako pa postavimo na prvo mesto člen brez potence ali z najnižjo potenco skupne podloge in potem višje in višje potence, tedaj pravimo, da je polinom urejen po rastočih (*steigend*) potencah te podloge. Takó dobi n. pr. izraz

$$5x^2 + 1 - 3x + x^5 - 4x^3 - 6x^4,$$

urejen po padajočih potencah to-le obliko:

$$x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1,$$

in urejen po rastočih potencah to-le:

$$1 - 3x + 5x^2 - 4x^3 - 6x^4 + x^5.$$

§ 12.

Mnogočlenske količine devamo med oklepaje (*Klammern*), kadar treba z njimi računati. Ako hočemo n. pr. nažnaniti, da treba $a + b$ pomnožiti s $c + d$, pišemo $(a + b) \,.\, (c + d)$; ako bi oklepaje izpustili ter pisali $a + b \,.\, c + d$, ne pomenjal bi ta izraz, da treba $a + b$ pomnožiti s $c + d$, nego da treba b pomnožiti s c in k produktu a in d prišteti. Ako vzamemo n. pr., da je

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, dobimo

$$(a + b) \,.\, (c + d) = (2 + 3) \,.\, (4 + 5) = 5 \,.\, 9 = 45;$$
$$a + b \,.\, c + d \;=\; 2 + 3 \,.\, 4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$$

Naloge.

Povej, kaj pomenjajo ti-le izrazi:

1. $a + (b + c)$.
2. $a - (b - c)$.
3. $x - [a - (b + c)]$.
4. $x + [(a - b) - c]$.
5. $(a - b) \,.\, (m - n)$.
6. $[m - (a - b)] \,.\, (x - y)$.
7. $(a : b) \,.\, x$.
8. $(a + b) \,.\, (x : y)$.
9. V čem se razločujejo ti-le izrazi:

$$ab - c + d,\; ab - (c + d),\; a(b - c) + d?$$

Katere so njih števìlne vrednosti za $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$ in $d = 2$?

10. V čem se razločujeta izraza $(x : y) : z$, in $x : (y : z)$? Kateri sta njiju številni vrednosti za $x = 24$, $y = 6$, $z = 2$?

§ 13.

Dva številna izraza, imajoča iste črke in le-te v istem številu, zovemo istoimenska (*gleichnamig*); koeficijenta sta lahko različna. Dva številna izraza, imajoča različne črke, ali iste črke, pa v nejednakem številu, imenujemo raznoimenska (*ungleichnamig*). N. pr.:

$$\left.\begin{array}{ll} 2a, & 6a \\ ab, & 3ab \\ -5mx^2, & 8mx^2 \end{array}\right\} \text{so istoimenski,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2a, & 8b \\ 5mn, & -2mp \\ 3ax, & 3ax^2 \end{array}\right\} \text{raznoimenski izrazi.}$$

Dvoje ali več istoimenskih izrazov je môči vsikdar skrčiti (*reducieren*) v jeden sam izraz, in to po teh-le pravilih:

1.) Istoimenske izraze, imajoče isti predznak, skrčimo, ako seštejemo njih koeficijente, in to vsoto postavimo s skupnim predznakom vred pred skupne črke. N. pr.:

$$+3a + 5a = + 8a,$$
$$-4a - 6a = -10a.$$

Ako se pomaknemo namreč v vrsti mnogokratnikov števila a od 0 v pozitivno mer najprej za $3a$ jednote in potem še za $5a$ jednot, pridemo do števila $+8a$. Prav takó pridemo, pomaknivši se v isti vrsti od 0 v negativno mer najprej za $4a$ jednote, potem pa še za $6a$ jednot, do števila $-10a$.

2.) Dva istoimenska, a različno zaznamenovana izraza skrčimo, ako odštejemo absolutno vrednost manjšega koeficijenta od absolutne vrednosti večjega koeficijenta ter to diferenco s predznakom večjega koeficijenta pred skupne črke zapišemo.

Recimo, da imamo $+9a - 3a$. Tu treba se pomakniti v vrsti mnogokratnikov števila a od 0 najprej za $9a$ jednot naprej, in od števila $+9a$, do katerega smo prišli, za $3a$ jednote nazaj; na ta način pa pridemo do števila $+6a$; tedaj je

$$+9a - 3a = +6a.$$

Prav takó najdemo, da je $+4a - 7a = -3a$.

3.) Dva nasprotna istoimenska izraza se uničujeta. N. pr.:

$$+5a - 5a = 0.$$

Naloge.

1. $a + 3a + 3a$. *2.* $-3bx - 2bx - 8bx$.
3. $2abc - 2abc$. *4.* $5ab - 3ab$.
5. $abx - 4abx$. *6.* $mp - 2mp + 3mp + 4mp$.
7. $8by + 5by - 2by$. *8.* $7by - 4by + 3by - 2by$.
9. Določi izrazoma v 7. in 8. nalogi številni vrednosti za $b = 3$, $y = 5$.
10. $5b + 3b - 4b + 3b$. *11.* $a^2 + ab + ab + b^2$.
12. $3a^2x - 2a^2x + a^2x$. *13.* $5my^3 + 2my^3 - 6my^3$.
14. $6ax - 7by - 5ax + 8by$. *15.* $5m + 6m - 2px - 4px$.
16. $7am - 4y - 2am + 8y - 2y + 3am$.
17. $6ab + 3ac - 21ad - 5ac + ad - 6ad + 9ad$.
18. $23bx - 25cx + 17bx + 18cx + 17cx - 19bx - 27cx$.
19. $5mx + 6ny - 7pz - 3mx - 2ny + pz + 9mx - 3ny + 7pz$.
20. $9x^2y^2 - 6xy - 6xy + 4 - x^2y^2 + 2xy + 2xy - 1$.

I. Četvero osnovnih računov z občnimi števili.

1. Seštevanje.

§ 14.

Vzemimo, da nam je najprej določiti vsoto $+a+(+b)$. Tu treba se pomakniti po § 3. v raztegneni številni vrsti od $+a$ za b jednot naprej; na ta način pa pridemo do števila $+a+b$; tedaj je

$$+a+(+b)=+a+b.$$

Ako treba določiti $+a+(-b)$, pomaknimo se v številni vrsti od $+a$ za b jednot nazaj; na ta način pridemo do $+a-b$; torej je

$$+a+(-b)=+a-b.$$

Le-ta vsota pomenja pozitivno število, kadar je število a večje od b, in negativno, kadar je a manjše nego b.

Prav takó se prepričamo, da je

$$-a+(+b)=-a+b,$$
$$-a+(-b)=-a-b.$$

Prva vsota je pozitivno ali negativno število, kakor je število a manjše ali večje od b.

Odtod izvajamo:

Jednočlenske izraze seštevamo, pišoč jih z neizpremenjenim znakom jednega poleg druzega.

Ako se nahajajo v vsoti istoimenski izrazi, treba jih skrčiti.

Naloge.

1. $3a+5a=8a$ ali $\begin{array}{r} 3a \\ 5a \\ \hline 8a \end{array}$ *2.* $\begin{array}{r} 4a \\ -8a \\ \hline -4a \end{array}$ *3.* $\begin{array}{r} -2ax \\ +3ax \\ \hline ax \end{array}$

4. $5ab+(-5ab)$. *5.* $8mx+(-2mx)$.

6. $-5x^2+(+8x^2)$. *7.* $25my^2+(-18my^2)$.

8. $7ab+(-5ab)$. *9.* $120my+(-95my)$.

10. $-33ab^2+(-11ab^2)$. *11.* $-75xy+(+20x^2y)$.

12. $9a^2x^2+(+5a^2x^2)+(-10a^2x^2)$.

13. $-b^2m^3+(+7b^2m^3)+(-4b^3m^2)$.

§ 15.

Mnogočlenske izraze seštevamo (prav takó kakor jednočlenske), pišoč jih z neizpremenjenim znakom jednega poleg druzega.

Odtod pa izvira, da smemo oklepaja brez vsake izpremembe izpustiti, kadar stoji pred izrazom med oklepajema znak $+$.

Ako se nahajajo v vsoti istoimenski izrazi, treba jih skrčiti. V tacih slučajih je najpripravnejše sumande pisati druzega pod druzega, in sicer takó, da stojé istoimenski izrazi na tanko drug pod druzim.

Naloge.

1. $a + (b + c) = a + b + c.$
2. $3a - 2b + (3c - 4d) = 3a - 2b + 3c - 4d.$
3. $5a + 2x + (3b - 2y) + (3c - 2d + z) =$
$= 5a + 2x + 3b - 2y + 3c - 2d + z.$
4. $8x - 5y + (5x + 2y) = 8x - 5y + 5x + 2y = 13x - 3y$

ali
$$\begin{array}{r} 8x - 5y \\ 5x + 2y \\ \hline 13x - 3y. \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rrr} a^2 & + ab & \\ & + ab & + b^2 \\ \hline a^2 & + 2ab & + b^2 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rrr} a^2 & + ab & \\ & - ab & - b^2 \\ \hline a^2 & & - b^2 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rrr} 6m & - 5n & + 2p \\ 5m & + 8n & + 5p \\ -4m & - n & + 3p \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rrr} 3a & + 5b & - 7c \\ 4a & - 8b & + 12c \\ 2a & + 4b & - 3c \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rrrr} 2a & + 2b & - c & + d \\ 3a & - b & + 2c & + d \\ -4a & + b & + 5c & + 4d \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rrr} 7x & - 9y & + 8z \\ -6x & - 5y & + 12z \\ 14x & - 5y & + 4z \\ \hline \end{array}$$

11. $3ab + (5ab - 4m) + (6m - 2ab).$
12. $17x^2 - 25ax - 10a^2 + (3x^2 + 12ax - 5a^2).$
13. $64m^3 - 96m^2x + 36mx^2 + (-48m^2x + 72mx^2 - 27x^3).$
14.
$$\begin{array}{rrrr} x^3 & - 2x^2 & + 3x & - 6 \\ 3x^3 & + 2x^2 & + 5x & + 8 \\ \hline \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & - 3x^3y & + 5x^2y^2 & + 7xy^3 & \\ & + x^3y & - 3x^2y^2 & - 3xy^3 & - 8y^4 \\ \hline \end{array}$$

16. Katere številne vrednosti imajo sumandi in vsota v nal. 15. za $x = 4$ in $y = 2$?

17. $3a^3 - 7a^2x - 5ax^2 + (6a^3 - 3a^2x + 8ax^2 - x^3) +$
$+ [4a^2x - 2ax^2 + 7x^3 + (2a^2x - 9ax^2 + 3x^3)]$.

2. Odštevanje.

§ 16.

Za odštevanje jednočlenskih izrazov velja isti izrek, katerega smo dokazali za odštevanje algebrajskih števil v § 4. Vender hočemo tu resničnost onega izreka še na drug način dokazati in to za različne slučaje, ki so z ozirom na znake mogoči.

a) Vzemimo, da nam je od $+a$ odšteti število $+b$. Minuend $+a$ ostane neizpremenjen, ako pripišemo k njemu $+b$ in $-b$, kajti $+b - b = 0$; mesto $+a$ vzamemo tedaj lahko tudi $+a + b - b$. Ako odštejemo od takó izraženega minuenda $+a + b - b$ subtrahend $+b$, onda dobimo $+a - b$ kot ostanek; tedaj velja:

Minuend $+a$	mesto $+a$ smemo postaviti	$+a + b - b$,	
Subtrahend $-b$	če odštejemo	$+b$,	
	onda je ostanek	$+a \quad\quad - b$.	

b) Ako treba od $+a$ odšteti število $-b$, dobimo:

Minuend $+a$	ali	$+a + b - b$,	
Subtrahend $-b$	če	$-b$	odštejemo,
	dobimo	$+a + b$	kot ostanek.

c) Recimo, da treba od $-a$ odšteti $+b$. Tu dobimo:

Minuend $-a$	ali	$-a + b - b$,	
Subtrahend $+b$	če	$+b$	odštejemo,
	dobimo	$-a \quad\quad - b$	kot ostanek.

d) Ako nam je od $-a$ odšteti $-b$, dobimo:

Minuend $-a$	ali	$-a + b - b$,	
Subtrahend $-b$	če	$-b$	odštejemo,
	dobimo	$-a + b$	kot ostanek.

Zatorej je:
$$+a - (+b) = +a - b,$$
$$+a - (-b) = +a + b,$$
$$-a - (+b) = -a - b,$$
$$-a - (-b) = -a + b;$$

t. j. jednočlenske številne izraze odštevamo, ako pripišemo k minuendu subtrahend z nasprotnim predznakom. Kadar pišemo subtrahend pod minuend, stavimo v subtrahendu izpremenjeni znak kar pod danega. Ako sta minuend in subtrahend istoimenska, treba ja skrčiti.

Naloge.

1. $5x - (-4x) = 5x + 4x = 9x.$

2. $-3ab - (+5ab) = -3ab - 5ab = -8ab.$

3.
$$\begin{array}{r} 2mx \\ -4mx \\ + \\ \hline 6mx \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} -3cp \\ +3cp \\ - \\ \hline -6cp \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 8ax \\ -3ay \\ + \\ \hline 8ax + 3ay \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} -\ abc \\ -2abc \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} 3ab^2 \\ +10ab^2 \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} 15m^2x^2 \\ -\ 7m^2x^2 \\ \hline \end{array}$$

9. $-7ay - (-3ay).$ *10.* $-3mp - (+4mp).$

11. $5a^2x - (-3a^2x).$ *12.* $2ab^2y - (+aby).$

13. $9x^2 + (-5x^2) - (+8x^2).$

14. $5m^2n - (-18m^2n) + (-10m^2n).$

15. $17ax^3 - (-ax^3) - (+24ax^3).$

§ 17.

Mnogočlenske številne izraze odštevamo, ako pripišemo k minuendu subtrahendove člene z nasprotnimi predznaki.

Da se o pravosti tega izreka prepričamo, vzemimo $a + b - c$ za minuend, in $m - n + p$ za subtrahend; mesto $a + b - c$ smemo postaviti tudi $a + b - c + m - m + n - n + p - p$; ako odštejemo od takó izraženega minuenda subtrahend $m - n + p$, dobimo $a + b - c - m + n - p$ kot ostanek; imamo namreč:

minuend $a + b - c$ ali	$a + b - c + m - m + n - n + p - p,$
in če odštejemo subtrahend	$+ m \qquad - n + p,$
dobimo	$a + b - c \qquad - m + n \qquad - p$

kot ostanek; tedaj je:

$$a + b - c - (m - n + p) = a + b - c - m + n - p.$$

Iz tega je pa tudi razvidno, da moremo, ako stoji pred kacim izrazom, ki je med oklepajema, znak —, oklepaja razrešiti, izpremenivši vsakemu členu med oklepajema predznak v nasprotnega.

Ako se nahajajo v minuendu in subtrahendu istoimenski členi onda je zarad skrčevanja najpripravnejše, subtrahend takó pod minuend pisati, da pridejo istoimenski členi drug pod druzega; v subtrahendu postavijo se potem izpremenjeni znaki takój pod dane.

Naloge.

1. $3a - (2b + 4c) = 3a - 2b - 4c.$

2. $9x - 2a - (2y - 3b) = 9x - 2a - 2y + 3b.$

3. $5ax + 6by - (3cx - 4ay + 5bz) =$
$$= 5ax + 6by - 3cx + 4ay - 5bz.$$

4. $3a + (4b - 5c) - (6d - 7e) = 3a + 4b - 5c - 6d + 7e.$

5. $8a - 4b + 3c - (6a + 2b - 3c) =$
$$= 8a - 4b + 3c - 6a - 2b + 3c = 2a - 6b + 6c,$$

ali
$$\begin{array}{rrr} 8a & - 4b & + 3c \\ 6a & + 2b & - 3c \\ - & - & + \\ \hline 2a & - 6b & + 6c \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rr} 3ax & - 4by \\ 2ax & - 2by \\ - & + \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rrr} x^2 & + 6ax & + a^2 \\ x^2 & - 4ax & \\ - & + & \\ \hline \end{array}$$

8. $5x^2 + 7x - 5 - (3x^2 - 2x - 6).$

9. $2a - 3b - (5a + 2b) + (4a + b).$

10. $2a^2 - 3a + 4 - (a^2 + a - 5).$

11. $8m^3 - 7m^2y - my^2 - (3m^2y - 5my^2 + 8y^3).$

12. $-3a + 5b - 7c + 9d - (-8a + 6b + 4c - 2d).$

13. $8a^2b - 7ab^2 + 4b^2 - (-2a^3 + 3a^2b - 9ab^2).$

14. $3m^2x - 3n^3y + 6p^4z - (-3m^2x - 3n^3y + 5p^4z).$

15. $5a^4 - 4a^3 + 3a^3 - 2a + 1 - (3a^4 - 3a^3 - 5a^2 + 5a + 7).$

16. $9 + 8m - 7m^2 - 6m^3 + 5m^4 - (-5 + 4m - 3m^2 +$
$$+ 3m^3 - m^4).$$

17. $27x - [31y + (108 - 45y + 17x)] - (9x + 12y - 101).$

18. Zameni v 17. $x = 2{\cdot}5$ in $y = 1{\cdot}8$.

2. Množenje.

§ 18.

Posebna števila moremo res množiti, t. j. za produkt dobimo vsakrat novo število, v katerem ni o faktorjih niti sledú, n. pr. $3 \times 6 = 18$. Pri občnih številih to ni takó; njih produkt je môči le naznačiti, kar se zgodi, ako zapišemo črke, ki števila izražujejo, brez vsacega znaka drugo poleg druge; zarad lažjega pregleda pišemo črke navadno v abecednem redu. ab je naznačen produkt iz a in b, in prav takó je $abmn$ naznačen produkt števil am in bn.

Recimo, da treba jednočlenska izraza $5a$ in $-4b$ druzega z druzim pomnožiti. Ker moremo koeficijente za faktorje občnih števil smatrati, in ker dadé faktorji, v katerem koli redu drug z druzim pomnoženi, isti produkt, dobimo:

$$5a \times -4b = 5 \times -4 \times a \times b = -20 \times ab = -20ab.$$

Jednočlenske izraze tedaj množimo, ako pomnožimo njih koeficijente ter ta produkt pred produkt občnih števil postavimo.

Množenje je jako jednostavno, kadar so faktorji potence iste podloge. Takó je

$$a^2 . a = aa . a = aaa = a^3,$$
$$a^3 . a^2 = aaa . aa = aaaaa = a^5,$$
$$a^5 . a^3 = aaaaa . aaa = aaaaaaaa = a^8,$$
$$a^3 . a^2 . a^4 = aaa . aa . aaaa = aaaaaaaaa = a^9.$$

Tu vidimo takój, da je eksponent v produktu jednak vsoti eksponentov v vseh faktorjih.

Potence iste podloge množimo, ako pridržimo skupno podlogo in le-tej za eksponent damo vsoto iz eksponentov v vseh faktorjih.

Naloge.

1. $+a . +b = +ab.$ ***2.*** $+a . -b = -ab.$
3. $-a . +b = -ab.$ ***4.*** $-a . -b = +ab.$
5. $7a . 5b = 35ab.$ ***6.*** $-3px . 8m = -24mpx.$
7. $3b^2 . -b^3 = -3b^5.$ ***8.*** $-3a . 2a^5 = -6a^6.$
9. $6a . -2a.$ ***10.*** $5mn . 9m.$
11. $3ax . -4by.$ ***12.*** $-8cm . -dn.$
13. $-7ab . 2ac.$ ***14.*** $5m^2x . 3mx^2.$
15. $5a^m . -2a^n.$ ***16.*** $3a^2x^2 . 7a^3x^4.$
17. $7a . -4b . -8c.$ ***18.*** $8ab^2 . 3ac . -4c^2.$
19. $27ab . -39mp . 18ap.$ ***20.*** $6ab^2y^3 . 2b^3y^3 . -5a^2y.$
21. $7m^2x . 3mx^2 . -2mq.$ ***22.*** $-3pq^2 . 6p^3q . 8p^2q^2.$
23. $2a^2m^3x^4 . 3am^5x^2 . 4a^3mx^2.$
24. Določi številno vrednost izrazu 23. za $a = 5$, $m = 2$ in $x = 3$.
25. $6x^2yz^3 . -9x^2y^2z^2 . -3x^4yz.$

26. $-97ax \,.\, 53by : 82cz \,.\, -acy.$
27. $3a^3x \,.\, -15ax^2 + 8a^2x^2 \,.\, 6a^2x.$
28. $7am^2 \,.\, 3b^2n^2 \,.\, 4ab \,.\, 8a^2bn \,.\, 2b^2n \,.\, 3mn^2.$
29. $8m^3p^5 \,.\, 7m^5p^4 - 9m^2p^2 \,.\, 6m^2p^6 \,.\, m^4p.$

§ 19.

Ako treba $a + b$ z n pomnožiti, tedaj $n$krat kot sumand postaviti, dobimo

$$\begin{aligned}(a+b)\,.\,n &= (a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots (n\text{krat})\\ &= a+a+a+\ldots (n\text{krat}) + b+b+b+\ldots (n\text{krat})\\ &= a\,.\,n + b\,.\,n;\end{aligned}$$

tedaj

$$(a+b)\,.\,n = an + bn.$$

Odtod izvajamo:

Mnogočlensk izraz množimo z jednočlenskim, ako pomnožimo vsak člen mnogočlenskega izraza z jednočlenskim ter delske produkte seštejemo.

Naloge.

1. $(6a - 5b)\,.\,3c = 18ac - 15bc.$
2. $(7m - 6n + 5p)\,.\,-3x = -21mx + 18nx - 15px.$
3. $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3)\,.\,6a^2 = 12a^2 + 18a^3 - 24a^4 - 30a^5.$
4. $(3ax - 5by - cz)\,.\,-2mp.$
5. $(5a^2 - 3a + 2)\,.\,-6ax.$ **6.** $5a\,.\,(3b + 4c - d).$
7. $-3ax\,.\,(-by - 2cz + 5).$ **8.** $8by\,.\,(1 - 2x + 3x^2).$
9. $(7am + 6bn - 5cp + 4dp)\,.\,3fx.$
10. $(a^2 + b^2 - c^2)\,.\,ax^2.$
11. $3a\,.\,(4bx - 2cy) - 5a\,.\,(2bx - 3cy).$
12. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)\,.\,17a^3b^4.$
13. $-15a^2x^3\,.\,(2a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2).$
14. $2x\,.\,(1 - 3x - 5x^2) + 5x^2\,.\,(3 - 7x).$
15. $3x\,.\,(9x^2 - 2xy - 4y^2) - 2y\,.\,(4y^2 - 6xy - 3x^2).$

§ 20.

Recimo, da treba $a + b + c$ pomnožiti z $n + p + r$. Ako zaznamenujemo multiplikand $a + b + c$ za sedaj z m, dobimo

$$m\,.\,(n + p + r) = m\,.\,n + m\,.\,p + m\,.\,r;$$

tedaj, če vzamemo za m zopet njega vrednost,

$$\begin{aligned}(a+b+c)\,.\,(n+p+r) &= (a+b+c)\,.\,n\\ &+ (a+b+c)\,.\,p\\ &+ (a+b+c)\,.\,r\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}(a+b+c)\,.\,(n+p+r) &= an+bn+cn\\ &+ ap+bp+cp\\ &+ ar+br+cr;\end{aligned}$$

t. j. dvoje mnogočlenskih številnih izrazov množimo druzega z druzim, ako pomnožimo ves multiplikand z vsakim multiplikatorjevim členom, ali, kar je jedno in isto, ako pomnožimo vsak člen jednega faktorja z vsakim členom druzega faktorja ter dobljene delske produkte seštejemo.

Mnogočlenske faktorje pišemo, kadar hočemo res množiti, druzega pod druzega; tudi v delskih produktih pišemo istoimenske izraze, katere morebiti tu in tam dobimo, da se skrčevanje zlajša, druzega pod druzega.

Naloge.

1. $(5a-3b)\,(4c-2d) = (5a-3b)\,.\,4c + (5a-3b)\,.\,-2d$
$= 20ac - 12bc - 10ad + 6bd.$

2. $(m+2n-3p)\,(2x+3y).$

3. $(5a-6b)\,(3a-4b) = 15a^2 - 18ab - 20ab + 24b^2$
$= 15a^2 - 38ab + 24b^2,$

ali

$$\begin{array}{r}5a - 6b\\ 3a - 4b\\ \hline 15a^2 - 18ab\\ -20ab + 24b^2\\ \hline 15a^2 - 38ab + 24b^2\end{array}$$

4. $(a+b)\,(a+b).$ *5.* $(a-b)\,(a-b).$

Katero pravilo velja tedaj za množenje binoma s samim seboj?

6. $(2x-3y)\,(2x-3y) + 12xy.$

7. $(a+b)\,(a-b).$ *8.* $(2m+3n)\,(2m-3n).$

Katero pravilo izvajaš odtod za množenje vsote dveh števil z njiju diferenco?

9. $(5a^m + 4b^n)\ 5a^m - 4b^n).$

10. $(4x^2 - 3y^2)\,(4x^2 + 3y^2).$

11.

$$\begin{array}{rrrrrr}
3 + & 4x + & 5x^2 - & 6x^3 & & \\
4 - & 5x - & 6x^2 & & & \\
\hline
12 + & 16x + & 20x^2 - & 24x^3 & & \\
 - & 15x - & 20x^2 - & 25x^3 + & 30x^4 & \\
 & - & 18x^2 - & 24x^3 - & 30x^4 + & 36x^5 \\
\hline
12 + & x - & 18x^2 - & 73x^3 & + & 36x^5
\end{array}$$

12. $(x^3 - 8x^2 + 5x - 7) \cdot (3x - 2)$.
13. $(x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1) \cdot (x - 1)$.
14. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)\ (a - 1)$.
15. $(x - 2y - 3z)\ (3x + y - z)$.
16. $(m^2 + 2m - 3)\ (m^2 + 2m + 3)$.
17. $(4 + 2x)\ (5 + 3x) - (4 - 3x)\ (5 - 2x)$.
18. Zameni v nalogi 17. $x = 1 \cdot 8$.
19. $(a - 2b + c + 3d)\ (2a + b - 2c + 6d)$.
20. $(3 - 4x + 6x^2)\ (2 - 6x - 18x^2)$.
21. $(8a^4 - 9a^2 + 12)\ (5a^4 - 6a^2 + 7)$.
22. $(x^6 - 3x^5 + 8x^4 - 5x^3 - 2x + 8)\ (2x + 7)$.
23. $(3y^3 - 5y^2z + 7yz^2 - 4z^3)\ (2y^2 - 5yz + 3z^2)$.
24. $(2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)\ (3p^3 - 4p^2 - 5p + 6)$.
25. $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\ (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$.
26. $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$.
27. $(x + 2)\ (x - 3)\ (x + 4)\ (x - 5)$.
28. $(3x - 7y)\ (5x + 2y)\ (3ax - 4by)$.
29. $(6m^2 - 5)\ (8m^2 + 4)\ (3m - 9)$.
30. $(2x - 3)\ (3x - 4)\ (4x - 5)\ (5x - 6)$.
31. $(3y^2 - 4y + 2)\ (5y^2 - 7y - 6)\ (y^2 - 2y + 5)$.
32. $(4x^2 - 4xy - y^2)\ (x^2 - 2xy + 2y^2)\ (2x^2 + 2xy + 3y^2)$.
33. $(11a - 6b + 5c)\ (3a - 5c) - (7a + 3b - 7c)\ (4a + 3c)$.
34. $(3m^2 - 8m - 5)\ (7m^2 + 5m - 6) - (6m^2 + 4m + 3)\ (3m^2 - 9m + 7)$
35. $(x^2 - 4x + 4)\ (x^2 + 4x + 4) - (x + 1)\ (x + 2)\ (x - 4)\ (x - 5)$.

4. Deljenje.

§ 21.

Ker je

$$abc : bc = \frac{abc}{bc} = a, \qquad aabx : aby = \frac{aabx}{aby} = \frac{ax}{y},$$

izvajamo:

Kvocijent dveh s črkami izraženih števil najdemo, izpustivši v dividendu vse one črke, katere se nahajajo tudi v divizorji, in sicer izpustivši jih v jednakem številu; ostale črke so kvocijent. Ako se nahajajo v divizorji tudi take črke, katerih dividend nima, potem deljenje s temi črkami le naznačujemo, postavljaje jih v imenovalec kvocijentov.

Ako treba tedaj dvoje jednočlenskih številnih izrazov druzega z druzim deliti, delimo najprej koeficijenta (po § 7.) in ta kvocijent postavimo pred kvocijent občnih števil.

Ako so v dividendu in divizorji potence iste podloge, treba razločevati, je li dividendov eksponent večji, manjši ali prav tolik kakor divizorjev.

1.) Vzemimo, da je potenčni eksponent dividendov večji nego divizorjev. Tu najdemo, da je

$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^6 : a^4 = aaaaaa : aaaa = aa = a^2,$$
$$a^4 : a = aaaa : a = aaa = a^3;$$

kvocijentov eksponent je tedaj vsikdar jednak eksponentu dividenda zmanjšanemu za eksponent divizorjev.

2.) Kadar je dividendov eksponent manjši od eksponenta divizorjevega, tedaj ima kvocijent obliko ulomka; n. pr.:

$$a^2 : a^5 = aa : aaaaa = 1 : aaa = \frac{1}{a^3},$$
$$a^3 : a^5 = aaa : aaaaa = 1 : aa = \frac{1}{a^2},$$
$$a^4 : a^8 = aaaa : aaaaaaaa = 1 : aaaa = \frac{1}{a^4}.$$

Ako izrazimo ulomek $\frac{1}{a^m}$, kateri je obrneni ulomek a^{+m}, z a^{-m}, dobimo:

$$a^2 : a^5 = a^{-3},$$
$$a^3 : a^5 = a^{-2},$$
$$a^4 : a^8 = a^{-4},$$

in tu vidimo takój, da dobimo tudi v tem slučaji kvocijentov eksponent, ako odštejemo od dividendovega eksponenta eksponent divizorjev.

a^{-m} imenujemo potenco z negativnim eksponentom, a^m pa potenco s pozitivnim eksponentom.

3.) Vzemimo slednjič, da sta eksponenta v dividendu in divizorji jednaka, n. pr. oba jednaka 3, potem je

$$a^3 : a^3 = 1.$$

V tem slučaji tedaj kvocijent ni nikakeršna potenca od a, nego je jednota. Ako smatramo pa tudi 1 za potenco od a, in sicer z eksponentom 0, takó da je $a^0 = 1$, dobimo

$$a^3 : a^3 = 1 = a^0,$$

tedaj velja tudi tu isti zakon, katerega smo dokazali za prejšnja dva slučaja.

Reči smemo tedaj v obče:

Potence iste podloge delimo, ako pridržimo skupno podlogo in le-tej damo za eksponent število, katero je jednako dividendovemu eksponentu zmanjšanemu za eksponent divizorjev.

Naloge.

1. $+ab : +a = +b.$

2. $+ab : -a = -b.$

3. $-ab : +a = -b.$

4. $-ab : -a = +b.$

5. $6mx : 2x = 3m.$

6. $12a^4 : -3a = -4a^3.$

7. $10ab : 2bc = \frac{5a}{c}.$

8. $x^3 : -x^5 = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

9. $-12am : 2m.$

10. $35abcd : 5bd.$

11. $abx : 5aby.$

12. $27a^7 : -3a^3.$

13. $-8bmx : 4ax^2.$

14. $ab^2c^3 : abc.$

15. $m^5p^2x^4 : mp^2x^2.$

16. $-51abdy^2 : 3bdy.$

17. $225m^2y : 25my^2.$

18. $30x^2y^3 : -5x^3y.$

19. $4a^2m^4x^5 : 5a^5m^3x.$

20. $42x^3y^2z^4 : 7xy^2z^3.$

21. $85a^{4m+1} : 5a^{4m-2}.$

22. $84a^{n-4} : 12a^2.$

23. $-3a^2b^3c^4d^5 : -a^4b^2cd^3.$

24. $12am^5n^4p^3q^2 : 4m^2n^3p^4q^5.$

25. $(4a^2bz^3 . 10a^2b^3z) : 5a^3b^2z^2.$

26. $(21x^2y^4z^6 : 3xy^2z^3) . -2x^3y^2z.$

27. $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x).$

28. $(24a^5b^3x : 3a^2b^2) + (35a^6b^2x^2 : -5a^3bx).$

§ 22.

Dokazali smo, da je

$$(a + b + c) . p = ap + bp + cp.$$

Ako pa delimo produkt dveh faktorjev z jednim izmed teh dveh faktorjev, moramo dobiti drugi faktor; tedaj je

$$(ap + bp + cp) : p = a + b + c;$$

a, b, c so pa kvocijenti, katere dobimo, če razdelimo zaporedoma ap, bp, cp s p; tedaj velja:

Mnogočlensk izraz delimo z jednočlenskim, ako razdelimo vsak njegov člen z jednočlenskim divizorjem.

Naloge.

1. $(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c.$
2. $(15am - 10bm + 20cm) : -5m = -3a + 2b - 4c.$
3. $(18amy - 27bny + 36cpy) : -9y.$
4. $(20abmn - 16acmp + adnq) : 4am.$
5. $(21ax - 18bx + 15cx) : -3x.$
6. $(30mnp - 25mnq - 15mnr + 10mns) : -5mn.$
7. $(12x^5 - 8x^3 + 4x) : 4x.$
8. $(35m^3y + 28m^2y^2 - 14my^3) : -7my.$
9. $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2.$
10. $(-16a^3bc^5 + 8a^4b^2c^4 - 12a^5b^3c^3 + 20a^6b^4c^2) : -4a^2b^2c^2.$

Kadar je dividend jednočlensk, divizor pa mnogočlensk izraz, tedaj deljenje le naznačujemo, pišoč kvocijent v obliki ulomka; n. pr.:

$$a : (a + b) = \frac{a}{a + b},$$
$$-3x : (5a - 2b) = -\frac{3x}{5a - 2b}.$$

§ 23.

Vzemimo, da je

$$\begin{array}{lll} a + b + c & \text{divizor,} \\ \underline{n + p + r} & \text{kvocijent, potem je} \\ \left.\begin{array}{r} an + bn + cn \\ + ap + bp + cp \\ + ar + br + cr \end{array}\right\} & \text{dividend.} \end{array}$$

Prvi člen v dividendu je an, t. j. produkt iz prvega divizorjevega člena a in iz prvega kvocijentovega člena n; prvi kvocijentov člen dobimo tedaj, ako razdelimo prvi dividendov člen an s prvim divizorjevim členom a. — Izračunamo li si delski produkt, katerega dá n v dividendu, pomnoživši ves divizor z n, ter odštejemo ta delski produkt od dividenda, onda je prvi člen ap v ostanku produkt iz prvega divizorjevega člena a in iz druzega kvocijentovega člena p;

zatorej dobimo drugi člen kvocijenta, ako razdelimo prvi ostanek s prvim členom divizorjevim. — Izračunamo li si zopet sestavine, katere dá p v dividendu, namreč produkt iz vsega divizorja in iz p ter ta produkt odštejemo od prvega ostanka, potem je prvi člen novemu ostanku produkt iz prvega divizorjevega člena a in iz tretjega kvocijentovega člena r; razdelimo li ta prvi člen ostanka zopet s prvim divizorjevim členom, dobimo tretji kvocijentov člen r; i. t. d.

Iz tega premišljevanja izvajamo, da treba pri deljenji dveh mnogočlenskih števílnih izrazov takó-le postopati:

1.) Najprej deli prvi dividendov člen s prvim členom divizorjevim; na ta način dobiš prvi člen v kvocijentu. S tem prvim členom pomnoži ves divizor ter ta produkt od dividenda odštej.
2.) K ostanku pripiši naslednji člen ali tudi več naslednjih členov dividendovih, potem pa zopet deli prvi člen tega delskega dividenda s prvim divizorjevim členom; na ta način dobiš drugi člen v kvocijentu. S tem druzim členom pomnoži ves divizor, produkt pa odštej od poslednjega delskega dividenda.
3.) K novemu ostanku pripiši zopet jeden ali več naslednjih dividendovih členov in to ponavljaj toliko časa, dokler nisi vzel vseh dividendovih členov v račun.
4.) Ako dobiš na zadnje še ostanek, treba tega tudi še s divizorjem deliti; a dotični kvocijent le naznači ter v obliki ulomka k dobljenemu celemu kvocijentu pripiši.

Naloge.

1. $(24abc - 15cxy - 48abd + 30dxy) : (3c - 6d) = 8ab - 5xy$

$$\begin{array}{rrrr}
24abc & & -48abd & \\
- & & + & \\
\hline
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & + & & - \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

2. $(10a^2 - 11ab - 6b^2) : (2a - 3b) = 5a + 2b$

$$\begin{array}{rrr}
10a^2 & -15ab & \\
- & + & \\
\hline
 & +4ab & -6b^2 \\
 & +4ab & -6b^2 \\
 & - & + \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

3. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$. *4.* $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b)$.
5. $(25x^2 + 30x + 9) : (5x + 3)$.
6. $(16a^2 - 40ax + 25x^2) : (4a - 5x)$.
7. $(a^2 - b^2) : (a + b)$. *8.* $(a^2 - b^2) : (a - b)$.
9. $(4x^2 - 9y^2) : (2x + 3y)$. *10.* $(36x^2 - y^2) : (6x - y)$.
11. $(a^4 - 1) : (a + 1)$. *12.* $(x^5 - 1) : (x - 1)$.
13. $(m^8 - 1) : (m + 1)$. *14.* $(m^7 - 1) : (m - 1)$.
15. $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2)$.
16. $(8x^3 - 22x^2 + 27x - 18) : (2x - 3)$.
17. $(16x^3 - 2a^3) : (2x - a)$.
18. $(7a^2 + 10ab + 19ac + 11bc + 3b^2 + 10c^2) : (a + b + 2c)$.
19. $(6a^2 - 13ab + 4ax + 6b^2 - 11bx - 10x^2) : (3a - 2b + 5x)$.
20. Katere številne vrednosti dobijo dividend, divizor in kvocijent v nalogi 19. za $a = 4$, $b = 3$ in $x = 2$?
21. $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2)$.
22. $(9y^2 - 4x^2 + 4x - 1) : (3y - 2x - 1)$.
23. $(6x^3 - 15x^2 + 12x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$.
24. $(6 + 2a - 23a^2 + 49a^3 - 30a^4) : (2 + 4a - 5a^2)$.
25. $(9x^4 - 16x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$.
26. $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4) : (4m^2 + 4mn + n^2)$.
27. $(12x^4 + x^3y - x^2y^2 + 2xy^3 - 48y^4) : (4x^2 - xy + 8y^2)$.
28. $(2a^4 - 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + b^4 - b^2c^2 - 2c^4) : (2a^2 - b^2 - c^2)$.
29. $(y^6 - 2y^5 - 7y^4 + 20y^3 - 21y^2 - 18y + 27) : (y^2 - 2y - 3)$.
30. $(a^4 + 4b^4) : (a^2 - 2ab + 2b^2)$.
31. $(8p^6 + 27) : (4p^4 - 6p^2 + 9)$.
32. $(2x^4 + 7bx^3 + b^2x^2 + 2b^3x + 24b^4) : (2x^2 - 3bx + 4b^2)$.
33. $(24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2 - 13a^3b + 2a^4) : (4b^2 - 3ab + 2a^2)$.
34. $(63y^8 + 10b^2y^6 - 155b^4y^4 + 10b^6y^2 + 63b^8) : (7y^4 + 5b^2y^2 - 9b^4)$.
35. $(25 + 51a^2 - 6a^4 - 49a^6) : (5 - 3a + 6a^2 - 7a^3)$.
36. $(6x^6 + 7ax^5 - 48a^2x^4 - a^3x^3 + 76a^4x^2 - 16a^5x - 24a^6)$
$: (2x^3 + 5ax^2 - 6a^2x - 4a^3)$.

II. Računanje z ulomljenimi številnimi izrazi.

§ 24.

Za računanje z ulomki, kateri so s črkami izraženi, veljajo prav isti izreki, katere smo navedli za računanje s posebnimi ulomki; zadostovalo bode tedaj, ako pokažemo tu le na primerih s črkami, kakó je one izreke upotrebljati.

Le nekaj je treba pripomniti tu gledé mešanih števil. Pri mešanih posebnih števílih imata celo število in pridejani ulomek vsikdar isti predznak; n. pr. $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ in $-5\frac{3}{4} = -(5 + \frac{3}{4}) = = -5 - \frac{3}{4}$; mešano občno število pa more imeti katero izmed teh-le oblik:

$$a + \frac{m}{n}, \quad a - \frac{m}{n}, \quad -a + \frac{m}{n}, \quad -a - \frac{m}{n}.$$

Kadar treba z mešanimi števili računati, pretvorijo se na neprave ulomke. Ta pretvorba opira se na seštevanje in odštevanje ulomkov.

§ 25.

Naloge, katere kažejo, kakó je pretvarjati več ulomkov na najmanjši skupni imenovalec.

1. Recimo, da nam je pretvoriti ulomke $\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}, \frac{3a}{5}$ na najmanjši skupni imenovalec.

Najmanjši skupni imenovalec je $2 \, . \, 3 \, . \, 5 = 30$; tedaj dobimo

$$30 : 2 = 15, \quad a \times 15 = 15a, \quad \text{torej } \frac{a}{2} = \frac{15a}{30};$$
$$30 : 3 = 10, \quad 2a \times 10 = 20a, \quad \text{»} \quad \frac{2a}{3} = \frac{20a}{30};$$
$$30 : 5 = 6, \quad 3a \times 6 = 18a, \quad \text{»} \quad \frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}.$$

2. Pretvori ulomke $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{bd}$ na najmanjši skupni imenovalec.

Ker ima produkt bd faktorja b in d v sebi, zarad tega je bd najmanjši skupni imenovalec, tedaj

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}, \quad \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

Pretvori še te-le ulomke na najmanjši skupni imenovalec:

3. $\frac{1}{a}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^3}$;

4. $\frac{1}{3}, \frac{a}{b}, \frac{3x}{4cd}, \frac{5y}{6d^2}$;

5. $\frac{x-a}{x+a}, \frac{x+a}{x-a}, \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

§ 26.

Naloge o seštevanji ulomkov.

1. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$.

2. $\frac{x+y}{2p} + \frac{x-y}{2p}$.

3. $\frac{n+p}{3} + \frac{n-p+q}{3} + \frac{n-q}{3} = \frac{3n}{3} = n$.

4. $a + \frac{m}{n} = \frac{an+m}{n}$.

5. $1 + \frac{x-y}{x+y}$.

6. $2a + \frac{3b}{a}$.

7. $\frac{a^2 + x^2}{a - x} + a - x$.

8. $5a - 2b + \frac{3a^2 - 4b^2}{5a - 6b}$.

9. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn}$.

10. $\frac{2x + 3y}{2} + \frac{x - 2y}{3}$.

11. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$.

12. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2}$.

13. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$.

14. $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{7x}{10}$.

15. $\frac{3m - 2n}{m + 2n} + \frac{3m + 2n}{m - 2n}$.

16. $\frac{a - 3b}{bc} + \frac{a}{b} + \frac{a^2 - ab - b^2}{bcd} + \frac{4b}{cd}$.

17. $\frac{mpx + n}{mx - 1} + n + \frac{mnx + p}{mx + 1}$.

18. $\frac{7x + 4a}{9x - 5a} + \frac{8x - 3a}{3x - 2a} + 1$.

19. $\frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} + \frac{8x^2 + 4x - 7}{x^2 + x + 1}$.

20. $\frac{ax}{a^2 - x^2} + \frac{a - x}{a + x} + \frac{a + x}{a - x}$.

21. $\frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4} + \left(\frac{4a}{5} + \frac{5b}{6} + \frac{6c}{7}\right)$.

§ 27.

Naloge o odštevanji ulomkov.

1. $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

2. $\frac{x+y}{2m} - \frac{x-y}{2m}$.

3. $\frac{5m - 3n}{4} - \frac{m+n}{4}$.

4. $a - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$.

5. $\frac{m}{n} - a = \frac{m - an}{n}$.

6. $1 - \frac{x-y}{x+y}$.

7. $\frac{1+2x^2}{x} - 3x.$ **8.** $\frac{2-3a+4a^2}{5-6a} - 7a.$

9. $a + b - \frac{a^2+b^2}{a+b}.$

10. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{bx}{ab} - \frac{ay}{ab} = \frac{bx-ay}{ab}.$

11. $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4}.$ **12.** $\frac{x+y}{x-x} - \frac{x-y}{x+y}.$

13. $\frac{5a}{3} - \frac{3a}{4}.$ **14.** $\frac{2b-5x}{3b+4x} - \frac{4b+5x}{3b-2x}.$

15. $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{5xy}.$ **16.** $\frac{5a}{2a+1} - \frac{2a}{a-2}.$

17. $\frac{17m+3}{12m-15} - \frac{13}{21} + \frac{8m-1}{28m+35}.$

18. $\frac{np-mn}{mp-np} - \frac{q}{a} = \frac{npq-mpq+anp-amp}{amp+anp}.$

19. $\frac{5a^2+a-6}{2a^2-5a+3} - \frac{2a^2+3a-4}{3a^2-6a+9}.$

20. $\frac{a+x}{a-x} - \frac{4x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x}.$

21. $\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2x^2}{15} + \frac{x}{5} - \frac{3}{8}\right).$

§ 28.

Naloge o množenji ulomkov.

1. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$ **2.** $\frac{3}{4ab} \cdot 2b = \frac{3}{2a}.$

3. $\frac{2abx}{3m} \cdot -5c.$ **4.** $\left(1+\frac{b}{a}\right) \cdot 3a.$

5. $\frac{3a^2x^2}{4b^2y^2} \cdot 9y^3.$ **6.** $\frac{5x^2-4x+2}{7x^2+5x-3} \cdot (x-2).$

7. $\left(x-y+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot (x+y) = \frac{2x^2}{x+y} \cdot (x+y) = 2x^2.$

8. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$ **9.** $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{3b}{4n} \cdot -\frac{4c}{5p}.$

10. $\left(1+\frac{x}{y}\right) \cdot \left(1-\frac{x}{y}\right).$ **11.** $\left(2a+\frac{b}{3c}\right)\left(\frac{2b}{5c}-a\right).$

12. $\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{n-m}.$

13. $\frac{5x}{4a} \cdot -\frac{3y}{4b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot -\frac{7z}{8d}.$

14. $\left(3x - \frac{5ax-3}{2a}\right) \cdot -4ab.$

15. $\left(\frac{a+b}{a-b} + 1\right)\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right).$

16. $\frac{5a-11}{6a-7} \cdot (3a^2 - 4a + 9).$

17. $\left(\frac{3x}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2x}\right).$

18. $\frac{3y^2 - 5y + 7}{5y^2 + 6y - 8} \cdot \frac{y^2 + 2y + 3}{2y^2 - 3y - 4}.$

19. $\frac{a^2-1}{2a-3} \cdot \frac{a+1}{2a+3} \cdot \frac{a-1}{a+1}.$

20. $\left(\frac{2a^2}{5b^3} + \frac{a}{3} + \frac{2b^3}{7}\right)\left(\frac{a^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9}\right).$

§ 29.

Naloge o deljenji ulomkov.

1. $\frac{ab}{c} : a = \frac{b}{c}.$

2. $\frac{3ab}{c} : 4d = \frac{3ab}{4cd}.$

3. $\frac{12mpx}{5nq} : -3x = -\frac{4mp}{5nq}.$

4. $\left(1 + \frac{b}{a}\right) : 2b = \frac{a+b}{a} : 2b = \frac{a+b}{2ab}.$

5. $\frac{10x^2y^3}{m^3n^2} : 5xy.$

6. $\frac{3ax^3}{4by^3} : 6b^2y.$

7. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$

8. $2m : \left(1 + \frac{n}{m}\right).$

9. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}.$

10. $\frac{2ax}{3by} : -\frac{5mx}{6ny}.$

11. $\left(1 + \frac{m}{x}\right) : \left(1 - \frac{m}{x}\right).$

12. $\frac{a^2 - b^2}{2ab} : \left(1 + \frac{b}{a}\right).$

13. $\left(\frac{5a - 12x}{4} + 6a + 3x\right) : -\frac{a}{4}.$

14. $\frac{2x-7}{3x+3} : \frac{5x-1}{4x+3}.$

15. $\frac{21mn - 17nx}{12mp} : \frac{9mx - 33x^2}{16np}.$

16. $\frac{5z^2 - 3z - 9}{6z^2 - 5z - 2} : \frac{3z^2 - 7z - 1}{4z^2 + 8z + 3}.$

17. $\left(\frac{x+3y}{2} - \frac{3x-y}{4}\right) : \left(\frac{2x-y}{3} - \frac{x+7y}{4}\right).$

18. $\left(\frac{5x^6}{12a^6} - \frac{43x^2}{24a^2} + \frac{9a^2}{5x^2}\right) : \left(\frac{3x^2}{4a^2} - \frac{6a^2}{5x^2}\right).$

III. Različne naloge

za računanje z občnimi števili.

§ 30.

1. $8abc \,.\, 4.$ **2.** $9a^2 \,.\, a.$

3. $2a + 5m + 3a - 2m.$ **4.** $7a - 11b - (3a + b).$

5. $7x - 3y + 4z - 2x + 4y - 3z + x - 2y + 5z.$

6. $a + b + (c + d) - [a + d - (b + c - a)].$

7. $81ac : -9a.$ **8.** $-65m^2pq : 13mp.$

9. $5x - (2x + 3z).$ **10.** $24 + (8a - 10).$

11. $-5x^5y \,.\, -3x^2.$ **12.** $ab^2c^3 \,.\, -3a^3b^2c.$

13. $-\frac{3ab}{4x} \cdot 5x^2.$ **14.** $5x^2y^4 \cdot \frac{a^5}{x^3y^3}.$

15. $\frac{15bc}{14ad} : -3c.$ **16.** $-\frac{5ax^2}{6y} : 6y.$

17. $a - 2a^2 + 3a^3 - 3a - 4a^2 - 5a^3 + 6a + 7a^2.$

18. $17a - 13b + 10c - (5a + 7b - 6c).$

19. $3x\,(4x + 5y) - (5x - 6y) \,.\, 4y.$

20. $18a^3b^2 : 6ab^4.$ **21.** $-36x^6y^5z^4 : 4x^4y^4z^4.$

22. $(12x^2 - 15xy + 8y^2) \,.\, -2x^2y^2.$

23. $(21a^2x - 18ax^2) : 3ax.$

24. $(35x^5y^4z^3 - 42x^4y^5z^3 + 14x^4y^4z^4) : 7x^3y^3z^3.$

25. $\frac{4a - b}{3} - \frac{3a - 2b}{4}.$ **26.** $\frac{5x - a}{2} + \frac{2x - 3a}{4}.$

27. $\frac{x}{y^2z} - \frac{y}{xz^2} + \frac{z}{x^2y}.$ **28.** $\frac{a - b}{b} + \frac{b}{a - b}.$

29. $3a + 4b - \frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{3a + 4b}.$

30. $(63abc - 72b^2c + 81bcx) : 9bc.$

31. $3a\,(2x - a) - 3x\,(2a + x).$

32. $(6a - 3b - 4c) \,.\, -5abcx.$

33. $(9 - a)\,(m - 10) - (8 - m)\,(7 - a).$

34. $\frac{a + b}{a + b} + \frac{a - b}{2}.$ **35.** $\frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2}.$

36. $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} - \frac{1}{c}.$ **37.** $\frac{5a + 8b}{a + b} - \frac{3a - b}{a - b}.$

38. $\frac{m + n}{2} \cdot \frac{m - n}{a + b}.$ **39.** $(a + b) \cdot \frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2}.$

40. $(25x - 24y) - (12x - 17y) - (11x - 10y).$

41. $13x - (8m - 5n) + (4x + 5m) - (7x - 3n)$.

42. $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} + \frac{x^2 - 2xy - y^2}{xy} + \frac{x^2 - xy + y^2}{y^2}$.

43. $(2a^2 - ab - 6b^2) : (2a + 3b)$.

44. $1 - [3m + 4n + 1 - (5m + 2n + 4)]$.

45. $a - (2b - a) + [3a - (3b - 5a) + 5b]$.

46. $(3ax - 4by)(5ax + 6by)$.

47. $(3m^2 - 5mn + 4n^2)(4m^2 + 5mn - 3n^2)$.

48. $(x^2 - 2ax + 3a^2)(x + 2a) - (x^2 + 2ax - 3a^2)(x - 2a)$.

49. $(36x^2 - 5xy - 50y^2) : (9x + 10y)$.

50. $\left(\frac{7a^3}{12b^3} + \frac{3a^2}{4b^2} - \frac{5a}{8b}\right) \cdot 4ab$.

51. $(1\tfrac{1}{2}x^3y^2 - 2\tfrac{1}{3}x^2y^3)(1\tfrac{1}{2}x^3y^2 + 2\tfrac{1}{3}x^2y^3)$.

52. $(5\tfrac{2}{3}a^7b^5c^6 - 2\tfrac{1}{4}a^6b^4c^7 + 3\tfrac{1}{2}a^5b^3c^8) : 1\tfrac{5}{12}a^5b^4c^6$.

53. $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x + 4)$.

54. $(15a^2 - 26ab + 8b^2) . (4a - 9b)$.

55. $(8x^2 - 9xy + 6y^2)(12x^2 + 5xy - 8y^2)$.

56. $(9a + 3b)(2a - 5b)(a - 4b)$.

57. $(\tfrac{16}{27}a^2 + \tfrac{5}{12}ab - \tfrac{9}{32}b^2) : (\tfrac{2}{3}a + \tfrac{3}{4}b)$.

58. $\frac{3x - 4}{4} + \frac{2x + 3}{5} + \frac{x - 2}{6}$.

59. $\left(\frac{x}{a + x} + a\right)\left(\frac{a}{a - x} - x\right) - \left(\frac{a}{a + x} + x\right)\left(\frac{x}{a - x} - a\right)$.

60. $4a^2 - (2a^2 - 9b) - [6a^2 + 3b - (4a^2 - 5b)]$.

61. $x^3 - 2x^2 + 3x - (-2x^2 + 6x - 7)$.

62. $(8 - 12a + 16a^2 - a^3)(4 - 8a + a^2)$.

63. $(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)(2a - 3b)$.

64. $(6a^4 + 9a^3 + 4a^2 + 5a + 4) : (a^2 + 2a + 1)$.

65. $(x^7 + 1) : (x + 1)$.

66. $\left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{3b}{10a}\right)\left(\frac{5a}{9b} - \frac{6b}{7a^2}\right)$.

67. $\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4}\right)\left(1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right)$.

68. $6(a - 2b + 3c) - 4(2a - b + 5c) + 5(3b - 2a - c)$.

69. $(4x^2 + 3y^3 - 2z^4)(4x^2 - 3y^3 + 2z^4)$.

70. $(2a^4 + a^3b - 5a^2b^2 - ab^3 + 3b^4) : (a^2 - 2ab + b^2)$.

71. $\frac{3m + n - p}{4n} + \frac{4 - 3m - n}{2n} + \frac{3 + 7n - 9p}{9n}$.

72. $(6a^4 + \tfrac{1}{2}a^3 + 10\tfrac{1}{2}a^2 - a + 4) : (2a^2 - \tfrac{1}{2}a + 1)$.

73. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right).$

74. $\left(\frac{2a^3}{5b^3} + \frac{a}{3} - \frac{2b^3}{7}\right)\left(\frac{a^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9}\right).$

75. $\frac{3a - 8x}{2a - 3x} + \frac{4a - 7x}{5a - 9x}.$ **76.** $\frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4x - 2} - \frac{x - 3}{x + 3}.$

77. $\left[(x^2 - y^2) : \frac{x + y}{a}\right] + \left[(x^2 - y^2) : \frac{x - y}{a}\right].$

78. $(5a + 7b + 9c)(8a - 5b - 4c) - (40a^2 - 35b^2 - 36c^2).$

79. $(27x^4 - 6x^2 + 1) : (3x^2 + 2x + 1).$

80. $46(x - 2y + 5z) + 28(3y - 6z) + 18(2y - x - 5z).$

81. $(8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9) : (2x^2 - 3y^3).$

82. $\frac{5a + 6bx}{4a + 6bx} - \frac{ax - x^2}{2a - 3x}.$ **83.** $5x - \frac{18x^2 + 17x}{4x - 2} - 1.$

84. $a - b + \frac{b^2}{a + b} - \frac{a^2}{a - b}.$ **85.** $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) : \frac{a^2 - b^2}{ab}.$

86. $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{5}c - \frac{5}{6}d - \left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{3}{10}c + \frac{2}{3}d\right).$

87. $\frac{6x - 13}{10x - 55} + \frac{17}{20} - \frac{5x - 47}{8x - 44}.$

88. $(5x^2 - 3x - 4)(2x^2 - 4x + 3).$

89. $7a - 5x - [4b - 3x - (9a - 6b) + (9x - 3a)].$

90. $(a^2 - 3a - 6)(a^2 + 4a - 5)(a - 3).$

91. $(x - 18x^3 + 81x^5) : (1 - 6x + 9x^2).$

92. $(9x - 2y + 4z)(3x + 4y - 2z)(6x - 6y + 2z).$

93. $(15a^8x + a^7x^2 - 40a^6x^3 + 16a^5x^4) : (3a^3x - 4a^2x^2).$

94. $\left(\frac{5}{8}a - \frac{1}{2}b - \frac{5}{12}c\right)\left(\frac{3}{5}a - \frac{5}{6}b + \frac{4}{5}c\right).$

95. $\frac{x}{x + y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{y}{x - y}.$

96. $\left[\frac{6z - (4x + 3z)}{a(x + z)} : \frac{4x + 3z}{ax - az}\right] : \frac{(3z - x) - 3x}{6x - (5x - 4z) - 3z}.$

97. $(512 - 5184a^6 + 17496a^{12} - 19683a^{18}) : (8 - 36a^2 + 54a^4 - 27a^6).$

98. $(2a - 3b)(4a - 5b)(3a - 4b)(6a - 5b).$

99. $(7x - 6y)(3x + 4y) - (6x + 3y)(5x + 7y) + (2x - 6y) . (5x - 8y).$

100. $(x^6 - 16x^3y^3 + 64y^6) : (x^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4).$

101. $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)(x - 9).$

102. $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5) : (1 - 3a + 3a^2 - a^3).$

103. $\frac{6(x - 1)}{5(x + 1)} \cdot \frac{3(n - x)}{5(x - 1)} : \frac{9(n - x)}{25(x + 1)}.$

104. $\left(\frac{24x^6y^3z^7}{35a^6bc^9} : \frac{18b^3xz^4}{49ac^2y^6}\right) \cdot \frac{15a^8b^7c^{10}}{28x^8y^{12}z^6}.$

105. $(15a^2 - 11ab + \frac{43}{2}ac + \frac{6}{5}b^2 - \frac{61}{5}bc + 2c^2) : (\frac{3}{2}a - \frac{1}{5}b + 2c).$

Tretji oddelek.

O potencah in korenih.

§ 31.

Ako postavimo kako število večkrat kot faktor, imenujemo, kakor smo že zgoraj v § 10. omenili, ta produkt potenco onega števila, in to toliko potenco, kolikorkrat smo postavili ono število kot faktor; število, katero smo večkrat kot faktor postavili, zovemo koren dobljenega produkta, in sicer toliki koren, kolikorkrat treba ga kot faktor postaviti, da dobimo oni produkt. N. pr.:

$$3 \,.\, 3 = 9,$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 27,$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81,$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 243.$$

Tu je 9 druga potenca, 27 tretja, 81 četrta in 243 peta potenca števila 3; obratno pa je 3 drugi koren števila 9, tretji koren števila 27, četrti koren števila 81, peti od 243.

Kakor imenujemo drugo potenco navadno kvadrat (*Quadrat*), tretjo potenco kub (*Cubus*), prav takó zovemo tudi drugi koren kvadratni koren (*Quadratwurzel*) in tretji koren kubični koren (*Cubikwurzel*).

Število, katero kaže, kolikokrat treba koren kot faktor postaviti, da dobimo drugo število kot potenco, imenujemo eksponent. V prejšnjih primerih so števila 2, 3, 4, 5 zaporedoma eksponenti.

Potenca v zvezi s korenom (podlogo) in eksponentom dá troje važnih računov, potencovanje ali vzmnoževanje (*Potenzieren*), razkorenjevanje (*Wurzelausziehen*) in logaritmovanje (*Logarithmieren*). Z zadnjim računom se v tej knjigi ne bodemo pečali.

Kako število na drugo, tretjo, ... $m$to potenco povišati, pravi se, to število 2krat, 3krat, ... $m$krat kot faktor postaviti; n. pr. 3 na četrto potenco povišati (vzmnožiti), pravi se, 3 4krat kot faktor postaviti, $3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81$, četrta potenca od 3 je tedaj 81. Ta račun naznačujemo s tem, da pripišemo h korenu zgoraj na desno eksponent; tedaj je:

$$3^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3.$$

Iz kacega števila drugi, tretji, ... $m$ti koren potezati (število z 2, 3, ... m razkorenjevati), pravi se, števila iskati, katero dá, 2krat, 3krat, ... $m$krat kot faktor postavljeno, ono dano število; n. pr.: iz 32 5ti koren potegniti, t. j. število 32 s 5 razkoreniti, pravi se, števila iskati, katero dá, 5krat kot faktor postavljeno, 32; to število je 2, kajti $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Znak za razkorenjevanje je $\sqrt{\ }$, med njega kraka zapiše se eksponent; 5ti koren iz 32 zaznamenujemo z $\sqrt[5]{32}$. Pri druzem korenu eksponenta 2 ne pišemo, tedaj pomenja $\sqrt{5}$ toliko kakor $\sqrt[2]{5}$; pomote ne more biti tu nikakeršne, kajti prvi koren iz vsacega števila je vsikdar jednak številu samemu in zato ni treba pisati pri prvem korenu niti znaka za koren.

I. Predznaki potenc.

§ 32.

Ker je

$(+a)^2 = +a \cdot +a = +aa = +a^2$,

$(+a)^3 = +a \cdot +a \cdot +a = +aaa = +a^3$,

$(+a)^4 = +a \cdot +a \cdot +a \cdot +a = +aaaa = +a^4$,

i. t. d., velja:

Pozitivna podloga daje, s sodim ali lihim številom vzmnožena, vsikdar pozitiven rezultat.

Dalje je

$(-a)^2 = -a \cdot -a = +aa = +a^2$,

$(-a)^3 = -a \cdot -a \cdot -a = -aaa = -a^3$,

$(-a)^4 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = +aaaa = +a^4$,

$(-a)^5 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = -aaaaa = -a^5$,

i. t. d.

Negativna podloga daje tedaj, s sodim številom vzmnožena, pozitiven, in z lihim številom vzmnožena, negativen rezultat.

II. Četvero osnovnih računov s potencami.

1. Seštevanje in odštevanje.

§ 33.

Za seštevanje in odštevanje potenc veljajo isti izreki, kateri veljajo za seštevanje in odštevanje algebrajskih izrazov v obče. Rezultat je môči le tedaj skrčiti, kadar so potence istoimenske, t. j. kadar imajo iste korene in iste eksponente.

Naloge.

1. $3a^4 + (-4b^3)$. *2.* $3a^4 - (-4b^3)$.
3. $2a^3 + (5a^2) - (3a)$.
4. $3a^2 + (-5a^2) - (+4a^2) - (-7a^2)$.
5. $7a^2b^2 - 3a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^2$.

6.
$$\begin{array}{rrrr} 7xy^3 & -\ 3x^2y^2 & -\ 5x^3y & +\ 2x^4 \\ 4xy^3 & -\ 9x^2y^2 & +\ 6x^3y & +\ 5x^4 \\ 8xy^3 & +\ 6x^2y^2 & -\ 12x^3y & -\ 7x^4 \\ -10xy^3 & -\ x^2y^2 & -\ 4x^3y & +\ 4x^4 \\ \hline \end{array}$$

2. Množenje.

§ 34.

Pri množenji pišemo potence brez vsacega znaka drugo poleg druge. N. pr.:

$$a^2x^2 \times by^2 = a^2bx^2y^2;\quad 3am^2 . -5b^2n^3 = -15ab^2m^2n^3.$$

Prikrajšati je le tedaj mogoče, kadar imajo potence bodi si jednako podlogo, bodi si jednake eksponente.

a) Potence imajo isto podlogo.

Kakó je množiti v tem slučaji in tudi primere najdeš v §§ 18.—20.

b) Potenčni eksponenti so jednaki.

Tu imamo:

$$\begin{aligned} a^2 . b^2 &= aa . bb = ab . ab = (ab)^2. \\ a^3 . b^3 &= aaa . bbb = ab . ab . ab = (ab)^3. \\ a^4 . b^4 &= aaaa . bbbb = ab . ab . ab . ab = (ab)^4. \\ a^3 . b^3 . c^3 &= aaa . bbb . ccc = abc . abc . abc = (abc)^3. \end{aligned}$$

Potence istih eksponentov množimo, ako pomnožimo njih korene ter ta produkt s skupnim eksponentom vzmnožimo.

Naloge.

1. $2^3 . 5^3 = (2 . 5)^3 = 10^3$. *2.* $4^4 . 5^4 . 5^4$. *3.* $2^5 . a^5 . b^5$.
4. $(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2$. *5.* $x^4 . y^4 . z^4 . 3^4$.
6. $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 . \left(-\frac{4y}{5b}\right)^3 . \left(-\frac{2ax}{3by}\right)^3$. *7.* $\left(\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2}\right)^4 . \left(\frac{a + b}{x - y}\right)^4$.

3. Deljenje.

§ 35.

Potence delimo prav takó kakor algebrajske izraze v obče. N. pr.:

$$24a^2b^3c^4 : 6a^2c^4 = 4b^3;\quad 15ab^2x^3 : -3b^2y^3 = -\frac{5ax^3}{y^3}.$$

Prikrajšati je le tedaj mogoče, kadar so ali koreni ali eksponenti jednaki.

a) Potence imajo isto podlogo.

Kakó je v tem slučaji potence deliti, pokazali smo že zgoraj v §§ 21.—23.; ravno tam so navedeni tudi primeri za to.

b) Potence imajo jednake eksponente.

Imamo:

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Odtod izvajamo:

Potence istih eksponentov delimo, ako razdelimo njih korene ter ta kvocijent vzmnožimo s skupnim eksponentom.

Naloge.

1. $36^3 : 4^3 = \left(\frac{36}{4}\right)^3 = 9^3$.

2. $(5a^2bc^3)^4 : (5ac)^4 = \left(\frac{5a^2bc^3}{5ac}\right)^4 = (abc^2)^4$.

3. $(32m^3x^4)^5 : (8m^2xy)^5$.

4. $(84a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2$.

5. $(3mn^2p^3)^3 : (5m^2n)^3$.

6. $(a^2 - b^2)^4 : (a - b)^4$.

III. Kakó je vzmnoževati gledé na različno aritmetično sestavo podloge.

1. Kakó je vzmnoževati vsoto ali diferenco.

§ 36.

Namenu te knjige bode zadostovalo, ako pokažemo, kakó je računati drugo in tretjo potenco vsote ali diference dveh števil, t. j. binoma.

Da dobimo kvadrat binoma $a + b$, treba ga pomnožiti z $a + b$; potem pa dobimo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Prav takó dobimo tudi:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Kvadrat binoma je tedaj jednak vsoti iz kvadrata prvega dela, dvojnega produkta obeh delov in kvadrata druzega dela.

Kvadrata sta oba dva vsikdar pozitivna, dvojni produkt pa ima znak $+$, kadar imata oba dva dela danega binoma jednaka znaka, in $-$, kadar imata nasprotna znaka.

Ako pomnožimo kvadrat kacega števila s tem številom samim, dobimo njega tretjo potenco. Tedaj je

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \text{in } (a - b)^3 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Tretja potenca (kub) binoma je jednaka vsoti iz tretje potence prvega dela, trojnega kvadrata prvega dela pomnoženega z druzim delom, trojnega prvega dela pomnoženega s kvadratom druzega dela in tretje potence druzega dela.

Ako je v binomu drugi del negativen, negativni sta tudi druga in četrta sestavina v njega tretji potenci.

Naloge.

1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. *2.* $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
3. $(5 + a)^2 = 25 + 10a + a^2$.
4. $(3 - a)^2$. *5.* $(x - 4)^2$.
6. $(y + 2)^3$. *7.* $(3 - b)^3$.

2. Kakó je vzmnoževati produkt.

§ 37.

Imamo:

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= ab \,.\, ab = aabb = a^2b^2, \\ (ab)^3 &= ab \,.\, ab \,.\, ab = aaabbb = a^3b^3, \\ (ab)^4 &= ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\, ab = aaaabbbb = a^4b^4. \end{aligned}$$

Produkt tedaj s številom vzmnožujemo, ako vzmnožimo vsak faktor s tem številom ter dobljene potence drugo z drugo pomnožimo.

Naloge.

1. $(xy)^5 = x^5y^5$.
2. $(2x)^3 = 8x^3$.
3. $(5ax)^4$.
4. $(10abc)^5$.
5. $(abc)^{10}$.
6. $(3amxy)^3$.
7. $(3a + 4b)^2$.
8. $(2x - 3y)^2$.
9. $(8y - 7z)^2$.
10. $(7a + 9x)^2$.
11. $(4a - 3)^3$.
12. $(5m - 4n)^3$.
13. $(7x + 2y)^3$.
14. $(10a - 3b)^3$.

3. Kakó je vzmnoževati kvocijent (ulomek).

§ 38.

Tu imamo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

Ulomek vzmnožujemo s številom, ako vzmnožimo s tem številom njega števec in imenovalec ter prvo potenco z drugo razdelimo.

Naloge.

1. $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$.
2. $\left(\frac{y}{10}\right)^4 = \frac{y^4}{10000}$.
3. $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}$.
4. $\left(-\frac{2x}{5y}\right)^3 = -\frac{8x^3}{125y^3}$
5. $\left(\frac{m+n}{2p}\right)^2$.
6. $\left(\frac{mx}{ny}\right)^3$.
7. $\left(\frac{3ax}{5by}\right)^4$.
8. $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^7$.
9. $\left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^2$.
10. $\left(\frac{2a}{b} - \frac{3x}{y}\right)^2$.
11. $\left(\frac{3x - 2y}{5x + 4y}\right)^3$.
12. $\left(\frac{7m}{3n} + \frac{5p}{6q}\right)^3$.

4. Kakó je vzmnoževati potenco.

§ 39.

Ker je

$$(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^6 = a^{3 \cdot 2},$$
$$(a^2)^4 = a^2 . a^2 . a^2 . a^2 = a^8 = a^{2 \cdot 4},$$
$$(a^m)^2 = a^m . a^m = a^{2m},$$
$$(a^m)^3 = a^m . a^m . a^m = a^{3m},$$

izvajamo:

Potenco vzmnožujemo s številom, ako vzmnožimo podlogo s produktom eksponentov.

Naloge.

1. $(a^5)^3 = a^{15}$.

2. $(10a^2)^3 = 1000a^6$.

3. $(3m^2n^2)^2 = 9m^4n^4$.

4. $(5ab^2c^3)^4$.

5. $\left(\frac{2ax^2}{3by^2}\right)^2 = \frac{4a^2x^4}{9b^2y^4}$.

6. $\left(\frac{3a^4m^3y^2}{4b^2n^3x^5}\right)^4$.

7. $(5a^2 - 6y^3)^2$.

8. $(2ax^2 + 3by^2)^3$.

9. $\left(\frac{4x^2}{3} + \frac{5z^3}{a}\right)^2$.

10. $\left(\frac{2a^2}{3b^2} - \frac{3x^2}{4y^2}\right)^2$.

11. $\left(\frac{3ax^2}{6m^3} - \frac{7by^2}{12n^3}\right)^2$.

12. $\left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m}\right)^2$.

13. $\left(\frac{5m^2y^3}{6n^2z^3} - \frac{3an^3}{4bm^3}\right)^2$.

14. $\left(\frac{8a^2x^4 + 7b^2y^3}{3ax^2 - 4by^2}\right)^3$.

IV. Kakó je računati kvadrat in kvadratni koren posebnih števil.

§ 40.

Kvadrat kacega števila najdemo, ako pomnožimo število s samim seboj. N. pr.:

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025,$$
$$(\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9},$$
$$(1 \cdot 25)^2 = 1 \cdot 25 \times 1 \cdot 25 = 1 \cdot 5625.$$

Ker ima kvadrat decimalnega ulomka dvakrat toliko decimalk, kolikor jih ima dani decimalni ulomek, izvajamo iz tega, da mora biti v popolnem kvadratu število decimalk vsikdar sodo.

Kvadrati jednoštevilčnih števil so:

Kvadratni koreni	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Kvadrati	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Tu hočemo navesti še drug način, kakó je računati kvadrat kacega števila in to zarad tega, ker se nanj opira pozneje sledeči nauk, kakó je potezati kvadratni koren.

Ako nam je izračunati kvadrat kacega števila, n. pr. 47, razstavimo je na dva dela $40 + 7$ ter kvadrat izračunajmo po formuli $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, navedeni v § 36. Na ta način dobimo

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 . 40 . 7 + 7^2.$$

Hočemo li izračunati kvadrat troštevilčnega števila 368, vzemimo $368 = 360 + 8$; potem dobimo

$$368^2 = (360 + 8)^2 = 360^2 + 2 . 360 . 8 + 8^2;$$

toda

$$360^2 = (300 + 60)^2 = 300^2 + 2 . 300 . 60 + 60^2,$$

tedaj, če postavimo zgoraj to vrednost mesto 360^2,

$$368^2 = 300^2 + 2 . 300 . 60 + 60^2 + 2 . 360 . 8 + 8^2.$$

Ako zapišemo te sestavine drugo pod drugo ter račune res izvršimo, dobimo

368^2		
300^2	. . .	90000
2.300.60	. . .	36000
60^2	. . .	3600
2.360.8	. . .	5760
8^2	. . .	64
		135424.

Prav takó dobimo tudi

2438^2		
2000^2	. . .	4000000
2.2000.400	. . .	1600000
400^2	. . .	160000
2.2400.30	. . .	144000
30^2	. . .	900
2.2430.8	. . .	38880
8^2	. . .	64
		5943844.

Oziramo li se kakor treba na to, kakó stojé števílke v posamičnih sestavinah, potem smemo ničle pri napisovanji kar izpuščati; v to treba le vsako naslednjo sestavino za jedno mesto proti desni pomakniti.

Izpustivši v prejšnjih računih ničle, dobili bi to-le:

368^2		2438^2	
3^2	. . . 9.	2^2	. . . 4.
2.3.6	. . . 36.	2.2.4	. . . 16.
6^2	. . . 36.	4^2	. . . 16.
2.36.8	. . . 576.	2.24.3	. . . 144.
8^2	. . . 64	3^2	. . . 9.
	135424	2.243.8	. . . 3888.
		8^2	. . . 64
			5943844.

Iz teh in druzih na podoben način izračunanih primerov izvajamo za kvadrat večštevilčnega števila ta-le tvorbni zakon:

1.) Prva ali najvišja števílka v korenu dá sama svoj kvadrat.

2.) Vsaka naslednja števílka dá v kvadratu dve sestavini: dvojno pred njo stoječe število pomnoženo s to števílko in sama svoj kvadrat.

3.) Pišemo li te sestavine drugo pod drugo, pomaknivši vsako naslednjo za jedno mesto proti desni ter jih seštejemo, kakor stojé, potem je ta vsota kvadrat danega korena.

Naloge.

1. 1234^2		*2.* $94\cdot907^2$	
1^2	. . 1.	9^2	. . 81.
2.1.2	. . 4.	2.9.4	. . 72.
2^2	. . 4.	4^2	. . 16.
2.12.3	. . 72.	2.94.9	. . 169 2.
3^2	. . 9.	9^2	. . 81. . .
2.123.4	. . 984.	2.9490.7	. . 1 32860.
4^2	. . 16	7^2	. . 49
	1522756.		9007·338649.

3. 723^2. *4.* $3\cdot09^2$. *5.* 7146^2.

6. $109\cdot2^2$. *7.* 45284^2. *8.* $0\cdot34081^2$.

9. Kolika je ploščina kvadratu, katerega stranica meri 3 *m* 5 *dm*?

Izračunaj kvadrat merskega števila jedne njegove stranice.

10. Koliko velja kvadratasto zidališče, čegar stranica meri 18 *m* 3 *dm*, ako se plača kvadratni meter po 8 gl. 20 kr.?

§ 41.

Kakó je postopati, da se izračuna kvadratni koren kacega števila, razvidno je iz zakona, po katerem so sestavljene kvadratnega korena številke v kvadratu.

Vzemimo, da nam je izračunati kvadrat, n. pr. števila 7342, in iz dobljenega kvadrata potem kvadratni koren. Tu dobimo

7342^2							$\sqrt{53}$	90	49	64 = 7342	
7^2	. .	49	.			. . .	49				
							4	90			: 14. . . .2.7
2.7.3	. .	4	2.				4	2			
3^2	. .		9	.		. . .		9			
								61	49		: 146. . .2.73
2.73.4	. .		58	4.		. . .		58	4		
4^2	. .			16	.	. . .			16		
								2	93	64	: 1468. .2.734
2.734.2	. .		2	93	6.	. . .		2	93	6	
2^2	. .				4	. . .				4	
		53	90	49	64					0	

Da lažje primerjaš, v kakšni zvezi sta vzmnoževanje na kvadrat (kvadrovanje) in potezanje kvadratnega korena (razkvadrovanje), postavili smo tu oba računa druzega poleg druzega.

Kvadrat kacega števila ima ali dvakrat toliko številk kolikor jih ima koren, ali jedno menj, kajti prva korenska številka dá v kvadratu jedno ali dve mesti, vsaka naslednja korenska številka pa dá v kvadratu zmerom dve mesti. Ako razstavimo tedaj kvadrat od desne proti levi v razdelke po dve številki — prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko — potem imamo prav toliko razdelkov, kolikor ima kvadratni koren številk.

Kvadrat prve korenske številke ima prvi razdelek v sebi; prvo korensko številko najdemo tedaj, vzemši največjo številko, katere kvadrat ima prvi razdelek v sebi; v zgoraj navedenem primeru je to številka 7.

Ako pripišemo, odštevši kvadrat te prve korenske številke $7^2 = 49$ od prvega razdelka, k ostanku 4 drugi razdelek 90, potem ima na ta način dobljeno število 490 obe sestavini, kateri dá v kvadratu druga korenska številka, namreč produkt iz te in dvojne prve številke in kvadrat druge številke; toda prvi produkt sega le do prve številke v druzem razdelku, tedaj ga ima število 49 v sebi. Drugo korensko številko 3 dobimo tedaj, ako razdelimo število, sestoječe iz prejšnjega ostanka in druzega razdelka brez zadnje številke, namreč 49, s podvojeno prvo korensko številko, namreč 14.

Ako potem sestavini, kateri dá ta druga korenska številka v kvadratu, namreč $2 \,.\, 7 \,.\, 3 = 42$ in $3^2 = 9$ na dotičnih mestih od 490 odštejemo ter k ostanku 61 tretji razdelek 49 pripišemo, ima na ta način dobljeno število 6149 oni dve sestavini, kateri dá v kvadratu tretja korenska številka, in sicer ima produkt iz te korenske številke in podvojenega pred njo stoječega že znanega števila v sebi število 6149 brez zadnje številke, tedaj število 614. Tretjo korensko številko 4 dobimo tedaj, če razdelimo 614 z $2 \,.\, 73 = 146$ i. t. d.

Toda $2ab + b^2 = (2a + b)b$; novo korensko številko moremo torej gledé na nje mestno vrednost, ne da bi produkt iz nje in pred njo stoječega števila in njen kvadrat odštevali, takój k divizorji pripisati ter produkt iz na ta način dobljenega števila in nje odšteti.

Računali bi potem takó-le:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{53|90|49|64} & = 7342 \\
49 & \\
\hline
49,0 & : 143.3 \\
429 & \\
\hline
614,9 & : 1464.4 \\
5856 & \\
\hline
2936,4 & : 14682.2 \\
29364 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Ako pripišemo k vsakokratnemu divizorju z nova najdeno številko, moremo produkt iz takó izpremenjenega divizorja in nove številke takój med množenjem od dividenda odštevati. Račun dobil bi potem to-le obliko:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{53|90|49|64} & = 7342 \\
49\,0 & : 143.3 \\
614\,9 & : 1464.4 \\
2936\,4 & : 14682.2
\end{array}
$$

Za potezanje kvadratnega korena velja tedaj to-le pravilo:

1.) Število razdeli, pri jednicah začenši, na razdelke po dve številki; prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko. Pri decimalnem ulomku razdeli od decimalne točke celote proti levi in decimalke proti desni; kadar ima zadnji razdelek decimalk na desni le jedno številko, tedaj pripiši mu ničlo, da bode število decimalk sodo.

2.) Poišči največjo številko, katere kvadrat ima prvi razdelek na levi v sebi; to zapiši kot prvo številko v koren. To številko vzmnoži na kvadrat in tega odštej od prvega razdelka.

3.) Naslednje številke kvadratnega korena najdeš s pomočjo delitve. K ostanku namreč pripiši naslednji razdelek; to število brez zadnje številke je dividend. Divizor dobiš, ako pomnožiš že znani del korena z 2. Sedaj deli in kvocijent zapiši kot novo številko v koren, ob jednem pa tudi k divizorju.

4.) Takó izpremenjeni divizor pomnoži z ravnokar najdeno številko korena in ta produkt odštej, takój ko množiš od dividenda, h kateremu pa treba privzeti prej izpuščeno številko.

5.) K ostanku pripiši zopet naslednji razdelek in potem ravnaj kakor prej in to toliko časa, dokler nisi vzel vseh razdelkov v račun. Dobiš li 0 kot korensko številko, potem vzemi, ne da bi množil in odšteval, takój naslednji razdelek v račun, toda ničlo moraš zapisati v koren in k divizorju.

6.) Kadar so v kvadratu razdelki z decimalkami, tedaj postavi v korenu decimalno točko, predno vzameš prvi razdelek decimalk v račun.

7.) Ako ne dobiš nazadnje nikakeršnega ostanka, določil si kvadratni koren po polnem. Dano število ni popolni kvadrat, ako dobiš pa nazadnje ostanek, in zarad tega tudi koren ne po polnem natančen; določiš pa ga lahko v decimalkah takó na tanko kakor le hočeš; v ta namen treba le k vsakemu ostanku po dve ničli pripisati, sicer pa računati kakor prej. Tak koren imenujemo iracijonalen ali nerazložen.

§ 42.

Naloge.

1. $\sqrt{3|76|36} = 194$

2 7 6 : 29.9
1 5 3 6 : 384.4
0

2. $\sqrt{17|76{\cdot}62|25} = 42{\cdot}15$

1 7 6 : 82.2
1 2 6 2 : 841.1
4 2 1 2 5 : 8425.5
0

3. $\sqrt{34|86|78|44|01} = 59049$

9 8 6 : 109.9
5 7 8 4 4 : 11804.4
1 0 6 2 8 0 1 : 118089.9
0

4. $\sqrt{404496}$.

5. $\sqrt{0{\cdot}556516}$.

6. $\sqrt{5943844}$.

7. $\sqrt{1971216}$.

8. $\sqrt{32524209}$.

9. $\sqrt{63{\cdot}250209}$.

10. $\sqrt{100020001}$.

11. $\sqrt{1655025124}$.

12. $\sqrt{6449{\cdot}053636}$.

13. $\sqrt{5478220225}$.

14. $\sqrt{0{\cdot}0144144036}$.

15. $\sqrt{961{\cdot}33482916}$.

16. $\sqrt{3|15} = 17{\cdot}7482\ldots$

2 1 5 : 27.7
2 60 0 : 347.7
17 10 0 : 3544.4
2 92 40 0 : 35488.8
8 49 60 0 : 354962.2
1 39 67 6

17. $\sqrt{10}$.

18. $\sqrt{321}$.

19. $\sqrt{4{\cdot}52}$.

20. $\sqrt{0{\cdot}00025}$.

21. $\sqrt{0{\cdot}35824}$.

22. $\sqrt{57{\cdot}43178}$.

Račun je môči izdatno **prikrajšati**, kadar je zahtevanih v kvadratnem korenu mnogo decimalk. V ta namen izračunaj na navadni način polovico korenskih številk in še jedno, k ostanku pa ne pripiši novega razdelka, nego v novem divizorji izpusti zadnjo številko, potem pa izračunaj naslednje korenske številke, poslužujoč se okrajšane delitve. N. pr.:

23. Ako treba kvadratni koren iz $7 \cdot 3891$ na 7 decimalk izračunati, dobiš

brez prikrajška

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\ldots$

3 3 8 : 47
9 9 1 : 541
4 5 00 0 : 5428
1 57 60 0 : 54362
48 87 6 | 0 0 : 543648
5 38 4 | 1 60 0 : 5436569
49 1 | 2 47 90 0 : 54365789
1 | 9 55 79 9

s prikrajškom

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{7{\cdot}38|91} & = & 2{\cdot}7182899 \\
3\,38 & : & 47 \\
991 & : & 541 \\
45000 & : & 5428 \\
157600 & : & 54362 \\
48876 & : & 54_{\iota}3_{\iota}6_{\iota}4 \\
5385 & & \\
492 & & \\
3 & &
\end{array}
$$

Izračunaj v 24. do 29. na 5 decimalk:

24. $\sqrt{222}$.

25. $\sqrt{0{\cdot}35824}$.

26. $\sqrt{30{\cdot}009}$.

27. $\sqrt{257813}$.

28. $\sqrt{123456}$.

29. $\sqrt{49{\cdot}49494}$.

30. $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$.

31. $\sqrt{4\frac{177}{376}}$.

32. $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0{\cdot}875} = 0{\cdot}935414\ldots$

33. $\sqrt{\frac{19}{24}}$.

34. $\sqrt{57\frac{119}{235}}$.

35. Travnik ima obliko kvadrata in 1204 m^2 9 dm^2 površine; kolika je dolžina jedni njegovi stranici?

Da dobiš iz ploščine kvadrata dolžino njegove stranice, treba izračunati kvadratni koren iz merskega števila ploščine.

$$1204\,m^2\,9\,dm^2 = 1204{\cdot}09\,m^2;\ \sqrt{1204{\cdot}09} = 34{\cdot}7\,m = 34\,m\,7\,dm.$$

36. Kvadrat ima 82 m^2 62 dm^2 81 cm^2 ploščine; kolika je njega stranica?

37. Kolika je stranica kvadratu, kateri je jednak vsoti treh kvadratov s stranicami 1 *m* 4 *dm*, 2 *m* 1 *dm*, 2 *m* 3 *dm*?

38. Hiša, katere osnovna ploskev ima obliko pravokotnika, meri v dolžino 22 *m* 5 *dm*, v širino pa 18 *m* 4 *dm*; kolik je razstoj dveh nasprotnih hišnih oglov?

Dolžino in širino hiše je môči smatrati za kateti pravokotnega trikotnika, kateremu je potem razstoj dveh nasprotnih oglov hipotenuza. Hipotenuzo pravokotnega trikotnika pa lahko najdeš, ako sta dani obe dve kateti; v ta namen treba le vsako kateto na kvadrat vzmnožiti, ta dva kvadrata sešteti in iz te vsote drugi koren potegniti.

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{Dolžina} = 22{\cdot}5\,m \\
\text{Širina} = 18{\cdot}4\,m
\end{array}\right\}\ \text{kateti,}\quad
\begin{array}{l}
22{\cdot}5^2 = 506{\cdot}25 \\
18{\cdot}4^2 = 338{\cdot}56
\end{array}
$$

$$\text{hipot.} = \sqrt{844{\cdot}81} = 29{\cdot}06\ m.$$

39. Kolika je hipotenuza pravokotnemu trikotniku, čegar kateti merita $3 \cdot 56\ m$ in $4 \cdot 75\ m$?

40. Kolika mora biti dolžina lestvici, da seže, k poslopji prislonjena, $4\ m$ $5\ dm$ visoko, ako je spodaj za $2\ m$ $5\ dm$ od poslopja oddaljena?

41. Kolika je v pravokotnem trikotniku druga kateta, ako meri hipotenuza $3 \cdot 6\ m$ in prva kateta $2 \cdot 4\ m$?

42. Kolika je višina v jednakostraničnem trikotniku, ako meri stranica *a)* $13\ cm$, *b)* $0 \cdot 87\ m$, *c)* $2\ m$ $3\ dm$ $5\ cm$?

43. Izračunaj višino jednakokrakega trikotnika, kateremu meri

a) krak $1\ m$ $3\ dm$, osnovnica pa $1\ m$ $8\ dm$,

b) » $1\ m$ $2\ dm$ $5\ cm$, osnovnica pa $2\ m$ $1\ dm$ $8\ cm$.

44. Kolik je polumer kroga, čegar ploščina znaša $24\ dm^2$ $63\ cm^2$?

Tu treba mersko število ploščine s $3 \cdot 1416$ razdeliti in iz kvocijenta drugi koren potegniti.

45. Nekdo si hoče $4\ dm^2$ $42\ cm^2$ veliko tarčo narediti; kolik polumer ji mora dati?

V. Kakó je vzmnoževati posebna števila na tretjo potenco in kakó je potezati iz posebnih števil tretji koren.

§ 43.

Tretjo potenco (kub) števila najdeš, ako vzameš število trikrat kot faktor. N. pr.:

$$738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272.$$
$$\left(\tfrac{9}{16}\right)^3 = \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} = \tfrac{729}{4096}.$$
$$7{\cdot}02^3 = 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408.$$

Iz tretjega primera je razvidno, da mora imeti tretja potenca decimalnega ulomka trikrat toliko decimalk, kolikor jih ima dani decimalni ulomek; v popolni tretji potenci je tedaj število decimalk vsikdar mnogokratnik števila 3.

Tretje potence jednoštevilčnih števil so:

Tretji koren	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
tretja potenca	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Tu hočemo navesti še drug način, kakó je vzmnoževati število na tretjo potenco, uporabljujoč v § 36. navedeno formulo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

in to zarad tega, da nam bode pozneje môči nauk, kakó je potezati tretji koren, z razlogi podkrepiti.

Vzmnožimo li po tej formuli n. pr. 57 na tretjo potenco, to dobimo

$$57^3 = (50 + 7)^3 = 50^3 + 3\,.\,50^2.\,7 + 3\,.\,50\,.\,7^2 + 7^3.$$

Treba li troštevilčno število 429 vzmnožiti na tretjo potenco, to vzemimo $429 = 420 + 9$; tedaj

$$429^3 = (420 + 9)^3 = 420^3 + 3\,.\,420^2.\,9 + 3\,.\,420\,.\,9^2 + 9^3;$$

toda

$$420^3 = (400 + 20)^3 = 400^3 + 3\,.\,400^2.\,20 + 3\,.\,400\,.\,20^2 + 20^3,$$

tedaj, ako postavimo zgoraj mesto 420^3 to vrednost,

$$\begin{aligned} 429^3 = 400^3 &+ 3\,.\,400^2.\,20 + 3\,.\,400\,.\,20^2 + 20^3 \\ &+ 3\,.\,420^2.\,9 + 3\,.\,420\,.\,9^2 + 9^3, \end{aligned}$$

ali, ako pišemo posamične sestavine drugo pod drugo ter jih res izračunamo,

429^3		
400^3	. . . . .	64000000
$3.400^2.20$	. . . . .	9600000
$3.400.20^2$	. . . . .	480000
20^3	. . . . .	8000
$3.420^2.9$	. . . . .	4762800
$3.420.9^2$	. . . . .	102060
9^3	. . . . .	729
		78953589.

Prav takó dobimo

1284^3		
1000^3	. . . .	1000000000
$3.1000^2.200$	. . . .	600000000
$3.1000.200^2$	. . . .	120000000
200^3	. . . .	8000000
$3.1200^2.80$	. . . .	345600000
$3.1200.80^2$	. . . .	23040000
80^3	. . . .	512000
$3.1280^2.4$	. . . .	19660800
$3.1280.4^2$	. . . .	61440
4^3	. . . .	64
		2116874304.

Napisujoč posamične sestavine moremo ničle tudi kar izpuščati, če pomaknemo le vsako naslednjo sestavino za jedno mesto dalje proti desni.

Brez ničel imata zadnja dva primera to-le obliko:

429^3		1284^3	
4^3 . . .	64.	1^3 . . .	1.
$3.4^2.2$ . . .	96.	$3.1^2.2$ . . .	6.
$3.4.2^2$ . . .	48.	$3.1.2^2$ . . .	12.
2^3 . . .	8.	2^3 . . .	8.
$3.42^2.9$ . . .	47628.	$3.12^2.8$ . . .	3456.
$3.42.9^2$ . . .	10206.	$3.12.8^2$ . . .	2304.
9^3 . . .	729	8^3 . . .	512.
	78953589.	$3.128^2.4$ . . .	196608.
		$3.128.4^2$ . . .	6144.
		4^3 . . .	64
			2116874304.

Iz teh primerov je razvidno, da treba **tretjo potenco večštevilčnega števila takó-le računati:**

1.) Najprej vzemi tretjo potenco prve korenske številke.

2.) Vsaka naslednja korenska številka dá tri sestavine, namreč trojni kvadrat pred njo stoječega števila, pomnožen s to številko, trojno pred njo stoječe število, pomnoženo s kvadratom te številke in tretjo potenco te številke.

3.) Te sestavine zapiši po vrsti takó drugo pod drugo, da pride vsaka naslednja za jedno mesto dalje proti desni, potem pa jih seštej.

Naloge.

1. 3915^3		**2.** $2·1806^3$	
3^3 . .	27.	2^3 .	8.
$3.3^2.9$ . .	243.	$3.2^2.1$.	12.
$3.3.9^2$ . .	729.	$3.2.1^2$.	6.
9^3 . .	729.	1^3 .	1.
$3.39^2.1$ . .	4563.	$3.21^2.8$.	10584.
$3.39.1^2$ . .	117.	$3.21.8^2$.	4032.
1^3 . .	1.	8^3 .	512.
$3.391^2.5$ . .	2293215.	$3.2180^2.6$.	85543200.
$3.391.5^2$ . .	29325.	$3.2180.6^2$.	235440.
5^3 . .	125	6^3 .	216
	60006085875.		10·368788674616.

3. 237^3. *4.* $7 \cdot 83^3$. *5.* $0 \cdot 08605^3$.
6. 2367^3. *7.* $13 \cdot 097^3$. *8.* 48196^3.
9. Koliko prostornino ima kocka, katere stranica meri 2 *m* 8 *dm*?
Vzmnoži dolžino stranice na tretjo potenco.

§ 44.

Da zvemo, kakó je potezati tretji koren, treba si le ogledati, kakó so v tretji potenci sestavine tretjega korena sestavljene ter jih potem, potezujoč tretji koren, zopet primerno razstaviti.

Vzemimo, da treba n. pr. 4567 na tretjo potenco vzmnožiti in potem iz dobljene tretje potence tretji koren potegniti. Tu dobimo

4567^3					$\sqrt[3]{95}$	256	152	263	$= 4567$
4^3 ..	64	.			... 64				
					31	256			$:48 \ldots 3.4^2$
$3.4^2.5$ ..	24	0.			... 24	0			
$3.4.5^2$ ..	3	00.			... 3	00			
5^3 ..		125	.		...	125			
					4	131	152		$:6075 .. 3.45^2$
$3.45^2.6$ ..	3	645	0.		... 3	645	0		
$3.45.6^2$ ..		48	60.		...	48	60		
6^3 ..			216	.	...		216		
						437	336		$:623808 .. 3.456^2$
$3.456^2.7$ ..		436	665	6. ...		436	665	6	
$3.456.7^2$ ..			670	32. ...			670	32	
7^3 ..				343 ...				343	
	95	256	152	263				0	

Tretja potenca dekadičnega števila ima trikrat toliko številk, kolikor jih ima tretji koren, ali pa za dve ali tudi za jedno menj; kajti prva korenska številka dá v tretji potenci jedno, dve ali tri mesta, vsaka naslednja pa vsikdar tri mesta. Ako razstavimo tedaj tretjo potenco od desne proti levi v razdelke po tri mesta — prvi razdelek na levi ima lahko dve ali tudi le jedno številko — potem imamo prav toliko razdelkov, kolikor ima tretji koren številk.

Tretjo potenco prve korenske številke ima prvi razdelek v sebi; prvo korensko številko tedaj najdemo, ako vzamemo največjo številko, katere tretjo potenco ima prvi razdelek v sebi; 95 ima v sebi tretjo potenco številke 4, namreč 64; prva korenska številka je tedaj 4.

Ako pripišemo, odštevši tretjo potenco prve korenske številke $4^3 = 64$ od prvega razdelka, k ostanku 31 drugi razdelek 256, ima število 31256 v sebi vse tri sestavine, katere dá druga korenska številka, in sicer je pomaknena vsaka sestavina za jedno mesto dalje proti desni; toda produkt iz trojnega kvadrata prve korenske številke in iz druge sega le do prve številke v druzem razdelku. Če odrežemo tedaj v 31256 zadnji dve številki in razdelimo, kar ostane, namreč 312, s trojnim kvadratom prve korenske številke, namreč z 48, dobimo drugo korensko številko 5.

Ako odštejemo sedaj vse tri sestavine, katere dá ta nova korenska številka v tretji potenci, namreč $3 . 4^2 . 5 = 240$, $3 . 4 . 5^2 = 300$ in $5^3 = 125$, vsako za jedno mesto dalje proti desni pomaknivši, od ostanka prvih dveh razdelkov ter pripišemo k novemu ostanku 4131 tretji razdelek, potem ima na ta način dobljeno število 4131152 v sebi vse tri sestavine, katere dá tretja korenska številka v tretji potenci, in sicer ima produkt iz te številke in trojnega kvadrata pred njo stoječega števila v sebi število 4131152 brez zadnjih dveh številk, tedaj število 41311. Tretjo korensko številko 6 dobimo tedaj, če razdelimo 41311 s $3 . 45^2 = 6075$, i. t. d.

Tretji koren treba tedaj takó-le potezati:

1.) Število razdeli, pri jednicah začenši, proti levi na razdelke po tri številke; prvi razdelek na levi sme imeti tudi le dve ali le jedno številko. Če ima dano število tudi decimalke, razstavi le-te od decimalne točke proti desni na razdelke, in če bi imel zadnji razdelek decimalk na desni menj nego tri številke, dopolni ga z ničlami.

2.) Poišči največjo številko, katere tretjo potenco ima prvi razdelek na levi v sebi; le-to zapiši kot prvo številko v koren, potem pa jo vzmnoži na tretjo potenco in to odštej od prvega razdelka.

3.) Naslednje številke tretjega korena dobiš, uporabljujoč delitev. K ostanku pripiši namreč naslednji razdelek; to število brez zadnjih dveh številk je dividend; divizor pa je trojni kvadrat že znanega dela v tretjem korenu. Kvocijent zapiši kot novo številko v koren.

4.) Sedaj si izračunaj sestavine, katere dá ta nova številka v tretji potenci, namreč trojni kvadrat pred njo stoječega števila, pomnožen s to številko, trojno število pred njo, pomnoženo s kvadratom te številke in tretjo potenco te številke; prvo sestavino zapiši pod dividend, vsako naslednjo pa za jedno mesto dalje proti desni, potem pa odštej vsoto vseh treh sestavin od dividenda, privzemši prej izpuščeni dve številki.

5.) K ostanku pripiši zopet naslednji razdelek in to ponavljaj toliko časa, dokler nisi vzel vseh razdelkov v račun. Dobiš li 0 kot korensko številko, potem vzemi, ne da bi vse tri sestavine računal in odšteval, precej naslednji razdelek v račun, toda v koren zapiši jedno ničlo, k divizorju pa dve.

6.) Kadar ima dano število tudi decimalke, tedaj postavi v korenu decimalno točko, predno vzameš prvi razdelek decimalk v račun.

7.) Ako ne dobiš nazadnje nikakeršnega ostanka, določil si tretji koren po polnem. Ako dobiš pa nazadnje ostanek, potem ni tretji koren po polnem natančen; določiš pa ga lahko v decimalkah takó natanko, kakor le hočeš; v ta namen treba le k vsakemu ostanku razdelek treh ničel pripisavati, sicer pa računati kakor prej. V tem slučaji je koren iracijonalen.

§ 45.

Naloge.

1. $\sqrt[3]{140|608} = 52$

$$\begin{array}{rl}
125 & \\
\hline
15\,6{,}08 & :\ 75 \\
15\,0 & \\
6\,0 & \\
8 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

2. $\sqrt[3]{242 \cdot 970|624} = 6 \cdot 24$

$$\begin{array}{rl}
216 & \\
\hline
26\,9{,}70 & :\ 108 \\
21\,6 & \\
7\,2 & \\
8 & \\
\hline
4\,6\,42\,6{,}24 & :\ 11532 \\
4\,6\,12\,8 & \\
29\,76 & \\
64 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

3. $\sqrt[3]{373248}$.

4. $\sqrt[3]{704969}$.

5. $\sqrt[3]{884736}$.

6. $\sqrt[3]{0 \cdot 046656}$.

7. $\sqrt[3]{876467493}$.

8. $\sqrt[3]{171 \cdot 879616}$.

9. $\sqrt[3]{594823 \cdot 321}$.

10. $\sqrt[3]{481890304}$.

11. $\sqrt[3]{0 \cdot 017173512}$.

12. $\sqrt[3]{8108486729}$.

13. $\sqrt[3]{22 \cdot 164361129}$.

14. $\sqrt[3]{56800 \cdot 235584}$.

15. $\sqrt[3]{1029383182673}$.

16. $\sqrt[3]{750494 \cdot 663741376}$.

17. $\sqrt[3]{0\cdot000|07_0} = 0\cdot0412..$

$$\begin{array}{rl}
\underline{64} & \\
60,00 & :\ 48 \\
48 & \\
12 & \\
\underline{1} & \\
10\,790,00 & :\ 5043 \\
10\,086 & \\
49\,2 & \\
\underline{8} & \\
654\,72 &
\end{array}$$

18. $\sqrt[3]{2}$.

19. $\sqrt[3]{100}$.

20. $\sqrt[3]{25\cdot25}$.

21. $\sqrt[3]{0\cdot0011}$.

22. $\sqrt[3]{70815}$.

23. $\sqrt[3]{135790}$.

24. $\sqrt[3]{12\cdot3456}$.

25. $\sqrt[3]{0\cdot246813}$.

Kadar je zahtevanih v korenu mnogo številk, môči je tudi pri potezanji tretjega korena račun izdatno p r i k r a j š a t i, prav takó kakor pri potezanji kvadratnega korena. V ta namen izračunaj nad polovico korenskih številk na navadni način; naslednje številke dobiš s pomočjo prikrajšane delitve, in sicer vzemi zadnji ostanek za dividend, trojni kvadrat že najdenega korena brez zadnje številke pa za divizor.

26. Izračunaj $\sqrt[3]{8\cdot4313527}$ na 7 številk.

$$\sqrt[3]{8\cdot431|352|700} = 2\cdot035319$$

$$\begin{array}{rl}
\underline{8} & \\
431\,352 & :\ 1200 \\
360\,0 & \\
5\,40 & \\
\underline{27} & \\
65\,925700 & :\ 123627 \\
61\,8135 & \\
15225 & \\
\underline{125} & \\
3\,959825 & :\ 12423,6,7,5 \\
232722 & \\
108485 &
\end{array}$$

Naloge 27.—32. izračunaj na 5 decimalk.

27. $\sqrt[3]{5}$.

28. $\sqrt[3]{1028}$.

29. $\sqrt[3]{78\cdot24}$.

30. $\sqrt[3]{1\cdot91016}$.

31. $\sqrt[3]{13\cdot0835}$.

32. $\sqrt[3]{0\cdot812357}$.

33. $\sqrt[3]{\dfrac{343}{3375}} = \dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{3375}} = \dfrac{7}{15}.$

34. $\sqrt[3]{134\dfrac{313}{512}}.$

35. $\sqrt[3]{\dfrac{17}{40}} = \sqrt[3]{0\cdot425} = ..$

36. $\sqrt[3]{2\dfrac{35}{54}}.$

37. Kolika je stranica kocke, katera ima 438976 cm^3 prostornine?

Dolžina kockine stranice je jednaka tretjemu korenu iz merskega števila prostornine.

38. Kocka ima 5 m^3 639 dm^3 752 cm^3 prostornine; kolika je nje stranica?

39. Kolika je stranica kocki, katera je tolika kakor dve kocki s stranicama 2 m 5 dm in 1 m 8 dm skupaj?

40. Kotlarju treba narediti kockast kotel, ki drži 3 hl 25 l; kakó dolga mora mu biti stranica, ker je 1 l = 1 dm^3?

41. Kolik je premer krogle, katera ima 1047 dm^3 394 cm^3 488 mm^3 prostornine?

Prostornino pomnoži z 0·2387, iz produkta pa potegni tretji koren.

42. Medena krogla tehta 3 kg; kolik ji je premer, če tehka 1 dm^3 medí $8\frac{2}{5}$ kg?

VI. Različne naloge za računanje s potencami in koreni.

§ 46.

1. $(8a^3b^4)^2.$

2. $72x^8 : -8x^5.$

3. $[(-a^2bx^3)^2]^3.$

4. $5a^4 - 3a^4 - a^4.$

5. $\left(-\frac{2a^2x^3}{3by^3}\right)^3.$

6. $\left[\left(\frac{3m^2z^3}{2n}\right)^4\right]^2.$

7. $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3.$

8. $\frac{9a^3b^3}{cd^4} \cdot \frac{5a^2d^3}{6b^2c^2}.$

9. $2x^2y^3z^2 \,.\, -5xy^2z^4 \,.\, 3x^3y.$

10. $35a^2b^4c \,.\, -2a^5b^2c^4 : -7a^4b^4c^4.$

11. $\left(\frac{5ab^2c^3x^4}{6m^3n^3py^4}\right)^5.$

12. $\frac{6a^3m^2x}{7bn^3y} \cdot \frac{an^2y^2}{4b^2mx} \cdot \frac{b^2x^3}{a^2y}.$

13. $[3(a-b)]^3.$

14. $[-(a+b)^2]^3.$

15. $(9a^2 - 5)^2.$

16. $(8a^3 + 3x^2)^2.$

17. $(5m + 4n)^3.$

18. $(2ax^2 - 5by^2)^3.$

19. $(7a^2 - 5ab)^2.$

20. $(6a^2b^3 + 5x^3y^2)^3.$

21. $8ab^2x^2 \,.\, -3ab^2y^3 \,.\, -2b^2x^2y \,.\, 5a^2b.$

22. $(2a^3 - 5a^2b - 4ab^2 + 3b^3) \,.\, 6a^2b^3.$

23. $(a-b)^3 \,.\, (a-b)^2 \,.\, (a-b)^{m-4}.$

24. $(14a^3b^2c + 28a^2b^3c^2 - 35ab^4c^3) : -7ab^2c.$

25. $(30a^2)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{15a}\right)^2.$

26. $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 \cdot (a+1)^3.$

27. $\frac{(a^4 - m^4)^3}{(3a^2 - 3m^2)^3}.$

28. $\frac{3^5 \,.\, 8^5 \,.\, 5^5}{2^5 \,.\, 6^5 \,.\, 20^5}.$

29. $\frac{(a-1)^2}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{a-1}$.

30. $\left(\frac{x^2-1}{a^2-1}\right)^3 : \left(\frac{x+1}{a-1}\right)^3$.

31. $\left(\frac{3x}{8} - \frac{5a}{6}\right)^2$.

32. $\left(\frac{9a}{b} - \frac{4b}{a}\right)^2$.

33. $\left(\frac{5a^2}{4x} + \frac{7x^2}{10a}\right)^2$.

34. $\left(\frac{3x^3}{2} + \frac{2y^3}{3}\right)^2$.

35. $\left(\frac{a^3}{b} - \frac{b^2}{2a}\right)^3$.

36. $\left(\frac{2a^4}{m^3} + \frac{2m^2}{2a}\right)^3$.

37. $\left(\frac{3a^2b}{4x^4} - \frac{2ax^2}{9b^3}\right)^2$.

38. $\left(\frac{8a^5c^4}{9b^3x^6} - \frac{3x^2b^4}{4c^3a^4}\right)^2$.

39. $\sqrt{56169}$.

40. $\sqrt{29844369}$.

41. $\sqrt{63123025}$.

42. $\sqrt{25836889}$

43. $\sqrt{57198969}$.

44. $\sqrt{23609881}$.

45. $\sqrt[3]{13144256}$.

46. $\sqrt[3]{268336125}$.

47. $\sqrt[3]{96702579}$.

48. $\sqrt[3]{318 \cdot 611987}$.

49. $\sqrt[3]{1 \cdot 191016}$.

50. $\sqrt[3]{0 \cdot 340068392}$.

51. $(1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8)\,(1 - 2x + 3x^2)$.

52. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.

53. $\frac{(4a^2 . 5b^3)^4 . (2a^3 . b^3)^2}{(10a^4b^3)^5}$.

54. $\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} - \frac{4x^3}{5}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2x^2}{3}\right)$.

55. $\left(\frac{2a^6}{7b^2} + \frac{3a^3}{5b} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{5a^6}{8b} - \frac{2a^3b}{3} + \frac{3ab^3}{4}\right)$.

56. $(3a^2b - 2ab^2 + 7b^3)\,(5a^3b - 4a^2b^2 - 3ab^3)$.

57. $(3a^2 + 3ab - 6b^2)^2 : (a-b)^2\,(a+2b)^2$.

58. $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 6x^2 + 9} - \frac{x-2}{x^3 - 3x}$.

59. $\frac{3a - b}{25a^2 - 20ab + 4b^2} + \frac{2a - b}{75a^2 - 12b}$.

60. $\left(\frac{x^3y}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2}{x}\right)^4 : \left(\frac{y^3}{am^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2x^3}{a^2y}\right)^5$.

Izračunaj na 5 decimalk:

61. $\sqrt{80}$.

62. $\sqrt{28 \cdot 25}$.

63. $\sqrt{3 \cdot 3333}$.

64. $\sqrt{0 \cdot 078592}$.

65. $\sqrt{4\frac{9}{16}}$.

66. $\sqrt{37\frac{313}{500}}$.

67. $\sqrt[3]{20}$.

68. $\sqrt[3]{0 \cdot 008743}$.

69. $\sqrt[3]{\frac{17}{75}}$. **70.** $\sqrt[3]{\frac{1357}{6750}}$.

71. $\frac{(21a^6m^3x^9 : 12am^2x^5) : 4a^5mx^3}{(121a^9m^{15}x^7 : 11a^3m^9x) : a^3m^4x^8}$.

72. $\left(\frac{3a^4b^3}{5x^5} - \frac{4ab^7}{7x} - \frac{7b^{11}x^3}{a^2}\right)\left(\frac{3a^2b}{4x^3} + \frac{4b^5x}{9a} - \frac{b^9x^5}{a^4}\right)$.

73. $\left(\frac{16a^8}{81x^4} - \frac{8a^6}{9x^2} + \frac{3a^4}{2} - \frac{9a^2x^2}{8} + \frac{81x^4}{256}\right) : \left(\frac{4a^4}{9x^2} - a^2 + \frac{9x^2}{16}\right)$.

74. Izračunaj $x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ in $X = \frac{2s}{\sqrt{4 - s^2}}$ za $s = 1$.

75. Izračunaj $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ za $a = 38 \cdot 3$, $b = 42 \cdot 5$, $c = 49 \cdot 4$ in $s = \frac{a+b+c}{2}$.

76. Kolika je stranica kvadrata, kateri ima $6 \cdot 1009$ m^2 ploščine?

77. Kocka ima 151 dm^3 419 cm^3 437 mm^3 prostornine; kolika ji je stranica?

78. Plošča merski mizi je kvadrat, čegar stranica meri $7 \cdot 9$ *dm*; kolika je diagonala?

79. V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 31 *m* 1 *dm* in jedna kateta 29 *m* 2 *dm*; kolika je druga kateta?

80. Lestvica je 8 *m* dolga; za koliko je pri tléh od zidú oddaljena, ako sega ob hiši 6 *m* visoko?

81. 5 *m* dolga lestvica je takó k pravokotni steni prislonjena, da je pri tléh za 2 *m* od nje oddaljena; kakó visoko sega lestvica ob steni?

82. Kakó dolgih lestvic treba za naskok trdnjave, katero obdaja 7 *m* širok prekop in 6 *m* visok zid?

83. Izračunaj krak jednakokrakega trikotnika, ako meri

a) osnovnica $2 \cdot 56$ *dm* in višina $2 \cdot 25$ *dm*,

b) » 1 *m* 1 *dm* 8 *cm* in višina 1 *m* 4 *dm* 9 *cm*.

84. Dva stolpa sta za 21 *m* drug od druzega oddaljena; vrh je jednemu 34 *m*, druzemu pa 28 *m* nad tlami; za koliko sta vrha drug od druzega oddaljena?

85. $\sqrt{873438916}$. **86.** $\sqrt{57 \cdot 65213041}$.

87. $\sqrt{1607448649}$. **88.** $\sqrt{5797 \cdot 49756569}$.

89. $\sqrt[3]{6321363049}$. **90.** $\sqrt[3]{6 \cdot 372783864}$.

91. $\sqrt[3]{42399022303}$. **92.** $\sqrt[3]{897236011125}$.

93. Kolika je višina granitni kocki, tehtajoči 50 *kg*, ako tehta 1 dm^3 granita 2·7 *kg*?

94. Koliko krogel, imajočih po 2 *cm* v premeru, môči je uliti iz 1 dm^3 svinca?

95. Na hišo treba narediti 10 *m* široko in 8 *m* visoko streho; kakó dolgi morajo biti šperovci, ako se računa za napušč še 0·5 *m*?

96. Kolik je premer krogli, katera ima isto prostornino kakor kocka s stranico 0·4 *m*?

97. Iz svinčene krogle, katera ima 3 *cm* v premeru, treba uliti dve manjši krogli; kolik premer treba dati jedni, da bode imela druga 2 *cm* v premeru?

Četrti oddelek.

Nauk o kombinacijah.

§ 47.

Nauk o kombinacijah ali sestavbah (*Combinationslehre*) peča se v obče z različno razporedbo in sestavo danih količin. Vsako tako dano količino imenujemo element ali prvek (*Element*), in vsak spoj več elementov skupino ali kompleksijo (*Gruppe, Complexion*).

Nauk o kombinacijah razpravlja dve glavni nalogi.

Zahteva se namreč lahko, da sestavimo vse različne razporedbe, katere so mogoče za določeno število elementov, in sicer takó, da bode imela vsaka skupina vse dane elemente. Takó dadé tri črke *a, b, c* šest različnih razporedeb: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.* Takovo prestavljanje elementov zovemo premeščanje (*das Permutieren*).

Dalje se lahko zahteva, da sestavimo z danega števila elementov vse skupine po dva, po tri, po štiri, . . . elemente, in sicer ne oziraje se na razporedbo elementov. Dane elemente takó spajati, pravi se sestavljati ali kombinovati (*combinieren*). Skupine po dva elementa zovemo ambe ali dvojice (*Amben*) ali kombinacije drugega razreda, one po tri elemente terne ali trojice (*Ternen*) ali kombinacije tretjega razreda, po štiri elemente kvaterne ali četverice (*Quaternen*) ali kombinacije četrtega razreda, i. t. d. Štiri črke *a, b, c, d* dadé šest amb: *ab, ac, ad, bc, bd, cd;* štiri terne: *abc, abd, acd, bcd* in jedno kvaterno: *abcd.*

Pri premeščanji in tudi pri sestavljanji gre za dvoje: kakó zahtevane skupine res narediti in kakó jim določiti število. Posamične elemente zaznamenujemo ali s črkami ali pa s števili naravne številne vrste; ta števila zovemo tudi kazala (*Zeiger, Indices*). Skupino več elementov imenujemo naravno urejeno, kadar ji je najnižje kazalo na prvem mestu, in za tem pridejo višja in višja kazala in nazadnje najvišje, n. pr. 123, 134; skupina 132 ni naravno urejena. Izmed dveh skupin, kateri imata jednako število kazal, zovemo ono višjo, v kateri se nahaja od leve proti desni najprej kak višji element; n. pr. skupina 132 je višja od 123, prav takó je 234 višja nego 124.

Za črke velja načelo, da imajo one višja kazala, katere se v abecédi pozneje nahajajo; zatorej je skupina *abcd* naravno urejena, *acbd* pa ni; dalje je *acbd* višja skupina nego *abcd*.

I. O permutacijah.

§ 48.

1.) Da dobimo vse mogoče permutacije ali premeščaje od več danih elementov, treba vzeti najprej najnižjo skupino; to pa dobimo, ako zapišemo elemente v naravnem redu. Iz vsake prejšnje skupine pa dobimo naslednjo višjo po tem-le pravilu: V zadnji skupini pojdi od desne proti levi, dokler ne prideš do elementa, na čegar mesto je môči postaviti višji element izmed onih, ki so mu na desni; ta element zapiši na ono mesto; elementi pred njim ostanejo neizpremenjeni, ostali pa pridejo za njim v naravnem redu. Najvišjo skupino spoznaš na tem, da si sledé v njej elementi z ozirom na prvo skupino v obratnem redu. N. pr.:

Elementi 1, 2, 3.

123	213	312
132	231	321

Elementi *a, b, c.*

abc	*bac*	*cab*
acb	*bca*	*cba*

Elementi *a, b, c, d.*

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

Isto velja tudi, kadar je med elementi, katere treba premeščati, več med seboj jednakih. N. pr.:

Elementi a, b, b, b, c, c.

abbbcc	*babbcc*	*bbabcc*	*bcabbc*	*cabbbc*	*cbabbc*	*ccabbb*
abbcbc	*babcbc*	*bbacbc*	*bcabcb*	*cabbcb*	*cbabcb*	*ccbabb*
abbccb	*babccb*	*bbaccb*	*bcacbb*	*cabcbb*	*cbacbb*	*ccbbab*
abcbbc	*bacbbc*	*bbbacc*	*bcbabc*	*cacbbb*	*cbbabc*	*ccbbba*
abcbcb	*bacbcb*	*bbbcac*	*bcbacb*		*cbbacb*	
abccbb	*baccbb*	*bbbcca*	*bcbbac*		*cbbbac*	
acbbbc		*bbcabc*	*bcbbca*		*cbbbca*	
acbbcb		*bbcacb*	*bcbcab*		*cbbcab*	
acbcbb		*bbcbac*	*bcbcba*		*cbbcba*	
accbbb		*bbcbca*	*bccabb*		*cbcabb*	
		bbccab	*bccbab*		*cbcbab*	
		bbccba	*bccbba*		*cbcbba*	

§ 49.

Iz načina, kakó je premeščati, dá se lahko tudi število permutacij določiti.

Oglejmo si najprej ta slučaj, da so dani elementi med seboj različni.

Za jeden element a je le jedna razporedba mogoča.

Dva elementa a in b imata dve razporedbi ab in ba.

Izmed treh elementov a, b, c je lahko vsak dvakrat na prvem mestu, med tem ko se druga dva premeščata in za njim stojita; zarad tega je mogočih $2 \times 3 = 6$ različnih permutacij.

Izmed štirih elementov a, b, c, d je lahko vsak tolikokrat na prvem mestu, kolikorkrat je môči naslednje tri elemente premestiti, tedaj 6krat; zato dobimo 6 permutacij, v katerih je a na prvem mestu, prav toliko, kjer je b, kjer je c, kjer je d na prvem mestu; skupaj torej $6 \times 4 = 24$ različnih permutacij.

Prav takó izvajamo, da dá 5 elementov $24 . 5 = 120$ permutacij.

Izražuje li P_n (premestno ali permutacijsko število — *Permutationszahl* — za n) število vseh permutacij od n različnih elementov, potem je po prejšnjem:

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 2 = 1 . 2$$
$$P_3 = P_2 . 3 = 1 . 2 . 3$$
$$P_4 = P_3 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4$$
$$P_5 = P_4 . 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5,$$

tedaj v obče

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 . \dots (n - 1) . n.$$

Premestno število za dano število različnih elementov je tedaj jednako produktu naravnih števil od 1 do števila, katero pové, koliko je elementov.

Produkt $1 . 2 . 3 . 4 . \dots (n - 1) . n$ izražujemo z znamenjem (*Symbol*) $n!$;* tedaj

$$P_2 = 2!, \ P_3 = 3!, \ P_4 = 4!, \dots P_n = n!$$

§ 50.

Manjše je število vseh mogočih permutacij, kadar je več elementov jednakih.

Vzemimo, da nam je določiti n. pr. premestno število elementov a, b, b, b, c. Ako damo jednakim trem elementom b kazala ter smatramo a, b_1, b_2, b_3, c za različne elemente, potem je število permutacij $5! = 120$. Napišemo li te permutacije v resnici, potem bodemo videli, da je več tacih skupin, v katerih imata a in c isto razporedbo, katere se tedaj le po različnih razporedbah elementov b_1, b_2, b_3 razločujejo, in sicer je za vsako razporedbo od a in c vsikdar šest permutacij, katere se razločujejo le po različnih razporedbah onih elementov, ki imajo kazala, kajti za b_1, b_2, b_3 je mogočih po prejšnjem $3! = 6$ različnih razporedeb. Takó dobimo n. pr. teh-le šest permutacij, v katerih je a na prvem in c na tretjem mestu: $ab_1cb_2b_3$, $ab_1cb_3b_2$, $ab_2cb_1b_3$, $ab_2cb_3b_1$, $ab_3cb_1b_2$, $ab_3cb_2b_1$.

Ako izpustimo tu kazala, t. j. ako smatramo vse tri b zopet za jednake elemente, potem dobimo mesto šest permutacij jedno samo *abcbb*. Prav takó postane izmed 120 permutacij, če izpustimo kazala, po šest jednakih in dá le jedno permutacijo. Premestno število vseh elementov je treba tedaj s premestnim številom jednakih elementov razdeliti; elementi *abbbc* dadé tedaj $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ različnih permutacij.

Prav takó se lahko prepričamo, da dadé elementi *abbbbc* $\frac{6!}{4!} = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 . 3 . 4} = 30$ različnih permutacij.

Ako bi bili med 10 danimi elementi razven 4 jednakih tudi še drugi 3 jednaki elementi, morali bi iz jednacih razlogov premestno

---

* Čitaj: Faktorijelni n (opazka prelagalčeva).

število $\frac{10!}{4!}$ zarad 3 jednacih elementov še 3! razdeliti; število različnih permutacij bi tedaj bilo $\frac{10!}{4!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.1.2.3} = 25200.$

§ 51.

Naloge.

1. Kolikokrat more 6 gostov svoja mesta pri mizi zamenjati, dokler niso v vsakem mogočem redu sedeli?

$$6! = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6 = 720\text{krat}.$$

2. Kolikokrat je môči vseh 24 črk abecéde premestiti?

3. Koliko različnih razporedeb dadé jedna bela, dve višnjevi in tri rudeče krogle?

$$\frac{6!}{2!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} = 60.$$

4. Na koliko načinov je môči tri različne krogle, izmed katerih je jedna bela, druga rumena, tretja rudeča, v pet predalov razpoložiti?

Krogle položé se vselej v tri predale, dva pa ostaneta prazna. Ako si mislimo prazna dva predala z 0 napolnjena, potem imamo 5 elementov in med temi 0 dvakrat; tedaj je

$$\frac{5!}{2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = 60 \text{ načinov mogočih.}$$

5. Kolikokrat moreš premestiti faktorje teh-le produktov: $abcdef$, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^3y^2z^4$, $a^{m-n}b^n$?

II. O kombinacijah.

§ 52.

Kombinacije so dvoje: brez ponavljanja in s ponavljanjem; pri prvih sme imeti skupina jeden in isti element le jedenkrat, pri druzih tudi večkrat.

1.) Tvorečemu kombinacije treba je začeti kakor pri premeščanji vsikdar pri najnižji skupini in potem se prehaja na višje do najvišje.

Da dobimo za več danih elementov vse ambe brez ponavljanja, treba postaviti vsak element pred vsak višji element. N. pr.:

Elementi 1, 2, 3, 4.	Elementi *a, b, c, d, e.*
12, 13, 14;	*ab, ac, ad, ae;*
23, 24;	*bc, bd, be;*
34.	*cd, ce;*
	de.

Da dobimo vse terne brez ponavljanja, treba je postaviti vsako ambo pred vsak element, kateri je višji od elementov v ambi. N. pr.:

123, 124; 134;	*abc, abd, abe; acd, ace; ade;*
234.	*bcd, bce; bde;*
	cde.

Prav takó dobimo kvaterne, kvinterne . . . brez ponavljanja. Če hočemo dobiti za več danih elementov vse ambe s ponavljanjem, treba je pridejati vsakemu elementu njega samega in vsak višji element. N. pr.:

Elementi 1, 2, 3, 4	Elementi *a, b, c, d, e*
11, 12, 13, 14;	*aa, ab, ac ad, ae;*
22, 23, 24;	*bb, bc, bd, be;*
33, 34;	*cc, cd, ce;*
44.	*dd, de;*
	ee.

Terne s ponavljanjem dobimo, če dodamo k vsaki ambi s ponavljanjem najprej njen najvišji element, in potem še vsak višji element. N. pr.:

111, 112, 113, 114;	122, 123, 124;	133, 134;	144;
222, 223, 224;	233, 234;	244;	
333, 334;	344;		
444.			

Ista pravila veljajo tudi za tvorjenje kvatern, kvintern . . . . s ponavljanjem.

§ 53.

Koliko različnih kombinacij dá več elementov, kaže to-le premišljevanje:

Vzemimo, da je danih n. pr. pet elementov *a, b, c, d, e.* Ako pridenemo k elementu *a* vse druge elemente, prav takó k *b* in k vsem naslednjim elementom, dobili bodemo gotovo vse ambe brez ponavljanja. Ako zapišemo ambe, katere dá vsak element, v jedno vrsto drugo poleg druge, dobimo:

a dá ab, ac, ad, ae;
b » ab, bc, bd, be;
c » ac, bc, cd, ce;
d » ad, bd, cd, de;
e » ae, be, ce, de.

Tu imamo očividno prav toliko vrst, kolikor je elementov, namreč 5, in v vsaki vrsti jedno ambo menj nego je elementov, tedaj 4; vseh amb je torej 5×4. Toda vsako ambo imamo dvakrat; n. pr. ambo bc dobimo, če pridenemo k b element c, in tudi, če pridenemo k c element b; zarad tega je le $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ različnih amb. Ako bi bilo danih n elementov, dobili bi n vrst in v vsaki vrsti $n - 1$ ambo, skupaj tedaj $n(n - 1)$; ker sta pa med njimi zmerom po dve jednaki, dobimo različnih amb le

$$\frac{n(n-1)}{1 . 2}$$

Dalje je razvidno, da dobimo vse terne brez ponavljanja, ako pridenemo k vsaki ambi še vsak drug element, izvzemši ona dva, katera amba že ima. Tedaj

amba	ab	dá	abc, abd, abe;	amba	bd	dá	abd, bcd, bde;
»	ac	»	abc, acd, ace;	»	be	»	abe, bce, bde;
»	ad	»	abd, acd, ade;	»	cd	»	acd, bcd, cde;
»	ae	»	abe, ace, ade;	»	ce	»	ace, bce, cde;
»	bc	»	abc, bcd, bce;	»	de	»	ade, bde, cde.

Tu je toliko vrst, kolikor smo imeli prej amb, tedaj $\frac{5 . 4}{1 . 2} = 10$, in v vsaki vrsti sta dve terni menj, nego je treba elementov sestaviti, namreč 3; skupaj torej $\frac{5 . 4 . 3}{1 . 2}$ tern. Toda vsako terno imamo trikrat; tedaj treba zadnje število še s 3 razdeliti, in potem dobimo $\frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3} = 10$ različnih tern. Za n elementov dobili bi $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}$ tern.

Prav takó se lahko prepričamo, da je za n elementov

število vseh kvatern $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$

» » kvintern $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$

i. t. d.

Lahko je pregledati zakon, katerega ta števila izražujejo. Koliko je namreč kombinacij katerega koli razreda brez ponavljanja pové nam ulomek, čegar števec in imenovalec imata prav toliko faktorjev, kolikor ima vsaka kombinacija elementov; prvi faktor v števci je jednak številu vseh elementov, vsak naslednji je pa za 1 manjši; imenovalec ima za faktorje števila naravne številne vrste od 1 do števila, izražujočega, koliko elementov je v vsaki kombinaciji.

§ 54.

Na podoben način zvemo tudi, koliko je kombinacij s ponavljanjem.

Ako bi imeli zopet n. pr. pet elementov *a, b, c, d, e*, potem dobimo gotovo vse ambe s ponavljanjem, če pridenemo k vsakemu elementu najprej ta element sam in potem še vse druge, ne izvzemši niti njega samega.

Zapišemo li ambe, katere nam dá vsak element, v jedno vrsto drugo poleg druge, potem dobimo:

a dá *aa, aa, ab, ac, ad, ae,*
b » *bb, ab, bb, bc, bd, be,*
c » *cc, ac, bc, cc, cd, ce,*
d » *dd, ad, bd, cd, dd, de,*
e » *ee, ae, be, ce, de, ee.*

Tu imamo tedaj prav toliko vrst, kolikor je elementov, in v vsaki vrsti za jedno ambo več, tedaj 5 vrst po 6 amb, skupaj 5.6 amb. Toda med temi ambami imamo vsako po dvakrat, torej je $\frac{5.6}{2} = 15$ različnih amb. Za n elementov dobili bi n vrst po $n + 1$ ambo, skupaj $n(n + 1)$; število različnih amb bi bilo tedaj $\frac{n(n+1)}{1.2}$

Da dobimo vse terne s ponavljanjem, treba le, da pridenemo k vsaki ambi ona dva elementa, katera amba že ima, in potem še vse druge. Takó dá

amba *aa . . . aaa, aaa, aaa, aab, aac, aad, aae;*
» *ab . . . aab, abb, aab, abb, abc, abd, abe;*
» *ac . . . aac, acc, aac, abc, acc, acd, ace;*
» *ad . . . aad, add, aad, abd, acd, add, ade;*
» *ae . . . aae, aee, aae, abe, ace, ade, aee;*
» *bb . . . bbb, bbb, abb, bbb, bbc, bbd, bbe;*
» *bc . . . bbc, bcc, abc, bbc, bcc, bcd, bce;*
i. t. d.

Tu imamo toliko vrst, kolikor je bilo prej amb s ponavljanjem, tedaj $\frac{5.6}{1.2}$, in v vsaki vrsti dve terni več nego je danih elementov, tu 7 tern; skupaj torej $\frac{5.6.7}{1.2}$. Toda vsako terno imamo po 3krat, tedaj je vseh različnih tern $\frac{5.6.7}{1.2.3}$. Ako bi bilo danih n elementov, imeli bi $\frac{n(n+1)}{1.2}$ vrst in v vsaki po $n+2$ terni, skupaj torej $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$ tern; a med njimi so po 3 jednake; vseh različnih tern s ponavljanjem bi tedaj bilo

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Prav takó izvajamo, da je za n elementov

$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$ kvatern s ponavljanjem

$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$ kvintern » »

i. t. d.

Tu je takój razvidno, da se razločuje število kombinacij katerega koli razreda s ponavljanjem od števila kombinacij istega razreda brez ponavljanja le v tem, da pri prvih faktorji v števci za 1 rastó, pri druzih pa za 1 pojemajo.

§ 55.

Naloge.

1. Povej, na koliko načinov je môči šestero barv rudečo, pomarančasto, rumeno, zeleno, višnjevo in vijoličasto takó med seboj zamenjati, da bodo vsakikrat po tri skupaj?

2. Koliko amb, tern, kvatern, kvintern dá vseh 90 števil naše številne loterije?

Število amb $= \frac{90.89}{1.2} = 4005$,

» tern $= \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$,

» kvatern $= \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$,

» kvintern $= \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$.

3. Koliko amb, tern, kvatern, kvintern dá vseh pet števil, katera se jedenkrat izžrebajo?

$$\text{Število amb} = \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} = 10,$$

$$\text{» tern} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10,$$

$$\text{» kvatern} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 5,$$

$$\text{» kvintern} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 1.$$

4. Koliko različnih metov je z dvema kockama mogočih? Število različnih metov je očividno jednako številu amb s ponavljanjem za 6 elementov, tedaj

$$\frac{6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} = 21.$$

5. Koliko kombinacij prvega, druzega, tretjega, . . . razreda s ponavljanjem in brez ponavljanja dá 7 elementov?

6. Koliko jedno-, dvo-, tri-, četveroštevilčnih števil je môči napisati s številkami 3, 4, 5, 6? (Tu treba spojiti sestavljanje s premeščanjem.)

Peti oddelek.

Računi s sestavljenimi razmerji.

I. O sestavljenih razmerjih.

§ 56.

Ako pomnožimo v več danih razmerjih vse prednje člene druzega z druzim, in prav takó vse zadnje člene druzega z druzim, potem tvorita produkta novo razmerje; le-to razmerje imenujemo z ozirom na dana jednostavna razmerja sestavljeno (*zusammengesetzt*). N. pr.:

$$\text{jednostavna razmerja} \begin{cases} 1 : 2 \\ 3 : 4 \\ 5 : 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a : b \\ c : d \\ e : f \end{matrix}$$

$$\text{sestavljeno razmerje} \quad 15 : 56 \qquad ace : bdf.$$

Eksponent sestavljenega razmerja je jednak produktu iz eksponentov jednostavnih razmerij.

Sestavljena razmerja upotrebljajo se povsod, kjer treba med seboj primerjati take količine, ki so zavisne od dveh ali več vrst količin. Takó je zavisna n. pr. ploščina pravokotnika od njega dolžine in širine. Vzemimo, da nam je določiti razmerje med ploščinama dveh pravokotnikov, izmed katerih je prvi 5 *m* dolg in 3 *m* širok, drugi pa 7 *m* dolg in 4 *m* širok. Tu je

razmerje med dolžinama 5 : 7,
» » širinama 3 : 4.

Ploščina prvega pravokotnika ostala bode očividno ista, če vzamemo, da je mesto 3 *m* le 1 *m* širok, zato pa 3krat daljši, tedaj 15 *m* dolg; prav takó ostane ploščina druzega pravokotnika neizpremenjena, ako vzamemo, da je mesto 4 *m* le 1 *m* širok, a 4krat daljši, torej 28 *m* dolg. Ploščini in njiju medsebojno razmerje ostaneta tedaj neizpremenjeni, če vzamemo, da sta oba pravokotnika po 1 *m* široka, a 15 *m* in 28 *m* dolga; v tem slučaji zavisni sta pa ploščini, ker je širina jednaka, le od dolžin 15 *m* in 28 *m*; razmerje med ploščinama je tedaj 15 : 28 ali $5 \times 3 : 7 \times 4$. Razmerje med ploščinama dveh pravokotnikov je torej sestavljeno razmerje iz jednostavnih razmerij dolžin in širin. Krajše izražujemo to takó-le: ploščina pravokotnikova je v sestavljenem razmerji dolžine in širine.

Prav takó so v sestavljenem razmerji: dolžina prehojene poti, s časom za to upotrebljenim in brzino; plačilo s številom delavcev in s številom delovnih dnij in ur; voznina z dolžino poti in tovorom; obresti s kapitalom, procentom in časom; dobiček s kapitalom, kateri se je vložil, in s časom.

§ 57.

Napravi sestavljeno razmerje

1. od 8 : 5 in 10 : 16;
2. od $2\frac{1}{2} : 3$ in $5\frac{1}{8} : 4\frac{1}{2}$;
3. od $2\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} : \frac{3}{5}$ in $3\frac{2}{5} : 7$;
4. od $8\frac{3}{4} : 15\frac{1}{2}$, $10\frac{2}{3} : 7$, 21 : 18 in $12 : 13\frac{5}{6}$.
5. *A* hodi 10 dnij ter prehodi vsak dan po 49 *km; B* hodi 12 dnij, a na dan prehodi le po 42 *km;* v kakšnem razmerji sta pota, katera sta *A* in *B* prehodila?

Razmerje	dnij	10 : 12
»	brzin	49 : 42
»	potov	35 : 36

6. V kakšnem razmerji sta ploščini dveh pravokotnikov, izmed katerih je prvi 6 *m* dolg in 4 *m* širok, drugi pa 8 *m* dolg in 5 *m* širok?

7. Izmed dveh vrtov je prvi 51 *m* dolg in 34·4 *m* širok, drugi pa 36·4 *m* dolg in 30·5 *m* širok; v katerem razmerji sta njiju ploščini?

8. Dve posodi sta 1 *m* 8 *dm* in 1 *m* 6 *dm* dolgi, 1 *m* 1 *dm* in 8 *dm* široki, 4 *dm* in 5 *dm* globoki; kakó sta si njiju prostornini?

9. Jeden parni stroj vzdigne 15 ton 15 *m* visoko, drugi pa v istem času 9 ton 20 *m* visoko; kakó sta si sili teh dveh strojev?

10. *A* ima naložena dva kapitala, namreč 1200 gl. po 5 % in 1500 gl. po 6 %; v kakšnem razmerji so letne obresti teh dveh kapitalov?

11. V katerem razmerji sta delavni sili dveh delavcev, ako zgotovi jedno in isto delo *A* v 4 dnéh, če dela po 12 ur na dan, in *B* v 5 dnéh, če dela po 8 ur na dan?

12. Kakó sta si vrednosti zlata in srebra pri isti prostornini, ako je razmerje med njiju vrednostima pri jednaki teži 31 : 2 in specifična teža zlatu 19·36, srebru pa 10·51?

II. Sestavljena regeldetrija.

§ 58.

Dostikrat je zavisna jedna vrsta števil takó od dveh ali več druzih vrst, da je s temi posamič v premem ali obratnem razmerji. Vzemimo, da so znana v takem slučaji jedenkrat vsa drugo k druzemu spadajoča števila vseh teh vrst, drugikrat pa je jedno izmed drugo k druzemu spadajočih števil neznano ter je treba še le poiskati. Kakó je to neznano število najti, uči sestavljena regeldetrija (*zusammengesetzte Regeldetri*).

Vsako nalogo sestavljene regeldetrije je môči na več jednostavnih regeldetrijskih nalog razstaviti ter na ta način razrešiti, kakor kaže naslednji primer.

20 *kg* preje dá 105 *m* platna, katero je 12 *dm* široko; koliko *m* 15 *dm* širocega platna dá 175 *kg* preje?

To nalogo sestavljene regeldetrije razstavimo lahko, izpremenivši vsakikrat le jedno vrsto števil, na te-le dve nalogi jednostavne regeldetrije:

a) Od 20 *kg* preje dobimo 105 *m* 12 *dm* širocega platna; koliko *m* prav toliko širocega platna bodemo dobili od 175 *kg*? — Razrešitev:

20 *kg* 105 *m*	$y : 105 = 175 : 20$
175 » y »	tedaj $y = 918\frac{3}{4}$ *m*.

b) Od 175 *kg* preje natka se $918\frac{3}{4}$ *m* platna, katero je 12 *dm* široko; koliko *m* bode se natkalo 15 *dm* širocega platna? — Razrešitev:

Ako je platno 12 *dm* široko $918\frac{3}{4}$ *m*	$x : 918\frac{3}{4} = 12 : 15$,
» » » 15 » » x »	tedaj $x = 735$ *m*.

Toda na ta način razreševati naloge sestavljene regeldetrije je preobširno in za to ga ne kaže v obče upotrebljati; a služi nam v to, da s pomočjo prav jednostavnih sklepov izvajamo iz njega, kakó je krajše take naloge razreševati. Ako zapišemo namreč dobljeni dve sorazmerji drugo pod drugo ter pridržimo črko y mesto najdenega števila $918\frac{3}{4}$, dobimo:

$$\left.\begin{array}{rcl} y : 105 & = & 175 : 20 \\ x : y & = & 12 : 15 \\ \hline yx : 105y & = & 175 \,.\, 12 : 20 \,.\, 15 \end{array}\right\}$$

Pomnoživši istomestne člene druzega z druzim dobimo zopet sorazmerje.

Ako okrajšamo prvo razmerje z y, ostane

$$x : 105 = 175 \,.\, 12 : 20 \,.\, 15,$$

kar je môči zarad lažjega pregleda tudi takó-le napisati:

$$\begin{array}{rl} x : 105 = & 175 : 20 \\ & \;\,12 : 15. \end{array}$$

Tu je le pomniti, da treba drugo pod druzim stoječi števili pomnožiti.

Razmerje $x : 105$ je tedaj jednako sestavljenemu razmerju iz $175 : 20$ in $12 : 15$.

Primerjamo li, kakó so urejena števila v teh razmerjih in kakó v nalogi, namreč

20 *kg* 105 *m* pri 12 *dm* širine,
175 » x » » 15 » »

potem vidimo takój, da sta k x *m* in 105 *m* spadajoči števili *kg*, kateri sta s številom *m* premo sorazmerni, v istem, pripadajoči števili širine pa, kateri sta s številom *m* obratno sorazmerni, v obratnem redu v razmerje postavljeni.

Odtod izvajamo ta-le izrek:

Ako je katera koli vrsta števil od več druzih vrst takó zavisna, da je s temi, posamič vzetimi, bodisi premo, bodisi obratno sorazmerna, potem je razmerje med vsakima dvema številoma prve vrste jednako sestavljenemu razmerju iz jednostavnih razmerij med pripadajočimi števili vsake druge vrste, v istem ali v obratnem redu vzetih, kakor so števila te vrste s števili prve vrste premo ali obratno sorazmerna.

Upotrebljujočim ta izrek nam je môči naloge sestavljene regeldetrije na prav kratek način razreševati:

1.) V prvo razmerje postavi neznanko in ono število, katero ima isto ime kakor neznanka.

2.) Drugo razmerje proporcije je sestavljeno; da dobiš njega jednostavna razmerja, primerjaj vrsto, katere je x, posamič z vsako drugo vrsto in to zato, da zveš, je-li sta te dve vrsti premo ali obratno sorazmerni; potem pa postavi v razmerje števili vsake vrste, spadajoči k x in k številu, ki ima isto ime kakor x, in to v istem ali obratnem redu, kakor je dotična vrsta z vrsto od x premo ali obratno sorazmerna.

3.) Sorazmerje razreši deleč produkt vseh faktorjev, ki so v notranjih členih, s produktom onih faktorjev, ki so v vnanjih členih.

Sklepovni račun služi nam ne le v razreševanje jednostavnih nego tudi sestavljenih regeldetrijskih nalog. Prejšnjo nalogo razrešili bi takó-le:

20 *kg*	dá	12 *dm* širocega platna		105 *m*
1 »	»	12 » »	» 20. del	... $\frac{105}{20}$ *m*
175 »	»	12 » »	» 175krat toliko	... $\frac{105 . 175}{20}$ *m*
175 »	»	1 » »	» 12krat toliko	... $\frac{105 . 175 . 12}{20}$ *m*
175 »	»	**15** » »	» 15. del	... $\frac{105 . 175 . 12}{20 . 15}$ *m*
				= 735 *m*.

§ 59.

Naloge.

(Pri razreševanji upotrebljaj sorazmerje in sklepovni račun.)

1. 12 delavcev zasluži v 3 dneh 45 gl.; koliko zasluži 16 delavcev v 5 dneh?

S pomočjo sorazmerja:

12 delav. v 3 dn. 45 gl.
16 » » 5 » x »

$$\begin{array}{r} x : 45 = 16 : 12 \\ 5 : 3 \\ \hline x = 100 \text{ gl.} \end{array}$$

S pomočjo sklepovnega računa:

12 delav. v 3 dn. 45 gl.
1 » » 3 » $\frac{45}{12}$ gl.
16 » » 3 » $\frac{45 . 16}{12}$ gl.
16 » » 1 » $\frac{45 . 16}{12 . 3}$ gl.
16 » » 5 » $\frac{45 . 16 . 5}{12 . 3}$ gl. = 100 gl.

2. Dvoje zobatih koles zaseza drugo v drugo; *A* ima 60, *B* pa 120 zobcev; kolikokrat zavrtí se *B* v 36 sekundah, ako se zavrtí *A* v 12 sekundah 10krat?

Na pamet: Ker ima *B* mesto 60 120 zobcev, zavrtelo se bode le polovico od 10krat, t. j. 5krat; ker se pa vrtí mesto 12 36 sekund, zavrtelo se bode 3krat 5 = 15krat.

3. Koliko kruha potrebuje 120 môž za 18 tednov, če se računa na jednega moža za 4 tedne $12\frac{1}{2}$ *kg* kruha?

4. Ako zasluži 6 môž v 5 dneh $28\frac{1}{2}$ gl., v koliko dneh bode zaslužilo pod sicer jednakimi pogoji 16 môž 532 gl.?

5. 16 *kg* prediva dá 70 *m* platna, če je platno 78 *cm* široko; koliko *m* dá 36 *kg* prediva, če je platno 116 *cm* široko?

6. Da gorí 35 svetilnic 108 ur, treba je 250 *kg* olja; koliko olja je treba, da gorí 50 tacih svetilnic 245 ur?

7. 100 gl. kapitala dá v 1 letu $5\frac{1}{2}$ gl. obrestij; koliko gl. kapitala treba naložiti, da bode v $2\frac{1}{4}$ leta 300 gl. obrestij?

8. 3600 gl. kapitala dá v $4\frac{1}{2}$ leta 972 gl. obrestij; koliko obrestij dá 5650 gl. kapitala v $2\frac{1}{2}$ leta?

9. Voznik pelje 125 cent. za $28\frac{3}{4}$ gl. 32 *km* daleč; koliko cnt. bode peljal za $43\frac{3}{4}$ gl. 28 *km* daleč?

125 cnt. $28\frac{3}{4}$ gl. 32 *km*
x » $43\frac{3}{4}$ » 28 »

$$\begin{array}{r} x : 125 = 43\frac{3}{4} : 28\frac{3}{4} \\ 32 : 28 \end{array}$$

: 4 = 4 : 8
: 8 = 8 : 16

5
$\cancel{35}$ 8

$$x = \frac{125 . 43\frac{3}{4} . 32}{28\frac{3}{4} . 28} = \frac{125 . \cancel{175} . \cancel{32} . \cancel{4}}{\cancel{4} . \cancel{115} . \cancel{28}} = \frac{5000}{23} = 217\frac{9}{23} \text{ cnt.}$$

23 $\cancel{7}$

10. Voznik dobi $68\frac{1}{3}$ gl. vozarine, da zapelje $143\frac{3}{4}$ cnt. $46\frac{1}{2}$ *km* daleč; koliko treba mu plačati, da zapelje $177\frac{1}{2}$ cnt. 40 *km* daleč?

11. Za neka sobna tla potrebuje se 28 po 35 *dm* dolzih in 6 *dm* širocih desek; koliko desek bode treba za ista tla, če je vsaka le 28 *dm* dolga in 5 *dm* široka?

12. Kakó visoko vzdigne stroj 2352 *kg* v 98 sekundah, če vzdigne v 88 sekundah 5192 *kg* 3 *m* visoko?

13. 120 zidarjev zgotovi neki zid v 12 tednih, če delajo po 8 ur na dan; koliko zidarjev treba več najeti, da bode delo v 10 tednih gotovo, če delajo po 6 ur na dan?

14. Za kos platna, kateri je $66\frac{3}{4}$ *m* dolg in $1\frac{3}{4}$ *m* širok, treba je 15 *kg* preje; koliko *kg* preje je treba za 30 *m* dolg in $1\frac{1}{2}$ *m* širok kos?

15. Tkalec natka od 11·4 *kg* preje 75 *m* 1·2 *m* širocega platna; koliko *m* 1·35 *m* širocega platna natka od 42·114 *kg* preje?

16. Voznik obljubi za 46 gl. 28 cnt. 125 *km* daleč peljati. Prevozivši 40 *km* dobi povelje, na drugo cesto zaviti, 10 cnt. več naložiti in 60 *km* dalje peljati, kakor se mu je s prva reklo. Koliko bode dobil vozarine?

Tu treba izračunati najprej vozarino za 28 cnt., katere je peljal 40 *km* daleč, potem za $28 + 10 = 38$ cnt., katere je peljal $125 - 40 + 60 = 145$ *km* daleč ter oba dva zneska sešteti.

17. 20 delavcev zgotovi v 5 tednih 375 *m* dolgo strugo, če delajo po 12 ur na dan; v koliko tednih bode zgotovilo 12 delavcev, kateri delajo po 10 ur na dan, prav tako 600 *m* dolgo strugo?

S pomočjo sorazmerja:

20 delav.	12 ur	na	dan	v	5 tednih	375 *m*	dolžine,
12 »	10 »	»	»	»	x »	600 »	»

$$\left.\begin{aligned} x : 5 &= 20 : 12 \\ &\ \ \ 12 : 10 \\ &\ 600 : 375 \end{aligned}\right\} \text{ tedaj } x = 16 \text{ tedn.}$$

S pomočjo sklepovnega računa:

20 delav.	12 ur	na	dan	375 *m*	v		5 tednih
1 »	12 »	»	»	375 »	»		$5 . 20$ t.
12 »	12 »	»	»	375 »	»		$\frac{5 . 20}{12}$ t.
12 »	1 »	»	»	375 »	»		$\frac{5 . 20 . 12}{12}$ t.
12 »	10 »	»	»	375 »	»		$\frac{5 . 20 . 12}{12 . 10}$ t.
12 »	10 »	»	»	1 »	»		$\frac{5 . 20 . 12}{12 . 10 . 375}$ t.
12 »	10 »	»	»	600 »	»		$\frac{5 . 20 . 12 . 600}{12 . 10 . 375}$ t.
							$= 16$ t.

18. 20 delavcev izkoplje 30 *m* dolg prekop v 15 dneh, če delajo po 12 ur na dan; koliko delavcev moralo bi po 10 ur na dan delati, da izkopljejo 24 *m* dolg prekop v 16 dneh?

19. Mlin na 3 kolesa zmelje v 22 urah 24 *hl* žita, če se zavrté kolesa vsako minuto po 126krat; koliko koles je treba, da zmeljejo v 42 urah 32 *hl* žita, če se zavrté vsako minuto po 99krat?

20. Travnik, kateri je 512 *m* dolg in 72 *m* širok, dá 10 vozov sena po 9 cnt.; koliko vozov sena po 10 cnt. bode dal 384 *m* dolg in 192 *m* širok travnik?

21. 44 delavcev zasluži v 30 dneh $907\frac{1}{2}$ gl., če delajo po 11 ur na dan; v koliko dneh bode zaslužilo 26 delavcev $214\frac{1}{2}$ gl., če delajo po 10 ur na dan?

22. Parni stroj vzdigne vsacih 6 minut 15 *hl* vode 180 *m* visoko; v koliko minutah vzdigne isti stroj 20 *hl* vode 120 *m* visoko?

23. 100 gl. kapitala dá v 1 letu 5 gl. obrestij; *a)* koliko obrestij dá 3748 gl. v $2\frac{3}{4}$ leta; *b)* v katerem času dá $7835\frac{1}{2}$ gl. kapitala $633\frac{1}{4}$ gl. obrestij; *c)* kateri kapital dá v $2\frac{5}{6}$ leta 720 gl. 22 kr. obrestij?

24. *A* dá *B*-u za 32 gl. v zakup seno z 240 *m* dolzega in 105 *m* širocega travnika; *B* pa prepusti *C*-u 100 *m* dolg in 60 *m* širok kos, a računa si $16\frac{2}{3}\,\%$ dobička; koliko mora *C* *B*-u plačati?

25. V neki fábriki potroši se vsako leto za 250 plinovih plamén, katera potrebujejo po 160 dm^3 plina vsako uro in goré 1440 ur, 8064 gl.; koliko stane plinova svečava v drugi fábriki, v kateri gori 220 plamén 1560 ur, če potrebuje vsako plame na uro po 144 dm^3 plina?

26. 80 *m* dolg, 5 *m* širok in 2 *m* globok prekop izkoplje 20 delavcev v 18 dneh; koliko delavcev zgotovi 120 *m* dolg, 6 *m* širok in 3 *m* globok prekop v 36 dneh?

Na pamet: Če bi bil prekop mesto 80 *m* le 40 *m* dolg, treba bi bilo le $\frac{1}{2}$ od 20, t. j. 10 delavcev; ker je pa prekop 120 *m*, tedaj 3krat takó dolg, treba je 3krat 10, t. j. 30 delavcev; i. t. d.

27. 15 zidarjev sezida 40 *m* dolg, 5 *m* visok in 75 *cm* debel zid v 15 dneh, če delajo po 12 ur na dan; kolika bode višina druzemu, 50 *m* dolzemu in 1 *m* debelemu zidu, katerega sezida 18 zidarjev v 25 dneh, če delajo po 11 ur na dan?

28. 12 tkalcev natka v 3 mesecih 28 kosov po 30 *m* dolzega in 1 *m* 25 *cm* širocega platna, če delajo po 25 dnij na mesec in po 12 ur na dan; v koliko mesecih bode zgotovilo 22 tkalcev 66 kosov po 35 *m* dolzega in 1 *m* 5 *dm* širocega platna, če delajo po 24 dnij na mesec in po 10 ur na dan?

2 : 4 = 4 : 8
2 : 2 = 4 : 4

III. O jednostavnem obrestnem računu.

§ 60.

Denar, katerega posodi kdo komu druzemu s tem pogojem, da mu plačuje le-ta za uporabo gotov znesek, slednjič pa vender le ves izposojen denar zopet povrne, imenuje se kapital ali glavnica (*Kapital*). Znesek, kateri se plačuje za uporabo kapitala, zove se obrest (*Zins, Interesse*) in se računa po procentih; le-ti veljajo, če se izrekoma nasprotno ne omenja, za jedno leto. N. pr. kapital je po 5 % naložen, pravi se: vsacih 100 gl. kapitala daje na leto 5 gl. obrestij.

Obrestni račun je tedaj procenten račun, treba le tudi v poštev jemati, koliko časa ostane kapital naložen. Pri tem računa se mesec navadno po 30, tedaj leto po 360 dnij.

Pri obrestnem računu imamo tedaj 4 količine: kapital, čas, procent in obresti.

Obresti imenujemo jednostavne ali proste (*einfache Zinsen*), ako ostane kapital ves čas, ko tečejo obresti, neizpremenjen; ako se pa obresti koncem vsacega leta ali poluleta h kapitalu pridevajo in takó povečana vsota z nova na obresti nalaga, zovejo se obresti obrestne obresti (*Zinseszinsen*).

Tu se hočemo pečati najprej z jednostavnimi obrestimi.

1. Kakó je izračunavati obresti.

§ 61.

Občna naloga: Koliko obresti dá kapital k po p procentov v l letih?

Tu dobimo

100 gl. kap. 1 let. p gl. obrestij, tedaj $o : p = k : 100$
k » » l » o » » $\qquad\qquad\qquad\quad l : 1$

zatorej $o = \dfrac{kpl}{100}$, t. j.

Obresti so jednake produktu iz kapitala, procentov in let razdeljenemu s 100.

Naloge.

(Razreši jih na pamet, ali pismeno po zgorej navedeni formuli, ali po sestavljeni regeldetriji, ali po sklepih).

1. Koliko obrestij dá 350 gl. po 4 % v 3 letih?

a) Na pamet. 300 gl. dá po 4 % v 1 letu 12 gl., v 3 letih 36 gl.; 50 gl. dá v 1 letu 2 gl., v 3 letih 6 gl.; skupaj 42 gl.

b) Po formuli.

$$x = \frac{350 \,.\, 4 \,.\, 3}{100} = 42 \text{ gl. obrestij.}$$

c) S pomočjo regeldetrije.

100 gl. kap. 1 l. 4 gl. obrestij
350 » » 3 » x » »

$$x : 4 = 350 : 100$$
$$3 : 1$$
$$x = 42 \text{ gl. obrestij.}$$

d) Po sklepovnem računu.

100 gl. kap. v 1 let. 4 gl. obrestij
50 » » » 1 » $\frac{4}{2} = 2$ gl. obrestij.
350 » » » 1 » $2 \times 7 = 14$ gl. obrestij.
350 » » » **3** » $14 \times 3 = 42$ gl. obrestij.

2. Koliko obrestij dá $786\frac{2}{5}$ gl. po $4\frac{1}{2}$ % v 5 letih?

3. Koliko obrestij dá 3215 gl. 30 kr. po $5\frac{3}{4}$ % v 2 letih 7 mesecih?

4. 5844 gl. kapitala je naloženega $3\frac{1}{2}$ leta po $4\frac{1}{2}$ %; koliko dá v tem času obrestij?

5. Koliko obrestij dá 3105 gl. 90 kr. po 5 % v 2 letih 1 meseci?

6. Nekdo si izposodi 3200 gl. po 5 % na 3 leta; koliko bode moral čez 3 leta plačati, da poplača kapital in obresti?

7. Nekdo je na dolgu $5\frac{1}{2}$ % obresti od treh jednacih kapitalov po 2205 gl. za $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ in $2\frac{5}{6}$ leta; koliko je dolžán vseh obrestij skupaj?

8. *A* ima izposojena dva kapitala: 3580 gl. po $5\frac{1}{4}$ % na 1 leto 9 mesecev, in $2895\frac{1}{2}$ gl. po 6 % na 2 leti 4 mesece; kateri kapital mu nese več obrestij in za koliko več nego drugi?

§ 62.

Pripravnejše je računati obresti po teh-le pravilih, katera so sama ob sebi jasna:

1.) Obresti za jedno leto najdeš po procentnem računu, ako pomnožiš kapital s procenti in produkt razdeliš s 100.

2.) Obresti za več let dobiš, pomnoživši obresti za jedno leto s številom let.

3.) Ako so dani tudi meseci in dnovi, upotreblja se razstavni način (*Zerfällungsmethode*); meseci razstavijo se namreč na dele leta, potem pa se vzemó od obrestij za jedno leto prav toliki deli; dnovi pa se razstavijo na dele meseca in potem se vzemó prav toliki deli od mesečnih obrestij. Vsi ti zneski prištejejo se potem k obrestim za leta.

Naloge.

1. Izračunaj letne obresti

a) od 31 24 gl. po 5 %
156·20 gl. = 156 gl. 20 kr.

b) od 3800 gl. po 4 %
152 gl.

c) od 35 78 gl. 25 kr. po 6 %
35 78·25
214·69 50 = 214 gl. 70 kr.

d) od 957 gl. po $4\frac{1}{3}$ %
3828
319
41·47 gl. = 41 gl. 47 kr.

2. Koliko letnih obrestij dá

a) 1834 gl. po 5 %?
b) $3307\frac{1}{2}$ gl. po 6 %?
c) 2095 gl. 50 kr. po $6\frac{1}{2}$ %?
d) $912\frac{3}{5}$ gl. po $4\frac{3}{4}$ %?

3. Koliko obrestij dá *a)* 2183 gl. po 4 % v 3 letih, *b)* 14788 gl. po $5\frac{1}{4}$ % v 4 letih?

a) 21 83 gl. po 4 %
87·32 gl. v 1 letu
261·96 gl. v 3 letih.

b) 147·88 gl. po $5\frac{1}{4}$ %
739 40
36 97
776·37 gl. v 1 letu
3105·48 gl. v 4 letih.

4. Koliko obrestij dá 2848 gl. po 5 % v 3 letih in 4 mesecih?

28 48 gl. po 5 % v 3 letih 4 mesecih
142·40 gl. v 1 letu
427·2 gl. v 3 letih
47·467 gl. v 4 mes. = $\frac{1}{3}$ leta
474·667 gl. = 474 gl. 67 kr.

5. 8425 gl. 18 kr. kapitala je 4 leta 11 mesecev po $4\frac{1}{2}$ % na obresti naloženega; koliko nese obrestij?

6. Koliko obrestij dá 5244 gl. 55 kr. po $5\frac{1}{4}$ % v 3 letih 5 mesecih 20 dneh?

7. Koliko obrestij dá 2514 gl. 57 kr. po 6 % v 5 letih 8 mesecih 26 dneh?

8. Koliko obrestij nese 3457 mark po $6\frac{1}{2}$ % v 2 letih 7 mesecih 18 dneh?

9. Koliko obrestij dá 724 livres sterling po $4\frac{3}{4}\,\%$ v 4 letih 11 mesecih 27 dneh?

Izračunaj obresti

10. od 9007 gl. 40 kr. po 5 % za 10 mesecev;

11. od 1133 gl. 20 kr. po $5\frac{1}{8}\,\%$ za 3 leta 1 mesec;

12. od 950·235 gl. po $4\frac{1}{2}\,\%$ za 2 leti 11 mesecev 17 dnij;

13. od 7185 gl. 69 kr. po $4\frac{3}{4}\,\%$ za 3 leta 7 mesecev 12 dnij.

14. 3050 gl. je bilo 2 leti 4 mesece po $5\frac{1}{2}\,\%$ naloženih; koliko treba potem plačati, da se poplača kapital in obresti?

§ 63.

Kadar treba izračunati obresti le za določeno število dnij, — in to se zgodi v trgovskem prometu dostikrat — izračunajo se najprej obresti po 6 % in iz teh obresti za vsak drug procent po razstavnem načinu. Leto računa se po 360 dnij.

Vzemimo, da treba v obče določiti obresti od k gl. kapitala po 6 % za d dnij. Tu dobimo

100 gl. kap. v 360 dneh 6 gl. obrestij	$x : 6 = k : 100$
k » » » d » x » »	$d : 360$
	$x = \frac{k \cdot d}{6000}$.

Obresti po 6 % dobimo tedaj za določeno število dnij ako kapital s številom dnij pomnožimo ter ta produkt razdelimo s 6000.

Pri računanji se krajcarji kapitala navadno prezirajo, a število goldinarjev se poveča za 1, kadar ima kapital 50 ali več nego 50 krajcarjev; sicer pa se pretvarjajo krajcarji na stotine goldinarja.

Naloge.

1. Koliko obrestij dá 2790 gl. po 6 % v 85 dneh?

$$\begin{array}{l}
27\,90 \times 85 \\
\hline
223\,20 \\
\;\;13\,950 \\
\hline
237{\cdot}150 \\
\hline
\qquad\qquad : 6 \\
39{\cdot}525 \text{ gl.} = 39 \text{ gl. } 52\tfrac{1}{2} \text{ kr.}
\end{array}$$

2. Koliko obrestij dá 2349 gl. 25 kr. po 6 % v 182 dneh?

Ako preziramo krajcarje	natanko
234 9 × 182	234 9·25 × 182
187 92	187 9 400
4 698	4 6 9850
427·518	427·5 6350
71·253 gl. = 71 gl. 25 kr.	71·2 606 gl. = 71 gl. 26 kr.

3. Koliko obrestij dá 758 mark od dne 13. aprila do dne zadnjega decembra?

Od dne 13. aprila do dne 13. decembra je 8 mes. = 240 dnij
» » 13. decembra » » 30. » » 17 »
skupaj 257 dnij.

4. Koliko obrestij dá 3572 gl. kapitala po 6 % v 217 dneh?

5. Koliko obrestij dá 2350 gl. 47 kr. po 6 % v 17 dneh?

6. Koliko obrestij dá po 6 %

a) 925 gl. v 153 dneh?
b) 1019 mark v 96 dneh?
c) 1512 gl. 90 kr. v 264 dneh?

7. Izračunaj obresti *a)* od 1265 gl. po 4 % za 231 dnij, *b)* od 3402 gl. po $7\frac{1}{4}$ % za 125 dnij.

a)	*b)*
1 265 × 231	3402 × 125
37 95	425 250
253 0	70·875 po 6 %
292 215	11·812 po 1 %
48·702 po 6 %	2·953 po $\frac{1}{4}$ %
— 16·234 po 2 % = $\frac{1}{3}$ od 6 %	85·64 gl. po $7\frac{1}{4}$ %
32·468 gl. po 4 %	

8. Koliko obrestij nese 9110 gl. po 5 % od dne 2. maja do dne 15. oktobra?

Od dne 2. maja do dne 2. okt. je 150 dnij	911 0 × 163
» » 2. okt. » » 15. » » 13 »	546 60
163 dnij	27 330
	1484·930
	247·488 po 6 %
	— 41·248 po 1 %
	206·24 gl. po 5 %

9. Koliko obrestij dá 9217 gl. po 3 % v 174 dneh?

10. Koliko obrestij dá 8685 gl. 25 kr. po $4\frac{1}{4}$ % v 223 dneh?

11. Koliko obrestij dá po 5 %

a) 5605 mark v 37 dneh?
b) 1983 frankov v 210 dneh?
c) 705 livres sterl. v 108 dneh?

12. Koliko znašajo obresti od 3765 gl.

a) za 49 dnij po 5 %?
b) za 85 dnij po $6\frac{1}{2}$ %?
c) za 103 dni po 4 %?

13. Koliko obrestij dá 12425 gl. 68 kr. po 4 % od dne 1. avgusta do dne 5. aprila?

14. Koliko obrestij nese 4286 gl. 42 kr. po 5 % od dne 18. decembra do dne 15. aprila?

15. Nekdo ima dobiti:

obresti od 3045 gl. po 6 % za 233 dnij,
» » 2813 » » 5 % od dne 17. aprila do dne 22. sept.,
» » 4008 » » $6\frac{3}{4}$ % » » 24. maja » » 7. avgusta;
koliko znašajo vse obresti skupaj?

16. Nekdo je dolžán od dne 6. maja $750\frac{1}{2}$ gl.; kolik je dolg dne 30. junija, če se računa $5\frac{1}{2}$ % obrestij?

17. Nekdo si izposodi 2345 gl. po 7 % za 42 dnij; koliko mora potlej vrniti?

18. Trgovec bi bil moral 4108 gl. dne 20. oktobra plačati, plačal je pa še le dne 31. decembra; koliko je moral plačati, če se je računalo 6 % obrestij?

19. *A* bi bil moral plačati *B*-u:

dne 13. aprila 387 gl. 87 kr.,
» 25. maja 1245 » 38 »
» 2. junija 2008 » 48 »

Nasprotno pa bi bil moral plačati *B* *A*-u:

dne 20. aprila 1533 gl. 63 kr.,
» 15. maja 2112 » 8 »
» 20. » 972 » 15 »

Dne 30. junija drug z druzim obračunata; koliko ostane *B* *A*-u še dolžán, če se računa 5 % obrestij?

20. Nekdo kupi dne 26. aprila 2000 gl. zjedinjenega državnega dolga v papirji po 72·25 (t. j. za vsacih 100 gl. nominalne vrednosti plača 72·25 gl.); koliko mora plačati, če treba povrniti $4\frac{1}{5}$ % obresti od dne 1. januvarja naprej?

21. Nekdo kupi dne 25. januvarja 5 sreček z leta 1854., katerim je kurs 125; koliko mora zanje plačati, če treba obresti od dne 1. aprila prejšnjega leta povrniti? (Nominalna vrednost tem srečkam je 250 gl. konv. vr., obresti znašajo 4 %, a od teh treba odbiti 20 % davka.)

2. Kakó je izračunavati kapital.

§ 64.

Vzemimo, da nam je izračunati kapital k, kateri daje po p procentov v l letih o gl. obrestij. Tu dobimo

100 gl. kap. v 1 letu p gl. obrestij
k » » » l letih o » »

$$k : 100 = 1 : l$$
$$o : p$$
$$k = \frac{100 \, . \, o}{p \, . \, l}.$$

Kapital tedaj najdemo, razdelivši 100terne obresti s produktom iz procentov in let.

Naloge.

1. Kateri kapital dá po 4 % v 4 letih 48 gl. obrestij?

Na pamet. Da dobimo 4 gl. obrestij v 1 letu, treba 100 gl. kapitala; da dobimo 48 gl. obrestij, treba 12krat tolikega kapitala, tedaj 1200 gl.; da dobimo pa 48 gl. obrestij v 4 letih, treba le $\frac{1}{4}$ od 1200 gl. = 300 gl. kapitala.

Pismeno. $\frac{48 \, . \, 100}{4 \, . \, 4} = 300$ gl. kap.

2. Nekdo dobi v $5\frac{1}{4}$ leta 945 gl. obrestij; kolik je kapital, če se računa 6 % obrestij?

Po sklepovnem računu:

6 gl. obrestij v 1 letu od 100 gl. kap.

1 » » » 1 » » $\frac{100}{6}$ » »

945 » » » 1 » » $\frac{100 \, . \, 945}{6}$ » »

945 » » » $\frac{1}{4}$ leta » $\frac{100 \, . \, 945 \, . \, 4}{6}$ » »

945 » » » $\frac{21}{4}$ » » $\frac{100 \, . \, 945 \, . \, 4}{6 \, . \, 21} = 3000$ gl. kap.

3. Kateri kapital daje po $5\frac{1}{2}$ % na leto 202 gl. 40 kr. obrestij?

4. Neka hiša daje poprek na leto 586 gl. čistega dohodka; kolika ji mora biti kupna cena, da se proda po 5 %, t. j. da se dobi za vsacih 5 gl. čistega dohodka 100 gl. kupnine ali kapitala?

5. Kateri kapital dá po $4\frac{1}{2}$ % v 1 letu 4 mesecih 234 mark obrestij?

6. Kolik mora biti kapital, da nese po $5\frac{1}{2}$ % v $2\frac{2}{5}$ leta $738\frac{3}{4}$ gl. obrestij?

7. Kateri kapital dá po $5\frac{1}{2}$ % v 1 letu 9 mesecih 248 gl. 58 kr. obrestij?

8. V $7\frac{1}{2}$ meseca znašajo obresti po 6 % 318 mark 75 fenig.; kolik je kapital?

9. Kateri kapital dá po 4 % v 108 dneh 108 frankov obrestij?

10. Kateri kapital dá po 6 % v 4 letih prav toliko obrestij, kolikor jih dá 4560 gl. kapitala po 5 % v $2\frac{1}{2}$ leta?

3. Kakó je izračunavati čas.

§ 65.

Vzemimo, da nam je določiti število let (l), katerih treba, da dá kapital k po p % o gl. obrestij. Tu imamo

100 gl. kap. v 1 letu p gl. obrestij
k » » » l letih o » »

$$l : 1 = 100 : k$$
$$o : p$$
$$l = \frac{100 . o}{k . p}.$$

Število let najdemo, razdelivši 100terne obresti s produktom iz kapitala in procentov.

Naloge.

1. Kakó dolgo treba imeti naloženih 2480 gl. kapitala po 6 %, da dadé 744 gl. obrestij?

$$\frac{744 . 100}{2480 . 6} = 5 \text{ let;}$$

ali po sklepovnem računu:

100 gl. kap. dá 6 gl. obrestij v 1 let.,
1 » » » 6 » » » 100 »
2480 » » » 6 » » » $\frac{100}{2480}$ »
2480 » » » 1 » » » $\frac{100}{2480 . 6}$ »
2480 » » » 744 » » » $\frac{100 . 744}{2480 . 6}$ = 5 letih.

2. Kakó dolgo je treba imeti naloženih $9825\frac{3}{4}$ gl. kapitala po $5\frac{3}{5}$ %, da dadé 1834·14 gl. obrestij?
3. Kakó dolgo treba imeti izposojenih 5212 gl. 67 kr. kapitala, da dadé po $5\frac{1}{2}$ % 712 gl. 80 kr. obrestij?
4. V katerem času dá 9421 gl. 28 kr. po $4\frac{1}{2}$ % 269 gl. 75 kr. obrestij?
5. V kolikem času dá 3855 gl. 67 kr. po $5\frac{1}{2}$ % 721 gl. obrestij?
6. V kolikem času dá $1237\frac{1}{2}$ marke kapitala po 6 % $84\frac{3}{20}$ marke obrestij?
7. 900 gl. kapitala je dalo po 5 % 112 gl. 50 kr. obrestij; koliko časa je bil kapital izposojen?
8. V kolikem času podvojí se kapital, če se po 5 % izposodi?
9. Koliko časa mora 1863 frankov kapitala po 5 % naloženih biti, da dadé prav toliko obrestij, kolikor 3450 frankov po $4\frac{1}{2}$ % v 9 mesecih?

4. Kakó je izračunavati procente.

§ 66.

Ako hočemo zvedeti, po koliko (p) % treba k gl. kapitala naložiti, da nam dadé v l letih o gl. obrestij, dobimo to-le sestavljeno regeldetrijsko nalogo:

p gl. obr. 100 gl. kap. v 1 letu
o » » k » » » l letih

$$p : o = 100 : k$$
$$1 : l$$
$$p = \frac{100 \,.\, o}{k \,.\, l}.$$

Procent tedaj najdemo, ako razdelimo 100terne obresti s produktom iz kapitala in let.

Naloge.

1. Po koliko procentov treba 3445 gl. kapitala naložiti, da dá v 4 letih 689 gl. obrestij?

$$\text{Po } \frac{689 \,.\, 100}{3445 \,.\, 4} = 5\ \%;$$

ali po sklepovnem računu:

3445 gl. kap. v 4 letih 689 gl. obr.

1 » » » 4 » $\frac{689}{3445}$ » »

100 » » » 4 » $\frac{689 \,.\, 100}{3445}$ » »

100 » » » 1 letu $\frac{689 \,.\, 100}{3445 \,.\, 4} = 5$ gl. obrestij.

2. 5500 gl. kapitala nese na leto 330 gl. obrestij; po koliko % je naložen?

3. Po koliko % je naloženih 4755 gl. 25 kr. kapitala, če nese kapital v 3 letih 3 mesecih 850 gl. obrestij?

4. Po koliko % je naloženih 4585 gl. 52 kr. kapitala, če nese v $3\frac{1}{2}$ leta $844\frac{1}{2}$ gl. obrestij?

5. Po koliko % dá $328\frac{4}{5}$ marke v $3\frac{2}{3}$ leta $46\frac{3}{4}$ marke obrestij?

6. Po koliko % je bilo naloženih 1080 gl. kapitala, če so znesle obresti v 3 letih 4 mesecih 144 gl.?

7. Po koliko % je naloženih 6800 gl. kapitala, če daje le-ta kapital v 2 letih 4 mesecih 12 dneh 844·9 gl. obrestij?

8. 3150 gl. kapitala dá v 8 mesecih $73\frac{1}{2}$ gl. obrestij; po koliko % je kapital naložen?

9. Trgovec ima v svoji kupčiji 18356 gl. kapitala; na konci leta se pokaže 1376 gl. 70 kr. čistega dobička; koliko % mu je nesel kapital?

10. Po koliko % bi dal neki kapital v 5 letih 1533 gl. obrestij, ako je dal isti kapital, po 5 % naložen, v 4 letih 876 gl. obrestij?

11. Nekdo si izposodi 460 gl. po 5 % na 1 leto, a obresti se mu odtegnejo takój, ko kapital prejme; koliko je plačal preveč in po koliko % so se mu obresti prav za prav zaračunale?

12. Neka hiša se je kupila za 28500 gl.; najemščine nese 1980 gl. na leto; po koliko % je kapital naložen, ako se računa za popravke 125 gl., in ako znaša domovna najmarina 25 %?

IV. O diskontnem računu.

§ 67.

Vzemimo, da je dolžán kdo brezobresten dolg še le čez nekaj časa plačati, a on plača takój; očividno mu ne bode treba plačati cele vsote, katero je dolžán, nego le oni znesek, kateri dá, povečan za obresti, katere bi nesel do plačilnega roka, ves dolg; dolžniku se mora tedaj dovoliti v tem slučaji neki odbitek. Ta odbitek zove se diskont ali rabat (*Discont, Rabatt*) ter se računa po procentih. Če odštejemo diskont od dolga, zove se ostanek gotova ali sedanja kapitalna vrednost (*der bare, gegenwärtige, discontierte Wert des Kapitals*).

N. pr. Nekdo hoče brezobresten kapital 418 gl., katere je dolžan še le čez $1\frac{1}{2}$ leta plačati, takój izplačati; *a)* koliko odbitka mora se mu dovoliti, če se računa 6 % diskonta na leto, *b)* kolika je sedanja vrednost kapitala?

100 gl. takój je vrednih, če se računa 6 % obrestij, čez $1\frac{1}{2}$ leta 109 gl., in obratno: 109 gl., katere treba brez obrestij še le čez $1\frac{1}{2}$ leta plačati, vrednih je sedaj 100 gl., ali od vsakih 109 gl. treba 9 gl. diskonta odbiti, če se plačajo $1\frac{1}{2}$ leta prej. Tedaj dobimo:

a) 109 gl. kap. 9 gl. diskonta

1 » » $\frac{9}{109}$ » »

418 » » $\frac{9 \cdot 418}{109} = 34 \cdot 51$ gl. diskonta.

b) Dolga je	418·— gl.
če odštejemo diskonta . .	34·51 »
znaša sedanja vrednost . .	383·49 gl.

ali tudi neposredno

mesto 109 gl. čez $1\frac{1}{2}$ l. 100 gl. takój

» 1 » » » » $\frac{100}{109}$ » »

» 418 » » » » $\frac{100 \cdot 418}{109} = 383 \cdot 49$ gl. takój.

Preskušnja:

3 83·49 gl. po 6 %	Sedanja vrednost 383·49 gl.
23·00 94 gl. obrestij za 1 l.	Obresti za $1\frac{1}{2}$ l. 34·51 »
11·50 47 » » » $\frac{1}{2}$ »	Kapital čez $1\frac{1}{2}$ l. 418·— gl.
34·51 41 gl.	

Iz ravnokar navedenega je razvidno, da ne pripada diskont k vsoti 100 sami, nego k vsoti 100 povečani za diskontne procente, t. j. da treba računati diskont nad sto. (Glej aritm. I. del, §§ 93. in 95.)

Ako bi računali diskont od sto, dobili bi:

418 gl. po 9 %	kap. 418 gl.
37·62 gl. diskonta	če odštejemo diskonta 37·62 »
	ostane gotovega plačila 380·38 gl.

Toda 380·38 gl. gotovega plačila ne dalo bi s 6 % obrestimi vred čez $1\frac{1}{2}$ leta dolžni kapital 418 gl., nego le 414·61 gl.

Iz zgoraj dobljenega izraza $\frac{100 \cdot 418}{109}$ za sedanjo vrednost kapitala, katerega treba še le pozneje plačati, izvajamo ta-le izrek:

Sedanjo vrednost kapitala, katerega treba še le pozneje o določenem času izplačati, izračunamo, ako razdelimo 100terni kapital z vsoto iz 100 in diskontnih procentov za dotični čas.

Naloge.

1. Koliko je vrednih 850 gl., katere treba čez 2 leti plačati, sedaj, če se računa 5 % diskonta?

2. Nekdo mora 2620 gl. čez 4 mesece plačati, a plačal bi rad dolg takój; koliko je gotovo plačilo, če se računa 6 % diskonta?

Diskont za 4 mesece znaša 2 %.

3. *A* mora *B*-u 1245 gl. čez 5 let plačati; koliko bi mu moral čez 2 leti plačati, če se računa $5\frac{1}{4}$ % diskonta?

4. Nekdo podeduje 4850 gl. s tem pogojem, da se mu izplačajo še le čez 5 let; na njegovo željo izplača se mu dedščina s $6\frac{1}{2}$ % diskonta takój; kolika je gotova vrednost dedščine?

5. *A* ponuja za neko hišo 25230 gl. v gotovem denarji, ali pa 26355 gl., katere pa hoče še le čez 9 mesecev izplačati; katera ponudba je za prodajalca ugodnejša, če more denar po 5 % naložiti?

6. Za dolg, katerega je bilo treba še le čez $2\frac{1}{2}$ leta plačati, dobil je nekdo 2480 gl. takój; kolik je bil dolg, če se je računalo 5 % diskonta na leto?

2480 gl. po 5 %				Takój se je plačalo	2480 gl.
124 gl. obrestij	za	1 l.		Obresti za $2\frac{1}{2}$ l. znašajo	310 »
124 »	»	1 »		Dolga je bilo	2790 gl.
62 »	»	$\frac{1}{2}$ »			
310 gl. obrestij	za	$2\frac{1}{2}$ l.			

7. Nekdo je dolžán čez nekaj časa 2135 gl. plačati, plača pa po odbitku 5 % letnega diskonta 2100 gl. takój; čez koliko časa bi bil moral dolg plačati?

2100 gl. po 5 %

105 gl. znaša diskont za 1 l.

1 » » » » $\frac{1}{105}$ »

35 » » » » $\frac{35}{105} = \frac{1}{3}$ leta.

8. 654 gl. treba čez $1\frac{1}{2}$ leta plačati; če se plača dolg takój, dovoli se 54 gl. popusta; koliko % znaša diskont za 1 leto?

Pri 600 gl. gotovega plačila je . . . 54 gl. popusta
» 100 » » » » . . . $\frac{54}{6} = 9$ gl. popusta.
Popust znaša tedaj 9 gl. za $1\frac{1}{2}$ leta, torej 6 % za 1 leto.

9. Nekdo je plačal za kapital, izplačen čez 4 leta, 1600 mark takój; diskont je znašal 288 mark; koliko % diskonta se je računalo za 1 leto?

10. Pri nakupu neke njive se določi, da plača kupec 600 gl. takój, druzih 636 gl. pa brez obrestij še le čez 1 leto; kupec plača tudi zadnjo vsoto takój ter dobi 6 % diskonta; koliko mora vsega skupaj v gotovem denarji plačati?

11. Nekdo kupi hišo za 29000 gl., katere pa mu je treba po pogodbi še le čez 5 let plačati; a on plača 6000 gl. takój, 7500 gl. čez $2\frac{1}{3}$ leta in ostanek čez 4 leta; kolik je le-ta ostanek, ako se računa za vse zneske, katere je prej plačal, po 5 % diskonta za 1 leto?

§ 68.

Pri določevanji sedanje vrednosti pozneje izplačnemu dolgu, mora se računati prav za prav diskont nad sto, kakor smo v § 67. dokazali; a to se zgodi v resnici le pri netrgovskih dolgéh. Trgovci računajo diskont pri zneskih za blago in pri menicah vsikdar po procentnem računu od sto, ker je le-ta priročnejši nego račun nad sto, in ker gre tu le za kratke roke; za te pa je razloček med rezultatoma neznaten, bodi si da se računa od ali nad sto. (Glej aritm. I. del, § 95., nal. 30.)

Pri menicah računa se diskont prav takó, kakor obresti za določeno število dnij, namreč za čas do plačilnega dné, a dan, katerega se diskontuje, se ne všteva. Meseci se računajo po toliko dnij, kolikor jih po pratiki res imajo, leto pa po 360 dnij.

Pri zneskih za blago je diskont v procentih navadno že za oni čas dan, za kolikor se plačajo prej, nego je treba, redkeje za jedno leto ali za jeden mesec. V zadnjem slučaji je treba procente za dotični čas še le izračunati.

Naloge.

1. Menica za 1249 gl., izplačna dne 15. junija, proda se s $4\frac{1}{2}$ % diskonta dne 8. maja; koliko znaša *a)* diskont, *b)* gotova vrednost?

Maja je 23 dnij				1249×38
junija 15 »				3747
Skupaj 38 dnij, za katere treba računati diskont				9 992
Menični znesek	1249·— gl.			47·462 : 6
$4\frac{1}{2}\,\%$ diskonta za 38 dnij	5·93 »			7·910 gl. po $6\,\%$
Gotova vrednost . . .	1243·07 gl.			1·977 » » $1\frac{1}{2}\,\%$
			Diskonta je	5·933 gl. po $4\frac{1}{2}\,\%$

2. Menica za 3485 gl., katero treba čez 35 dnij plačati, proda se s $5\,\%$ diskonta; kolik je diskont in kolika gotova vrednost?

3. Menica za 4235 mark kupi se v Hamburgu dne 17. julija s $3\frac{1}{2}\,\%$ diskonta; koliko treba zanjo dati, če dospe še le dne 7. septembra?

4. Dne 15. avgusta izplačna menica za 849 gl., proda se dne 26. junija s $6\frac{1}{2}\,\%$ diskonta; kolika je vrednost menici ta dan?

5. Dolg za nakupljeno blago znaša 5192 gl.; *a)* kolik je diskont po $2\,\%$, *b)* koliko gotovo plačilo?

Znesek za blago	5192·— gl.
$2\,\%$ diskonta	103·84 »
Gotovo plačilo	5088·16 gl.

6. Nekega blaga se je kupilo za 2063 gl.; koliko znaša diskont *a)* po $1\,\%$, *b)* po $1\frac{1}{2}\,\%$, *c)* po $1\frac{3}{4}\,\%$, *d)* po $2\,\%$?

7. Nekdo kupi 4 sode olja; nečiste teže je 1118 *kg*, tare $10\,\%$, cent čiste teže plača se po 64·18 gl., diskonta se računa $2\frac{1}{2}\,\%$; koliko znaša gotovo plačilo?

V. O rokovnem računu.

§ 69.

Dostikrat se zgodi, da se plačajo brezobrestne vsote, katere bi trebalo drugo za drugo ob določenih rokih (*Termine*) plačati, vse kar na jedenkrat, ali da se plačajo take vsote ob druzih rokih, nego je bilo s prva določeno. Kedaj naj se to zgodi, da ne bode niti dolžniku niti upniku na škodo, uči rokovni račun (*Terminrechnung*).

Rok, ob katerem treba več posamič o različnih rokih izplačnih vsot na jedenkrat plačati, zovemo poprečni plačilni rok (*mittlerer Zahlungstermin*).

Kakó je računati poprečni rok, pokazati hočemo na tem-le primeru:

Nekdo je dolžán 6000 gl., ter se je zavezal, 2000 gl. čez 2 meseca, 2500 gl. čez 4 mesece in 1500 gl. čez 10 mesecev plačati; kedaj bi moral ves dolg kar na jedenkrat plačati?

Če plačuje dolžnik svoj dolg, kakor se je gori reklo, uživa od posamičnih kapitalov obresti do dne, kateri je za plačilo odločen, tedaj od 2000 gl. 2 meseca, od 2500 gl. 4 mesece in od 1500 gl. 10 mesecev.

A po isto toliko procentov dá

2000 gl. kap. v 2 mesec.	prav toliko obrestij kakor	4000 gl. kap. v 1 meseci
2500 » » » 4 »		10000 » » » 1 »
1500 » » » 10 »		15000 » » » 1 »
6000 gl. kap.		29000 gl. kap. v 1 meseci.

Prav toliko obrestij, kolikor jih dá 29000 gl. v 1 meseci, mora dobiti dolžnik, da ne bode na izgubi, če poplača ves dolg na jedenkrat. Če hočemo tedaj poprečni plačilni rok določiti, moramo se vprašati: V koliko mesecih dá 6000 gl. prav toliko obrestij kakor 29000 gl. v 1 meseci? Na to vprašanje pa odgovarja to-le sorazmerje:

$$x \text{ mes.} : 1 \text{ mes.} = 29000 : 6000;$$

tedaj

$$x = \frac{29000}{6000} = \frac{29}{6} = 4\tfrac{5}{6} \text{ mes.}$$

Iz tega pa je razvidno, da je določevati poprečni plačilni rok takó-le:

1.) Vsako posamično plačilo treba pomnožiti z njegovim plačilnim rokom.

2.) Potem se seštejejo ne le posamična plačila nego tudi dobljeni produkti in druga vsota se razdeli s prvo; kvocijent je iskani poprečni rok.

Naloge.

1. 10000 gl. treba v 4 obrokih plačati, in sicer: 3000 gl. čez 4 mesece, 2500 gl. čez 6 mesecev, 2000 gl. čez 8 mesecev in kar ostane, čez 1 leto; kedaj treba plačati ves dolg na jedenkrat?

	3000 gl. čez 4 mes.	=	1 2000
	2500 » » 6 »	=	1 5000
	2000 » » 8 »	=	1 6000
Ostanek	2500 » » 12 »	=	3 0000
	10000 gl.		7·3000 = 7 mes. 9 dn.

Ves dolg mora se tedaj plačati čez 7 mesecev 9 dnij.

Da se o pravosti računa prepričaš, preišči, ali res dolžnik gledé obrestij ni na škodi, bodi si da plača ves dolg na jedenkrat, bodi si v posamičnih odplačilih. V ta namen izračunaj obresti za katere koli procente, n. pr. za 5 %.

Ako v obrokih plačuje, uživa dolžnik

obresti od	3000 gl.	4 mes.	=	50 gl.	— kr.,
» »	2500 »	6 »	=	62 »	50 »
» »	2000 »	8 »	=	66 »	67 »
» »	2500 »	12 »	=	125 »	— »
			skupaj	304 gl.	17 kr.

Če poplača dolžnik ves dolg, t. j. 10000 gl. čez 7 mesecev 9 dnij, dobi za ta čas tudi 304 gl. 17 kr. obrestij. Dolžnik nima tedaj, če poplača ves dolg na jedenkrat, niti izgube niti dobička; isto velja tudi o upniku.

2. Nekdo mora po pogodbi plačati, 12000 frankov takój, 9000 frankov čez 4 mesece, 9000 frankov čez 8 mesecev, 9000 frankov čez 12 mesecev in 9000 frankov čez 16 mesecev; kedaj treba vse te zneske na jedenkrat plačati?

$$\begin{array}{r|r}
12\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \times 0 & 4 \times 0 = 0 \\
9\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \times 4 & 3 \times 4 = 12 \\
9\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \times 8 & 3 \times 8 = 24 \\
9\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \times 12 & 3 \times 12 = 36 \\
9\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \times 16 & 3 \times 16 = 48 \\
\hline
16 & 120
\end{array}$$

$120 : 16 = 7\frac{1}{2}$ mes. — Odgovor: čez $7\frac{1}{2}$ meseca.

3. Nekdo je dolžán 1200 gl. takó plačati, da plača čez vsake 3 mesece 300 gl.; kedaj bi moral ves dolg na jedenkrat plačati?

300 gl. čez	3 mes.	=	900 gl.
300 » »	6 »	=	1800 »
300 » »	9 »	=	2700 »
300 » »	12 »	=	3600 »
1200 gl.			9000 gl.

Čez $9000 : 1200 = 7\frac{1}{2}$ meseca.

Kadar so posamična odplačila jednaka, izračuna se poprečni plačilni rok krajše, ako se sešteje le čas in ta vsota s številom rokov razdeli; tedaj

$$3 + 6 + 9 + 12 = 30, \qquad \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} \text{ meseca.}$$

4. 2800 gl. treba poplačati v štirih jednakih odplačilih, katera so čez vsake 3 mesece izplačna; čez koliko mesecev je poprečni plačilni rok vsemu kapitalu?

5. Nekdo mora 20000 gl. takó plačati, da plača 4000 gl. takój, 4000 gl. čez 3 mesece, 5000 gl. čez 6 mesecev in ostanek čez 10 mesecev; plačal bi pa rad ves dolg na jedenkrat; čez koliko mesecev se mora to zgoditi?

6. *A* je dolžan nekemu fabrikantu tri zneske, namreč 300 mark v gotovini, 460 mark čez 7 mesecev in 500 mark čez 10 mesecev; kedaj bi lahko *A* ves dolg na jedenkrat poplačal?

7. Nekdo kupi njivo za 6000 gl. s pogojem, da mora plačati 1500 gl. čez 4 mesece, 1000 gl. čez 6 mesecev, 2000 gl. čez 9 mesecev in ostanek čez 1 leto; kedaj plača lahko vso vsoto na jedenkrat?

8. Nekega dolga mora se odplačati polovica takój, $\frac{1}{3}$ čez $1\frac{1}{2}$ leta, ostanek pa čez 3 leta. A dolžniku je na voljo dano, da sme ves dolg tudi na jedenkrat plačati; kedaj bi se moralo to zgoditi?

9. Kedaj mora se 1800 gl. na jedenkrat plačati, če treba 300 gl. čez 1 leto, 400 gl. čez $1\frac{1}{2}$ leta, 500 gl. čez $2\frac{1}{2}$ leta in ostanek čez $3\frac{1}{3}$ leta brez obresti plačati?

10. Nekdo je dolžán plačati 1000 gl. takój, 1050 gl. čez 2 meseca, 1100 gl. čez 4 mesece, 1150 gl. čez 6 mesecev, 1200 gl. čez 8 mesecev, 1250 gl. čez 10 mesecev; kedaj mora se vsota vseh teh posamičnih odplačil na jedenkrat plačati?

11. *A* mora *B*-u tri kapitale plačati, in sicer: 1600 gl. dne 1. julija, 1400 gl. dne 1. septembra, 1000 gl. dne 1. novembra; kedaj plača lahko vse tri kapitale ob jednem?

Roki računajo se od dné 1. julija počenši.

12. *A* je dolžán čez 10 mesecev 1500 gl. plačati; a on plača že čez 2 meseca 600 gl. in čez zopet 5 mesecev 400 gl.; kedaj mora ostanek plačati?

A sme uživati:	1500 gl. 10 mes. =	15000 gl. 1 mes.
uživa pa:	600 gl. 2 mes. =	1200 gl. 1 mes.
	400 » 7 » =	2800 » 1 »
	1000 gl.	4000 gl. 1 mes.
tedaj ima še uživati:	500 gl. x mes. =	11000 gl. 1 mes.
	11000 : 500 = 22 mes.	

Ostanek 500 gl. treba tedaj plačati čez 22 mesecev, če se od početka računa.

13. *A* mora čez 2 leti 2000 gl. plačati; plača pa 800 gl. čez 1 leto; koliko časa sme ostanek obdržati?

14. Nekdo je dolžán plačati 300 gl. čez 4 in 500 gl. čez 5 let; plača pa 300 gl. že čez 2 leti; kedaj mora plačati ostalih 500 gl.?

15. *A* mora plačati čez 4 mesece 500 gl., 2 meseca pozneje 600 gl. in še 2 meseca pozneje 700 gl.; plača pa čez 3 mesece (od početka računano) 400 gl. in 4 mesece pozneje 900 gl.; koliko časa sme potem ostanek uživati?

VI. O družbenem računu.

§ 70.

Družbeni račun ali razdelbeno pravilo (*Gesellschaftsrechnung, Theilregel*) upotreblja se tedaj, kadar treba razdeliti kako število takó na več delov, da so le-ti v določenem razmerji med seboj. Števila, izražujoča to razmerje, zovejo se razmerska števila (*Verhältniszahlen*).

N. pr. za neko trgovsko podjetje združijo se tri osebe; *A* vloži 8500 gl., *B* 9800 gl., *C* 10000 gl.; koliko dobička gre vsacemu, če znaša ves dobiček 3400 gl.? — Tu treba razdeliti dobiček v razmerji vlog; naloga spada k družbenemu računu, in sicer so vloge 8500, 9800, 10000 razmerska števila.

Družbeni račun zove se jednostaven, kadar ima naloga le jedno vrsto razmerskih števil; če je pa danih več vrst razmerskih števil, je dotični račun sestavljeni družbeni račun.

Družbeni račun upotreblja se pri trgovskih društvih, če treba razdeliti dobiček, pri konkursih, pri dedščinah, pri ladijah na deleže, kadar treba davke razdeliti, pri zmesih in v različnih druzih slučajih.

§ 71.

Vzemimo, da nam je razrešiti to-le nalogo:

640 gl. treba razdeliti med tri osebe *A, B, C* v razmerji števil 9, 7 in 4; koliko pride na vsako osebo?

Na pamet. *A* dobi 9, *B* 7 in *C* 4, tedaj vsi skupaj 20 jednakih delov; 20ti del od 640 gl. je 32 gl.; tedaj dobi

A	9krat	32	gl.	= 288	gl.,
B	7krat	32	»	= 224	»
C	4krat	32	»	= 128	»

Prav takó se sklepa, kadar se pismeno računa:

9	32 gl. $\times$ 9 = 288 gl. dobi *A*,
7	32 » $\times$ 7 = 224 » » *B*,
4	32 » $\times$ 4 = 128 » » *C*.
640 gl. : 20 = 32 gl.	640 gl.

Za jednostavni družbeni račun velja tedaj to-le pravilo:

1.) Razmerska števila zapiši drugo pod drugo. Kadar so ta števila ulomki, pomnoži vsa z najmanjšim skupnim imenovalcem; če imajo vsa razmerska števila kako skupno mero, okrajšaj jih s to skupno mero.

2.) Na najjednostavnejšo obliko skrčena razmerska števila seštej.

3.) Z vsoto razmerskih števil razdeli število, katero treba razdeliti, dobljeni kvocijent pa pomnoži zaporedoma z vsakim razmerskim številom; produkti so iskani deli.

Prejšnjo nalogo nam je môči tudi takó razrešiti, da večkrat zaporedoma regeldetrijo upotrebimo; dobimo namreč:

$x : 640 = 9 : 20,\qquad x = 288$ gl.;
$y : 640 = 7 : 20,\qquad y = 224$ »
$z : 640 = 4 : 20,\qquad z = 128$ »

Naloge.

1. V smodniku je 75 delov solitarja, 13 delov oglja in 12 delov žvepla; koliko treba vsake teh sestavin za 800 *kg* smodnika?

Solitarja 75;	8 *kg* $\times$ 75 = 600 *kg*
Oglja 13;	8 » $\times$ 13 = 104 »
Žvepla 12;	8 » $\times$ 12 = 96 »
800 *kg* : 100 = 8 *kg*	800 *kg*

2. Tri osebe se združijo za neko trgovsko podjetje, in sicer dá *A* 2800 gl., *B* 3600 gl. in *C* 4000 gl.; dobička imajo 1300 gl.; koliko ga pride na vsako osebo?

28ØØ	7	50 gl. $\times$ 7 = 350 gl. dobi *A*
36ØØ	9	50 » $\times$ 9 = 450 » » *B*
40ØØ	10	50 » $\times$ 10 = 500 » » *C*
1300 gl. : 26 = 50 gl.		

3. Za neko podjetje se združijo štiri osebe, in sicer vloži *A* 4500 gl., *B* 5400 gl., *C* 6000 gl., *D* 9600 gl.; podjetje nese 4248 gl. dobička; koliko pride na vsacega deležnika?

4. 1400 gl. imetka treba med 4 upnike v razmerji njihovih terjatev razdeliti; koliko pride na vsacega, če ima A 300 gl., B 400 gl., C 430 gl. in D 470 gl. terjati?

5. Tri osebe kupijo kreditno srečko; A dá 60 gl., B 55 gl. in C 45 gl.; srečka dobi 20000 gl.; koliko dobode vsaka oseba?

6. Neki okraj ima 4 občine; občina A plačuje 2845 gl. 47 kr. davka, B 1748 gl. 62 kr., C 2106 gl. 48 kr., D 3019 gl. 88 kr.; okraj mora pa še posebej 548 gl. doklade plačati; koliko pride od te po razmerji davkov na vsako občino?

7. Nekdo je dolžán: A-u 3000 gl., B-u 3200 gl., C-u 1200 gl., D-u 2800 gl., E-u 4600 gl.; premore pa le 8625 gl.; koliko bode dobil vsak upnik pri delitvi in koliko procentov bode vsak izgubil?

8. Koliko srebra in koliko bakra je v sreberni šibiki, katera tehta 7 *kg*, če ji je čistina 750 tisočin?

9. Za porcelan se jemlje 25 delov ilovice, 2 dela kremenjaka, 1 del sadre (gipsa); koliko treba vsake iz med teh sestavin za 105 *kg* porcelana?

10. 6 oseb kupi zemljišče, katero meri 260 *a*, A dá 180, B 243, C 288, D 189, E 300 in F 360 gl.; koliko *a* pride na vsacega?

11. Trgovec razpošlje 2133 *kg* kave, 1735 *kg* sladorja in 923 *kg* popra ter plača 65 gl. 30 kr. vozarine; koliko vozarine pride na vsako blago?

12. 5610 gl. treba razdeliti med A, B, C, D v razmerji števil $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.

$A\ \frac{1}{2}$	6;	$170 \times 6 = 1020$ gl.	dobi A
$B\ \frac{2}{3}$	8;	$170 \times 8 = 1360$ »	» B
$C\ \frac{3}{4}$	9;	$170 \times 9 = 1530$ »	» C
$D\ \frac{5}{6}$	10;	$170 \times 10 = 1700$ »	» D
5610 : 33 = 170		skupaj 5610 gl.	

13. Razdeli število 3555 v razmerji števil $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$, 1.

14. Dobro rudečo tinto dobiš, če vzameš na 1 *l* vinskega jesiha $1\frac{1}{4}$ *dkg* galuna, 20 *dkg* fernambuka, $3\frac{1}{8}$ *dkg* arabske gume; vzemimo, da si hočeš od 2 *kg* 15 *dkg* te suhe zmesi rudeče tinte narediti; koliko bodeš vzel vsake suhe sestavine in koliko bodeš moral dodati vinskega jesiha?

15. Trgovec je kupil 6 kosov jednako dobrega sukna ter za vse kose plačal 852 gl. Prvi kos ima 48 *m*, drugi $52\frac{1}{2}$ *m*, tretji $41\frac{1}{4}$ *m*, četrti $58\frac{3}{4}$ *m*, peti 60 *m* in šesti $54\frac{1}{2}$ *m*; koliko velja vsak kos?

16. Tri občine so postavile most, kateri stane 5241 gl. 35 kr.; občina A je oddaljena od mostú 1 *km*, B 2 *km* in C 3 *km;* koliko treba plačati vsaki občini, če so doneski v obratnem razmerji z razstoji, tedaj razmerska števila 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$?

17. Med 5 uradnikov, izmed katerih ima A 1200 gl., B 1000 gl., C 900 gl., D 750 gl., E 650 gl. letne plače, treba razdeliti 2041 gl. 50 kr. nagrade, in sicer v obratnem razmerji njihovih letnih plač; koliko dobi vsak?

18. Nekdo zapusti 15845 gl. premoženja, katere treba med njegove tri dediče takó razdeliti, da dobi A 2krat toliko kakor B in B 3krat toliko kakor C; koliko dobi vsak dedič?

B dobi tolikokrat po 3 gl. in A tolikokrat po 6 gl., kolikorkrat dobi C po 1 gl.; razmerje med deleži dedičev A, B in C je tedaj 6 : 3 : 1.

19. 1170 lir treba med tri osebe razdeliti; koliko dobi vsaka oseba, če dobi B dvakrat toliko kakor A, in C 3krat toliko kakor B?

20. Med tri osebe treba 2050 gl. takó razdeliti, da dobi A tolikokrat po 3 gl. kakor B po 4 gl., C pa tolikokrat po 5 gl. kakor B po 3 gl.; koliko dobi vsaka oseba?

21. Pet oseb je podedovalo 20045 frankov in te jim je takó med seboj razdeliti, da je razmerje med deležema vsake prejšnje in naslednje osebe kakor 2 : 3; koliko pride na vsako osebo?

22. Tri osebe dobé 1160 gl.; od teh mora dobiti A 3krat toliko kakor B, B 2krat toliko kakor C in še 40 gl.; koliko dobi vsaka?

23. Za neko podjetje dá A 1250 gl., B 2000 gl., C 2750 gl., D 3000 gl.; vsega dobička je 1260 gl. Kakó je ta dobiček razdeliti, če dobi A zarad posebnih zaslug razven deleža, ki mu gre po razmerji vlog, še 5 % vsega dobička?

24. Trije trgovci zložé za skupno podjetje potrebni kapital, in sicer dá A 4500 gl., B 5600 gl. in C 6400 gl. Dobička je 25 gl. menj nego 20 % vloženega kapitala; koliko dobička pride na vsacega?

25. Štiri osebe podedujejo 9000 gl., katere jim je takó med seboj razdeliti, da dobi A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ in D, kar ostane. Toda B umrje pred razdelitvijo in ostalim trem je tudi B-ov delež po razmerji njihovih deležev razdeliti. Koliko dobi vsaka?

26. Za takó zvano novo srebro vzame se 55·4 dela bakra, 29·1 dela cinka in 17·5 dela niklja; koliko je treba vsake teh kovin za 600 *kg* novega srebra, ako je pri taljenji $1\frac{1}{2}$ % izgube?

27. Trije trgovci kupijo neko blago; pri prodaji imajo 15 % dobička in le-tega razdelé med seboj po razmerji svojih vlog. Koliko je vsak izmed njih vložil, če ima A 210 gl., B 350 gl. in C 280 gl. dobička?

§ 72.

Pri sestavljenem družbenem računu je več vrst razmerskih števil danih in posamični deli so zavisni od produktov pripadajočih jim razmerskih števil; vsak sestavljen družben račun je môči tedaj na jednostaven izpremeniti.

Vzemimo, da se udeležuje *A* pri nekem podjetji s 13000 gl. 4 mesece, *B* pa z 10000 gl. 6 mesecev, in da je 5000 gl. dobička; ta dobiček treba razdeliti v razmerji vlog in ob jednem v razmerji časa. Toda, ker je vse jedno

ali se udeležuje *A* s 13000 gl. 4 mes., ali pa z 52000 gl. 1 mesec,
» » » *B* z 10000 » 6 » » » s 60000 » 1 »

zato morata dobiti v obéh slučajih *A* in *B* prav toliko dobička. Toda v drugem slučaji imata oba jednako dolgo svoj kapital v podjetji, in zato treba dobiček med *A* in *B* razdeliti le po razmerji vlog, t. j. produktov 52000 in 60000; te dve števili sta tedaj razmerski števili jednostavnega družbenega računa.

Za sestavljeni družbeni račun velja torej to-le pravilo:

1.) Razmerska števila, pripadajoča k istemu delu, zapiši drugo poleg druzega.

2.) Drugo poleg druzega stoječa razmerska števila pomnoži drugo z druzim.

3.) Dobljene delske produkte smatraj za razmerska števila jednostavnega družbenega računa in le-tega upotrebi sedaj za razrešitev naloge.

Naloge.

1. Za neko podjetje združijo se tri osebe: *A* vloži 8200 gl. na 5 mesecev, *B* 10500 gl. na 4 mesece, *C* 12000 gl. na 3 mesece; pri podjetji je 4522 gl. dobička; koliko dobička pride na vsako osebo?

A 820~~0~~ × 5	41~~0~~	38 gl. × 41 = 1558 gl. dobi	*A*
B 1050~~0~~ × 4	42~~0~~	38 » × 42 = 1596 » »	*B*
C 1200~~0~~ × 3	36~~0~~	38 » × 36 = 1368 » »	*C*
4522 gl. : 119 = 38 gl.		4522 gl.	

2. Voznik obljubi za $133\frac{1}{2}$ gl. tri tovore, in sicer 16 cnt. 105 *km* daleč, 15 cnt. 140 *km* daleč in 14 cnt. 175 *km* daleč peljati; koliko mu gre za vsak posamični tovor?

3. *A, B* in *C* so okrajno cesto popravljali, in sicer je pošiljal *A* po 4 delavce 6 dnij, *B* po 3 delavce 9 dnij in *C* po 4 delavce 8 dnij; za to delo dobé 103 gl. 75 kr. plačila; koliko gre vsacemu?

A	4 delav.	6 dn.	=	24 delav.	1 dan	
B	3 »	9 »	=	27 »	1 »	
C	4 »	8 »	=	32 »	1 »	
			skupaj	83 delav.	1 dan.	

Če pa zasluži 83 delavcev v 1 dnevu 103·75 gl.,
zasluži 1 delavec » 1 » 1·25 »

A dobi tedaj	1·25 gl.	×	24	=	30 gl.
B » »	1·25 »	×	27	=	33·75 »
C » »	1·25 »	×	32	=	40 »
					103·75 gl.

4. 94 delavcev je prevzelo neko delo za 844 gl., in sicer v treh oddelkih po 24, 40 in 30 môž; koliko dobi od one vsote vsak oddelek, če je delal oddelek *A* 14, oddelek *B* 12 in oddelek *C* 15 dnij?

5. Za neko podjetje se je potrebovalo 9000 gl.; *A* je dal $\frac{1}{3}$ na 10 mesecev, *B* $\frac{4}{9}$ na 8 mesecev in *C* ostanek na 6 mesecev; računski sklep je izkazal 629 gl. dobička; kakó se je moral ta razdeliti?

6. Tri občine so postavile most ter za to dobile 400 gl. plačila; iz občine *A* je delalo 22 môž 10 dnij po 9 ur na dan, iz občine *B* 18 môž 9 dnij po 10 ur na dan, iz občine *C* 15 môž 5 dnij po 12 ur na dan; koliko plačila je dobila vsaka posamična občina?

7. Trije mlini morajo kakor hitro mogoče 1000 *hl* žita zmleti; *A* zmelje v 5 urah 12 *hl*, *B* v 4 urah 15 *hl* in *C* v 2 urah 9 *hl*; koliko *hl* žita treba vsacemu mlinu dati?

8. *A* začne dne 1. januvarja kupčijo z 8000 gl. kapitala, dne 1. maja pristopi *B* s 5000 gl. in dne 1. julija *C* s 6000 gl.; do konca decembra je 1180 gl. 33 kr. dobička; koliko dobička gre vsacemu deležniku?

9. Za neko podjetje dá *A* 2300 gl. in čez 5 mesecev še 900 gl., *B* 2400 gl. in čez 7 mesecev še 1100 gl., *C* 1900 gl. in čez 8 mesecev še 1300 gl.; kakó jim je razdeliti na konci leta 679 gl. 60 kr. dobička?

10. Tri osebe sklenejo dve leti skupno trgovati; *A* vloži 4800 gl., *B* tudi 4800 gl. in *C* 6000 gl. Čez 4 mesece vzame *A* 800 gl., čez 8 mesecev *B* 300 gl. in čez 10 mesecev *C* 1000 gl. nazaj; nazadnje razdelé med seboj 1415 gl. dobička; koliko gre vsacemu?

VII. O zmesnem računu.

§ 73.

Zmesni ali aligacijski račun (*Vermischungsrechnung, Alligationsrechnung*) upotrebljamo tedaj, kadar nam je najti razmerje, v katerem treba dvoje ali več istovrstnih stvarij različne vrednosti ali dobrote zmešati, da dobimo zmes srednje vrste a določene vrednosti. Zmes mora biti vsikdar boljša nego najslabejša in slabejša nego najboljša onih vrst (sort), katere zmešamo. Pri vodi in bakru jemljemo v poštev le množino, vrednost pa smatramo kot jednako ničli, kadar nam služita v to, da zmanjšamo dobroto vinu in dragim kovinam.

Največ je tacih nalog, pri katerih treba najti najprej razmerje zmesi po zmesnem računu, drugo pa razrešiti po družbenem računu.

§ 74.

Ako hočemo dobiti od dveh danih vrst srednjo vrsto, treba da nadomesti boljša s svojim prebitkom to, za kar je slabejša vrsta menj vredna nego srednja. N. pr. Nekdo ima dvoje blago, in sicer *kg* po 40 kr. in po 52 kr.; to dvoje blago hoče takó zmešati, da velja *kg* zmesi 45 kr.; v katerem razmerji mora oboje blago zmešati?

Slabejšega blaga velja *kg*	40 kr.	Boljšega blaga velja *kg*	52 kr.
Zmesi » »	45 »	Zmesi » »	45 »
Dobička je pri 1 *kg*	5 kr.	Izgube je pri 1 *kg*	7 kr.
» » » 7 »	35 kr.	» » » 5 »	35 kr.

Če zmešamo tedaj po 7 *kg* slabejšega blaga s 5 *kg* boljšega, je pri jednem toliko dobička kolikor pri druzem izgube. Število, izražujoče dobiček ali izgubo pri jednem blagu, kaže tedaj, koliko jednacih delov treba vzeti druzega blaga, t. j. ono število je razmersko število za to blago. Na ta način dobimo

Slabejše blago	40		5 dobička	7 delov
Zmes		45		
Boljše blago	52		7 izgube	5 delov.

Razmerje za zmes je tedaj 7 : 5.

Kadar je tedaj zmešati le dvoje blago v ta namen, da bi dobil zmes določene srednje vrednosti ali dobrote, upotrebljaj to-le pravilo:

1.) Obeh vrst vrednosti (za jednoto) zapiši drugo pod drugo in na levo med nju postavi vrednost zmesi.

2.) Vrednost slabejše vrste odštej od vrednosti zmesi in diferenco zapiši na desno zraven boljše vrste; potem odštej vrednost zmesi od vrednosti boljše vrste in diferenco zapiši na desno zraven slabejše vrste. Te dve diferenci sta razmerski števili zmesi za zraven stoječi vrsti.

Naloge.

1. Krčmar hoče dvoje vino, *l* po 30 kr. in po 52 kr., takó zmešati, da bode vreden 1 *l* zmesi 40 kr.; v katerem razmerji mora ju zmešati?

$$40\begin{array}{c|c|c}30&12&6\\ \hline 52&10&5\end{array}$$

Diferenca med 52 in 40 se zapiše zraven 30, diferenca med 40 in 30 pa zraven 52. Razmerski števili zmesi sta tedaj 12 in 10 ali krajše 6 in 5; t. j. krčmarju treba zmešati 6 delov slabejšega in 5 prav tolikih delov boljšega vina.

Ako bi hotel vzeti n. pr. 30 *l* vina po 30 kr., vzeti bi moral onega po 52 kr. 25 *l*, kajti iz $x : 30 = 5 : 6$, sledi, da je $x = 25$. Da je 1 *l* te zmesi res 40 kr. vreden, kaže poprečni račun; kajti

	30 *l* po 30 kr.	=	900 kr.
	25 » » 52 »	=	1300 »
	55 *l* zmesi		2200 kr.
tedaj	1 » »		40 kr.

2. Koliko bakra treba dodati zlatu, katero ima 900 tisočin čistine, da mu bode čistina 750 tisočin?

3. Žitar zmeša dvojo pšenico, namreč *hl* po 9 gl. in $7\frac{1}{2}$ gl. ter proda zmes po $8\frac{1}{2}$ gl.; v katerem razmerji je bil pšenico zmešal, če je imel pri vsacem *hl* $\frac{2}{5}$ gl. dobička?

4. Trgovec ima dvojo kavo, namreč *kg* po 160 kr. in 148 kr.; od te dvoje kave hoče napraviti 18 *kg* zmesi po 156 kr.; koliko *kg* mora vzeti vsake kave?

$$156\begin{array}{c|c|c}160&8&2\\ \hline 148&4&1\end{array}$$

18 *kg* treba tedaj razdeliti v razmerji 2 : 1; družbeni račun pa nam dá:

	2;	6 *kg* × 2 = 12 *kg* po 160 kr.
	1;	6 » × 1 = 6 » » 148 »
18 *kg* :	3 = 6 *kg*	

S pomočjo poprečnega računa se lahko prepričamo, da smo prav računali; kajti

	12 *kg* po 160 kr. =	1920 kr.
	6 » » 148 » =	888 »
	18 *kg*	2808 kr.
tedaj	1 »	156 »

5. Krčmar ima dvoje vino, namreč *hl* po 30 gl. in po 48 gl.; s tega dvojega vina si hoče namešati 10 *hl* po 42 gl.; koliko mora vsacega vzeti?

6. Dvoj riž, po 24 kr. in po 30 kr. *kg*, treba takó zmešati, da se dobode 100 *kg* zmesi po 28 kr.; koliko treba vsacega vzeti?

7. Jesihar hoče svoj jesih, ker je premočen, z vodo zaliti; predno ga je zalil, prodajal je *l* po 28 kr.; napraviti si hoče $12\frac{1}{2}$ *hl* z vodo zalitega jesiha, *l* po 21 kr.; koliko mu je vzeti jesiha in koliko priliti vode?

8. Koliko špirita po 80 % (80 stopinj)* in po 70 % treba zmešati, če hočeš dobiti 20 *hl* špirita po 78 %?

9. Koliko čistega srebra in koliko bakra treba za $8\frac{3}{4}$ *kg* srebra, imajočega 520 tisočin čistine?

10. Srebernar ima 6 *kg* čistega srebra; koliko bakra mora primesiti, če hoče dobiti srebro, kateremu je čistina $812\frac{1}{2}$ tisočine?

$$812\tfrac{1}{2}\ \begin{array}{r|l|l} 1000 & 812\frac{1}{2} & 13 \\ \hline 0 & 187\frac{1}{2} & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{tedaj} & x : 6 = 3 : 13, \\ \text{in} & x = 1\frac{5}{13}\ kg \text{ bakra.} \end{array}$$

Preskušnja. 6 *kg* po 1000 tisoč. = 6000 tisoč. čistega srebra
$1\frac{5}{13}$ » » 0 » = 0 » » »
$7\frac{5}{13}$ *kg* . . . . . . 6000 tisoč. čistega srebra
1 » . . . . $812\frac{1}{2}$ » » »

11. Koliko bakra treba dodati k 3 *kg* zlata, katero ima 850 tisočin čistine, da mu bode čistina 700 tisočin?

12. Koliko *kg* po 18 kr. treba dodati k 564 *kg* po 32 kr., da bode *kg* zmesi 24 kr. vreden?

13. Krčmar hoče k 1 *hl* vina, katerega prodaja *l* po 48 kr., toliko vode priliti, da mu bode môči *l* po 40 kr. prodajati; koliko vode mora priliti?

§ 75.

Dostikrat je treba več nego dvoje blago zmešati in v ta namen razmerje zmesi poiskati. Razrešitev te naloge je nedoločena; kajti mogoče so različne sestave, a vse dadé zahtevano srednjo vrsto.

Kadar treba več nego dve vrsti zmešati, da bi dobili zmes srednje vrste, velja načelo: če zmešamo vselej po jedno boljšo in po

---

* Špirit 80 % ima med 100 prostornimi deli 80 delov vinskega cveta (alkohola) in 20 delov vode.

jedno slabejšo vrsto takó, da dobimo zmes zahtevane srednje vrste, potem dadé gotovo tudi vse te zmesi skupaj isto srednjo vrsto. Odtod izvajamo, da nam je takó-le postopati, če hočemo razmerje zmesi najti:

1.) Vrste, katere treba zmešati, zapišejo se od najboljše do najslabejše ali obratno druga pod drugo; na levo se zapiše srednja vrsta.

2.) Potem se vzameta vselej jedna boljša in jedna slabejša vrsta ter se posamič primerjata s srednjo vrsto; diferenca med srednjo in slabejšo vrsto se zapiše na desno zraven boljše vrste, diferenca med boljšo in srednjo vrsto pa se zapiše na desno zraven slabejše vrste. To se ponavlja, dokler ni vsaka vrsta s kako drugo zmešana. Včasi treba tudi jedno in isto vrsto z več druzimi zmešati, in to tedaj, kadar ni toliko boljših vrst kakor slabejših, ali kadar se zahteva, da se od kake vrste kar največ mogoče vzame; v tacih slučajih je zraven one vrste več diferenc. Diferenca, katera stoji zraven kake vrste, ali če je več diferenc, njih vsota, je razmersko število zmesi za dotično vrsto.

Naloge.

1. Troje blago po 48, 36 in 24 kr. *kg* treba takó zmešati, da bode veljal *kg* zmesi 40 kr.; koliko delov treba vsacega vzeti?

$$40\;\begin{array}{r|l|r|l} 48 & 4 + 16 & 20 & 5 \\ 36 & 8 & 8 & 2 \\ 24 & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

Tu zmešamo najprej blago po 48 kr. in po 36 kr., potem po 48 kr. in 24 kr.; za razmerska števila dobimo 20, 8 in 8, ali 5, 2 in 2. Ako vzamemo n. pr. 5 *kg* po 48 kr. in 2 *kg* po 36 kr., potem treba še 2 *kg* po 24 kr. dodati, če hočemo imeti zmes po 40 kr. *kg*. In res dá

	5 *kg* po 48 kr.	=	240 kr.
	2 » » 36 »	=	72 »
	2 » » 24 »	=	48 »
	9 *kg* zmesi	=	360 kr.
tedaj	1 » »	=	40 »

2. Srebernar potrebuje srebra, imajočega 650 tisočin čistine; ima pa le čisto srebro in tako, ki ima 720 tisočin čistine, tedaj mora bakra primesiti; v katerem razmerji bode zmesil te tri sestavine?

3. Nekdo hoče dobiti 4 *kg* zlata po 750 tisočin čistine; koliko zlata po 900, 720 in 640 tisočin čistine treba mu zmesiti?

4. Krčmar hoče četvero vino, *hl* po 15 gl., po 18 gl., po 24 gl. in po 28 gl. takó zmešati, da bode dobil 38 *hl* po 20 gl.; koliko *hl* vzame lahko vsacega?

a) Vzemi najboljšo in najslabejšo, in potem obe srednji vrsti.

	A 15	8 × 2 =	16 *hl*	po 15 gl. =	240 gl.
20	*B* 18	4 × 2 =	8 »	» 18 » =	144 »
	C 24	2 × 2 =	4 »	» 24 » =	96 »
	D 28	5 × 2 =	10 »	» 28 » =	280 »
		38 : 19 = 2	38 *hl*	. . . .	760 gl.
			1 »	velja tedaj res	20 »

b) Vzemi *A* in *C*, potem *B* in *D*.

	A 15	4 × 2 =	8 *hl*	po 15 gl. =	120 gl.
20	*B* 18	8 × 2 =	16 »	» 18 » =	288 »
	C 24	5 × 2 =	10 »	» 24 » =	240 »
	D 28	2 × 2 =	4 »	» 28 » =	112 »
		38 : 19 = 2	38 *hl*	. . . .	760 gl.
		tedaj velja	1 »	. . . .	20 »

c) Spoji *A* in *C*, *A* in *D*, *B* in *C*.

	A 15	4 + 8	12 × $1\frac{5}{14}$ =	$16\frac{4}{14}$ *hl*	po 15 gl. =	$244\frac{4}{14}$ gl.
20	*B* 18	4	4 × $1\frac{5}{14}$ =	$5\frac{6}{14}$ »	» 18 » =	$97\frac{10}{14}$ »
	C 24	5 + 2	7 × $1\frac{5}{14}$ =	$9\frac{7}{14}$ »	» 24 » =	228 »
	D 28	5	5 × $1\frac{5}{14}$ =	$6\frac{11}{14}$ »	» 28 » =	190 »
			38 : 28 = $1\frac{5}{14}$	38 *hl*	. . . .	760 gl.
			tedaj	1 »	. . . .	20 »

Koliko sestav je tu še mogočih, in v katerem slučaji bi bila jedna ali druga ugodnejša od ostalih?

5. Nekdo hoče dobiti z bakra in srebra po 720, 800 in 900 tisočin čistine 10 *kg* srebra po 760 tisočin čistine; koliko *kg* vsake vrste mora v ta namen vzeti?

6. Trgovec ima petero blago, *kg* po 60 kr., po 68 kr., po 72 kr., po 75 kr., po 86 kr.; koliko sestav je mogočih, da bode veljal *kg* zmesi 70 kr.?

7. S špirita po 62 %, 40 %, 35 % in vode treba namešati 94 *l* špirita po 50 %; koliko treba vzeti vsacega?

VIII. O verižnem računu.

§ 76.

Verižni račun (*Kettenrechnung*) upotrebljamo, kadar treba izračunati iz znanega števila jedne vrste k temu spadajoče neznano število kake druge vrste s pomočjo jednega ali več vmesnih določil.

N. pr. Koliko krajcarjev avstr. vr. velja 20 *dkg*, če velja $7\frac{1}{2}$ *kg* 30 frankov?

Ako hočemo tu izračunati, koliko krajcarjev avst. vr. velja 20 *dkg*, treba ne le vedeti, da velja $7\frac{1}{2}$ *kg* 30 frankov, nego tudi še ta-le vmesna določila: 1 *kg* ima 100 *dkg*, 1 frank velja 45 kr. avst. vr. Popolni nalogi damo sedaj lahko to-le verižno zvezo:

x kr. avstr. vr. velja	....	20 *dkg*,
če znaša 100 *dkg*	....	1 *kg*,
če stane $7\frac{1}{2}$ *kg*	....	30 frankov,
in če velja 1 frank	....	45 kr. avstr. vr.?

Tu ima vsako število na desni isto vrednost kakor zraven stoječe na levi; vsako število na levi ima isto ime kakor najbližje prejšnje na desni, in zadnje število na desni ima isto ime kakor prvo na levi, t. j. isto ime kakor x. Tu so tedaj vsa števila takó zvezana kakor sklepi verige.

Vsak verižni račun je môči razrešiti s pomočjo jednostavne regeldetrije; v ta namen treba le to večkrat zaporedoma upotrebiti.

Prejšnji primer razrešili bi takó-le:

1.) Koliko *kg* je 20 *dkg*, če znaša 100 *dkg* 1 *kg*?

y *kg* 20 *dkg* $\qquad y : 1 = 20 : 100$

1 » 100 » $\qquad y = \frac{20 \,.\, 1}{100} = \frac{1}{5}$ *kg*.

2.) Koliko frankov stane $\frac{20 \,.\, 1}{100} = \frac{1}{5}$ *kg*, če stane $7\frac{1}{2}$ *kg* 30 frankov?

$7\frac{1}{2}$ *kg* 30 frankov $\qquad z : 30 = \frac{20 \,.\, 1}{100} : 7\frac{1}{2}$

$\frac{20 \,.\, 1}{100}$ » z » $\qquad z = \frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30}{100 \,.\, 7\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ frank.

3.) Koliko kr. avstr. vr. je $\frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30}{100 \,.\, 7\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ frank., če velja 1 frank 45 kr. avstr. vr.?

x kr. avstr. vr. $\qquad \frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30}{100 \,.\, 7\frac{1}{2}}$ frank.

45 » » » $\qquad$ 1 »

$$x : 45 = \frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30}{100 \,.\, 7\frac{1}{2}} : 1, \text{ tedaj}$$

$$x = \frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30 \,.\, 45}{100 \,.\, 7\frac{1}{2} \,.\, 1} = 36 \text{ kr. avstr. vr.}$$

Toda vsi ti obširni računi so pri tacih nalogah nepotrebni. Kajti če primerjamo ravnokar najdeni izraz $\frac{20 \,.\, 1 \,.\, 30 \,.\, 45}{100 \,.\, 7\frac{1}{2} \,.\, 1}$ in pa dano nalogo, kakeršna je v obliki verige, vidimo takój, da je neznanka x

jednaka produktu vseh števil na desni deljenemu s produktom vseh znanih števil na levi; neznanko x je môči tedaj neposredno iz one verige izračunati.

Za verižni račun velja tedaj to-le pravilo:

Najprej daj nalogi verižno obliko. V ta namen zapiši neznanko x z njenim imenom vred na levo vertikalne črte, na desno zraven pa ono znano število, za katero treba znesek iskati; spodaj zapiši vsa vmesna določila, in sicer začni na levi vselej s številom, ki ima isto ime kakor najbližje prejšnje število na desni, in zraven njega na desno zapiši vsakikrat ono število, ki ima isto vrednost; verigo skleni s številom, ki ima isto ime kakor x. Dobljeno verigo razrešiš, ako razdeliš produkt vseh števil na desni s produktom vseh znanih števil na levi. (Tu upotrebljaj, če mogoče, kar smo navedli v I. delu aritmetike, v § 76. o okrajševanji.)

§ 77.

Naloge.

1. Koliko stane 30 cnt. blaga, katerega velja $2\frac{1}{4}$ *kg* 72 kr.?

gl. x	30 cnt.
1	100 *kg*
$2\frac{1}{4}$	72 kr.
100	1 gl.; tedaj $x = 960$ gl.

Neznanka x in nje ime, tu goldinarji, zapiše se na levo, na desno pa količina, tu 30 cnt., kateri se išče vrednost. Ker se je prenehalo s centi, treba začeti naslednje vmesno določilo tudi s centi, sklepajoč: če ima 1 cent. . . . 100 *kg*. Sedaj se preide od blaga na ceno, rekoč: če $2\frac{1}{4}$ *kg* . . . 72 kr. velja. Tu se je prenehalo s krajcarji; x pa pomenja goldinarje, zarad tega upotrebi se še vmesno določilo: če dá 100 kr. . . . 1 gl.

2. Kmet dá krčmarju $12\frac{1}{2}$ *hl* pšenice po $9\frac{3}{5}$ gl.; koliko vina, *hl* po 20 gl., mora mu dati krčmar za pšenico?

3. Koliko londonskih cnt. je 2534 *kg*, če je 100 lond. fnt. $= 45\frac{9}{25}$ *kg*, in če ima 1 lond. cnt. 112 lond. fnt.?

4. Ruska desetina ima $109\frac{1}{4}$, švicarski juhart 36 *a;* koliko rusk. desetin ima zemljišče, katero meri $187\frac{3}{4}$ švic. juh.?

5. Koliko *km* gre na 1 avstr. miljo, imajočo 4000 dun. sežnjev, če ima 1 dun. seženj 0·316081 *m*?

6. Nekdo kupi 354 *kg* za 118 gl.; po čem mora prodajati 1 *kg*, če hoče imeti 20 % dobička, t. j. če hoče skupiti pri prodaji 120 gl. za vsacih 100 gl., katere je izdal pri nakupu?

x kr. pri prod.	1 *kg*
354	118 gl. pri nakupu
100	120 gl. pri prod.
1	100 kr. pri prod.

$x = \ldots\ldots$

7. Nekdo kupi 4 kose sukna po 32 *m* za 430 gl.; po čem mora prodajati *m*, če hoče imeti 10 % dobička?

8. Nekdo kupi 923 *kg* necega blaga za 876 gl., 100 *kg* pa prodaja po 87 gl.; koliko ima pri tem dobička ali izgube, in sicer koliko %?

Da se določi dobiček ali izguba v procentih, treba začeti verigo z vprašanjem: *x* gl. dohodkov pri prodaji dá 100 gl. razhodkov pri nakupu? Kadar je rezultat verižnemu računu večji od 100, tedaj je dobiček, in sicer izražuje število, za katero so izračunani dohodki večji od 100, dobiček v procentih; kadar pa je rezultat manjši od 100, tedaj je izguba, in sicer izražuje število, za katero so najdeni dohodki manjši od 100, izgubo v procentih; če je pa rezultat 100, ni niti dobička niti izgube.

x gl. dohodkov	100 gl. razhod.	
876	923 *kg*	100
100	87 gl. dohod.	90·63

$x = 90{\cdot}63$ gl. dohodk., tedaj $9{\cdot}37$ % izgube.

2400 : 4
600

9. Nekdo kupi 8 *hl* vina po 23 gl., *l* pa prodaja potem po 32 kr.; koliko % ima dobička?

10. Trgovec je prodal 153 *m* sukna za 439 gl.; dobička je imel 7 %; po čem je kupil *m*?

11. *A* dobi necega blaga 2158 *kg* nečiste teže, tara znaša 7 % in 1 *kg* čiste teže stane 85 kr.; koliko treba *A*-u za blago plačati?

12. Koliko stane kmetovalca 1 *kg* pšeničnega kruha, ako tehta 1 *hl* pšenice 77 *kg*, ako dá 100 *kg* pšenice 77 *kg* moke, ako se speče od 1 *kg* moke $1\frac{1}{4}$ *kg* kruha, in ako je *hl* pšenice po $9\frac{3}{10}$ gl.?

13. Nemški cent ima 100 funtov po 0·5 *kg*; koliko goldinarjev avstr. vr. stane 100 *kg* nekega blaga, katerega veljajo 3 nemški centi $208\frac{1}{2}$ marke, če se računa 100 mark po $57\frac{3}{5}$ gl. avstr. vr.?

14. Vzemimo, da tehta 5 *m* dolga železnocestna šina $125\frac{1}{2}$ *kg* in da velja v Belgiji 100 *kg* šin $27\frac{6}{10}$ franka; koliko gl. avstr. vr. stanejo šine, katerih je treba za 1 *km*? 100 frankov = $46\frac{1}{2}$ gl. avstr. vr.

15. Nekdo kupi 24 vreč riža; vsaka vreča tehta 115 *kg* in za vsacih 100 *kg* plača se $25\frac{1}{2}$ holand. gl.; koliko gl. avstr. vr. mora se za ves riž plačati, če se vzame, da je 100 holand. gl. = 99 gl. avstr. vr.?

16. V Hamburgu stane 1 funt kave 85 fenigov; koliko velja v avstr. vr. 500 *kg*, če je 1 *kg* = 2 fnt. in 100 mark = $57\frac{1}{2}$ gl. avstr. vr., in ima 1 marka 100 fenigov?

17. Trgovec dobi 450 steklenic renskega vina, katere ga stanejo s stroški vred 1060 mark; po čem v avst. vr. mora prodajati steklenico, če hoče imeti 25 % dobička in če je 100 mark = $57\frac{3}{5}$ gl. avstr. vr.?

18. V Marseille-u stane 1 kvintal nekega blaga 84 frankov; koliko v avstr. vr. velja v Trstu 2318 *kg,* če se računa 12 % vozarine in 10 % dobička? (1 kvintal = 48·95 *kg*, 100 frankov = 46 gl. avstr. vr.)

19. Srebema šibika tehta $14\frac{1}{2}$ *kg,* in sicer je v vsacem *kg* 720 tisočin čistega srebra; koliko je šibika vredna, če se računa *kg* čistega srebra po 90 gl.?

20. Koliko kr. avstr. vr. je vredna 1 nova laška lira, katera tehta 5 *g* ter ima $\frac{835}{1000}$ čistine, če se kuje od 500 *g* čistega srebra 45 gl. avstr. vr.?

21. Koliko je vreden v avstr. vr. severo-amerikanski dolar, če tehta 26·729 *g* ter ima $\frac{9}{10}$ čistega srebra?

22. Angleška krona po 5 shillingov tehta $\frac{10}{11}$ troy-unce; čistina ji je $\frac{37}{40}$; koliko je vredna v avstr. vr., če je 1 troy-funt po 12 unec = $373\frac{1}{4}$ *g*?

23. Koliko ruskih rubljev gre na 500 *g* čistega srebra, če tehta 1 rubel 20·7315 *g* in ima $\frac{125}{144}$ čistine?

24. Ako je 1 *kg* zlata $15\frac{1}{2}$krat toliko vreden kakor 1 *kg* srebra, koliko goldinarjev v avstr. vr. je vreden zlatník po štiri goldinarje, če se kuje 155 tacih zlatníkov po štiri goldinarje od 500 *g* zlata, imajočega $\frac{9}{10}$ čistine?

25. Pretvori 100 ruskih imperialov (zlatníkov) po njih notranji vrednosti na cesarske zlatníke (cekine). (Od 1 kolonjske marke = 233·87 *g* $23\frac{2}{3}$ karatnega zlata se kuje 67 cesarskih zlatníkov; ruskih imperialov pa gre 138·9189 na 500 *g* čistega zlata.)

26. Nekdo zamenja na Dunaji 360 zlatníkov po dvajset frankov za cesarske zlatníke; koliko cesarskih zlatníkov bode dobil, če se računa 1 zlatník po 20 frankov po $10\frac{1}{5}$ gl. avstr. vr. in 1 cesarski zlatník po 6 gl. avstr. vr?

27. Koliko je vreden v avstr. zlatníkih po osem goldinarjev 1 nemški zlatník po deset mark, če se kuje od 1 funta (500 *g*) čistega zlata $139\frac{1}{2}$ zlatníkov po deset mark in 155 zlatníkov po osem goldinarjev od 1 *kg* zlata, imajočega 900 tisočin čistine?

IX. O obrestnoobrestnem računu.

§ 78.

Dostikrat naložé se kapitali takó na obresti, da se pridenejo obresti koncem vsake dobe (navadno koncem vsacega leta ali poluleta) h kapitalu ter se s tem vred zopet na obresti naložé; v tem slučaji pravimo: kapital je naložen na obrestne obresti (*Zinseszinsen,* § 60.)

1. Kakó je izračunati, na koliko bode na obrestne obresti naložen kapital v določenem času narasel.

Kapitalu določili bi vrednost, na katero bode narasel v določenem času, če se med tem obresti koncem kake določene dobe vsakikrat h kapitalu pribijejo ter s tem vred zopet na obresti naložé, če bi izračunali obresti za vsako posamično dobo ter jih vsakikrat k početnemu kapitalu one dobe prišteli.

N. pr. Na koliko narase 2000 gl. kapitala v 4 letih, če se pribijejo 5 % obresti koncem vsacega leta h kapitalu ter z nova na obresti naložé?

Početni kapital	gl.	2000
Obresti 1. leta	»	100
Kapital na konci 1. leta	gl.	2100
Obresti 2. leta	»	105
Kapital na konci 2. leta	gl.	2205
Obresti 3. leta	»	110·25
Kapital na konci 3. leta	gl.	2315·25
Obresti 4. leta	»	115·7625
Kapital na konci 4. leta	gl.	2431·0125 = 2431 gl. 1 kr.

Z jednostavnimi obrestimi narasel bi bil kapital v 4 letih le na 2400 gl.

S pomočjo verižnega računa dá se dosti krajše pokazati, kakó narašča kapital, če je na obrestne obresti naložen.

Najprej hočemo določiti, na koliko narase v 4 letih kapitalna jednota (1 goldinar, 1 marka), če je po 5 % na obrestne obresti naložena. 100 gl. s početka leta narase s 5 % obrestimi vred koncem istega leta na 105 gl., 1 gl. početnega kapitala je vreden tedaj koncem leta 1·05 gl. Vsled tega dobimo to-le verigo:

x gl. je vreden koncem 4. leta	1 gl. početnega kapitala
1	1·05 » koncem 1. leta
1	1·05 » » 2. »
1	1·05 » » 3. »
1	1·05 » » 4. »

$$x = 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$

$$\text{ali } x = (1{\cdot}05)^4.$$

Znesek, na katerega narase na obrestne obresti naložena kapitalna jednota v določenem času, najdemo tedaj, če vzmnožimo vsoto iz 1 in 100tega dela procentov s števílom dob.

$(1{\cdot}05)^4$ izračunamo pa takó-le:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \\
 & \phantom{1{\cdot}}525 \\
\hline
(2) & 1{\cdot}1025 \times 1{\cdot}1025 \\
 & \phantom{1{\cdot}}52011 \\
\hline
 & 1{\cdot}102500 \\
 & \phantom{1{\cdot}}110250 \\
 & \phantom{1{\cdot}11}2205 \\
 & \phantom{1{\cdot}111}551 \\
\hline
(4) & 1{\cdot}215506
\end{array}
$$

Početni kapital 2000 gl. narasel bode tedaj, če se na omenjeni način 4 leta na obresti naloži, na 2000krat $(1{\cdot}05)^4$ gl.; končna vrednost bode mu tedaj

$$1{\cdot}215506 \text{ gl.} \times 2000 = 2431{\cdot}012 \text{ gl.}$$

Ako hočemo tedaj najti znesek, na katerega narase kateri koli na obrestne obresti kapital naložen v določenem času, treba pomnožiti le vrednost, katero bode imela kapitalna jednota čez toliko časa, s števílom kapitalnih jednot.

Če se obresti ne pridevajo h kapitalu koncem vsacega leta nego koncem vsacega poluleta, onda treba vzeti dvakrat toliko dob kakor je danih let, tedaj za prejšnji primer 8 poluletij, a za vsako dobo le polovico procenta, torej za prejšnji primer 2·5 %. Ker je po tem takem 100 gl. čez pol leta vrednih 102·5 gl., tedaj 1 gl. 1·025 gl., dobimo to-le verigo:

x gl. je vreden koncem 8. poluleta	1 gl. početnega kapitala
1	1·025 » koncem 1. poluleta
1	1·025 » » 2. »
1	1·025 » » 3. »
1	1·025 » » 4. »
1	1·025 » » 5. »
1	1·025 » » 6. »
1	1·025 » » 7. »
1	1·025 » » 8. »

$$x = (1\cdot025)^8 = 1\cdot218403.$$

2000 gl. kapitala narase tedaj v 4 letih s 5 % obrestnimi obrestimi vred, če se pribijajo obresti vsacega poluleta h kapitalu (če se obresti vsacega poluleta kapitalizujejo) na

$$1\cdot218403 \text{ gl.} \times 2000 = 2436\cdot806 \text{ gl.}$$

V naslednji tablici najdeš že izračunane vrednosti, na katere narase po 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 % na obrestne obresti naložena kapitalna jednota v 1, 2, 3, . . . 29, 30 dobah.

Prihodnja vrednost

na obrestne obresti naložene kapitalne jednote čez 1, 2, 3, . . . 29, 30 dob.

Dobe	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	4 %	5 %
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·131408	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·159693	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345868	1·448298	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·521618	1.652848	1·947901	2·292018
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·638516	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·679582	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·721571	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·764611	1·973587	2·464716	3·071524
24	1.608437	1·808726	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	1·853944	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	1·900293	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	1·947800	2·221289	2·883396	3·733456
28	1·741024	1·996495	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·046407	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·097568	2·427262	3·243398	4·321942

Račun, katerega smo izvedli ravnokar za kapitale, naložene na obrestne obresti, upotrebljati se dá tudi za druge v stalném razmerji rastoče količine, n. pr. za prirast prebivalstva v kaki deželi, lesú v gozdu i. t. d.

Naloge.

1. Kapital 5000 gl. je po 5 % na obrestne obresti naložen; na koliko narase v 6 letih pri celoletnem kapitalizovanji?

1 gl. je vreden čez 6 let, če se računa 5 % obrestnih obrestij, 1·340096 gl.; tedaj 5000 gl.

$$\frac{1·340\,096 \text{ gl.} \times 5000}{6\,700·480 \text{ gl.}} = 6700 \text{ gl. } 48 \text{ kr.}$$

2. Na koliko narase v 7 letih kapital 1234 mark, če je po 4 % na obrestne obresti naložen in se obresti poluletno kapitalizujejo?

Tu treba računati za 14 poluletij in za poluletni procent, namreč za 2 %; tedaj

1·319 479 mark × 1234	
4 321	
1 319 479	
263 896	
39 584	
5 278	
1 628·237 mark.	

3. Koliko bode vrednih 5800 gl. pri celoletnem kapitalizovanji čez 20 let, če se naložé po 3 % na obrestne obresti?

4. Oče vloži za svojega sedaj 13letnega sina 2300 gl. v hranilnico, katera plačuje 5 % obrestij in le-te poluletno kapitalizuje. Koliko bode izplačala hranilnica sinu, kadar doseže 24. leto?

Tu je 22 poluletij in $2\frac{1}{2}$ % za pol leta, tedaj

1·721571 gl. × 2300 = 3959·613 gl. = 3959 gl. 61 kr.

5. Nekdo se zaveže plačati 3000 gl. čez 1 leto, 2000 gl. čez 2 leti, 1000 gl. čez 3 leta in 4000 gl. čez 4 leta; koliko bodo vredni vsi ti zneski čez 4 leta, če se računa 5 % obrestnih obresti in se obresti celoletno kapitalizujejo?

3000 gl., katere treba čez 1 let. plačati, vredni so čez 4 leta	3472·875 gl.	
2000 » » » » 2 » » » » » 4 »	2205·000 »	
1000 » » » » 3 » » » » » 4 »	1050·000 »	
4000 » » » » 4 » » » » » 4 »	4000·000 »	
Vsi zneski skupaj so vredni čez 4 leta	10727·875 gl.	
	= 10727 gl. 88 kr.	

6. Nekdo nalaga skozi 6 let, in sicer v začetku vsacega leta po 325 gl. na obrestne obresti; na koliko bode narasel kapital v tem času pri celoletnem kapitalizovanji po 4 %?

Ker je naložen prvi znesek 6, drugi 5, . . . šesti 1 leto, dobimo

1. znesek	čez	6	let	1·265319	gl.	× 325	
2. »	»	6	»	1·216653	»	× 325	
3. »	»	6	»	1·169859	»	× 325	
4. »	»	6	»	1·124864	»	× 325	
5. »	»	6	»	1·081600	»	× 325	
6. »	»	6	»	1·040000	»	× 325	
Vsi zneski skupaj	čez	6	let	6·898295	gl.	× 325	= 2241·959 gl.
							= 2241 gl. 96 kr.

7. Oskrbništvo neke cerkve je naložilo za zidanje nove cerkve v hranilnico, katera poluletno kapitalizuje, 18480 gl. po 5 % na obrestne obresti. Na koliko je narasla ta vsota v 15 letih?

8. Koliko vrednost bode imel kapital 3758 frankov čez 18 let, ako se po 5 % na obrestne obresti naloži?

9. Oče naloži za svojega sina o njega rojstvu 1250 gl. pri nekem zavarovalnem društvu, katero plačuje 5 % obrestij. Koliko bode izplačalo društvo sinu po dovršenem 24. letu, če se obresti celoletno kapitalizujejo?

10. Neko mesto je imelo pred 8 leti 25360 prebivalcev; koliko jih ima sedaj, če se je povečalo prebivalstvo vsako leto poprek za 2 %?

11. Neki gozd ima sedaj 90000 m^3 lesa; koliko ga bode imel čez 10 let, če ga prirase vsako leto 3 %?

12. Nekdo nalaga skoz 12 let v začetku vsacega pol leta po 40 gl. v hranilnico, katera po $2\frac{1}{2}$ % poluletno kapitalizuje; koliko si je prihranil v tem času?

13. Neka hiša se proda s tem pogojem, da plača kupec 6000 gl. takój in prav toliko tudi čez 1 in 2 leti, ali pa čez 2 leti 19000 gl. Kateri pogoj je za kupca ugodnejši, če mu nese denar v kupčiji, katero ima, 5 %?

14. Pri nekem zavarovalnem društvu za življenje plačuje 32 let stara oseba na leto 2 gl. 78 kr. od 100 gl. zavarovane vsote. Vzemimo, da se zavaruje 32 let stara oseba pri tem društvu za 4000 gl., po dovršenem 47. letu svoje dobe pa umrje; koliko znašajo vsi njeni vplačani doneski, če se računa 5 % obrestnih obrestij?

15. Na koliko narase 1 gl. pri 5 % obrestnih obrestij v 100 letih?

2. Kakó je izračunati, koliko je bil na obrestne obresti naložen kapital pred določenim časom vreden.

§ 80.

Nalogo, kakó je najti novčni vsoti vrednost, katero je imela pred določenim časom, ali kar je jedno in isto, kakó je izračunati z ozirom na obrestne obresti sedanjo vrednost kapitalu, katerega treba še le o določenem času izplačati, to nalogo razrešimo lahko zopet s pomočjo verižnega računa.

V ta namen poiščimo si najprej sedanjo vrednost kapitalne jednote, katero treba n. pr. še le čez 3 leta plačati, obrestne obresti računajmo po 4 %, in sicer za celoletno kapitalizovanje. 100 gl. je vrednih čez 1 leto 104 gl., tedaj 1 gl. 100ti del od 104 gl., t. j. 1·04 gl.; zatorej ima obratno 1·04 gl. 1 leto prej le vrednost 1 gl. Vsled tega dobimo to-le verigo:

x gl. sedaj	1 gl., katerega treba plačati čez 3 let.
1·04	1 » » » » » 2 »
1·04	1 » » » » » 1 »
1·04	1 » sedaj

$$x = \frac{1}{(1 \cdot 04)^3}.$$

Sedanjo vrednost kapitalne jednote, izplačne o določenem času, najdemo tedaj z ozirom na obrestne obresti, ako razdelimo 1 s toliko potenco vsote iz 1 in 100tega dela procentov, kolikor je dob, t. j. s številom, izražujočim prihodnjo vrednost kapitalne jednote čez toliko in toliko časa (§ 78.)

Ker je pa $(1 \cdot 04)^3 = 1 \cdot 124864$, zato je sedanja vrednost kapitalne jednote, izplačne čez 3 leta, če se računa 4 % obrestnih obrestij,

$$1 : 1 \cdot 124864 = 0 \cdot 888996.$$

Sedanja vrednost 2000 gl., izplačnih čez 3 leta, je potem pri 4 % obrestnih obrestij 2000krat 0·888996 gl., torej 1777·992 gl.

Sedanjo vrednost katerega koli čez toliko in toliko časa izplačnega kapitala tedaj najdemo, pomnoživši sedanjo vrednost čez prav toliko časa izplačne kapitalne jednote s številom kapitalnih jednot.

Kadar se kapitalizuje poluletno, tedaj treba vzeti dvakrat toliko dob, kolikor je danih let, a za vsako dobo le polovico procenta, tedaj za prejšnjo nalogo 6 dob in 2 %.

Sedanja vrednost čez 3 leta izplačne kapitalne jednote je torej, če se poluletno kapitalizuje,

$$\frac{1}{(1\cdot 02)^6} = 1 : 1\cdot 126162 = 0\cdot 887971 \text{ gl.},$$

in 2000 gl., izplačnih čez 3 leta,

$$0\cdot 887971 \text{ gl.} \times 2000 = 1775\cdot 942 \text{ gl.}$$

V naslednji tablici so sedanje vrednosti kapitalne jednote, izplačne čez 1, 2, 3, . . . 29, 30 dob za 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 % obrestnih obrestij že izračunane.

Sedanja vrednost

kapitalne jednote, izplačne čez 1, 2, 3, . . . 30 dob z ozirom na obrestne obresti.

Število dob	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	4 %	5 %
1	0·980392	0·975610	0·970874	0·961539	0·952381
2	0·961169	0·951814	0.942596	0·924556	0·907030
3	0·942322	9·928599	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·905951	0·888487	0·854804	0·822703
5	0·905731	0·883854	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·862297	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·841265	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853491	0·820747	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·800728	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820349	0·781198	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·762145	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·743556	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·725420	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·707727	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·690466	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·673625	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714162	0·657195	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·641166	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·625528	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·610271	0·553676	0·456387	0·376890
21	0·659776	0·595386	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·580865	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·566697	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·552875	0·491934	0·390122	0·310068
25	0·609531	0·539391	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·526235	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·513400	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·500878	0·437077	0·333478	0·255094
29	0·563112	0·488661	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·476743	0·411987	0·308319	0·231377

§ 81.

Naloge.

1. Koliko je 4000 gl., izplačnih čez 5 let, vrednih sedaj, t. j. 5 let prej, ako se 4 % obrestne obresti celoletno kapitalizujejo?

Za 5 dob in 4 % je sedanja vrednost 1 gl. 0·821927 gl.; tedaj

0·821927 gl. × 4000 = 3287·708 gl. = 3287 gl. 71 kr.

2. Kolika je bila vrednost 7310·75 gl. pred 15 leti, če se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

3. Koliko kapitala treba po 4 % na obrestne obresti naložiti, da narase pri poluletnem kapitalizovanji v 12 letih na 5200 gl.?

Vrednost 1 gl. pred 24 dobami po 2 % je 0·621722 gl.; tedaj

0·621722 gl. × 5200 = 3232·954 gl. = 3232 gl. 95 kr.

4. 60 let stara oseba hoče po svoji smrti svojemu zvestemu slugi zapustiti 800 gl. Koliko mora v ta namen pri zavarovalnem društvu naložiti, če kapitalizuje le-to celoletno po 4 %?

Ker se računa, da živi 60 let star človek poprek še 12 let, glasila bi se ta naloga lahko tudi takó-le: Kolika je sedanja vrednost 800 gl., izplačnih čez 12 let, če se računa 4 % obrestnih obrestij? Tedaj treba naložiti

0·624597 gl. × 800 = 499·678 gl. = 499 gl. 68 kr.

5. Neko posestvo ima tri kupce. *A* hoče 18000 gl. takój v gotovini plačati; *B* ponuja 20000 gl. pa s tem pogojem, da plača 10000 gl. takój, drugo polovico pa še le čez 5 let; *C* ponuja tudi 20000 gl., in sicer hoče 5000 gl. takój, 8000 gl. čez 3 leta in ostanek čez 4 leta plačati. Kateri izmed teh treh kupcev ponuja največ, če se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

Tu treba izračunati vrednost vseh plačil za isti čas, recimo n. pr. sedanjo vrednost.

A ponuja v gotovini	takój	18000	gl.		
B ponuja	»	10000	»		
in 10000 gl. čez 5 let, ali	»	7835	»	26	kr.
	skupaj takój	17835	gl.	26	kr.
C ponuja	takój	5000	gl.		
8000 gl. čez 3 leta, ali	»	6910	»	70	kr.
7000 » » 4 » »	»	5758	»	92	»
	skupaj takój	17669	gl.	62	kr.

A ponuja tedaj največ.

6. *A* hoče dati *B*-u neko vsoto v ta namen, da mu bode izplačeval ta 5 let zaporedoma in to koncem vsacega leta po 586 gl.; kolika mora biti ona vsota, če se računa 4 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

Tu treba izračunati, koliko je vrednih prvih 586 gl. 1 leto prej, druzih 586 gl. 2 leti prej . . . . petih 5 let prej.

586 gl. 1 let. prej	=	0·961539 gl.	× 586			
586 » 2 » »	=	0·924556 »	× 586			
586 » 3 » »	=	0·888996 »	× 586			
586 » 4 » »	=	0·854804 »	× 586			
586 » 5 » »	=	0·821927 »	× 586			
Vsi zneski skupaj so sedaj vredni		4·451822 gl.	× 586	=	2608·768 gl.	
				=	2608 gl. 77 kr.	

7. Kateri kapital narase, po 4 % na obrestne obresti naložen, v 14 letih na 3580 gl.?

8. Neki kapital je bil po 4 % na obrestne obresti naložen in se je pomnožil v 16 letih na 36400 gl.; kolik je bil prvotni kapital?

9. Neko mesto ima sedaj 18350 prebivalcev; koliko jih je imelo pred 12 leti, če jih je vsako leto po 2 % priraslo?

10. Nekdo ponuja za neko posestvo 85000 gl. s tem pogojem, da plača to vsoto še le čez 8 let; koliko je vredna ta ponudba sedaj, če se računa 5 % obrestnih obrestij?

11. Nekdo si hoče zagotoviti čez 20 let 3000 gl.; koliko treba mu v ta namen vplačati pri zavarovalnem društvu, če kapitalizuje društvo 5 % obresti poluletno?

12. Nekdo hoče dobivati 12 let koncem vsacega leta po 850 gl.; koliko mora takój vplačati, če se računa od vsakokratnega kapitalnega ostanka 5 % obrestij?

13. *A* prevzame neko hišo ter se zaveže, dosedanjemu posestniku 15 let zaporedoma koncem vsacega leta po 600 gl. plačevati; na koliko se je hiša cenila, če se računa 5 % obrestnih obrestij?

X. Različne naloge

za računanje s sestavljenimi razmerji.

§ 82.

1. Od 15 *kg* preje se dá natkati 90 *m* 115 *cm* širocega platna; koliko *m* 105 *cm* širocega platna se bode natkalo od 7 *kg* preje?

2. Kapital 2800 gl. je po 4 % na obrestne obresti naložen; na koliko bode narasel v 10 letih, če se obresti *a)* celoletno, *b)* poluletno kapitalizujejo?

3. Trije družbeniki prevzemó neko podjetje, pri katerem imajo 3977 gl. dobička; tega razdelé med seboj po razmerji vloženih kapitalov. Koliko dobi vsak, če je vložil *A* 6400 gl., *B* 6300 gl. in *C* 4500 gl.?

4. Koliko tehta 6312 cm^3 železa, če tehta 1 cm^3 železa toliko kakor $7\frac{4}{5}$ cm^3 vode, in če tehta 1 dm^3 vode 1 *kg*?

5. Kateri kapital dá
   a) po 5 % v 3 letih 109 gl. 35 kr. obrestij?
   b) po $4\frac{1}{2}$ % v 2 letih 180 gl. 80 kr. obrestij?
   c) po 4 % v 6 mesecih 137 gl. obrestij?

6. 15 delavcev dovrši neko delo v 10 dneh, če delajo po 12 ur na dan; koliko delavcev treba najeti, da dovršé isto delo v 6 dneh, če delajo po 10 ur na dan?

7. Koliko čistega zlata in koliko bakra je v 2·6 *kg* zlata, katero ima 900 tisočin čistine?

8. Zlatar ima zlato po 840 in po 650 tisočin čistine; koliko mora vsacega vzeti, da dobi $1\frac{1}{10}$ *kg* zlata, imajočega 750 tisočin čistine?

9. Koliko obrestij dá 3456 gl.
   a) po 4 % v 3 letih?
   b) po $4\frac{3}{4}$ % v 2 letih 6 mesecih?
   c) po 5 % v 49 dneh?

10. Kedaj treba ob jednem plačati šestero jednacih kapitalov po 800 gl., posamič izplačnih čez oziroma 4, 5, 7, 9, 10, 14 mesecev?

11. Neko delo prepiše 6 pisarjev, pišočih po $12\frac{1}{2}$ ure na dan, v 8 dneh; koliko pisarjev treba najeti, da prepišejo isto delo v 5 dneh, če pišejo le po 12 ur na dan?

12. Koliko obrestij dá po $4\frac{1}{2}$ %
   a) 6250 gl. v $2\frac{3}{4}$ leta?
   b) 1306 gl. 58 kr. v 1 letu 5 mesecih?
   c) 978 frankov od dné 1. aprila do dné 16. junija?

13. Koliko velja v avstr. vr. 1 *kg*, če stane 100 nemšk. fnt. $92\frac{1}{2}$ marke? (2 nemšk. fnt. = 1 *kg* in 100 mark = 57 gl. avst. vr.)

14. Nekdo ima kup srebernjakov po četrt goldinarja; koliko čistega srebra in koliko primesi je v njih, če tehtajo $2\frac{1}{2}$ *kg* ter imajo 520 tisočin čistine?

15. Žitar ima dvojo pšenico; boljše velja *hl* 9 gl., slabejše 8 gl.; koliko mora vsake vzeti, če hoče namešati 42 *hl* pšenice, katero mu bode môči *hl* po 8 gl. 40 kr. prodajati?

16. Koliko obrestij dá v 68 dneh

a) 2085 gl. po 5 %?
b) 1593 gl. 80 kr. po $4\frac{1}{2}$ %?
c) 3103 gl. 12 kr. po 4 %?

17. Zlata šibika tehta 1 *kg* 685 *g* ter ima 857 tisočin čistine; kolika je nje vrednost v avstr. vr., če se računa *kg* čistega zlata po 1395 gl.?

18. *A* kupi vrt za 1200 gl. ter se zaveže, čez vsake 3 mesece po 240 gl. plačati; kedaj bi moral vso vsoto na jedenkrat plačati?

19. Neka knjiga ima 240 stranij po 32 vrst in vsaka vrsta po 45 črk; koliko črk bi bilo treba dejati poprek v jedno vrsto, da bi se spravila vsebina one knjige na 200 stranij po 36 vrst?

20. V kolikem času dá

a) 908 gl. kapitala po $4\frac{3}{4}$ % 86 gl. 26 kr. obrestij?
b) 5160 gl. kapitala po 5 % 330 gl. obrestij?
c) 2180 gl. kapitala po 6 % 327 gl. obrestij?

21. Materi, 2 sinovoma in 1 hčeri treba 6300 gl. takó med seboj razdeliti, da dobi mati 15, starejši sin 12, mlajši sin 10 in hči 8 delov; koliko dobi vsaka oseba?

22. Štirim osebam je 2852 gl. takó med seboj razdeliti, da dobi *A* tolikokrat po 3 gl. kakor *B* po 4, *C* po 7 in *D* po 9 gl.; koliko pride na vsako?

23. Nekdo dobi 730 *m* svilnatih trakov ter plača za vsacih 9 *m* po $22\frac{1}{2}$ franka; koliko ga stane vse blago v avstr. vr., če je 5 frankov = $2\frac{1}{4}$ gl.?

24. Po koliko % dá

a) 3075 gl. kapitala v 9 mesecih 92 gl. 25 kr. obrestij?
b) 5409 gl. kapitala v $2\frac{1}{2}$ leta 607 gl. 50 kr. obrestij?
c) 650 gl. kapitala v $3\frac{2}{3}$ leta 143 gl. obrestij?

25. Na 150 *m* dolgi in 30 *m* široki njivi se poseje 2 *hl* pšenice; kolika mora biti dolžina njivi, ki je 36 *m* široka, da se poseje na nji 3 *hl*?

---

26. Nekdo plača 452 gl. 20 kr. ter poplača s tem izposojeni kapital in $5\frac{1}{2}$ % proste obresti za 6 let; kolik je bil izposojeni kapital?

27. Dolg 1275 gl., izplačen čez $7\frac{1}{2}$ meseca, plača se takój; koliko je gotovega plačila, če se računa 5 % diskonta za 1 leto?

28. Pri neki kupčiji, za katero je dal A 3500 gl., B 2850 gl., C 4180 gl., bilo je 11 % dobička; koliko tega dobička pride na vsacega družbenika?

29. Koliko je bilo vrednih 5360 gl. pred 12 leti, če se računa 5 % obrestnih obrestij in *a)* celoletno, *b)* poluletno kapitalizovanje?

30. 1 hol. goldinar tehta 10 *g* ter ima $\frac{945}{1000}$ čistine; koliko tacih goldinarjev gre na 1 *kg* čistega srebra?

31. Ako raztopiš 7 delov kositarja v 3 delih živega srebra, dobiš amalgam, s katerim se oblaga steklo pri izdelovanji zrcal; koliko treba vzeti vsake teh kovin za 18 *kg* tacega amalgama?

32. Dvoje koles poseza drugo v drugo; prvo ima 56, drugo 21 zobcev; kolikokrat se mora zavrteti drugo kolo v $3\frac{3}{4}$ minute, če se zavrti prvo v $2\frac{5}{10}$ minute 58krat?

33. Tri osebe vložé v neko kupčijo 9600 gl. ter dobé s tem $\frac{1}{8}$ vloge; koliko dobi vsaka oseba, če je vložil A 2400 gl., B 3600 gl. in C ostanek?

34. Oče hoče zagotoviti svojemu sinu precej pri njega rojstvu kapital, ki se bode sinu izplačal po dovršenem 24. letu. V ta namen naloži takój 2450 gl. v hranilnici, katera plačuje 5 % obrestij. Koliko bode izplačala hranilnica sinu ob omenjenem času, če se obresti poluletno kapitalizujejo?

35. Nekomu treba plačati: dne 17. marcija 250 gl., dne 13. julija 300 gl., dne 21. avgusta 400 gl., dne 7. oktobra 250 gl. in dne 18. decembra 500 gl. Katerega dne plača lahko vse te zneske na jedenkrat?

Posamične roke računaj od dne 1. januvarja; isto velja potem tudi za rezultat.

36. Neki trgovec bi bil moral 4108 rubljev dne 20. oktobra plačati; a on je plačal še le dne 31. decembra; koliko je moral ta dan plačati, če se je računalo 6 % obrestij?

37. Nekdo posodi 1850 gl. po 6 % ter obresti za 1 leto precej odtegne; za koliko je dolžnik, kateri bi moral obresti še le koncem leta plačati, pri tem na izgubi?

38. Neki trgovec ima troje blago, *kg* po 40 kr., 33 kr. in 30 kr.; koliko mora vsacega vzeti, če hoče dobiti 120 *kg* zmesi po 36 kr.?

39. Nekdo zmeša 50 *kg* blaga, katerega stane *kg* 60 kr., s 40 *kg* slabejšega blaga in *kg* zmesi velja 54 kr.; po čem je *kg* slabejšega blaga?

40. Dunajčan kupi v Hamburgu 80 vreč Domingo-kave, v vsaki vreči je je 160 fnt.; koliko stane kava v avstr. vr., ako velja 1 fnt. $\frac{4}{5}$ marke in je 100 mark = $56\frac{1}{2}$ gl. avstr. vr.?

41. Nekdo vloži 3580 gl. v hranilnico, katera plačuje 5 % obrestij na leto ter obresti poluletno kapitalizuje; koliko bode vreden oni kapital čez 8 let?

42. Mesto 1852 gl., izplačnih čez nekaj časa, plača se v gotovini 1712 gl.; čez koliko časa je ona vsota izplačna, če se računa $5\frac{1}{4}$ % diskonta za 1 leto?

43. 120 gl. se je med 20 možkih in žensk takó razdelilo, da je dobil vsak mož po 8 gl., vsaka ženska po 3 gl.; koliko je bilo možkih in koliko žensk?

44. 1050 gl. treba takó razdeliti, da dobi A tolikokrat po $1\frac{1}{2}$ gl. kakor B $1\frac{2}{3}$ gl., C $1\frac{5}{6}$ gl., D 2 gl.; koliko dobi vsak?

45. Neki trgovec je začel tržiti z 22500 gl. kapitala; vzemimo, da je imel skoz 10 let po 5 % dobička in da je pustil dobiček v kupčiji; koliko kapitala je imel koncem 10. leta?

46. 2640 gl. treba razdeliti med tri osebe takó, da dobi B 2krat toliko kakor A menj 240 gl., C pa 3krat toliko kakor B; koliko dobi vsak?

47. Nekdo ima 30 *kg* blaga po 48 kr. in 40 *kg* po 44 kr.; k temu doda še 50 *kg* tretje vrste in sedaj ga stane *kg* zmesi 40 kr.; po čem je *kg* zadnje vrste?

48. Koliko kapitala treba po 4 % na obrestne obresti naložiti, da narase pri poluletnem kapitalizovanji v 9 letih na 5000 gl.?

49. A je dolžán 2400 gl. čez 4 leta plačati; 800 gl. plača takój; kedaj mora ostanek plačati?

50. 100 *kg* reži dá 75 *kg* moke, 22 *kg* otrobov in 3 *kg* gredó v izgubo; koliko moke in koliko otrobov bode dalo 6 *hl* reži, če tehta 1 *hl* reži 72 *kg*?

---

51. Čisto srebro in srebro, ki ima 920 tisočin čistine, treba z bakrom takó zliti (legovati), da se dobode 32 *kg* srebra, imajočega 750 tisočin čistine; koliko treba vsacega vzeti?

52. Štirje vozniki prevzamejo prevožnjo nekega blaga ter dobé za to 184 gl.; A je dal 4 konje 3 dni, B 6 kônj $2\frac{1}{2}$ dneva, C 5 kônj 4 dni in D 8 kônj $2\frac{3}{4}$ dneva; koliko dobi vsak voznik?

53. A ponuja za neko hišo 8410 gl. v gotovini, ali pa 8785 gl., katere hoče pa še le čez 9 mesecev plačati; katera ponudba je za prodajalca ugodnejša, če lahko denar po 5 % izposodi?

54. Sreberna šibika tehta 8·765 *kg* ter ima 750 tisočin čistine: koliko avstrijskih srebernjakov po goldinarji se bode dobilo zanjo, če treba 1 % za kovne stroške odbiti?

55. Trem osebam je 285 gl. takó med seboj razdeliti, da dobi *A* tolikokrat po 5 gl. kakor *B* po 8 gl. in *C* tolikrat po 3 gl. kakor *B* po 4 gl.; koliko dobi vsaka oseba?

56. Po čem mora biti *kg* blaga, katero dá, zmešano s 50 *kg* po 24 kr., 30 *kg* po 18 kr. in 40 *kg* po 20 kr., 200 *kg* zmesi po 22 kr.?

57. Koliko *kg* tehta 165 srebernjakov po goldinarji, če ima vsak srebernjak $\frac{1}{90}$ *kg* čistega srebra in $\frac{9}{10}$ čistine?

58. Štirje trgovci so imeli pri neki kupčiji 1236 gl. dobička; koliko tega dobička pride na vsacega, če je razmerje med *A*-ovim in *B*-ovim deležem kakor 2 : 3, med *B*-ovim in *C*-ovim kakor 4 : 5, in med *C*-ovim in *D*-ovim kakor 10 : 11?

59. Novčni zakon cesarja Ferdinanda I. z leta 1529. je določil, da se kuje od jedne kolonjske marke (= 233·855 *g*) $18\frac{1}{2}$ karatnega zlata 72 zlatníkov po goldinarji; koliko novih zlatníkov po osem goldinarjev je 100 tacih zlatníkov po goldinarji vrednih, če ima 155 zlatníkov po osem goldinarjev 1 *kg* roblja in $\frac{9}{10}$ čistine?

60. Nekdo je nalagal 14 let zaporedoma koncem vsacega leta po 85 gl. v hranilnico, katera plačuje 4 % letnih obrestij ter te poluletno kapitalizuje; koliko si je prihranil v tem času?

61. Trije zidarski mojstri dobé za delo, katero so skupno dovršili, 2700 gl., in te razdelé med seboj po razmerji števila delavcev in časa. *A* je dal 16 delavcev 40 dnij, *B* 20 delavcev 36 dnij in *C* 25 delavcev 32 dnij; koliko dobi vsak mojster?

62. *A* mora plačevati *B*-u, dokler ta živi, vsako leto po 420 gl. rente; *B* pa bi dobil rad znesek vseh rent takój v gotovini; koliko mu bode dal *A*, če vzamemo, da bode *B* še 18 let živel, in če se računa 4 % celoletnih obrestnih obrestij?

63. *A*, *B* in *C* so imeli pri neki kupčiji 960 gl. dobička;. *B* je bil vložil 3000 gl., *C* 5000 gl.; koliko je bil *A* vložil, ker je dobil 320 gl. od onega dobička?

64. *A* mora plačati čez jedno leto dvema upnikoma skupaj 5319 gl. brez obrestij, a on plača takój ter dobi od prvega 135 gl. popusta, ker mu dovoli ta $4\frac{1}{2}$ % diskonta; kolik bode popust pri druzem, ki mu dovoli le 4 % diskonta?

65. V kristalni palači v Sydenhamu pri Londonu je bila razstavljena meseca maja 1858. l. kepa čistega zlata, katero so bili v Avstraliji našli, tehtajoča 1743 angl. troy-unec. *a)* Koliko zlatníkov po štiri goldinarje bi bilo môči z nje nakovati, če ima vsak tak zlatník 5·80645 *g* čistega zlata? *b)* Kolika je nje vrednost v avstr. vr., če se računa zlatník po štiri goldinarje po 4 gl. 85 kr.? (12 troy-unec = $373\frac{1}{4}$ *g*.)

66. Nekdo kupi neko posestvo za 60000 gl. s tem pogojem, da bode plačal to vsoto v petih jednakih odplačilih čez 1 leto, čez 2, 3, 4, 5 let; plača pa 20000 gl. takój, 10000 gl. čez $1\frac{1}{2}$ leta in 10000 gl. čez 2 leti; kedaj mora ostanek plačati?

67. V neki vasi je poškodoval požar štirim hišnim posestnikom lastnino, cenjeno pri *A*-u na 2000 gl., pri *B*-u na 1800 gl., pri *C*-u na 2400 gl. in pri *D*-u na 1200 gl., in sicer je imel *A* 640 gl., *B* 520 gl., *C* 800 gl. škode, *D* pa je vse izgubil. Kakó je razdeliti nabranih 980 gl. med te osebe po razmerji njih škode?

68. *A* je posodil svojemu prijatelju *B*-u 126 ces. zlatníkov (cekinov) po 5·6 gl. ter jih nazaj dobil čez 25 dnij; ko mu pa hoče *B* tudi 6 % obrestij plačati, naprosi ga *A*, da mu posodi sedaj 100 ces. zlatníkov po 5 % do tle, da bodo one obresti poravnane; koliko časa sme *A* denar obdržati, če računa *B* ces. zlatníke po 5·88 gl.?

69. *A* je bil dolžán *B*-u plačati:

dne	5. julija	2325 gl.	82 kr.
»	27. septembra	978 »	39 »
»	19. novembra	1815 »	40 »

B pa je moral *A*-u plačati:

dne	13. avgusta	1546 gl.	6 kr.
»	1. decembra	2410 »	— »

Dne 31. decembra poračunata medsebojne terjatve s 6 %; koliko mora *A* *B*-u plačati?

70. *A* si izposodi 6000 gl. ter plačuje na račun 5 % obrestij in za odplačevanje kapitala koncem vsacega leta po 850 gl.; koliko bode čez 8 let še dolžán in koliko je ta dolg sedaj vreden?

Šesti oddelek.

O jednačbah prve stopinje.

§ 83.

Izjednačenje dveh izrazov, imajočih isto vrednost, imenujemo jednačbo (*Gleichung*); n. pr.

$$a = a;\ (a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2;\ 3x - 5 = 2x + 3.$$

Izraza na obeh stranéh jednačaja zovemo jednačbina dela (*Theile*); vsak izmed njiju ima lahko zopet več členov (*Glieder*). V jednačbi $3x - 5 = 2x + 3$ je $3x - 5$ prvi, $2x + 3$ drugi del; vsak izmed njiju ima dva člena.

Jednačbe so dvoje: identične in določilne jednačbe. Identična (*identisch*) jednačba ostane veljavna za vsako vrednost, katero damo njenim še nedoločenim količinam; to svojstvo imata jednačbi $a = a$, $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$, kateri ostaneta pravi, naj si damo količinam a in b katero koli vrednost. Določilne jednačbe (*Bestimmungsgleichungen*) pa so one, katere ne ostanejo veljavne za vse, nego le za določene vrednosti njih neznank. Jednačba $3x - 5 = 2x + 3$ je torej določilna jednačba, kajti nji zadostuje le vrednost $x = 8$.

Določilni jednačbi zadostujoče vrednosti neznanke najti, pravi se jednačbo razrešiti (*auflösen*).

Po številu neznank, ki jih ima jednačba, razločujemo jednačbe z jedno, z dvema ali z več neznankami. N. pr. $7x - 3 = 4x$ je jednačba z jedno, $5x - 3y = 8$ jednačba z dvema, $7x = 3y - 5z + 5$ jednačba s tremi neznankami.

Po najvišjem potenčnem eksponentu neznanke delimo jednačbe na jednačbe prve, druge, tretje, . . . stopinje. N. pr

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 20 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\} \text{ sta jednačbi prve stopinje,}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 5x &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 2xy \end{aligned}\right\} \text{ sta jednačbi druge stopinje.}$$

Tu se hočemo pečati le z določilnimi jednačbami prve stopinje.

I. Kakó je razreševati jednačbe prve stopinje z jedno neznanko.

§ 84.

Jednačbo prve stopinje z jedno neznanko je za razrešeno smatrati, kadar stoji pred jednačajem neznanka sama in za njim le znana števila. N. pr. Jednačba $6x + 4x = 780 - 3x$ je razrešena, če dobimo za rezultat $x = 60$.

Jednačbe prve stopinje razrešujemo, opirajoč se na to-le načelo:

Jednaki izrazi na jednak način izpremenjeni dajó zopet jednake izraze.

Iz tega občnega načela izvajamo te-le posebne izreke:

1.) Jednako k jednakemu prišteto daje jednake vsote.

Če je $a = b$ in $c = d$, mora biti tudi $a + c = b + d$.

2.) Jednako od jednacega odšteto daje jednake diference.

Če je $a = b$ in $c = d$, mora biti tudi $a - c = b - d$.

S pomočjo teh dveh izrekov je môči vsak člen v jednem jednačbinem delu izpustiti ter ga z nasprotnim znakom v druzega prenesti (*transponieren*). Če je n. pr. $x + a = b$, potem je $x = b - a$; ta prenos ne pomenja nič druzega, nego da smo od obeh jednačbinih delov $+ a$ odšteli. Iz $5x = 16 - 3x$ dobimo $5x + 3x = 16$; tu smo prišteli k obema stranéma $3x$, ali, kar je isto, od obeh smo $- 3x$ odšteli.

3.) Jednako z jednakim pomnoženo daje jednake produkte.

Upotrebljujoč ta izrek je môči iz jednačbe ulomke odpraviti; v ta namen treba le obe dve strani jednačbe z najmanjšim skupnim mnogokratnikom imenovalcev pomnožiti. N. pr. iz $\frac{x}{a} - b = c$ dobimo, pomnoživši z a, $x - ab = ac$.

Prav takó dobimo iz $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3}$, pomnoživši z $2 \times 3 = 6$, $3x - 12 = 2x$.

4.) Jednako z jednacim razdeljeno daje jednake kvocijente.

Če je $a = b$ in $c = d$, mora biti tudi $a : c = b : d$.

Oba jednačbina dela se smeta torej z istim številom razdeliti; na ta način je môči dati jednačbi dostikrat prostejšo obliko. Takó dobimo iz $6x = 24$ jednačbo $x = 4$.

Upotrebljujoč prejšnje izreke razrešuj torej **jednačbe prve stopinje z jedno neznanko** takó-le:

1.) Ako ima jednačba ulomke, odpravi jih, pomnoživši oba dva jednačbina dela z najmanjšim skupnim mnogokratnikom vseh ulomkov. (Ulomke odpravi.)

2.) Ako so v jednačbi sestavljeni, z oklepaji zvezani izrazi, potem izvrši res one račune, katere oklepaji samo nakazujejo. (Oklepaje razreši.)

3.) Vse člene, imajoče neznanko, prenesi v prvi del ter jih potem skrči; znane člene pa prenesi v drugi del ter jih tudi skrči. (Prenesi in skrči.)

4.) Neznanko oprosti njenega koeficijenta; v ta namen razdeli z njim oba dva jednačbina dela. (Razdeli z neznankinim koeficijentom.)

Ako se hočeš prepričati, si-li jednačbo res prav razrešil, treba le neznanko v dani jednačbi zameniti z najdeno vrednostjo ter izrazoma na obeh stranéh dati najjednostavnejšo obliko. Razrešil si jo prav, če dobiš na obeh stranéh isti rezultat, drugače ne.

§ 85.

Naloge za razrešitev.

1. $3x - 8 = 13$.

Razrešitev.
$$\begin{aligned} 3x &= 13 + 8 \\ 3x &= 21 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Preskušnja.
$$\begin{aligned} 3 \times 7 - 8 &= 13 \\ 21 - 8 &= 13 \\ 13 &= 13. \end{aligned}$$

2. $7x - 23 = 40$.

3. $2x - 11 = 23$.

4. $9 - x = 7$.

5. $5y + 14 = 49$.

6. $2x + 15 = 31$.

7. $14 = 5z - 16$.

8. $17 - 3x + 1 = 0$.

9. $104 + 4x = 484$.

10. $8 + 8x = 128$.

11. $234 = 272 - 2x$.

12. $93 = 121 - 4y$.

13. $50 = 8 - 6y$.

14. $a + x = b$.

15. $a - x = b$.

16. $a + b - y = c$.

17. $a - b = c - y$.

18. $7x + 2 = 9x - 2$.

19. $3x + 4 = 45 - x$.

20. $9y + 7y + 5y = 0$.

21. $5z - 7 = 2z + 8$.

22. $9x + 100 = 14x + 95$.

23. $37 - 5x = 3x - 12$.

24. $2y - 3 + 5y = 2y + 2.$
25. $144 - 7x = 19x - 350.$
26. $2a + 6b - 5y = 3a - 4y + 5b.$
27. $3a - 4x = 9a + 6b - 6x.$
28. $8x + 9a + 10b - 13c = 4x + 5a + 6b + 7c.$
29. $2x - 11 + 2x - 5x + 7 = 7x - 7.$
30. $138 - 13x + 35 - 17x = 155 - 3x - 27.$
31. $12(x - 1) = 3x + 24.$

Razr. $12x - 12 = 3x + 24$
$12x - 3x = 24 + 12$
$9x = 36$
$x = 4.$

Presk. $12(4 - 1) = 3 \times 4 + 24$
$12 \times 3 = 12 + 24$
$36 = 36.$

32. $20 - (x - 4) = 2x.$
33. $8 - (2 - y) = 1 - 2y.$
34. $ax + b(x - c) = ac.$
35. $3(x + a) = 5(x - a).$
36. $14x = 1950 - 9(150 - x).$
37. $18(x + 35) = 10(2x + 45).$
38. $15(273x - 55) = 2(825x - 273).$
39. $3(z - 3) + 12 = 33 - 7(z - 10).$
40. $7(x - 4) + 3(x + 1) = 20x - 32.$
41. $4(z - 2) + 3z = 5(z - 3) + 19.$
42. $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32.$
43. $7y - 4(2y - 4) = 20y - 1 - 4(4y + 2).$
44. $3(x + 15) + 5 = 2(2x + 19) + 4(x + 13).$
45. $16 - 3(2x + 65) = 9(x + 33) - 4(x + 37).$
46. $6(x - 2) - 2(3x + 1) = 1 - 4(2x + 3).$
47. $3(x + 1) - 4(x - 1) = 8(2x - 15).$
48. $55(60 - 2y) - 3(y + 2) = 22y + 9(3y + 6).$
49. $5(4z + 5) - 4(z + 5) = 7(5z + 9) - 3 - 8(4 + z).$
50. $7(2y + 28) - 3(y + 21) = 5(2y + 27) - 4(3y + 40).$
51. $8x - 2x(1 - 3x) = (3x - 2) - (2x - 3) + 19.$
52. $(y + 2)(3 - y) = (4 - y)(5 + y) - 22.$
53. $20 + 5[5 - (8 - 2x)] = 7x + 2(3x - 5).$
54. $7(x + 5) - 3[x - 4(3 - x)] - 1 = 5[3 + (2x - 7)] + 60.$
55. $\frac{x}{2} = x - 5.$

Razr. $x = 2x - 10$
$x - 2x = -10$
$-x = -10$
$x = 10.$

Preskušnja. $\frac{10}{2} = 10 - 5$
$5 = 5.$

56. $\frac{y}{16} = \frac{3}{4}.$

57. $\frac{3}{5}y - 36 = 0.$

58. $\frac{3x}{5} + 7 = 16.$

59. $13 + \frac{z}{9} = 11.$

60. $\frac{4}{3}x + 15 = 3.$

61. $7 = \frac{5}{6}x - 3.$

62. $\frac{24}{x+1} = 6.$

63. $\frac{8}{x-1} = 2.$

64. $\frac{5}{3x+2} = 1.$

65. $\frac{6+y}{6-y} = 2.$

66. $\frac{2x+4}{x+15} = 1.$

67. $z - \frac{5z}{6} = 2.$

68. $5y - 28 = \frac{8y}{3}.$

69. $-\frac{2x}{3} + 8 = 0.$

70. $2x - \frac{3x}{5} = 3(x-2).$

71. $\frac{34-7x}{x} = 22 - 9x.$

72. $7x - \frac{4x}{7} + 2(x-1) = 8x + 1.$

73. $3(4x+5) - 6x = 4(2x+5) - \frac{1}{3}(2x-5).$

74. $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2.$

Razr.
$$\begin{aligned} 9(x+3) - 5(x-3) &= 90 \\ 9x + 27 - 5x + 15 &= 90 \\ 9x - 5x &= 90 - 27 - 15 \\ 4x &= 48 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Preskušnja.
$$\begin{aligned} \frac{12+3}{5} - \frac{12-3}{9} &= 2 \\ \frac{15}{5} - \frac{9}{9} &= 2 \\ 3 - 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

75. $x + \frac{ax}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b}.$

76. $\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} = 2a.$

77. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 35 = 3x.$

78. $4 \cdot \frac{11-3x}{2} + 5x = 19.$

79. $\frac{4x-15}{13} + \frac{5x+2}{12} = x.$

80. $\frac{45-x}{3} = x + \frac{21-x}{4}.$

81. $\frac{9-x}{14} - 1 = \frac{x+7}{5} - 2.$

82. $\frac{7(25-2x)}{15} = \frac{4(39-3x)}{11}.$

83. $10\left(\frac{9x}{4} + 13\right) = 60 + \frac{85x}{3}.$

84. $\frac{19-y}{2} + y = \frac{4-y}{3}.$

85. $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}.$

86. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$

87. $\frac{z}{2} + \frac{z-4}{3} - \frac{z-6}{4} = z - 3.$

88. $\frac{6x+3}{3x-4}=\frac{10x+1}{5x-8}$. **89.** $\frac{5x+3}{4}+\frac{3-5x}{4}=1-\frac{x}{6}$.

90. $\frac{8x-1}{3}-12=\frac{7-6x}{2}+10x$.

91. $\frac{7+x}{5}-\frac{10+x}{13}=\frac{4+x}{7}$. **92.** $\frac{z-1}{2}-\frac{3z}{5}=\frac{6z-8}{9}$.

93. $\frac{7x-13}{6}+\frac{7-3x}{8}=\frac{5x-11}{12}-2$.

94. $\frac{4x-2}{3}-\frac{1+3x}{5}=7-\frac{x-4}{2}$.

95. $\frac{x+2}{3}-\frac{4x+5}{6}+\frac{7x-8}{9}=x+2$.

96. $\frac{9+x}{9}-\frac{x-6}{6}-3=10-\frac{8+4x}{5}$.

97. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=x+17$.

98. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}=2x-4$.

99. $x+\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{7x}{8}+49$.

100. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}=\frac{5x}{6}+678$.

101. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x-2}{4}=\frac{2x}{11}-\frac{2-3x}{4}-3$.

102. $(x-1)(x+1)=x^2+x+1$.

103. $3x+\frac{7x-9}{2}=28-\frac{2x-7}{3}+\frac{2x-3}{7}$.

104. $\frac{5x-11}{8}+\frac{7x-5}{6}-\frac{7-5x}{12}=\frac{7x-14}{3}+2$.

105. $\frac{24}{5x-3}-2+\frac{96}{7(5x-3)}=\frac{8}{7}$.

106. $\frac{54}{2x+1}-6=\frac{7(8x+3)}{9(2x+1)}-\frac{9}{7}$.

107. $\frac{4(x-2)}{5}-\frac{2(x-3)}{7}=10-2(x-1)$.

108. $\frac{17x-5}{5(3x+1)}-\frac{7x-3}{3x+1}=1-\frac{13x-1}{2(3x+1)}$.

109. $3a(x-2a)-\frac{19ab}{2}=\frac{5b(x-4b)}{4}$.

110. $\frac{3a(2a-3b)}{2(5a-x)}=\frac{2-b}{3}-\frac{2b(5a+x)}{5a-x}$.

II. Kakó je razreševati jednačbe prve stopinje z več neznankami.

§ 86.

Za določitev dveh ali več neznank je treba prav toliko jednačeb le-té ne smejo biti med seboj v nikakem nasprotji in druga mora biti od druge po polnem nezavisna.

Ako hočemo dve jednačbi z dvema neznankama razrešiti, treba jedno neznanko iztrebiti (*eliminieren*), t. j. napraviti novo jednačbo, katera te neznanke nima. Ta jednačba ima potem le jedno neznanko, katero je môči iz nje določiti; če zamenjamo le-tó v jedni izmed danih jednačeb z nje vrednostjo, dobimo tudi vrednost druge neznanke.

Za iztrebljevanje jedne neznanke rabijo nam posebno trije načini:

1.) Vrednost jedni neznanki se določi iz obeh jednačeb in dobljena izraza se izjednačita. (Primerjalni način, *Comparationsmethode.*) N. pr.:

$$2x + 5y = 26 \ldots 1) \text{ in } 3x - 2y = 1 \ldots 2).$$

Iz 1) dobimo $x = \frac{26 - 5y}{2}$, iz 2) pa $x = \frac{1 + 2y}{3}$;

$$\text{tedaj } \frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3},$$

in odtod $y = 4$. Ako postavimo to vrednost mesto y v 1), dobimo $2x + 5 . 4 = 26$, in odtod $x = 3$.

2.) Vrednost jedni neznanki se določi iz jedne jednačbe in s to se zamenja istą neznanka v drugi jednačbi. (Zamenjalni način, *Substitutionsmethode.*) N. pr.:

$$x + 2y = 8 \ldots 1) \text{ in } 6x - 5y = 14 \ldots 2).$$

Iz 1) dobimo $x = 8 - 2y$. Če zamenjamo neznanko x v drugi jednačbi s to vrednostjo, dobimo

$$6(8 - 2y) - 5y = 14,$$

in odtod $y = 2$. Ako postavimo to vrednost v 1), dobimo $x = 4$.

3.) Neznanki, katera se hoče iztrebiti, priskrbi se v obeh jednačbah jednak koeficijent, kar se doseže, če se pomnoži vsaka jednačba s primernim faktorjem; takó izpremenjeni jednačbi se potem seštejeta ali odštejeta, bodi si da imata ta dva koeficijenta nejednak, bodi si da imata jednak predznak. (Način jednakih koeficijentov, *Methode der gleichen Coëfficienten.*) N. pr.:

$$4x - 3y = 9 \ldots 1) \text{ in } 6x + 5y = 61 \ldots 2).$$

Pomnoživši prvo jednačbo s 3 in drugo z 2, dobimo

$$12x - 9y = 27$$
$$12x + 10y = 122.$$

Odštevši prvo od druge dobimo

$$19y = 95,$$

in odtod $y = 5$. Če zamenjamo s to vrednostjo y v 1), dobimo $x = 6$.

Iste načine upotrebljamo tudi, kadar nam je razrešiti jednačbe s tremi ali več neznankami.

Vzemimo, da so dane n. pr. te-le jednačbe:

$$2x - 3y + 4z = 4 \dots 1)$$
$$3x + y - 5z = 6 \dots 2)$$
$$4x - 2y + 3z = 11 \dots 3).$$

Po primerjalnem načinu dobimo

$$x = \frac{4 + 3y - 4z}{2} \dots 4)$$

$$x = \frac{6 - y + 5z}{3} \dots 5)$$

$$x = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \dots 6).$$

Iz 4) in 5) dobimo $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{6 - y + 5z}{3} \dots 7)$,

iz 4) in 6) dobimo $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \dots 8)$.

Dalje iz 7) $y = 2z \dots 9)$

in iz 8) $y = \frac{3 + 5z}{4} \dots 10)$,

tedaj $2z = \frac{3 + 5z}{4}$ in odtod $z = 1$.

Če postavimo to vrednost mesto z v 9), dobimo $y = 2$, in če postavimo slednjič vrednosti za y in z v 4), dobimo $x = 3$.

Razreši te jednačbe tudi upotrebljujoč za iztrebljevanje primerjalni način in način jednakih koeficijentov.

§ 87.

Naloge za razrešitev.

1. $x + y = a,$
$x - y = b.$

2. $7x - 2y = 12,$
$3x + 2y = 8.$

3. $5x + y = 44,$
$x + 3y = 34.$

4. $7x + 3y = 56,$
$12x - 7y = 11.$

5. $7x + 5y = 41,$
$12x + 7y = 64.$

6. $5x - 3y = 33,$
$2x + 3y = 51.$

7. $15x + 8y = 2,$
$5x + 2y = 23.$

8. $13x - 4y = 19,$
$9x - 5y = 2.$

9. $3x - 4\mathrm{y} = 10,$
$2x + 5y = 22.$

10. $21x + 17y = 97,$
$21x - 19y = 25.$

11. $8x + 5y = 67,$
$5x + 8y = 76.$

12. $51x - 7y = 44,$
$93x - 13y = 48.$

13. $27x + 16y = 452,$
$18x = 88 + 16y.$

14. $15x + 17y = 81,$
$17x + 15y = 79.$

15. $51x = 45 + 19y,$
$15x = 2(21 - 2y).$

16. $20(x - 3) + 5y = y + 4,$
$2(y - 3) = 3(y - x - 2).$

17. $(a + b)x + (a - b)y = a^2 + b^2,$
$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - b^2.$

18. $x + y = 20,$
$\frac{x}{3} = y.$

19. $3x - 33 = y,$
$-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8.$

20. $x - z = 12,$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$

21. $x - y = c,$
$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$

$28 \cdot \frac{1}{8}$

22. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c + d,$
$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = a + b.$

23. $\frac{x - 1}{a} = \frac{1 - y}{b},$
$\frac{x + y}{a^2 + b^2} = \frac{x - y}{a^2 - b^2}.$

24. $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 4,$
$\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 3.$

25. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$
$\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$

$28 \cdot \frac{1}{4}$

26. $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17,$
$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = 27.$

27. $\frac{x + y}{2} - \frac{x + y}{3} = 4,$
$\frac{x - y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1.$

28. $x+y=7,$
$x+z=10,$
$y+z=13.$

29. $x+y=30,$
$3y-2z=25,$
$x-2z=3.$

30. $4x+3y-5z=13,$
$3x-4y+z=2,$
$-2x+7y+3z=11.$

31. $7x-2y+7z=60,$
$3x+4y+2z=60,$
$5x-8y-3z+2=0.$

32. $4x-2y+3z=8,$
$7x+8y-z=59,$
$10x+3y+2z=49.$

33. $x-3y+z=2,$
$20x-y-2z=7,$
$7x+9y-4z=3.$

34. $\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{3}=6,$
$\frac{x+z}{3}+\frac{y+z}{2}=5,$
$2x+2y-5z=6.$

35. $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=13,$
$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{z}{5}=10,$
$3x-y-z=10.$

36. $x+y+z-u=8,$
$x-y+z+u=12,$
$2x+3y+4z+5u=82,$
$12x-5y-2z+2u=25.$

37. $3u+5x+y+2z=35,$
$u+3x+3y+4z=47,$
$4u+3x+y+z=29,$
$2u+4x+2y+3z=41.$

III. Uporaba jednačeb za razreševanje nalog.

§ 88.

Kadar razrešujemo naloge upotrebljujoč jednačbe, pravimo, da jih algebrajsko razrešujemo.

V vsaki nalogi so dani gotovi pogoji in le-tem morajo zadostovati števila, katerih treba iskati. Prvo, kar nam treba storiti, razrešujočim algebrajsko kako nalogo, je, da izrazimo dane pogoje z algebrajskimi znaki, t. j. da jednačbo postavimo (*ansetzen*). Za to nimamo nobenih občnih pravil; bistroumnost in vaja, pridobljena z razrešitvijo mnogih tacih nalog, pokazali nam bosta v vsakem posamičnem slučaji, kakó je po danih pogojih ravnati z neznankami, katere treba določiti, in kakó jih je spraviti v jednačbe.

Razrešitev postavljenih jednačeb dá iskane vrednosti neznank.

Začetnikom svetujemo, da naj skušajo različne naloge, ne postavljajoč jih v jednačbe, na pamet s samim umovanjem razrešiti. Pri prvih nalogah je dana v tem navodu zraven algebrajske razrešitve tudi razrešitev na pamet, pri poznejših pa se prepušča preudarku učencev samih.

Ako se hočemo prepričati, je-li kaka naloga prav razrešena, treba le poiskati, če zadostuje najdena vrednost neznanke tudi res pogojem naloge.

§ 89.

Naloge.

1. Poišči število, katero dá 5krat in 7krat vzeto skupaj 96.

Na pamet. Peterno in sedmerno število dá dvanajsterno število; 96 je tedaj dvanajsterno iskano število, ali iskano število je 12ti del od 96, torej 8.

Algebrajsko. Vzemimo, da je x iskano število; peterno to število je $5x$ in sedmerno $7x$. Po pogojih naloge mora biti tedaj

$$5x + 7x = 96,$$

če to jednačbo razrešimo, dobimo $x = 8$.

Preskušnja. $5 . 8 + 7 . 8 = 40 + 56 = 96$.

2. Katerega števila 5kratnik za 42 povečan dá njega 8kratnik?

Na pamet. Iz 5kratnika dobimo 8kratnik, če dodamo 3kratnik. Če pa dobimo 8kratnik tudi, dodavši 5kratniku 42, potem mora biti 42 jednako trojnemu številu, tedaj iskano število tretji del od 42, t. j. 14.

Algebrajsko. Če je x iskano število, potem je $5x$ njega 5kratnik, $8x$ njega 8kratnik. Prvega treba pa za 42 povečati, da dobimo zadnjega, tedaj $5x + 42 = 8x$, in odtod $x = 14$.

Preskušnja. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112$,
$8 \times 14 = 112$.

3. Katerega števila 9kratnik za 72 zmanjšan dá njega 5kratnik?

Na pamet. Da dobimo iz 9kratnika 5kratnik, treba 4kratnik odšteti. Ker pa dobimo 5kratnik tudi, če zmanjšamo 9kratnik za 72, mora biti 72 4kratnik iskanega števila, število samo tedaj četrti del od 72, torej 18.

Algebrajsko. Ako zaznamenujemo iskano število z x, potem je $9x$ njega 9kratnik, $5x$ njega 5kratnik, tedaj mora biti po pogojih naloge

$$9x - 72 = 5x$$

in $x = 18$.

Preskušnja. $9 \times 18 - 72 = 162 - 72 = 90$,
$5 \times 18 = 90$.

4. Polovica in tretjina nekega števila znašata skupaj 25; koliko je število?

Na pamet. $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{3}$ dasta $\frac{5}{6}$; če pa je $\frac{5}{6}$ iskanega števila 25, potem je $\frac{1}{6}$ le 5ti del od 25, torej 5; število samo tedaj 6krat 5, t. j. 30.

Algebrajsko. Če je x iskano število, potem je njega polovica $\frac{x}{2}$ in tretjina $\frac{x}{3}$, tedaj po pogojih naloge

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

torej $x = 30$.

Preskušnja. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

5. 5kratnik nekega števila je za 86 večji nego sta njega polovica in petina skupaj; katero je to število?

Na pamet. $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{5}$ je $\frac{7}{10}$; 5kratnik iskanega števila je tedaj za 86 večji nego 7krat 10ti del, tedaj 50kratnik za 860 večji nego 7kratnik; 50kratnik je pa za 43kratnik večji nego 7kratnik: odtod izvajamo, da je 860 43kratnik iskanega števila, torej iskano število samo 43ti del od 860, t. j. 20.

Algebrajsko. Če je x iskano število, potem je $5x$ njega 5kratnik, $\frac{x}{2}$ njega polovica in $\frac{x}{5}$ njega petina, tedaj

$$5x - 86 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$

in odtod $x = 20$.

Preskušnja. $5 \times 20 = 100, \quad \frac{20}{2} + \frac{20}{5} = 10 + 4 = 14;$

$$100 - 14 = 86.$$

6. Nekdo, vprašan koliko denarja ima pri sebi, odgovori: ako bi imel še pol tega, kar imam, menj 2 gl., imel bi 16 gl. Koliko goldinarjev ima pri sebi?

Na pamet. Število povečano za njega polovico dá 3 polovice, to treba pa za 2 zmanjšati, da dobimo 16, tedaj morajo biti 3 polovice jednake 18; polovica iskanega števila je tedaj tretjina od 18, t. j. 6, torej število samo 12.

Algebrajsko. Recimo, da ima vprašani x goldinarjev pri sebi, potem je $\frac{x}{2}$ polovica, in po pogojih naloge mora biti

$$x + \frac{x}{2} - 2 = 16,$$

tedaj $x = 12$.

Preskušnja. $12 + \frac{12}{2} - 2 = 12 + 6 - 2 = 16.$

7. Neki popotnik, vprašan, koliko *km* je prehodil, odgovori: ako bi bil 48 *km* več prehodil, prišel bi bil 3krat takó daleč kakor sem. Koliko *km* je popotnik prehodil?

Vzemimo, da je prehodil popotnik x *km.* Ako bi bil prehodil 48 *km* več, prehodil bi bil $x + 48$ *km;* v tem slučaji pa bi bil 3krat takó daleč, tedaj $3x$ *km* daleč prišel; torej $x + 48 = 3x$, in $x = 24$.

Preskušnja. $24 + 48 = 72, \quad 3 \times 24 = 72.$

8. Neki trgovec kupi kos sukna, m po $3\frac{3}{4}$ gl.; potem pa sukno proda m po $4\frac{1}{2}$ gl. Koliko m je imel kos, če je imel trgovec 27 gl. dobička?

Za to nalogo velja zamolčani pogoj, da je dobiček jednak prodajni ceni zmanjšani za kupno ceno.

Vzemimo, da je x število m, potem je

$$\text{prodajna cena za } x\,m = 4\tfrac{1}{2}\,.\,x = \frac{9x}{2},$$

$$\text{kupna cena za } x\,m = 3\tfrac{3}{4}\,.\,x = \frac{15x}{4}, \text{ tedaj}$$

$$\frac{9x}{2} - \frac{15x}{4} = 27,$$

in $x = 36$.

Preskušnja. 36 m po $4\frac{1}{2}$ gl. se je prodalo za 162 gl.,
36 m » $3\frac{3}{4}$ » » » kupilo » 135 »
tedaj je bilo dobička 27 gl.

9. Nekdo, vprašan, koliko je star, odgovori: Čez 10 let bom 2krat toliko star kakor sem bil pred 4 leti. Koliko je star?

Vzemimo, da je x let star, tedaj

bode star čez 10 let $x + 10$,
je bil star pred 4 leti $x - 4$.

Ker pa je po pogojih naloge prvo število 2krat toliko kakor drugo, treba, da dobimo jednačbo, drugo število z 2 pomnožiti; torej

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

in zato $x = 18$.

Preskušnja. Čez 10 let bode star 28 let,
pred 4 leti je bil star 14 let,
in res je $28 = 2\,.\,14$.

10. Neki oče je 32, njegov sin pa 2 leti star; čez koliko let bode oče ravno 3krat toliko star kakor sin?

Recimo čez x let. Čez toliko let bode pa oče $32 + x$, sin $2 + x$ let star, in ker je po pogojih naloge prvo število 3krat toliko kakor drugo, treba, da dobimo jednačbo, drugo število s 3 pomnožiti; tedaj velja

$$32 + x = 3(2 + x);$$

tej jednačbi pa zadostuje vrednost $x = 13$.

Preskušnja. Čez 13 let bode oče 45, sin pa 15 let star, torej oče res 3krat toliko kakor sin.

11. Nekdo hoče denar, kar ga ima ravno pri sebi, med 10 ubožcev razdeliti. Če dá vsacemu 20 kr., ima prav toliko premalo, kolikor ima preveč, če dá vsacemu 18 kr. Koliko krajcarjev ima pri sebi?

Vzemimo, da ima x krajcarjev pri sebi. Ako bi dal vsacemu 20 kr., imel bi $200 - x$ krajcarjev premalo; ako pa dá vsacemu 18 kr., ima $x - 180$ krajcarjev preveč. Ker pa morata te dve števili jednaki biti, dobimo

$$200 - x = x - 180,$$

in $x = 190$.

12. Neki gospodar obljubi svojemu služabniku kot letno plačilo jedno obleko in 90 gl. Čez 3 mesece odpusti služabnika ter mu dá le obleko za plačilo. Za koliko se je obleka zaračunala?

Vzemimo, da je obleka x gl. vredna. Plačilo za celo leto znaša tedaj $x + 90$ goldinarjev, torej plačilo za 3 mesece $\frac{x + 90}{4}$ gl.; ker pa dobi služabnik kot plačilo za ta čas le obleko, katera je x gl. vredna, mora biti

$$x = \frac{x + 90}{4},$$

tedaj $x = 30$ gl.

13. Neki kurir potuje v A ter prehodi 72 *km* na dan; jeden dan pozneje pošlje se za njim drug kurir; koliko *km* treba temu na dan prehoditi, da dohiti prvega v 4 dneh?

Če pomenja x število *km*, katere treba druzemu kurirju na dan prehoditi, potem prehodi le-ta v 4 dneh $4x$ *km*; prvi kurir, kateri je 1 dan več na potu, prehodil bode v tem času $72 \times 5 = 360$ *km*. Ker pa morata oba kurirja prav toliko pota prehoditi, predno se snideta, zarad tega je $4x = 360$, tedaj $x = 90$ *km*.

§ 90.

Kadar sta v nalogi d v e š t e v i l i n e z n a n i, tedaj mora imeti naloga, da je sploh določena razrešitev mogoča, izrekoma ali molče tudi dva pogoja. Vsak teh pogojev dá, z algebrajskimi znaki izražen, jedno jednačbo med obema neznankama. Nalogo je môči razrešiti tudi s pomočjo le jedne jednačbe z jedno neznanko, če se dá jedna teh neznank neposredno z drugo določiti.

Isto velja tudi o nalogah s tremi ali več neznankami.

14. Mislim si dve števili; prvo je za 3 manjše od druzega. Če pomnožim prvo s 4 ter od produkta odštejem 18, dobim drugo. Kateri sta te dve števili?

a) S pomočjo d v e h j e d n a č e b z dvema neznankama. Recimo, da sta x in y neznani števili. Ker je prvo za 3 manjše od druzega, dobimo jednačbo

$$x = y - 3.$$

Vsled druzega pogoja naloge mora dati 4kratnik prvega števila za 18 zmanjšan drugo število, tedaj velja jednačba

$$4x - 18 = y.$$

Če te dve jednačbi razrešimo, dobimo $x = 7$ in $y = 10$.

b) S pomočjo le jedne jednačbe z jedno neznanko. Če je x prvo število, potem je drugo $x + 3$. Tedaj vsled druzega pogoja

$$4x - 18 = x + 3,$$

in odtod $x = 7$; tedaj $x + 3 = 10$.

Preskušnja. Drugo število 10 je res za 3 večje nego 7; dalje je diferenca med 4kratnikom števila 7 in 18 jednaka 10, t. j. druzemu številu.

15. Razstavi 50 takó na dva dela, da bode jeden del za 6 manjši od druzega.

a) Če sta x in y iskana dela, potem je

$$x + y = 50.$$

Ker treba dalje prvi del za 6 povečati, da dobimo druzega, velja jednačba

$$x + 6 = y.$$

Iz teh dveh jednačb pa dobimo $x = 22$, $y = 28$.

b) Če je x manjši del, potem je $50 - x$ večji in po pogojih naloge treba k manjšemu 6 prišteti, da dobimo večjega; tedaj $x + 6 = 50 - x$, in odtod $x = 22$, tedaj $50 - x = 28$.

16. Neki oče je sedaj 2krat toliko star kakor njegov sin; pred 15 leti je bil 5krat toliko star kakor sin. Koliko je star oče in koliko sin?

Vzemimo, da je sin x let star, potem je oče $2x$ let; pred 15 leti je bil torej oče $2x - 15$ in sin $x - 15$ let star. Tedaj velja jednačba

$$2x - 15 = 5(x - 15).$$

Iz te pa dobimo $x = 20$, $2x = 40$. Oče je tedaj 40 in sin 20 let star.

17. Neki deček pravi: jaz in moj oče imava skupaj 60 let; a moja leta so le 4ti del očetovih let. Koliko je star oče, koliko sin?

Recimo, da je star oče x, tedaj sin $\frac{x}{4}$ let, potem imamo

$$x + \frac{x}{4} = 60,$$

tedaj $x = 48$ in $\frac{x}{4} = 12$. Oče je star 48, sin pa 12 let.

18. Trgovec ima dvoj riž, *kg* po 28 kr. in po 35 kr.; ta dvoj riž hoče takó zmešati, da dobode 126 *kg* po 32 kr. *kg*; koliko mora vzeti vsacega riža za to zmes?

Tu velja pogoj, dasiravno se izrekoma ne povdarja, da je zmes toliko vredna, kolikor sta vredni obe sestavini skupaj.

Recimo, da vzame x *kg* po 28 kr. in y *kg* po 35 kr., onda dobimo najprej

$$x + y = 126 \ldots 1)$$

Dalje je, ako s krajcarji računamo,

vrednih x *kg*	po	28 kr.	. . .	$28x$,
» y »	»	35 »	. . .	$35y$,
obe sestavini skupaj			. . . .	$28x + 35y$,
in zmes $(x + y) \,.\, 32$			=	$32x + 32y$;

tedaj

$$32x + 32y = 28x + 35y \ldots 2)$$

Iz jednačeb 1) in 2) pa dobimo $x = 54$, $y = 72$.

Preskušnja.	54 *kg*	po 28 kr.	. . .	1512 kr.
	72 »	» 35 »	. . .	2520 »
	126 *kg*	zmesi	. . .	4032 kr.
	1 »	»	. . .	32 »

Razreši prav takó s pomočjo jednačeb zmesne račune v § 74., nal. 4.— 9.

19. Med tri dečke razdeli nekdo 100 desetic takó, da dobi drugi dvakrat toliko kakor prvi, in tretji 10 desetic več nego polovico tega, kar dobita prvi in drugi skupaj. Koliko desetic dobi vsak deček?

a) S pomočjo treh jednačeb. Vzemimo, do dobé A, B, C po vrsti x, y, z desetic, potem je

$$x + y + z = 100,$$

ker dobi B dvakrat toliko kakor A, velja

$$y = 2x.$$

In ker dobi slednjič C za 10 desetic več nego polovico tega, kar dobita A in B skupaj, imamo

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Razrešivši te tri jednačbe dobimo $x = 20$, $y = 40$, $z = 40$.

b) S pomočjo jedne same jednačbe.

Vzemimo, da dobi	A	x	desetic,
potem »	B	$2x$	»
» »	C	$\frac{x + 2x}{2} + 10$	»

tedaj

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

in odtod $x = 20$.

A	dobi tedaj	$x = 20$	desetic,
B	»	$2x = 40$	»
C	»	$\frac{3x}{2} + 10 = 40$	»

20. Neki deček dá svojemu najstarejšemu bratu polovico svojih orehov menj 8, druzemu bratu polovico ostanka menj 8, tretjemu zopet 8 menj nego polovico sedanjega ostanka in četrtemu tudi 8 menj nego polovico novega ostanka, ostalih 20 orehov pa pridrži za-se. Koliko orehov je imel s prva in koliko jih je dal vsacemu bratu?

Če je imel s prva x orehov, potem jih je dal prvemu bratu $\frac{x}{2} - 8$ in ostalo mu jih je še $x - \frac{x}{2} + 8 = \frac{x}{2} + 8$; drugi brat jih je dobil $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$ in ostalo jih je $\frac{x}{2} + 8 - \left(\frac{x}{4} - 4\right) = \frac{x}{4} + 12$; tretji brat je dobil $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, ostalo pa jih je še $\frac{x}{4} + 12 - \left(\frac{x}{8} - 2\right) = \frac{x}{8} + 14$; od teh je dobil četrti brat $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, tedaj jih je ostalo $\frac{x}{8} + 14 - \left(\frac{x}{16} - 1\right) = \frac{x}{16} + 15$. Ostanek pa znaša 20, tedaj

$$\frac{x}{16} + 15 = 20,$$

in $x = 80$.

Deček je imel tedaj s prva 80 orehov;

prvemu	bratu jih je dal	$\frac{x}{2} - 8 = 32,$
druzemu	» » » »	$\frac{x}{4} - 4 = 16,$
tretjemu	» » » »	$\frac{x}{8} - 2 = 8,$
četrtemu	» » » »	$\frac{x}{16} - 1 = 4.$

§ 91.

Razreši še te-le naloge.

21. Če pomnožim neko število s 3, dobim isto, kakor če k številu 24 prištejem; katero je to število?

22. Katero število ima to svojstvo, da dobiš isto toliko, če je razdeliš s 4, kakor če od njega 30 odšteješ?

23. Katero število je za 23 večje nego vsota iz njega četrtine, petine in šestine?

24. Katero število dá z 8 pomnoženo isto toliko, kakor če prišteješ k njegovemu 3kratniku 25?

25. Od katerega števila je 4kratnik prav tolik, kolikeršen je 6kratnik istega za 8 zmanjšanega števila?

26. Če prištejem k nekemu številu 8 ter to vsoto s 5 razdelim, dobim isti kvocijent, kakor če odštejem od števila 4 in to diferenco s 3 razdelim; katero je to število?

27. Mislim si neko število. Če je pomnožim s 3, k produktu prištejem 8, to vsoto razdelim z 8 in od kvocijenta odštejem 4, dobimo 0; katero število sem si mislil?

28. Ako pomnožiš neko število s 7, od produkta odštéješ 6, ostanek razdeliš s 13 in h kvocijentu prištéješ 6, dobiš število samo; katero je to število?

29. Ako razdeliš neko neznano, za 3 zmanjšano število s 4, h kvocijentu prištéješ 17, dobiš število, ki je za 3 manjše nego 3kratnik neznanke; katera je ta neznanka?

30. Katero število treba prišteti k števci in imenovalci ulomka $\frac{20}{27}$, da dobiš ulomek $\frac{3}{4}$?

31. Katero število treba odšteti od števca in imenovalca ulomka $\frac{17}{20}$, da dobiš ulomek $\frac{5}{6}$?

32. Katero število treba odšteti od števca ulomka $\frac{13}{32}$ in ob jednem k njega imenovalcu prišteti, da dobiš ulomek $\frac{1}{8}$?

33. Katero število treba k 32 prišteti in od 32 odšteti, da sta si vsota in diferenca kakor 11 : 5?

34. Katerega števila 5kratnik je za prav toliko večji nego 20, za kolikor je njega 8kratnik večji nego 44?

35. Če povečaš števec ulomka $\frac{17}{25}$ za neko število in zmanjšaš imenovalec za trojno isto število, dobiš ulomek $\frac{5}{4}$; katero je to število?

36. Od katerega števila so $\frac{3}{4}$ za 2 manjše nego $\frac{2}{5}$ dvojnega števila?

37. S katerim številom treba 230 razdeliti, da dobiš 13 za kvocijent in 9 za ostanek?

38. Razstavi število 100 takó na dva dela, da bode jeden za 35 večji od druzega.

39. Razstavi število 85 takó na dva dela, da si bosta dela v takem razmerji kakor 8 : 9.

40. Dva trgovca imata skupaj 505 gl. dobička; ta dobiček jima je takó razdeliti, da bode A 25 gl. menj dobil nego B; koliko dobi vsak?

41. Neki učitelj odgovori na vprašanje, koliko ima učencev: polovica mojih učencev je za 16 večja nego šestina in devetina. Koliko učencev ima učitelj?

42. Nekdo je bil pred 8 leti 4krat toliko star kolikor znaša 5ti del njegove sedanje starosti; koliko je sedaj star?

43. Nekdo, vprašan, koliko je star, odgovori: čez 12 let bodem 4krat toliko star kakor sem bil pred 12 leti. Koliko je star?

44. Neki oče pravi: jaz sem sedaj 40 let star, moj starejši sin 16, moj mlajši sin 3 leta; čez koliko let bosta imela moja sinova skupaj toliko let kakor jaz?

45. Nekdo je 60 let, njegov sin pa 24 let star; *a)* pred koliko leti je bil oče 4krat toliko star kakor sin? *b)* čez koliko let bode dvakrat toliko star kakor sin?

46. *A* in *B* hočeta uro kupiti. *A* ima le $\frac{1}{4}$, *B* le $\frac{1}{7}$ tega, kar se za uro zahteva; oba skupaj imata $16\frac{1}{2}$ goldinarja. Koliko se zahteva za uro?

47. Kmetska deklica, vprašana, koliko jajec ima v jerbasu, odgovori: $\frac{3}{4}$ so za 5 večje nego $\frac{5}{8}$. Koliko jajec je imela v jerbasu?

48. Koliko *l* vina po 36 kr. treba zmešati s 30 *l* po 48 kr., da bode *l* zmesi 40 kr. vreden?

49. Za neki državni dolg se plačuje na leto $1\frac{1}{2}$ milijona goldinarjev obrestij; od $\frac{1}{3}$ plačuje se 5 % in od $\frac{2}{3}$ $4\frac{1}{2}$ % obrestij. Kolik je ves državni dolg?

50. Dva kurirja odpotujeta iz *A* v *B*; prvi prehodi vsak dan 70 *km*, drugi 105 *km*. V koliko dneh bode drugi prvega došel, če je 4 dni pozneje iz *A* odpotoval nego prvi?

51. Od *B* se pelje proti *C* poštni vlak, kateri preteče vsako uro 24 *km*; istodobno se odpelje brzovlak v isto mer iz mesta *A*, katero je 36 *km* zadaj za *B*, in dohiti poštni vlak v 3 urah; koliko *km* preteče brzovlak v 1 uri?

52. Ob 7ih zjutraj se odpelje z Dunaja po zahodni železnici poštni vlak, ob 9ih zjutraj pa brzovlak; kedaj bode dohitel brzovlak poštni vlak, če preteče prvi vsako uro 42, zadnji pa 26 *km*?

53. Za kurirjem, kateri je iz *A* pred 6 dnevi odpotoval in kateri prehodi vsak dan 6 milj, pošlje se iz *B*, skoz katero mesto je šel, drug kurir, kateri prehodi po 10 milj na dan; v koliko dneh bode dohitel prvega, če znaša razdalja med *A* in *B* 11 milj?

54. Iz *A* gre v 356 *km* oddaljeno mesto *B* kurir, kateri prehodi 56 *km* na dan; istodobno odpotuje iz *B* v *A* drug kurir, kateri prehodi 52 *km* na dan; kedaj in v kateri razdalji od *A* se bosta ta dva kurirja srečala?

Pot, ki ga oba dva prehodita do tistega časa, ko se srečata, jednaka je razdalji med *A* in *B*.

55. Ako bi imel A 120 gl. več, imel bi prav toliko več kakor 100 gl., kolikor ima sedaj menj; koliko goldinarjev ima A?

56. Ako vzamemo od neke vsote polovico, od ostanka zopet polovico in od novega ostanka tudi polovico, ostane še 37 gl.; kolika je bila prvotna vsota?

57. Več oseb hoče z jednakimi doneski neko srečko kupiti. Če dá vsaka oseba 7 gl., potem spravijo 4 gl. več skupaj nego srečka velja; če pa dá vsaka oseba 6 gl., potem pride 16 gl. premalo skupaj; *a)* koliko je oseb, *b)* koliko velja srečka?

58. Od 62 *m* sukna se ga nekaj odproda, in sicer je pri vsacem *m* $\frac{2}{5}$ gl. dobička; pri prodaji ostanka pa je pri vsacem *m* $\frac{3}{16}$ gl. izgube. Koliko *m* se je prodalo z dobičkom in koliko z izgubo, če je bilo 15 gl. čistega dobička?

59. Železniški vlak je potreboval $4\frac{1}{2}$ ure, da je predirjal neko daljavo; potreboval pa bi bil le $3\frac{1}{3}$ ure, če bi bil pretekel vsako uro $9\frac{4}{5}$ *km* več; koliko *km* je predirjal vsako uro in kolika je bila daljava?

60. Vsota dveh števil je 47, njiju diferenca pa 9; kateri sta te dve števili?

61. Kateri dve števili dasta 81 za vsoto in 35 za diferenco?

62. Polovica vsote dveh števil je 90 in dvojna diferenca 100; kateri sta te dve števili?

63. Dve števili, katerih diferenca je 12, sta taki, da je 3kratnik prvega jednak 5kratniku druzega; kateri sta te dve števili?

64. Razmerje med dvema številoma je 4 : 5. Če povečaš manjše za 12 in zmanjšaš večje za 12, potem sta si rezultata kakor 5 : 4; kateri sta te dve števili?

65. Razstavi število 104 takó na dva dela, da bode razlika teh dveh delov jednaka $\frac{1}{3}$ razlike med celim številom in večjim delom.

66. Sredi maja je nekje dan za 6 ur 15 minut daljši od noči; kakó dolg je ondi dan in kakó dolga noč?

67. A ima v dveh mošnjah skupaj 206 gl., in sicer v prvi 44 gl. več nego v drugi; koliko ima v vsaki?

68. Razstavi število 32 takó na tri dele, da bode prvi za 5, drugi za 3 večji nego tretji; kateri so ti trije deli?

69. Razstavi število 48 takó na tri dele, da si bodo ti deli kakor 4 : 5 : 7.

70. Trem osebam treba 360 gl. takó med seboj razdeliti, da bode dobil A dvakrat toliko kakor B in C trikrat toliko kakor A; koliko bode dobila vsaka oseba?

71. Tri osebe razdele 350 gl. med seboj, in sicer takó, da dobi *B* 18 gl. več kakor *C* in *A* 14 gl. več kakor *B*; koliko dobi vsak?

72. Dva brata imata sedaj skupaj 47 let. Pred 10 leti je bil starejši brat dvakrat toliko star kakor mlajši; koliko je star vsak izmed njiju?

73. Oče, ki je 25 let starejši od sina, bode čez 5 let dvakrat toliko star kakor njegov sin; koliko je star *a)* oče, *b)* sin?

74. Neki oče je sedaj trikrat toliko star kakor njegov sin, čez 12 let bode pa le dvakrat toliko star kakor sin; koliko je star oče, koliko sin?

75. Razstavi število 76 takó na dva dela, da bode, če razdeliš večjega z 11 in manjšega s 7, vsota teh kvocijentov 8; katera sta ta dva dela?

76. Dve osebi imata skupaj 3500 gl.; ako bi dal *B* *A*-u 150 gl. od svojega imetka, imela bi oba jednako; koliko ima vsak?

77. Poišči tri števila, ki imajo to svojstvo, da je vsota prvemu in druzemu 38, prvemu in tretjemu 43, druzemu in tretjemu 31.

78. 140 gl. treba med 5 oseb takó razdeliti, da dobi vsaka naslednja 4 gl. menj nego poprejšnja; koliko dobi vsaka oseba?

79. Na mizi leži nekaj denarja. *A* pravi: jaz imam 2krat toliko denarja; *B*, jaz imam 3krat toliko denarja; *C*, jaz imam le na pol toliko, kolikor imata *A* in *B* skupaj. Vsi skupaj imajo 240 gl.; koliko denarja je na mizi in koliko ima vsak?

80. 1200 gl. treba med tri osebe takó razdeliti, da bode dobila druga 3krat toliko kakor prva menj 20 gl., tretja 4krat toliko kakor druga in še 20 gl.; koliko bode dobila vsaka oseba?

81. Od 3700 gl. dobi *A* 2krat toliko kakor *B*, *B* 3krat toliko kakor *C*, in *C* 400 gl. menj nego *D*; koliko dobi vsaka oseba?

82. Izmed dveh igralcev je imel *A* 4krat toliko denarja kakor *B*. Izgubivši pa *B*-u 5 gl. imel je *A* le še 3krat toliko kakor *B*. Koliko denarja je imel vsak v začetku igre?

83. V neki družbi je 88 oseb, gospodov in gospá, in sicer je razmerje med številom gospodov in gospá 5 : 6. Koliko gospodov in koliko gospá je v družbi?

84. V neki družbi je bilo 3krat toliko gospodov kakor gospá; pozneje pa so prišli še 3 gospodje s 4 gospémi in potem je bilo dvakrat toliko gospodov kakor gospá; koliko gospodov in gospá je bilo s prva v družbi?

85. V neki družbi je bilo 2krat toliko možkih kakor žensk; ko je pa 6 gospodov s svojimi gospémi odšlo, ostalo je 5krat toliko možkih kakor žensk; koliko možkih in koliko žensk je bilo s prva v družbi?

86. Nekdo ima dve zlati tabačnici; jedna je vredna le $\frac{5}{8}$ od druge in zarad tega stane tudi 15 gl. menj; koliko velja vsaka?

87. Mislim si dve števili, kateri sta za 1 različni. Če razdelim večje s 4 in manjše s 5, potem sta tudi kvocijenta za 1 različna; kateri sta te dve števili?

88. Mislim si 2 števili, katerih diferenca je 10; če odštejem manjše od 105 in večje od 135, sta si ostanka kakor 7 : 9; kateri sta te dve števili?

89. Vsota števcu in imenovalcu nekega ulomka je 16; če povečaš prvega za 2 in zmanjšaš druzega za 2, dobiš obrneni ulomek; kakó se zove dani ulomek? (To nalogo razreši z jedno neznanko.)

90. Neki igralec izgubi v prvi igri 6 gl. menj nego $\frac{1}{4}$ svojega denarja, v drugi igri 2 gl. več nego $\frac{1}{6}$ ostanka, v tretji igri 8 gl. več nego $\frac{1}{7}$ tega, kar mu je po drugi ostalo, in sedaj ima 28 gl.; koliko je imel s početka?

91. Dve osebi imata vsaka nekaj denarja. Če dá A B-u 4 gl., imata obe jednako; če dá pa B A-u 5 gl., potem ima A dvakrat toliko kakor B; koliko denarja ima A, koliko B?

92. Nekdo ima dva polna soda vina; če vzame iz prvega 40 l in iz druzega 80 l, ostane v obeh jednako; če pa vzame iz prvega 80 l in iz druzega 40 l, potem ostane v druzem sodu 3krat toliko vina kakor v prvem; koliko vina je v vsakem sodu?

93. Nekdo ima tri sode; izmed teh drži prvi 98 l menj nego dvakrat toliko kakor tretji. Če pa napolni drugi prazni sod iz prvega polnega, ostane v tem le $\frac{1}{5}$ njegove vsebine; če pa napolni tretji prazni sod iz druzega polnega, ostane v druzem le $\frac{1}{5}$ njegove vsebine; koliko l drži vsak sod?

94. Kámen pokriva le-tá slovečega prah Diofanta,
    V znanosti mojstra kažóč dôbe njegove dolgost.
Dečku učakati dal je Stvarnik življenja šestino,
    Dnij on dvanajsti je dél svojih mladenič bil zván.
Zopet sedmina vbeží, ko najde življenja družíco,
    Pet ko preteče še lét, drag porodi se mu sin.
Dôbe očetove sin samó polovico doseže,
    Naglo roditelju v gròb pahne brezčutna ga smrt.
Štiri še leta po njem v glôboki je žalosti plákal;
    Zdaj pa starost povéj, koje učakal je sam.

Kazalo.

Prvi oddelek.

O algebrajskih številih.

Drugi oddelek.

Tretji oddelek.

Četrti oddelek.

Peti oddelek.

Šesti oddelek.