

PRESEK LETNIK 48 (2020/2021) ŠTEVILKA 2

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

2



# PRESEK



- GOTSKA OKNA
- LITTLLOV ZAKON
- LEBDEČA VRTAVKA
- SOLAROGRAFIJA
- EKSPONENTNE VRAGOLIJE

ISSN 0351-6652



# Vpogled v črno škatlo



→ Pogosto se v pogovorih o matematiki pojavi beseda algoritem, to je postopek, ki v nekaj zaporednih korakih reši zadano nalogo. Dobro znana primera sta množenje in deljenje s pomočjo svinčnika in papirja. Algoritmi so lahko zelo koristni, a moramo dobro poznati njihovo delovanje, če želimo, da dajo pravičen rezultat. Zadnja leta se

namreč ustvari in širi zelo veliko podatkov, ki jih uporabljajo na občutljivih področjih, kot so najemi, posojila in zdravstvo. Ljudje občutimo končne odločitve algoritmov, ne vemo pa, s pomočjo katerih podatkov in na kakšen način so algoritmi do teh odločitev prišli. Lahko si predstavljamo, da so bile odločitve sklenjene glede na vsebino zaprte črne škatle. Matematiki in mnogi drugi zahtevajo večjo odprtost in odgovornost, ki bi omogočila analizo algoritmov in prepoznala različne oblike pristranskosti (glede na raso, spol, starost in etnično pripadnost).

Raziskovalci imajo več predlogov, kako zagotoviti pravičnost. Eden od predlogov zahteva od razvijalcev algoritmov, da v naprej dokažejo, da algoritmi niso pristranski, ne pa da se od uporabnikov pričakuje, da sami odkrijejo nepravilnosti. Spet drugi predlog uporablja tehnike iz sociologije, recimo, zahteva odgovore na vprašanja oblike Bi isto osebo zaposlili, tudi če bi bila druge rase? Ne glede na metodo in sprejeta pravila so cilj raziskovalcev transparentni algoritmi, pri katerih razlaga odločitve na bo temeljila na stavku Ker se je tako odločila umetna inteligenca.

Več o tej temi si lahko preberete v knjigi Cathy O'Neil iz leta 2016 z naslovom *Weapons of Math Destruction: How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy*. × × ×



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 2

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

**Dopisi in naročnine:** DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [info@dmfa-zaloznistvo.si](mailto:info@dmfa-zaloznistvo.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2020/2021 je za posamezno naročnika 22,40 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA-založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1100 izvodov

© 2020 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 2119

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudno in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte [info@dmfa-zaloznistvo.si](mailto:info@dmfa-zaloznistvo.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Vpogled v črno škatlo

## MATEMATIKA

- 4-7 Gotska okna  
(Peter Legiša)
- 8-11 Littlev zakon  
(Gašper in Mateja Mrmolja)

## FIZIKA

- 12-15 Lebdeča vrtavka  
(Andrej Likar)
- 18-20 Lebdeči magnet  
(Andrej Likar)

## ASTRONOMIJA

- 21-24 Solarografija  
(Krištof Skok)

## RAČUNALNIŠTVO

- 25-30 Eksponentne vragolije  
(Simon Čopar)

## RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka  
(Marko Bokalič)
- 24 Rešitev nagradne križanke Presek 48/1  
(Marko Bokalič)
- 30-31 Naravoslovna fotografija - Naravna uklonska mrežica  
(Aleš Mohorič)

## TEKMOVANJA

- priloga Izbirno tekmovanje za evropsko spletno olimpijado
- priloga Šolsko tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole

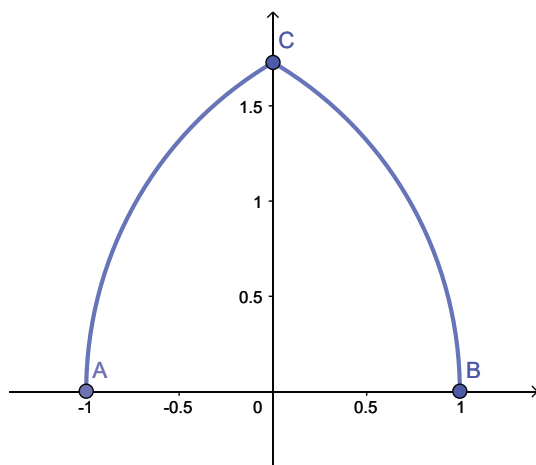
**SLIKA NA NASLOVNICI:** Svetlobni senzorji digitalnih fotoaparátov so občutljivi tudi v bližnji ultravijolični in infrardeči svetlobi, zato imajo pred senzorjem vgrajen filter, ki prepušča predvsem vidno svetlobo. Z odstranitvijo tega filtra, ki ni enostaven poseg, pa lahko s fotoaparátom zajemamo slike v širšem spektru. Z različnimi filtri na objektivu lahko fotografiramo le na zelenem spektralnem območju. Fotografija na naslovnici je bila posneta s filtrom, ki prepušča le infrardečo svetlobo z valovno dolžino nad 950 nanometri. Pokrajina ni prekrita s snegom, le odbojnost zelenih rastlin je v infrardečem območju velika, zato je vse s soncem osvetljeno rastje videti belo. Foto: Andrej Guštin

# Gotska okna



PETER LEGIŠA

→ Pred leti je avtor tega članka v *Obzorniku za matematiko in fiziko* objavil kratko poročilo o zanimivi knjigi z naslovom *Geometry Civilized* [1]. Knjigo je napisal ameriški zgodovinar znanosti z dobrim znanjem klasične geometrije, zbiratelj elementarnih geometrijskih problemov. V knjigi imamo ogromno zapisov in ilustracij o uporabi geometrije v različnih civilizacijah in tudi kar nekaj matematike. Avtor poleg množice druge snovi obravnava načrte gotških oken – idealizirano, kot bi bila sestavljena iz daljic in krožnih lokov.

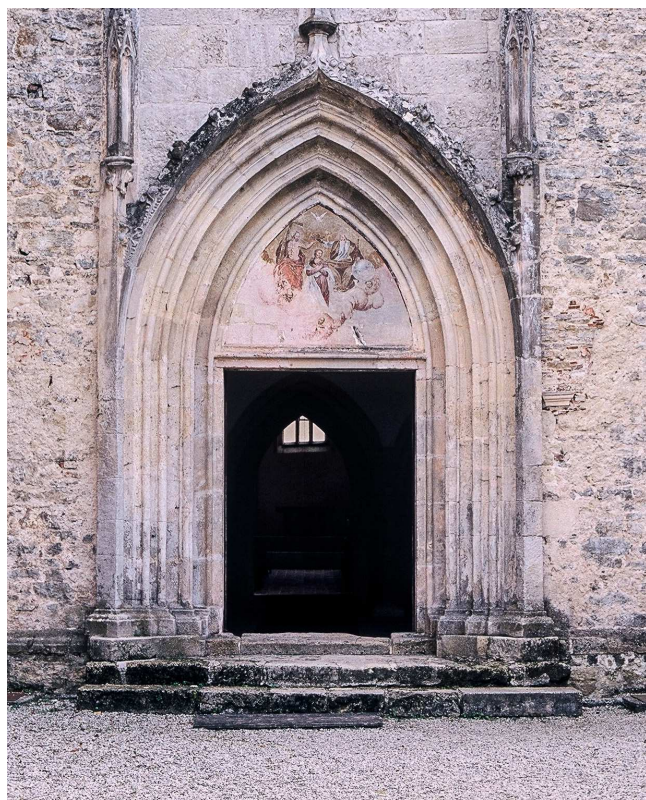


SLIKA 1.

Enakostranični gotški lok

Eden osnovnih elementov takih oken je na sliki 1. Imamo daljico  $AB$ . Narišemo krožni lok s središčem v točki  $A$  skozi  $B$  in krožni lok s središčem v točki  $B$  skozi  $A$ . Oba loka se sekata v  $C$ . Trikotnik  $ABC$  je enakostraničen, zato knjiga sestav lokov  $AC$  in

$BC$  imenuje *enakostranični gotški lok*. Daljica  $AB$  je osnovnica tega loka. Take loke imamo na portalu v Pleterjeh (slika 2) iz leta 1420. Portal je preživel požig samostana v turškem vpadu leta 1471.



SLIKA 2.

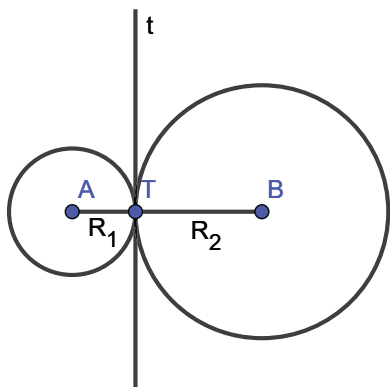
Stara gotška cerkev v Pleterjeh

Ta osnovni element lahko zapolnimo s krožnicami, z dodatnimi manjšimi gotškimi loki, ki se dotikajo. Dobimo lahko lepe vzorce in priložnost za razne geometrijske naloge. Te so sestavili in tako ali drugače rešili srednjeveški mojstrski gradbeniki, ki

so zlasti v zgodnjem obdobju združevali znanje geometrije, arhitekture, gradbeništva in kamnoseštva. Njihova imena so se praktično vsa izgubila. Ostali so le kamnoseški znaki na elementih katedral – neka-kšni podpisi mojstrov. Katedrale so gradile skupine obrtnikov, ki so se večkrat selile z enega gradbišča na drugo, ko je zmanjkalo denarja ali pa je bilo potrebno počakati, da se apnena malta dovolj strdi, da so lahko nadaljevali v višino. Brez velike podpore (in večkrat tudi prostovoljnega dela) prebivalstva pa take množice čudovitih stavb v (menda mračnem) srednjem veku ne bi bilo mogoče uresničiti.

Spomnimo se nekaj dejstev iz geometrije. Dve krožnici s središčema  $A$  in  $B$  se dotikata v točki  $T$ , če imata v  $T$  skupno tangento  $t$ . Na slikah 3 in 4 imamo dva načina dotikanja. Točka  $T$  je potem edina skupna točka obeh krožnic. Ker sta daljci  $AT$  in  $BT$  obe pravokotni na  $t$ , sta kolinearni:

Središči dotikajočih se krožnic in njuno dotikalnišče ležijo na isti premici.



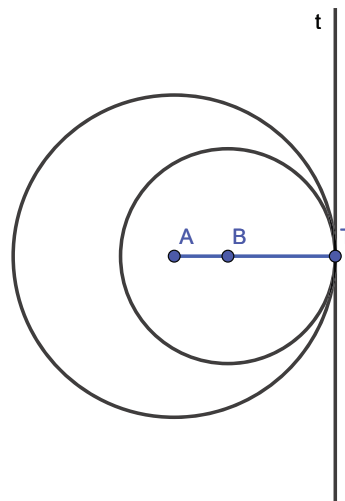
SLIKA 3.

Razdalja med središčema  $A$  in  $B$  dotikajočih se krožnic je enaka vsoti polmerov.

Za nas je posebej pomembno naslednje dejstvo:

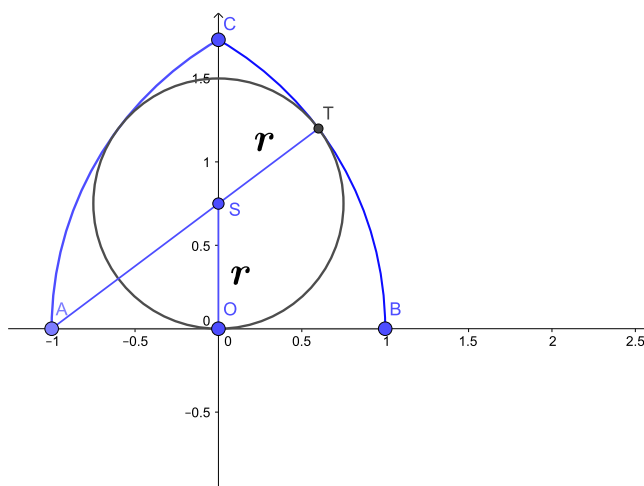
Razdalja med središčema dotikajočih se krožnic je enaka: a) vsoti polmerov, če se krožnici dotikata od zunaj in b) razliki polmerov, če se dotikata od znotraj.

Včrtajmo enakostraničnemu gotskemu loku z dodano osnovnico  $AB$  dolžine 2 krožnico s središčem  $S$  kot na sliki 5. Kolikšen je njen polmer  $r$ ? Ker se ta krožnica in krožni lok od  $B$  do  $C$  (ki ima polmer 2) dotikata, je razdalja središč enaka razliki pol-



SLIKA 4.

Razdalja med središčema  $A$  in  $B$  dotikajočih se krožnic je enaka razliki polmerov.



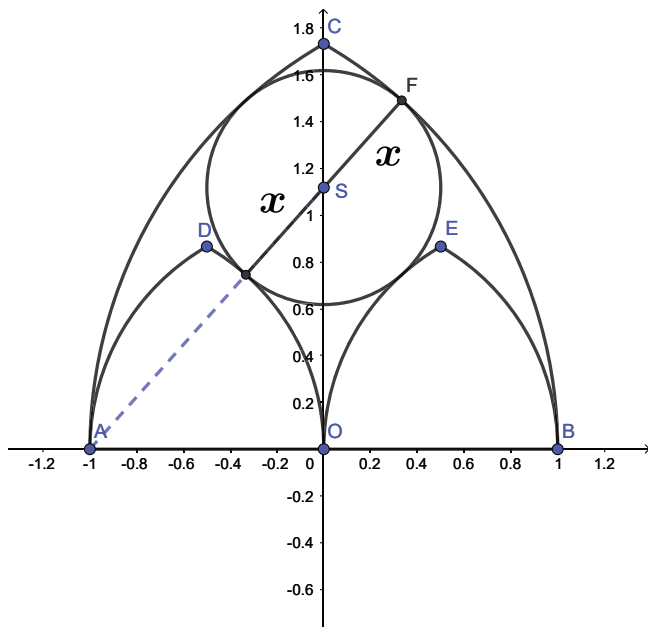
SLIKA 5.

merov, torej  $d(A, S) = 2 - r$ . Enako vidimo, da je  $d(B, S) = 2 - r$ . To pomeni, da  $S$  leži na simetrali daljice  $AB$ . (To je jasno tudi iz simetrijskih razlogov.) Naj bo  $O$  središče daljice  $AB$ . Trikotnik  $AOS$  je pravokoten, zato je po Pitagorovem izreku

$$1 + r^2 = (2 - r)^2 = 4 - 4r + r^2.$$

Od tod je  $4r = 3$  in  $r = 3/4$ .





SLIKA 6.

Oglejmo si zdaj malo bolj zapleten primer na sliki 6. Spet je  $d(A,B) = 2$ . Tu imamo tri enakostranične gotske loke in krožnico  $K$  s polmerom  $x$  in središčem  $S$ . Ker se  $K$  in lok  $BC$  s središčem  $A$  dotikata od znotraj, je  $d(A,S) = 2 - x$ . Ker se  $K$  in lok  $OD$  dotikata od zunaj, je  $d(A,S) = 1 + x$ . Iz  $2 - x = 1 + x$  dobimo  $x = 1/2$  in  $d(A,S) = 3/2$ . Naj bo  $d(O,S) = y$ . Iz pravokotnega trikotnika  $AOS$  dobimo  $1 + y^2 = 9/4$  in od tod  $y = \sqrt{5}/2$ . Ta vzorec najdemo v Franciji: v ostankih samostana Saint Jean des Vignes v kraju Soissons in z mnogo dodatnega okrasja v palači Palais Synodal v burgundskem mestu Sens. Tudi slovensko gotsko okno na sliki 7 ima v osnovi ta vzorec.

Še bolj zapleten je primer okna na sliki 8. Tu imamo v enakostraničnem gotskem loku z osnovnico  $AB$  dolžine 2 spodaj štiri podobne manjše loke z osnovnico  $1/2$ . Naša prva naloga je določiti polmer  $a$  krožnice, ki se dotika dveh malih gotskih lokov na desni in loka  $BC$ .

Vemo:  $d(A,S) = 2 - a$ ,  $d(B,S) = d(O,S) = \frac{1}{2} + a$ . Točka  $S$  torej leži na simetrali daljice  $OB$ . Označimo z  $E$  razpolovišče daljice  $OB$ . Označimo  $d(E,S) = z$ .



SLIKA 7.  
Gotsko okno

Iz pravokotnega trikotnika  $OES$  ugotovimo:

$$z^2 = (d(O,S))^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 - \frac{1}{4} = a^2 + a.$$

Iz pravokotnega trikotnika  $AES$  pa sledi

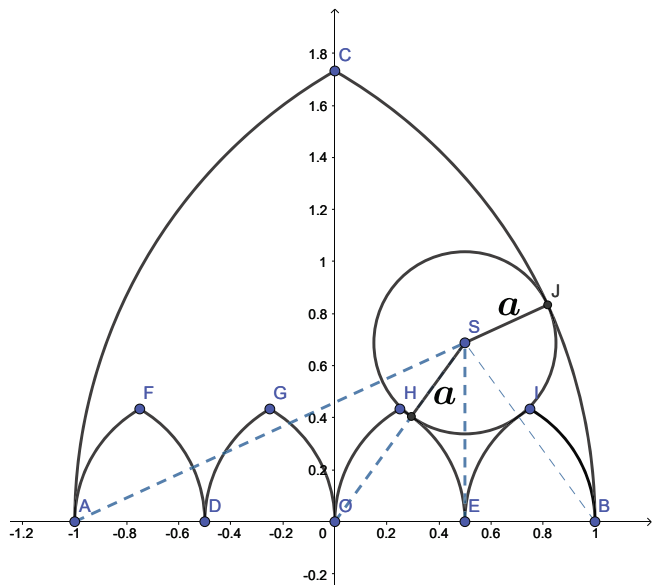
$$z^2 = (2 - a)^2 - \frac{9}{4} = a^2 - 4a + \frac{7}{4}.$$

Če oba izraza izenačimo, dobimo  $5a = 7/4$  in od tod

$$a = 7/20 = 0,35.$$

Izračunamo lahko še

$$d(E,S) = z = \frac{3}{20}\sqrt{21}.$$



SLIKA 8.

S slike 9 je jasno, da bo točka  $T$  na  $OC$ . Označimo  $d(O, T) = y$ . Točka  $L$  je pravokotna projekcija točke  $S$  na daljico  $OC$ . V pravokotnem trikotniku  $SLT$  je  $d(S, T) = a + x = x + 7/20$  in  $d(L, T) = y - z$ .

Pitagorov izrek da

$$\left(x + \frac{7}{20}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{20}\sqrt{21}\right)^2.$$

Iz pravokotnega trikotnika  $OBT$  pa dobimo  $1 + y^2 = (2 - x)^2$  ali

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

Če to nesemo v prvo enačbo, dobimo

$$\left(x + \frac{7}{20}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{3}{20}\sqrt{21}\right)^2.$$

To ni lepa enačba.

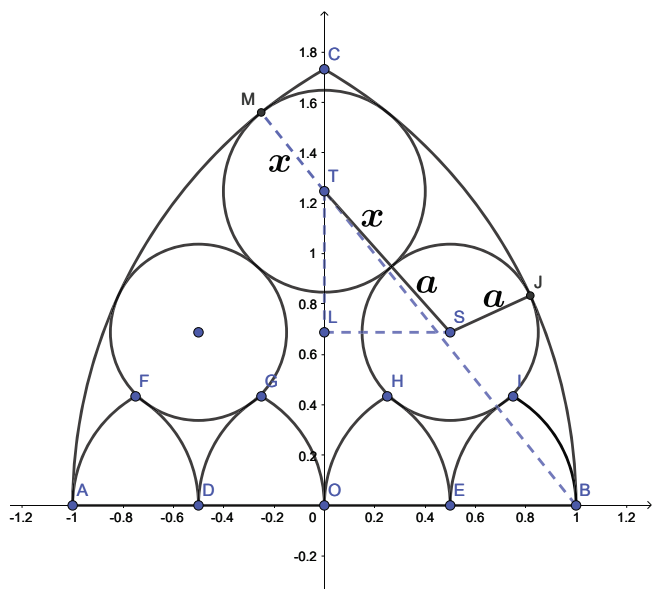
Polmer  $x$  zgornjega kroga lahko ocenimo, če upoštevamo, da so točke  $M, T, S, B$  skoraj kolinearne. Tako je  $2x + 2a + 0,5 \approx 2$ . Če upoštevamo, da je  $a = 0,35$ , dobimo  $x \approx 0,4$ . Vrednost 0,4 kot rešitev je navedena v knjigi. Študent, ki je ta vzorec predstavil na seminarju, je verjel knjigi in majhni sliki v njej. Avtor tega članka je opazil, da ni razloga, da bi bile te točke kolinearne (kot trdi knjiga). Doma je s svinčnikom in papirjem dobil pravo vrednost

$$x = \frac{81}{202},$$

ki se le minimalno razlikuje od 0,4. Računi so bili sicer elementarni, a zoprni in jih ne bomo navajali. (Znebiti se je bilo treba korenov. Poskusite to narediti sami.) Študent je po opozorilu izpeljal enačbe, jih udobno rešil s programom *Mathematica* za simbolično računanje in dobil pravilni rezultat  $x = 81/202$ . V Geogabri lahko narišemo funkciji na levi in desni strani »grde« enačbe in poiščemo presečišče grafov, ki je pri  $x = 0,4009900990\dots$

### Literatura

- [1] J. L. Heilbron *Geometry Civilized, History, Culture, and Technique*, Clarendon Press, Oxford 2000.



SLIKA 9.

Prezrcalimo zdaj to krožnico čez simetralo  $OC$  okna. Naša nadaljnja naloga je konstruirati krožnico  $K$  s polmerom  $x$  in s središčem  $T$ , ki se dotika obeh ravno dobljenih krožnic in lokov  $AC$  ter  $BC$ .

× × ×

# Littlov zakon



GAŠPER IN MATEJA MRMOJLA

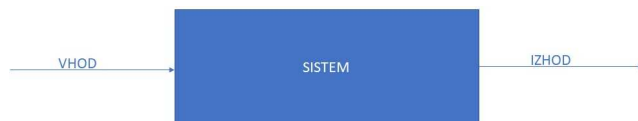
→ Verjetno ste se že znašli v situaciji, ko se vam je mudilo, hkrati pa ste bili zelo lačni. Vseeno ste imeli ravno dovolj časa, da zavijete v najbližjo restavracijo s hitro prehrano. V restavraciji ste želeli, da vas postrežejo čim hitreje, da bi lahko pohiteli po nadaljnjih opravkih. V današnjem času, ko se nam ves čas mudi, je odzivnost in kakovost postrežbe zelo pomembna. Tega se zavedajo tudi lastniki restavracij. Da bi si zagotovili svoj donos, morajo med drugim poskrbeti tudi za pretočnost ljudi v restavraciji z dobro organizacijo dela zaposlenih in arhitekturo prostora.

Poglejmo si primer restavracije, ki je odprta od 10h do 16h in je v enem dnevu postregla 120 obiskovalcev. Ali lahko izračunamo, koliko časa v restavraciji v povprečju preživi posamezni obiskovalec? Brez dodatnih podatkov tega ne moremo.

Za začetek si zato oglejmo primer, ko je v restavraciji ves čas deset obiskovalcev. Recimo, da pridejo hkrati in hkrati tudi odidejo, takrat pa pride novih deset obiskovalcev (torej na način, da se medsebojno izmenjujejo).

Potemtakem lahko sklepamo, da mora biti izmen  $\frac{120}{10} = 12$ , torej, da vsak obiskovalec v restavraciji preživi  $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  ure.

Naš problem lahko predstavimo tako, da ga razdelimo v tri faze (glej sliko 1): vhod, sistem in izhod. Pri zgoraj opisanemu problemu je vhod količina obiskovalcev, ki prihajajo v restavracijo, sistem je naša restavracija, kjer opazujemo dogajanje, izhod pa je količina obiskovalcev, ki je enaka vhodni.



SLIKA 1.

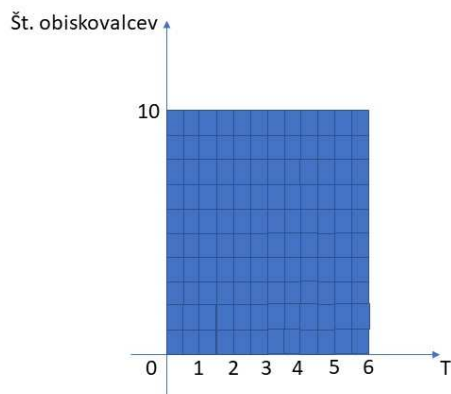
Schema zastavljenega problema

Uporabimo prejšnji premislek in vpeljimo nekaj notacije za splošne podatke. Z  $N$  označimo točno število obiskovalcev v enem dnevu (v našem primeru je to 120). Z oznako  $T$  označimo celotni čas, ko je restavracija odprta. Če se odpre ob 10h in je odprta do 16h, je naš  $T$  enak šest ur; vse skupaj lahko zapišemo v časovni okvir  $[0, T]$ , torej  $[0, 6]$ . Predpostaviti pa moramo, da v trenutkih 0 in  $T$  v restavraciji ni obiskovalcev (oz. je natanko nič obiskovalcev). Veljati mora tudi, da restavracijo zapusti enako število obiskovalcev, kolikor jih je vstopilo vanjo. To enostavno pomeni, da v restavraciji nihče od obiskovalcev ne »ponikne«.

Če je v restavraciji (sistemu) hkrati  $L$  strank, mora biti izmen  $\frac{N}{L}$ , torej vsaka traja  $W = \frac{T}{\frac{N}{L}} = \frac{L \cdot T}{N} = \frac{L}{\lambda}$ , oz.  $L = \lambda W$ .

To lahko sedaj ponazorimo tudi geometrijsko. Naradimo stolpčni diagram, ki nam prikaže število obiskovalcev v restavraciji v trenutku  $t$ , kjer  $t$  preteče časovni interval  $[0, T]$ . Naj bo  $t = 1$  prva ura odprtja restavracije,  $t = 2$  druga ura odprtja restavracije in tako dalje.  $L$  naj označuje število obiskovalcev, ki so hkrati v restavraciji (ves čas enako),  $\lambda$  število obiskovalcev na uro,  $W$  pa čas, ki ga posamezni obiskovalec preživi v restavraciji (spet za vse enak). Ker se v restavraciji izmenjuje deset obiskovalcev, lahko izmene grafično prikažemo kot na sliki 2. Na sliki vsak pravokotniček oz. celica predstavljata obisk gošta.





SLIKA 2.

Število obiskovalcev v restavraciji

Geometrijski prikaz lahko služi tudi za alternativno rešitev problema. Za ta namen grafikon na sliki 2 preuredimo v dveh korakih, tako kot kaže slika 3.

Vsi trije grafikoni imajo enako ploščino, saj posamezni lik nastane samo s premeščanjem drugih brez prekrivanja.

Označimo to ploščino z  $S$ . Iz spodnjega grafikona na sliki 3 dobimo  $S = LT$  oz.  $L = \frac{S}{T}$ , iz levega pa  $S = NW$  oz.  $W = \frac{S}{N}$ . Ker je  $L = \frac{S}{T}$ , lahko zapišemo, da je  $L = \frac{S}{T} \cdot \frac{N}{N} = \frac{N}{T} \cdot \frac{S}{N} = \lambda \cdot W$ .

Zdaj pa nas zanima, ali to velja tudi v posplošenem primeru, ko gostje prihajajo kako drugače in se v restavraciji ne zadržujejo enako dolgo. Količina  $\lambda$ , intenzivnost prihajanja strank, ostane definirana kot  $\lambda = \frac{N}{T}$ , količini  $L$  in  $W$  pa je treba definirati na novo, saj število gostov v danem trenutku in čas bivanja posameznega gosta nista več konstanti. Pri definiciji nam bodo pomagali grafikoni, ki so lahko zdaj videti malo drugače, npr. tako, kot kažeta sliki 4 in 5.

Sedaj naj bo  $S$  ploščina diagrama (glej sliko 4). Iz slike 5 lahko ugotovimo, da se ploščina še vedno ohrani, saj en lik nastane iz drugega samo s premeščanjem pravokotnikov brez prekrivanja.

Definirajmo  $L$  in  $W$  kot povprečji:  $L$  naj bo torej povprečno število strank v sistemu,  $W$  pa povprečni čas bivanja posamezne stranke v sistemu.

Kako pa je definirano povprečje? Povprečna vrednost nenegativne funkcije na določenem intervalu je ploščina pod njenim grafom, deljena z dolžino intervala. Na ta način ima namreč lik, ki ga omejujejo

graf funkcije, krajišči intervala in abscisna os, isto ploščino kot pravokotnik, ki ga dobimo, če graf funkcije zamenjamo z vodoravnico, ki leži v višini povprečna funkcije. V višji matematiki temu pravimo integral. Na sliki 4 je to povprečje označeno s črtkano črto.

Količina  $L$  je torej v resnici definirana kot  $L = \frac{S}{T}$ , količina  $W$  pa kot  $W = \frac{S}{N}$ .

Sedaj pa ugotovitve povežimo med sabo. Ko upoštevamo še zvezo  $\lambda = \frac{N}{T}$ , ki je v resnici definicija količine  $\lambda$ , sledi že dobljena zveza  $L = \lambda W$ . Torej zveza  $L = \lambda W$  se ohrani, če  $L$  in  $W$  definiramo kot ustrezni povprečji.

Ni nujno, da sistem gledamo od začetka do konca, temveč lahko le v določenem časovnem oknu. V tem primeru moramo pri  $W$  gledati le trajanja bivanja v okviru danega časovnega okna, prihajanje pa razumemo tako, da kot prispele štejemo vse stranke, ki so v sistemu kadar koli znotraj danega časovnega okna (četudi so morda prišle že prej). Če gledamo tako, tudi ni nujno, da je bilo na koncu časovnega okna v sistemu enako število strank kot na začetku.

Izpeljana zveza je znana kot:

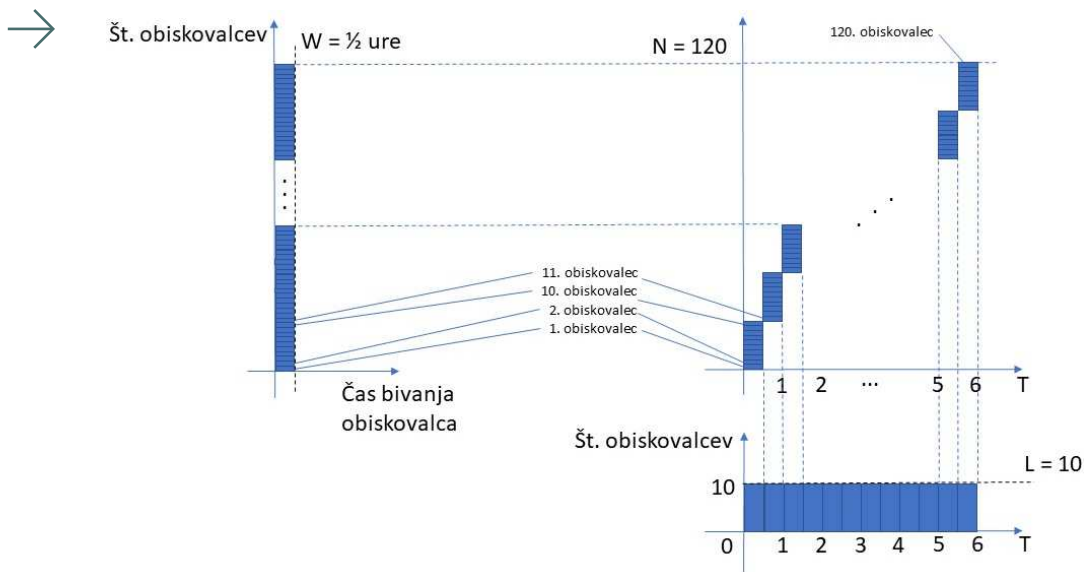
**Littlev zakon:** Če je dan sistem kot na sliki 1 in je  $\lambda$  intenzivnost prihajanja strank,  $L$  povprečno število strank v sistemu,  $W$  pa povprečni čas bivanja posamezne stranke v sistemu, vse v okviru določenega časovnega okna, velja zveza  $L = \lambda W$ .

Obiskovalce lahko ločimo na dve podskupini. Na tiste, ki obedujejo, in na tiste, ki čakajo na postrežbo. Recimo, da v povprečju od desetih obiskovalcev, ki so hkrati v restavraciji, obeduje šest obiskovalcev. Zanima nas povprečni čas čakanja na postrežbo.

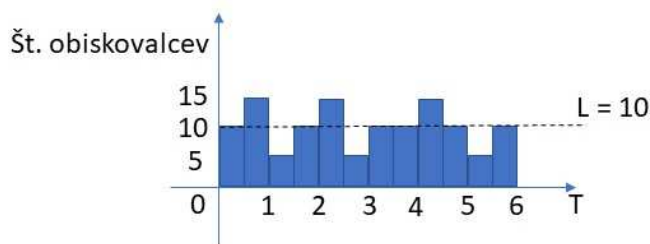
Označimo sedaj z  $L_1$  število obiskovalcev, ki obedujejo, in z  $L_2$  obiskovalce, ki čakajo na postrežbo. Nadalje lahko izračunamo, da  $L_2 = L - L_1 = 10 - 6 = 4$  obiskovalci čakajo na postrežbo in je  $W_2 = \frac{4}{20} = 0,2$  ure oz. 12 minut. To je čas, ki ga obiskovalec v povprečju porabi za čakanje na postrežbo. Littlev zakon smo tako uporabili za prvo škatlo obiskovalcev (glej sliko 6).

Tudi v transportu in logistiki lahko z Littlevo zakonitostjo opišemo nekatere procese. Pod drobnogled vzemimo pretok vozil na enem kilometru odseka avtoceste. Ta odsek naj bo tak, da nima nobenih





**SLIKA 3.**  
Prikaz po posameznih obiskovalcih



**SLIKA 4.**  
Različno število obiskovalcev v restavraciji

izvozov, da bi se število vozil v odseku spreminjalo. Kako bi skupaj povezali količine, kot so *gostota*, *pretok* in *hitrost* prometa?

Najprej pojasnimo pojme. Gostoto prometnega toka lahko definiramo kot povprečno število vozil v odseku na razdaljo odseka. Pretok prometa pa določimo kot povprečno število vozil v odseku na enoto časa. Sedaj lahko povezavo med gostoto prometnega toka in pretoka prometa pokažemo s pomočjo Littlovega zakona.

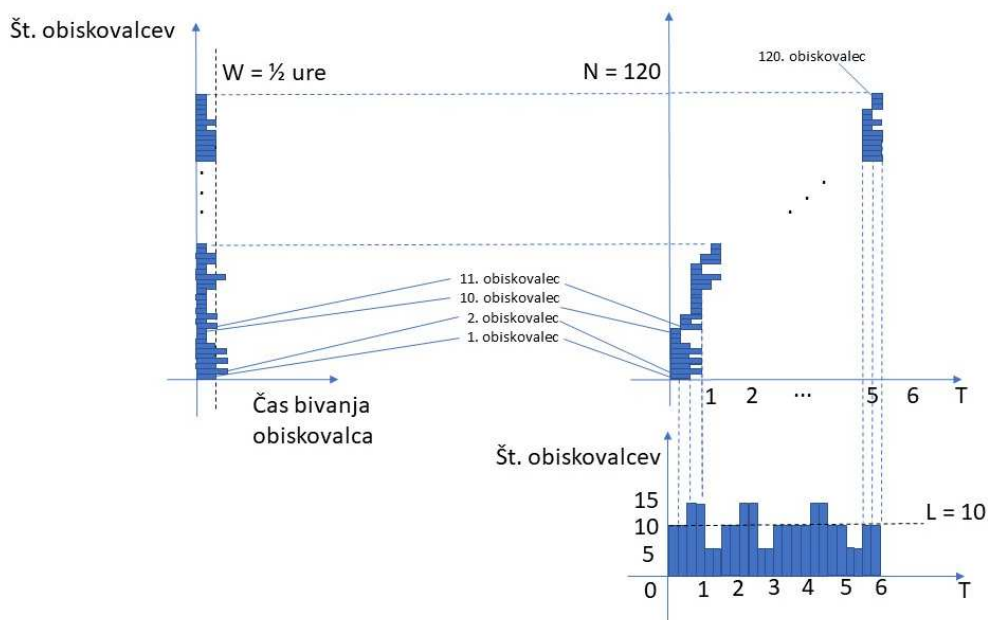
Naj bo  $d$  dolžina odseka in  $\rho$  gostota prometnega toka. Potem lahko zapišemo, da je  $\rho = \frac{L}{d}$ , kjer je  $L$  povprečno število vozil v odseku. Če je  $v$  hitrost,

je  $W = \frac{d}{v}$ , saj je  $W$  povprečni čas potovanja skozi odsek. Littlov zakon  $L = \lambda W$  dobi obliko  $\rho = \frac{\lambda}{v}$ .

Od tod lahko tudi vidimo vzrok nastanka kolone vozil. Če se dotok vozil le rahlo poveča, se promet upočasni in po Littlovem zakonu se gostota prometa poveča - tako zaradi večjega dotoka kot zaradi zmanjšane hitrosti.

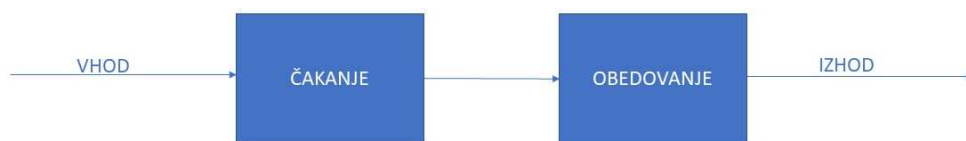
Take primere doživljamo lahko vsak dan na slovenskih avtocestah, še posebej v poletnih časih, ko se izvajajo velika vzdrževalna dela. Delavci omejijo pretok vozil na en pas, postavijo omejitev hitrosti na 80 km/h, nato pa je tu še dnevni tranzit iz tujine, ki odhaja na morje. Tako dobimo dolge, kilometrsko kolone vozil zaradi prevelikega dotoka vozil v vzdrževalni odsek in zmanjšane hitrosti.

Ali obstaja kakšen način, s čimer bi zmanjšali take zastoje? S povečanjem varnostne razdalje bi lahko zmanjšali gostoto prometnega toka in s tem povečali hitrost vozil. Območje počasnejšega prometa bi se pri tem podaljšalo, zato pa bi promet tam potekal bolj tekoče. Če bi npr. ponovno popravljali viadukt na Ravbarkomandi in bi bila tam omejitev 80 km/h, bi, recimo, namesto prometa s hitrostjo 130 km/h do Unca in nato po polžje do Ravbarkomande imeli promet s hitrostjo 80 km/h že od Vrhniko naprej. Tako bi verjetno prišli do cilja hitreje, vendar je to možno samo teoretično, saj moramo upoštevati tudi človeški faktor.



SLIKA 5.

Prikaz različnega števila obiskovalcev v restavraciji glede na posameznega obiskovalca



SLIKA 6.

Shema problema podskupin obiskovalcev

## Sklep

Littlov zakon opisujejo tri linearno povezane količine. Če poznamo dve izmed njih, lahko tretjo izračunamo brez težav. Ta zakonitost nam tudi pove, da npr. lastniki restavracij ne morejo zagotoviti velikega števila obiskovalcev in s tem tudi višjega dobička tako, da bodo (poleg marketinških potez) povečali samo prostorske kapacitete, ampak morajo poskrbeti tudi za ustrezno število zaposlenih v restavraciji (natakarjev, kuharjev). Če želimo varčevati pri zaposlenih, ne bomo ničesar dosegli. Čakalni čas se bo le povečal, obiskovalci bodo nezadovoljni in se ne bodo več vračali. Torej Littlov zakon skrbi, da, v našem primeru, lastniki restavracij niso preveč požrešni in da namesto optimuma za eno stran iščejo ravnovesje za obe strani.

## Literatura

- [1] *Little's law*, dostopno na [ie.technion.ac.il/~serveng/Lectures/Little.pdf](http://ie.technion.ac.il/~serveng/Lectures/Little.pdf), Service Engineering, 2007.
- [2] J. D. Little, *Little's Law as Viewed on Its 50th Anniversary*, *Operationsresearch* **59** 2011, 3, 536–549.
- [3] M. Batista, *Zvezni modeli prometnega toka*, dostopno na [www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/tpt/tpt04\\_b5.pdf](http://www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/tpt/tpt04_b5.pdf), 2007.

× × ×

[www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)

# Lebdeča vrtavka



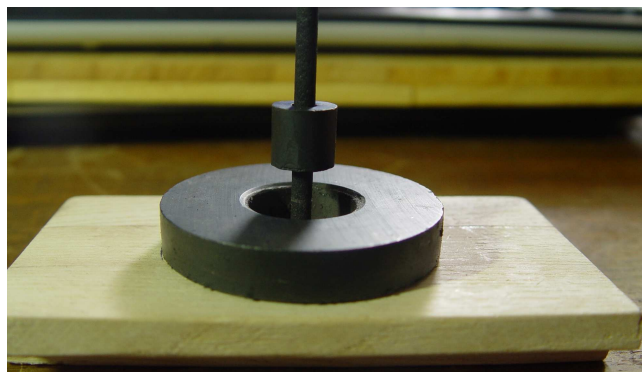
ANDREJ LIKAR

→ Magneti so znani že iz pradavnine, najstarejše omembe so kitajskega izvora in segajo kakšnih 2500 let nazaj. Drug na drugega delujejo, ne da bi se dotikali, kar nas še danes prevzame. Sicer tudi teža deluje tako, le da je tako vsakdanja, da se ji ne čudimo več. Magneti pa se ne le privlačijo, temveč se tudi odbijajo, in to z znatnimi silami, ki jih jasno začutimo že z golimi rokami. Pri elektrostatiki so te lahko tudi odbojne, a so mnogo manj izrazite.

Hitro pomislimo, da bi razpostavili magnete tako, da bi njihova odbojna sila na izbrano postavljeni magnet izničila njegovo težo. Magnet bi tedaj lebdel. Lebdenje pač preseneča. Pomislimo na nekatere ptice in žuželke, tu so največji junaki kolibriji, pa na drone in helikopterje.

Poskusi v tej smeri se nikoli ne posrečijo. Nepritrjeni magnet, ki naj bi lebdel, vedno nekam pobegne ali pa se zasuče in trešči v druge magnete. Na leseno paličico natakneni magnet pa ne more pobegniti in lebdi nad močnim obročastim magnetom (glej sliko 1). Ne tako dolgo nazaj, v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja, pa se je posrečilo brez opore obdržati v zraku vrtečo se magnetno vrtavko. Na sliki 2 je vidna postavitev spodnjega obročastega magneta in lega lebdeče vrtavke. Odkritje je bilo patentirano in je osnova priljubljeni igrači, ki jo lahko kupimo pod imenom Levitron (glej sliko 3). Na spodnji magnet, ki leži na mizi, postavimo tanko vodoravno ploščo, na njej pa na sredini zavrtimo vrtavko. To se posreči, ker je pod vrtavko luknja. Potem počasi dvigamo ploščo, dokler vrtavka ne obvisi v zraku. Pri tem moramo poskrbeti, da ima vrtavka ravno pra-

všno maso. To najdemo z dodajanjem priloženih drobnih uteži, ki jih natikamo na vrtavko. Na spletu najdemo vrsto navodil, kako si tako igračo izdelamo sami. Izdelava pa ni prav preprosta, ker potrebujemo kar nekaj stvari, ki jih ni lahko dobiti, terja pa tudi precej potrpljenja pri iskanju pravih lastnosti vrtavke.

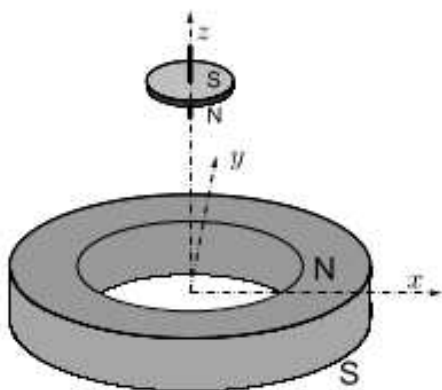


SLIKA 1.

Lebdeči magnet, napeljan na palico, ki poskrbi, da se magnet ne more obrniti in pobegniti. Teža zgornjega magneta je enaka odbojni sili med magnetoma.

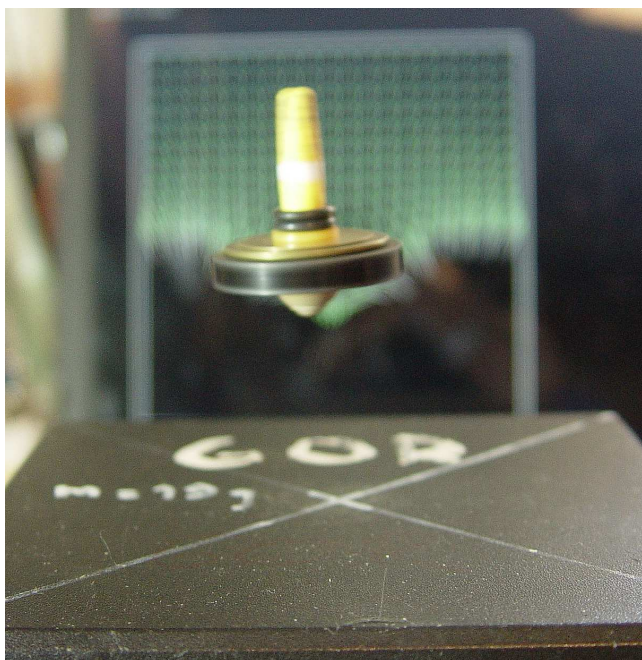
Zakaj vrtavka lebdi? Prijavitelj patenta je imel velike težave, preden je prepričal uradnike, da je njegov predlog mogoče uresničiti. Kot bomo videli, je lebdenje sicer izvedljivo, vendar le za las. Hkrati ga omogočata posebna zgradba magnetnega polja obročastega magneta in dinamika vrtavke.

Najprej si oglejmo magnetno polje spodnjega obročastega magneta. Zgornja ploskev obroča naj bo severni pol (N), spodnja pa južni (S). V magnetu si lahko zamislimo množico drobnih magnetnih dipolov, vsak je sestavljen iz magnetnega monopola N (sever) in prav tako velikega monopola S (jug). Pri tem monopole N in S postavimo navpično enega nad



SLIKA 2.

Lebdeča vrtavka nad obročastim magnetom – zasnova igrarce Levitron

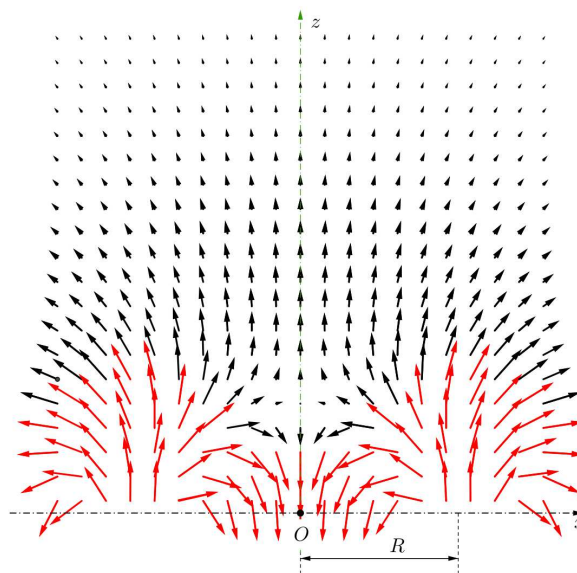


SLIKA 3.

Posnetek lebdeče vrtavke pri Levitronu

drugim. S to zamislijo pridemo do pravega magnetnega polja stran od monopolov, čeprav dobro vemo, da magnetnih monopolov v naravi ne najdemo. Vendar tako zamišljeni magnetni dipoli verno odražajo magnetno polje drobnih tokovnih zank, ki pa jih je znotraj magnetna vse polno.

Gostoto magnetnega polja  $\vec{B}$  prav preprosto izračunamo tako, da množico magnetnih dipolov porazdelimo v obroč in seštejemo njihove prispevke k polju v prostoru. Tako dobljeno polje je predstavljeno z vektorji na sliki 4 in silnicami na sliki 5. Polje smo izračunali numerično z ustreznim računalniškim programom v dovolj gosto posejanih točkah v prostoru nad magnetom.



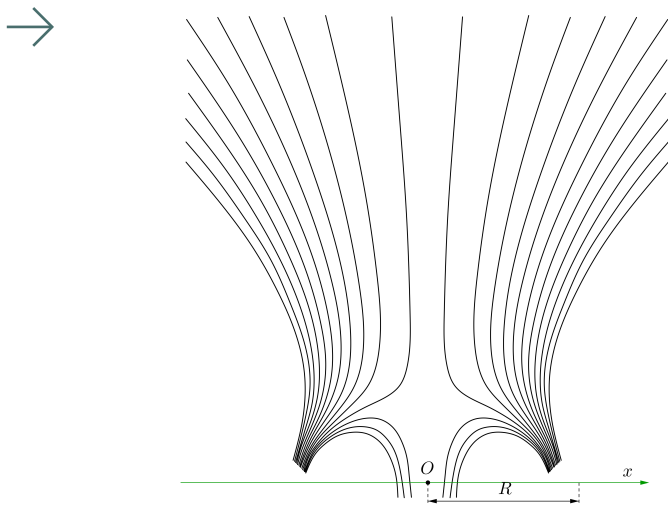
SLIKA 4.

Magnetno polje obročastega magnetna v ravnini, ki jo določa simetrijska os. Vektorji magnetne poljske gostote  $\vec{B}$  so prikazani v izbranih točkah ravnine. Vektorji, prikazani z rdečo barvo, so zaradi preglednosti po velikosti zmanjšani.

Ko v magnetno polje spodnjega magnetna postavimo obročasti magnet vrtavke, nas zanimajo predvsem sile nanjo. Polje sil pa ne sovпада z magnetnim poljem. To hitro uvidimo, če si spet zamislimo magnetni dipol, sestavljen iz magnetnih monopolov. Na posamezna monopola deluje sila

$$\vec{F}_m = e_m \vec{B},$$





SLIKA 5.

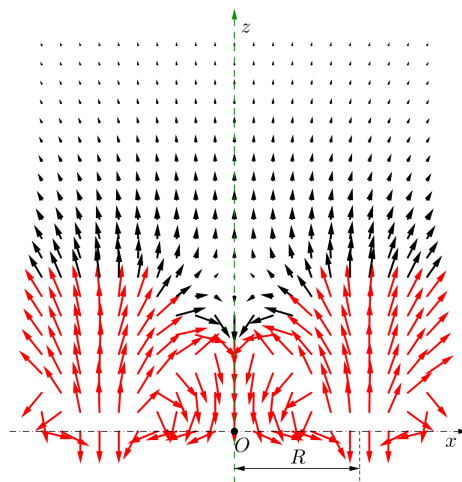
Magnetno polje obročastega magneta, predstavljeno s silnicami.

kjer je  $e_m$  magnetni naboj monopola. Na celotni dipol deluje vsota sil na posamezna monopola. Če sta monopola v magnetnem polju z enako gostoto  $\vec{B}$ , sile na dipol ni, ker sta magnetna naboja  $e_{mN}$  in  $e_{mS}$  nasprotna. Če pa je monopol N v drugačnem polju kot S, je sila na dipol od nič različna. Magnetna sila na dipol bo torej

$$\vec{F}_{mD} = e_m (\vec{B}_N - \vec{B}_S),$$

kjer sta  $\vec{B}_N$  in  $\vec{B}_S$  magnetni polji na mestih monopolov N in S. Za silo je odločilna sprememba magnetnega polja  $\vec{B}$  vzdolž veznice med poloma N in S v dipolu vrtavkega magneta. Ker poznamo gostoto magnetnega polja  $\vec{B}$  v poljubni točki nad osnovnim magnetom, hitro pridemo do polja sil na vrtavko (glej sliko 6). Z znano lego vrtavke pa pridemo do sile nanjo z vektorskim seštevanjem sil posameznih dipolov v njenem magnetu.

Navpično silo na vrtavko smo predstavili na sliki 7. Ko je vrtavka dovolj visoko nad spodnjim magnetom, jo le-ta odbija navzgor. Sila z višino narašča, potem pa začne padati. Če je teža vrtavke primerna in jo postavimo v del, kjer magnetna sila nanjo pada, bi vrtavka našla točko, kjer bi bila vsota njene teže in magnetne sile enaka nič. Vrtavka bi tam lebdela, če bi bilo njeno težišče natančno na geometrijski osi. Pri rahlem dvigu bi prevladala teža navzdol, pri spu-

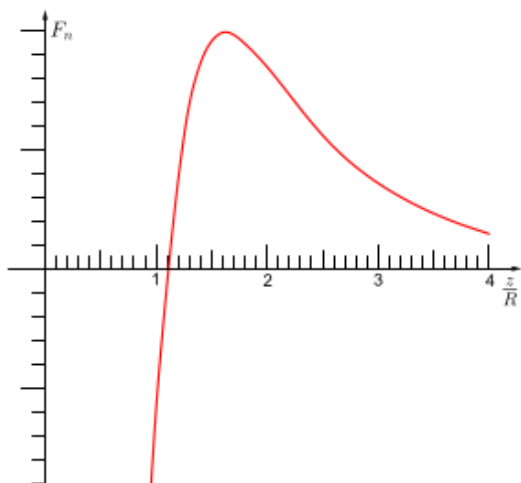


SLIKA 6.

Polje sil na magnetni dipol, ki ga postavimo v navpični smeri.

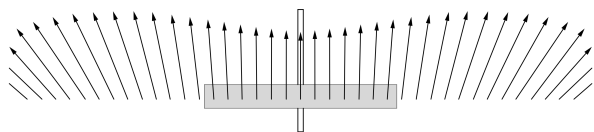
stu pa magnetna sila navzgor. Zaradi teže in sile magneta bi bila vrtavka v navpični smeri v stabilnem ravnovesju.

Za lebdenje pa mora biti vrtavka v stabilnem ravnovesju tudi v vodoravni ravnini. Ne moremo nareč pričakovati, da bo vrtavkina os vedno natančno sovpadala s simetrijsko osjo spodnjega magneta. Tu pa je glede stabilnega ravnovesja ravno obratno kot v navpični smeri. Vrtavka je v vodoravni ravnini stabilna le na višinah pod maksimumom magnetne odbojne sile. Tam pa vrtavka ni stabilna v navpični smeri. Torej lebdenje ni možno. To so odkritelju zatrjevali mnogi fiziki ter tudi uradniki patentnega zavoda in imeli so skoraj prav. Skoraj zato, ker so privzeli, da je os vrtenja povsem navpična tudi, ko je vrtavka izmaknjena od simetrijske osi spodnjega magneta. Pri zmernem vrtenju pa se os vrtenja zaradi navora na vrtavko v magnetnem polju in posledično njene precesije nagne ter sledi smeri gostote magnetnega polja  $\vec{B}$ . Zaradi tega majhnega nagiba se vodoravna magnetna sila kvalitativno spremeni. Na sliki 8 so prikazane sile na vrtavko, ko je njena os povsem navpična, na sliki 9 pa, ko je rahlo nagnjena v smeri magnetnega polja v njeni, po osi  $x$ , izmaknjeni legi. Vidimo, da se vodoravna sila spremeni, in sicer tako, da potisne vrtavko nazaj k simetrijski osi spodnjega magneta.



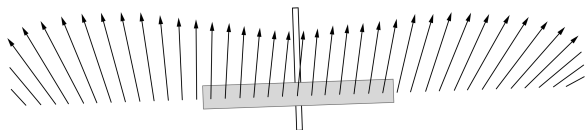
SLIKA 7.

Navpične sila na vrtavko, ki jo postavimo v magnetno polje obročastega magneta. Os vrtavke je postavljena navpično.



SLIKA 8.

Sile na dele vrtavke, ko simetrijska os obročastega magneta in vrtilna os vrtavke sovpadata.

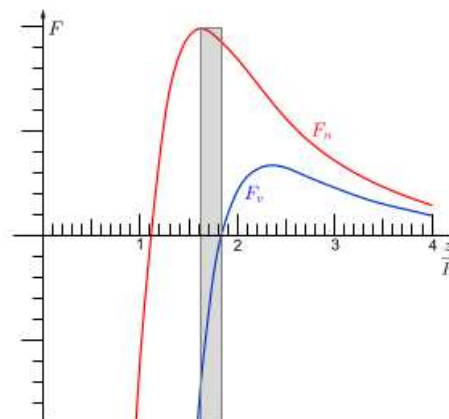


SLIKA 9.

Ko se vrtavka oddalji od simetrijske osi in hkrati nagne, ker njena os sledi magnetnemu polju obročastega magneta, se sila nanjo spremenijo tako, da jo potiskajo nazaj v izhodiščno lego.

Slika navpične in vodoravne magnetne sile je sedaj nekoliko drugačna (glej sliko 10). V zelo ozkem, le kakih 5 mm širokem pasu višin blizu vrha navpične sile, je vrtavka v stabilnem ravnovesju, tako v navpični smeri kot v vodoravni ravnini (sivi pas na sliki 10). Vrtavka torej lahko lebdi, le zelo natančno moramo ujeti njeno težo, da smo tik nad vrhom navpične magnetne sile. To storimo z okroglimi ploščicami različnih polmerov, debelin in iz različnih snovi, ki jih nameščamo na vrtavko. Prilagoditev mase moramo opraviti sami, ker sta moči magnetov nekoliko odvisni od njune temperature in železnih predmetov v okolici.

Z nekaj vaje obvladamo zagon na dvizni plošči in previdno dviganje do lebdenja. Čeprav je opisana igrača zahtevna, smo z lebdečo vrtavko obilno nagrajeni, saj jo lahko opazujemo kar nekaj minut. Izpopolnjene igrače te vrste imajo vgrajeno vezje, ki poganja vrtavko, da le-ta lebdi poljubno dolgo časa. A to že po malem posega v aktivno nadzorovano lebdenje, kjer lebdeči magnet obdržimo v ravnovesju s krmilnimi tuljavicami. O tem pa kdaj prihodnjič.



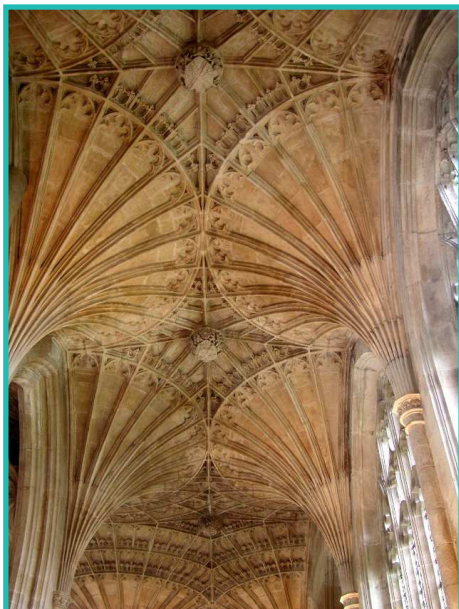
SLIKA 10.

Vodoravna  $F_v$  in navpična  $F_n$  magnetna sila na vrtavko, ki je malo izmknjena iz ravnovesne lege in nagnjena tako, da je njena os v smeri magnetnega polja spodnjega magneta. V sivem pasu je vrtavka v stabilnem ravnovesju. Na vodoravno os grafa nanašamo višino, merjeno od srednje vodoravne ravnine obročastega magneta. Merilo je relativno glede na srednji polmer magneta.

× × ×



# Nagradna križanka



					AVTOR MARKO BOKALIČ	PREDHODNICA TRANZISTORIJA	ITALIJAN. LUKSUZNI ŠPORTNI AVTOMOBIL	SVETOPISEMSKI KRAJ PRI JERUZALEMU	NIKO PRIJATELJ	TRDITEV, KI SE NI DOKAZANA	NEMŠKI FILOZOF IN MUZIKOLOG (THEODOR)	VRHNJA PLAST DREVESENEGA DEBLJA	JAPONSKI FIZIK, NOBELOVEC LETA 1973 (LEO)	POKOJNA FRANCOŠKA IGRALKA (MARTINE)			
					SIR ŠVIC. IZVORA Z VELIKIMI LUKNJAMI												
					ITALIJAN. OTOK BLITU AFRIŠKE CELINE	1											
					EVROPSKA VESOLJSKA AGENCIJA				DENTIST								
					PROŽNA SNOV IZ MOČNIH UMETNIH VLAKEN							KADAR					
					LUKA, KI KONKURIRA KOPRU					ASTRONAVT ARMSTRONG							
					RADIJ TUJEC V LATINSKO-AMERIŠKEM OKOLJU			ANGLEŠKI RAZISKOVALEC ANTARKTIKE (ROBERT)	PLENITEV DIVJADI USPOSOBLJENI DELAVCI					KRAJ PRI CERKNICI	NOSILJO JIH SLABOVIDNI	ANGLEŠKI EKONOMIST IN LOGIK (WILLIAM STANLEY)	SVETNICA, KI GODUJE 26. JULIJA
											IZDELOVALEC OBLEK RODO-DENDRON						
	RUSKI SKLADATELJ (IGOR)	KAZALNIK RAZMERJA MED SPREMENLJIVKAMA	NEKDANJA AMERIŠKA TENISAČICA (CHRIS)	SAMIŠKA GOZDNE ŽIVALI	PASCAL					DEJAVNOST STRIPTIZA							
DVOMLIVEC																	
INDUSTRIJSKI PROZVODNI OBJEKT																	
JEZERO NA REKI SHANNON NA IRSKEM				OLGA GRACELJ				REKA V SLOVENSkih GORICAH	RUMENA NOVICA, ČVEK			MONGOLSKI VLADARSKI NASLOV					JEZUSOV UČENEC IME VEČ SLOVENSkih VASI
AFRIŠKA POP GLASBA									AVSTRAL IGRALKA (NICOLE)								
ŠANSO-NJERKA MAVRIČ								OKRAJŠAVA ZA PRIPIS	EDVARD KOCBEK								STAREJŠI ANGLEŠKI PEVEC
IVAN CANKAR			PESNICA KRAMBERGER	DOJKE					POLMER								SKUPINA ČEBEL, KI Z MATICO ZAPUŠTI PANJ
ŠIVALNO SREDSTVO				FR. PISA-TELJICA (GEORGE)													STAROGR. MATEMATIK, GEOGRAF IN ASTRONOM
IGRALCA CONNERY IN PENN									ZNANILEC OGNJA								501 Z RIMSKIMI STEVILKAMI
NEKDANJA OBLIKA OSEBNEGA DOKUMENTA									"ZAČETEK" ŽIVLJENJA								METER, KILOGRAM, SEKUNDA, KELVIN, KANDELA
PRIPADNIK ROMANSKEGA NARODA																	MOSKOVSKI PATRIARH







# Lebdeči magnet



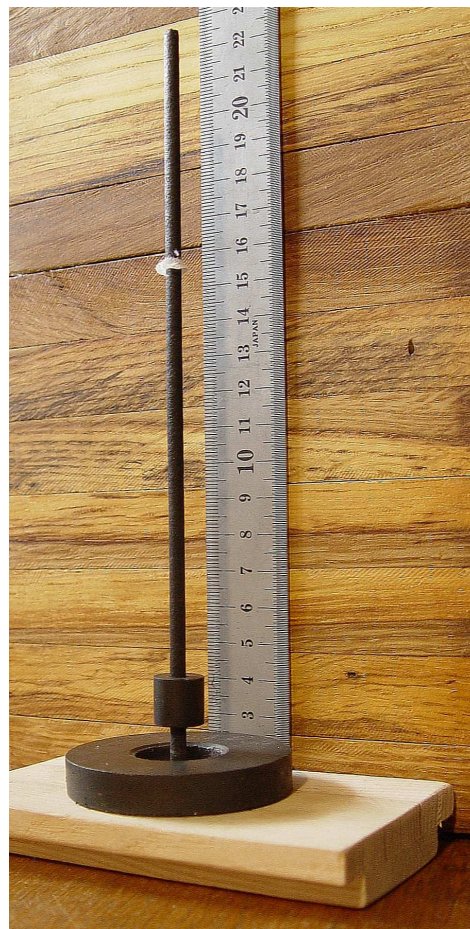
ANDREJ LIKAR

→ V prejšnjem prispevku smo opisali lebdečo vrtavko. Takrat smo navedli, da ni mogoče razpostaviti magnetov tako, da bi eden od njih mirno lebdel nad drugim. Pri vrtavki se lebdenje sicer posreči, a le zato, ker se lebdeči magnet ves čas premika in spreminja svojo vrtilno os.

Če v sestav magnetov vključimo še elektromagne, ki se jim namagnettenost hitro spreminja, pa je mogoče prisiliti izbrani magnet v lebdenje, ne da bi se le-ta vidno premikal.

Začnimo z igrāčo, kjer majhen magnet, nataktnjen na paličico, lebdi na sredi nad večjim obročastim magnetom (glej sliko 1). Pri obeh magnetih je severni pol obrnjen navzgor. Paličica obdrži magnet na geometrijski osi, lahko se premika le v navpični smeri. Ko magnet potisnemo navzdol in ga spustimo, ga magnetna odbojna sila izstreli navzgor. Kdor je pri tem dovolj spreten, se mu magnet dvigne kar visoko. Na paličico nataktnjen listič papirja označi višino, do katere se je povzpel magnet, kar odberemo na merilu. Če tekmuje, zmaga seveda tisti, ki uspe potisniti listič najvišje.

Pa si podrobneje oglejmo fiziko pri tej igrāči. Na sliki 2 smo prikazali magnetno polje obročastega magneta s severnim polom obrnjenim navgor. Vektorji magnetne poljske gostote  $\vec{B}$  ležijo v navpični ravnini, ki vsebuje geometrijsko os. To polje je povsem drugačno kot polje paličastega magneta, ki ga dobro poznamo. Tam se severni in južni pol dveh magnetov povsod privlačita. Na sliki 3 je prikazano polje gostote sil, ki deluje na vodoravno postavljen ploščati magnet, z južnim polom obrnjen k severnemu obročastega magneta. Če to gostoto sil pomnožimo s prostornino majhnega dela magneta, do-

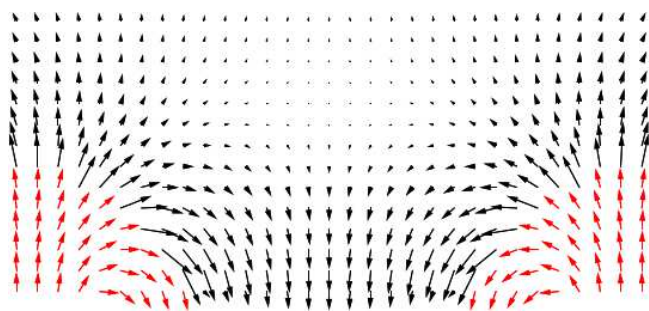


SLIKA 1.

Skoraj lebdeči magnet, nataktnjen na paličico. Ko ga potisnemo navzdol in spustimo, ga magnetna odbojna sila krcne navzgor.

bimo silo na ta del. Na različne dele magneta so sile različne, na celotni magnet deluje rezultanta vseh teh sil. Do polja sil smo prišli z enačbo, ki smo jo navedli v spodaj navedenem prispevku [1]. Tam smo

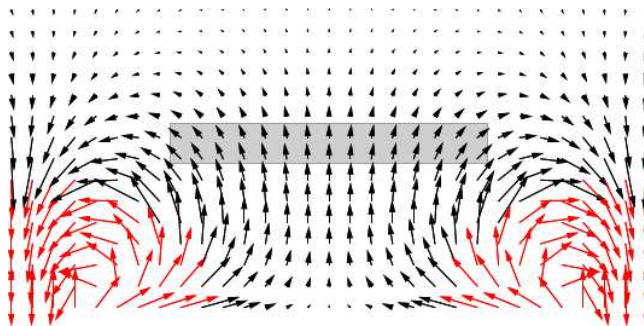
videli, da silo na magnet določa spreminjanje magnetnega polja v prostoru in orientacija magnetnih dipolov v magnetu. Vidimo, da se magnet odbijata, če sta dovolj blizu in njuni geometrijski osi sovpadata, zgornji ploščati magnet pa je manjši od luknje obročastega. Odboj je dovolj močan, da na neki višini premaga težo ploščatega magneta. Ker odbojna sila narašča, ko magnet potiskamo navzdol, je ravnovesna lega, ki jo zavzame magnet, stabilna v navpični smeri. Iz slike 3 takoj razberemo, da je vodoravna lega magneta prav tako stabilna, saj se pri majhnem zasuku magneta okrog poljubne vodoravne osi le-ta vrne v vodoravno lego. Magnet skoraj lebdi. Prav zato tako lahko drsi po paličici. Seveda – skoraj. Pri premiku v vodoravni smeri ga magnetna sila poganja stran od geometrijske osi, in to vedno bolj, čim dlje od osi je. Če v mislih premaknemo magnet vodoravno iz sredine, slika 3 pokaže, da se ravnovesje vodoravnih komponent sil poruši in te magnet vlečejo stran od sredine. Prepuščen sam sebi bi v hipu zgrmel na spodnji magnet. Paličica prepreči tak tok dogodkov.



**SLIKA 2.**

Magnetno polje obročastega magneta v navpični ravnini, ki vsebuje simetrijsko os. Vektorji, risani z rdečo barvo, so zaradi preglednosti slike skrajšani. Tako smo risali tudi preostale slike polj.

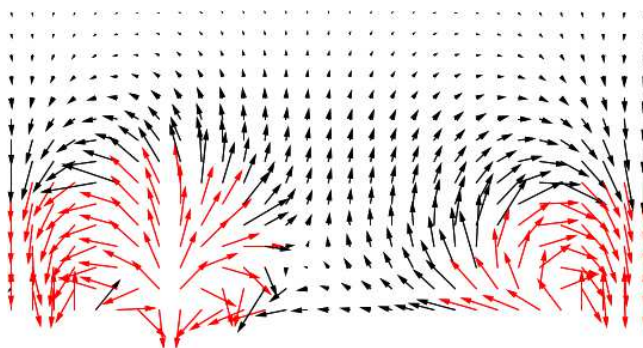
Namesto paličice lahko uporabimo elektromagnete, ki povrnejo magnet v izhodiščno lego. Pri majhnem vodoravnem premiku zadošča že majhen tok skozi tuljavnice elektromagnetov, pri večjem odmiku pa mora biti tok večji. Tok skozi tuljavnice moramo z elektronskim vezjem prilagajati, in to glede na odmik magneta od geometrijske osi. Polje sil na po-



**SLIKA 3.**

Polje sil na pokončno postavljen lebdeči magnet. Na sliki smo magnet nakazali s sivo-modro barvo v njegovi ravnovesni legi.

končno postavljen magnet, ko je vključen eden od elektromagnetov, je prikazano na sliki 4. Odtod lahko razberemo, da elektromagnet potiska zgornji magnet v vodoravni smeri. S primerno izbranim tokom skozi tuljavnice lahko vrne magnet v izhodiščno lego. Da pridemo do primernege toka, moramo odmik meriti. To omogočijo senzorji magnetnega polja, ki so nameščeni pod magnetom. Ker se magnet lahko premakne kamorkoli po vodoravni ravnini, moramo imeti vsaj dva senzorja in štiri popravljalne elektromagnete.



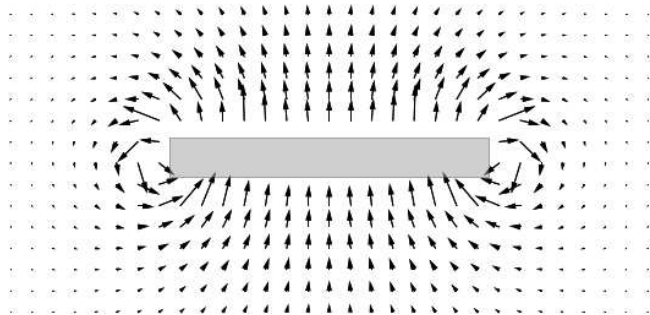
**SLIKA 4.**

Polje sil na pokončno postavljen lebdeči magnet ob delovanju elektromagneta na levi strani

Magnetno polje lebdečega magneta je prikazano na sliki 5. Premik magneta v vodoravni smeri spremeni magnetno polje pri senzorju. Tam se pojavi



→ komponenta  $B_x$  magnetne poljske gostote  $\vec{B}$  v vodoravni smeri. Na osnovi te komponente elektronsko vezje krmili tok skozi tuljavice. Vezje je tako hitro, da se magnet neopazno izmika iz ravnovesne lege. Pri eni od kupljivih naprav tok iz vezja prihaja v tuljavice v enako visokih sunkih z različno širino, ki je sorazmerna z odmikom magneta.

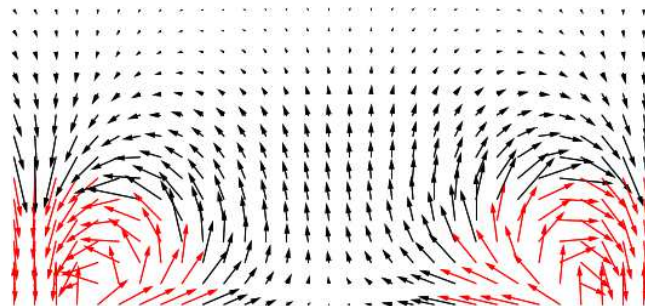


SLIKA 5.

Magnetno polje vodoravno postavljenega lebdečega magneta

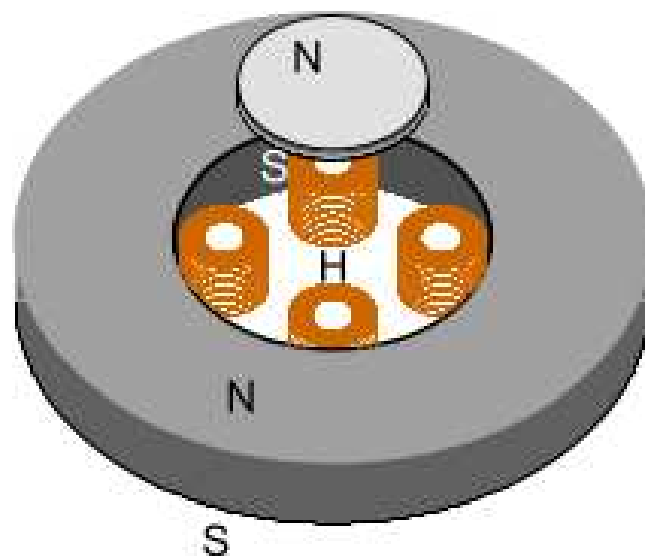
Omeniti moramo še eno podrobnost. Magnet se lahko le nagne in nagib prav tako povzroči spremembo vodoravne komponente magnetne poljske gostote na mestu senzorja. Elektromagnet posreduje tudi v tem primeru, čeprav se magnet ni oddaljil od ravnovesne lege. K sreči se pri nagibu pojavi tudi magnetna sila (glej sliko 6), in če jo elektromagnet natančno uravnovesi, se magnet ne premakne. Posredovanje elektromagneta, ki je povezano s signalom iz senzorja, je s tem povsem določeno. Pravimo, da je povratna zanka s tem pogojem umerjena. Taka umeritev hkrati zadošča tudi pri premiku v vodoravni smeri.

Skico naprave najdemo na sliki 7. Ker lebdeči magnet držijo na svojem mestu štirije elektromagneti, nima središčne izvrtine, kot jo ima magnet pri naši igrači. Zgraditi opisano napravo pa ni lahko, saj moramo poznati nekaj elektronike in si priskrbeti ustrezne magnete ter elektronske komponente. A v fizikalnem krožku pod mentorstvom zagnanega učitelja in s pomočjo študenta elektronike tak projekt morda le ni pretežak. Komur je, lahko na trgu kupi že izdelano napravo za približno 50 evrov. Preostane le, da jo zapre v ustrezno škatlo, da prepreči trde trke zelo močnih, a krhkih magnetov.



SLIKA 6.

Polje sil na nagnjeni magnet



SLIKA 7.

Skica naprave – lebdečega magneta. Znotraj obročastega magneta (sivo) so štiri korekcijski elektromagneti (oranžno). S H je označeno mesto senzorjev magnetnega polja (Hallove senzorji). Zgornji magnet lebdi kake 3 cm nad zgornjo ploskvijo obročastega magneta

## Literatura

- [1] A. Likar, *Lebdeča vrtavka*, Presek 48 2020/2021, 2, 12-15.

× × ×

# Solarografija

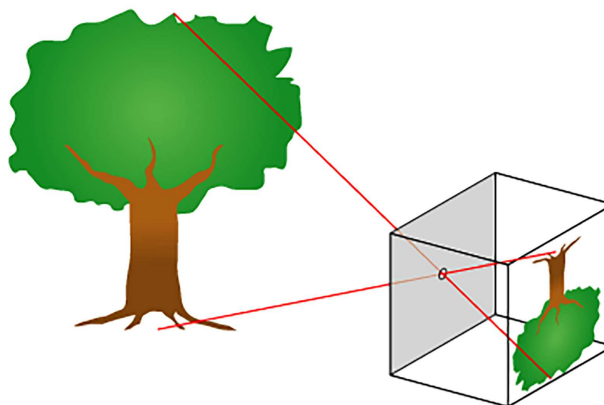


KRIŠTOF SKOK

→ Solarografija je analogna fotografska tehnika, pri čemer posnamemo gibanje Sonca po nebu. Naj bo to pot, ki jo naredi v enem dnevu, tednu, v več mesecih, ali osmica, ki nastane s celoletnim beleženjem položaja opoldanskega Sonca. A začnimo na začetku; tukaj gre za analogno fotografijo s *camero obscuro*. *Camera obscura* (iz latinščine temna soba) je optična naprava, ki preslika okolico preko luknjice na zaslon. Gre za najosnovnejšo pripravo, ki nima optičnih elementov za ustvarjanje slike, a izkorišča dejstvo, da svetloba potuje po premici.

Slika v *cameri obscuri* ima dve zanimivi lastnosti. Zasukana je za 180° in vsi predmeti so v enakem gorišču, nasprotno, kot smo vajeni iz fotografije ali vsakdana. Oko prilagaja svojo lečo, da vidimo predmet, na katerega smo osredotočeni, izostren, medtem ko so predmeti pred in za njim zamegljeni. Podobno s fotografskim objektivom izbiramo razdaljo, na kateri so predmeti izostreni. Če pa opazujemo sliko, ki nastane skozi luknjico, vidimo vso okolico ostro. O tem se lahko enostavno prepričamo sami. S konicami palca, kazalca in sredinca ene roke naredimo tako majhno luknjico, da še komaj vidimo skoznjo, in se zaglejmo v predmet nekaj metrov stran. Z drugo roko pridržimo manjši predmet 20 cm pred glavo. Zdaj ohranimo pogled in odmaknemo prvo roko. Oddaljeni predmet je še vedno izostren, a bližnji je zamegljen; bistveno bolj, kot je bil prej. Bolj drobno luknjico kot nam uspe narediti, bolj oster bo bližnji predmet, a za ceno temnejše slike. Na ta način si lahko pomagajo kratkovidni ljudje, ki pozabijo očala doma.

Zgodovina uporabe *camere obscurae* je dolga. Opisovali in proučevali so jo že kitajski učenjaki v četrtem stoletju pred našim štetjem, kasneje grški, arabski in od renesanse dalje še evropski. V 17. stoletju

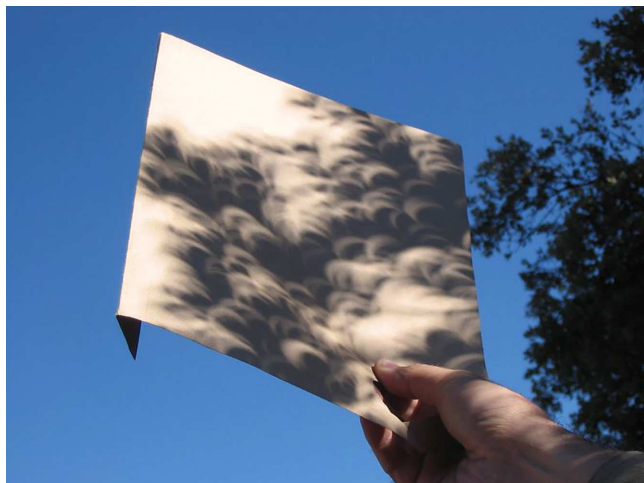


SLIKA 1.

Slika predmeta pri preslikavi skozi luknjico je obrnjena.

so jo uporabljali astronomi za proučevanje Sončevih peg in slikarji kot pripomoček pri upodabljanju krajine. Je predhodnica fotografskega aparata, danes pa je našla mesto med ljubitelji analogne fotografije in na seznamu želja DIY (do-it-yourself, samograditeljskih) projektov. Njena izdelava je relativno preprosta; ne potrebujemo delavnice ali posebnega orodja. Vse, kar je potrebno narediti, je, da najdemo ali izdelamo temen prostor in naredimo primerno majhno luknjico. Lahko npr. vzamemo kartonsko škatlo od kosmičev, čevljev, paketa. Na eni strani škatle izrežemo nekaj centimetrsko luknjo, ki jo prelepimo z aluminijasto folijo. Na nasprotni strani podobno izrežemo luknjo in jo prelepimo s papirjem, ki bo služil kot zaslon. Aluminijasto folijo z iglo prebodemo, da naredimo čim manjšo luknjico. Treba je le paziti, da iglo le delno zarinemo v folijo. Za takšno kamero potrebujemo močnejši vir svetlobe, npr. žarnico, plamen sveče ali seveda Sonce. Druga možnost je, da na steno *camere obscurae* nasproti luknjice nalepimo papir, ki bo služil kot zaslon. Luknjo izrežemo na isti steni, kot je luknjica, da skoznjo vidimo zaslon. Tako se s hrbtno obrnemo proti Soncu in opazujemo sliko v zatemnjeni škatli.





**SLIKA 2.**

Sončeva svetloba, ki se prebije skozi krošnje dreves, se prav tako preslika kot pri cameri obscuri. Tako lahko opazujemo Sončev mrk v naravi.

Namesto neposrednega gledanja na zaslon, lahko sliko ujamemo na fotografski papir in jo trajno shranimo. S tem ne mislimo fotopapirja, ki ga uporabljamo za kvalitetnejši tisk fotografij, ampak liste, ki so občutljivi na svetlobo. V časih analogne fotografije so se uporabljali za razvijanje slik s filmov, danes jih pa še najdemo v fotografskih trgovinah v različnih dimenzijah in kvalitetah. S takim fotopapirjem lahko najlažje izdelamo kamero iz pločevinke – naj bo ta od pijače, čipsa ali napolitank, saj je pločevina dovolj tanka (pribl. 200 mikrometrov), da jo lahko z nekaj truda prebodemo z iglo. Delo si še olajšamo tako, da pločevino pobrusimo z brusnim papirjem na mestu, kjer želimo narediti luknjico. Odrezati moramo vrh pločevinke tako, da lahko vstavimo fotopapir in ga namestimo ob obod. Izdelati moramo še pokrov, ki bo tesno zapiral pločevinko, da vanjo ne moreta vstopiti niti voda niti svetloba. Primerno je že, če uporabimo karton in vodoodporni lepilni trak. Po tem, ko vstavimo fotopapir v kamero in jo zapremo, moramo biti pozorni, da je zakrita tudi luknjica, da Sonce pomotoma ne posije v njeno notranjost, saj je dovolj močno, da pusti sled v nekaj sekundah. Odkrijemo jo šele, ko je kamera nameščena na svoje mesto. Luknjico pustimo odprto dlje časa, lahko več dni ali tednov. Če jo na prostem usmerimo proti vzhodu, jugu ali zahodu, bomo na jasen

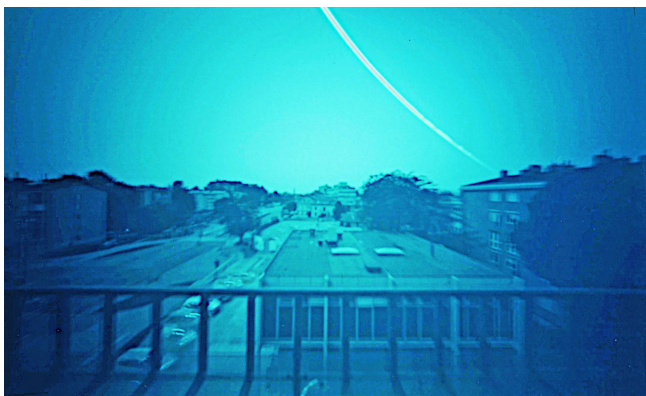
dan posneli sled dnevne poti Sonca po nebu. Lahko pa jo pustimo na mestu vse leto in bomo na koncu posneli celoten pas sledi. Ko se odločimo, da bomo končali z osvetljevanjem, moramo pred premikom kamere zakriti luknjico. Fotopapir računalniško skeniramo in sliko v namenskem programu obdelamo – obrežemo, povečamo svetlost in kontrast (nelinearno raztegnemo histogram) izostrimo. Nastale fotografije na fotografskem papirju bi morali fiksirati in razviti, da fotopapir ni več občutljiv na svetlobo in da fotografije trajno ostanejo. Če tega ne počnemo, jih moramo shraniti v popolni temi. S fotopapirjem moramo biti previdni, saj je občutljiv na svetlobo. Z njim moramo rokovati v zatemnjeni sobi pod šibko rdečo svetlobo v vseh korakih postopka, od vstavljanja v kamero do ogledovanja po osvetlitvi.



**SLIKA 3.**

Solarogram s pločevinko s časom osvetlitve sedem dni. Pot Sonca po nebu se je zarisala nad hišo.

Camera obscura lahko uporabimo za snemanje Sončeve analeme. To je krivulja v obliki osmice, ki jo med letom na nebu izrišejo lege Sonca, če jih beležimo ob istem času dneva, ki ga kažejo naše ure. Nastanek analeme lahko najbolje razumemo, če si zamislimo, kako se med letom spreminjajo položaji Sonca ob dvanajsti uri (po zimskem času). Če bi Sonce vedno kulminiralo (najvišja točka na nebu) točno opoldne, bi se med letom spreminjala le opoldanska višina Sonca. Na letnem solarogramu, ko bi


**SLIKA 4.**

Kamera iz pločevinke je imela goriščno razdaljo sedem centimetrov. Čas osvetlitve je bil le dva dneva.


**SLIKA 6.**

Avtorjeva kamera. Na sprednji strani je centimetrska odprtina, kamor namestimo delček pločevine z luknjico; na ta način preizkušamo različne velikosti luknjic. Na levi strani je motorček s prenosom, ki premika zaslonko.


**SLIKA 5.**

Analema, ki sta jo z metodo solarografije posnela Maciej Zapiór and Łukasz Fajrowski.

fotografski papir osvetlili le opoldan, bi tako dobili ravno črto na lokalnem poldnevniku. To bi veljalo, če bi se Zemlja gibala okoli Sonca po krožnici z enakomerno hitrostjo, a temu ni tako. Njena tirnica je elipsa z ekscentričnostjo 0,0167. Po drugem Keplerjevem zakonu je njena hitrost ob prisoščju, okoli 3. januarja, večja (30,29 km/s) kot ob odsončju

(29,29 km/s), ki je okoli 4. julija. Če temu dodamo še učinek zaradi nagnjenosti ekliptike (Sonce se na nebu giblje tudi v smeri sever-jug in ne le vzhod-zahod), dobimo tako imenovano časovno enačbo. Ta v resnici ni enačba, ampak fizikalna količina, ki pove časovno razliko med pravim Sončevim časom, ki ga kaže sončna ura, in srednjim Sončevim časom, ki ga kaže navadna ura. Časovna enačba je torej posledica neenakomernega gibanja Zemlje okoli Sonca, zaradi katerega pravi lokalni poldan med letom včasih prehiteva in včasih zaostaja za poldnevom, ki ga kažejo navadne ure; te seveda tečejo enakomerno.

Kako lahko posnamemo analemo? Kamero usmerimo proti jugu in jo pustimo na mestu eno leto. Moramo biti pozorni, da naša kamera sploh zajame dovolj veliko vidno polje (vsaj  $46^\circ$  v navpični smeri). Najti moramo še način, kako bo svetloba Sonca prišla na fotopapir le ob dvanajsti uri. To lahko naredimo ročno in luknjico kamere odpremo vsak dan ob dvanajstih. To je precej nerodno, saj moramo biti vsak dan opoldan pri kameri. Lahko pa pred luknjico namestimo vrteči disk s špranjo, nekakšno premično zaslonko, ki se pred luknjico postavi ravno ob pravi uri. Za to lahko uporabimo navaden motorček na enosmerno napetost, ki se vrti s stalno hitrostjo. Sami smo izdelali prav tako kamero z motorčkom, ki s polžnim prenosom premika zaslonko.




→ Krmili ga mikrokontroler Arduino, ki prebere čas iz RTC (real time clock) modula, in ima še baterijo, tako da se točen čas ohrani tudi ob izpadih električnega omrežja. Motorček zapelje zaslonko do zgornjega položaja in pusti luknjico odprto za določen čas osvetlitve (približno 10 sekund). Po tem času motorček premakne zaslonko in luknjico zapre.

Vrnimo se k luknjici, ki je ključni del kamere. Če želimo dobre rezultate, moramo pametno izbrati njeno velikost. Manjši, kot je njen premer, ostrejša je slika, saj gredo skozi bolj vzporedni žarki svetlobe. Če si zamislimo, da na luknjico vpada vzporeden snop svetlobe, je nastala slika na fotopapirju krog s premerom luknjice. Zaradi tega je bolj imeti čim manjšo luknjico. Vendar narava svetlobe ni tako enostavna, ker je v osnovi elektromagnetno valovanje. Zato se uklanja na ovirah in odprtinah, kot je naša luknjica. Če si ponovno zamislimo, da na luknjico vpada vzporedni snop svetlobe, opazimo na zaslonu uklonsko sliko. To je krog, katerega velikost je obratno sorazmerna s premerom luknjice. Obstaja optimalna velikost luknjice, ki daje najostrejšo sliko. Izračunamo jo z enačbo  $d = c\sqrt{\lambda f}$ , pri čemer je


$d$  premer luknjice,  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe,  $f$  goriščna razdalja kamere in  $c$  konstanta, ki ima vrednosti od 1,542 do 2. Goriščna razdalja kamere je kar razdalja fotopapirja od luknjice. Ta enačba naj bo okvirno vodilo. Optimalne velikosti so tipično pod enim milimetrom, tako da moramo biti pazljivi pri prebadanju pločevine. Pri izdelavi luknjice težko nadzorujemo njeno velikost, lahko pa kasneje njen premer izmerimo. Ena možnost je ta, da jo položimo na optični bralnik skupaj z ravnilom in jo skeniramo pri visoki ločljivosti. Na računalniku preštejemo, koliko slikovnih točk je široka, in izračunamo velikost s pomočjo slike ravnila.

S tem člankom sem želel predstaviti camero obscuro kot nezahteven samograditeljski projekt in predstavil Sončevo analemo kot privlačno astronomsko »tarčo«, ki bo kakšnega bralca pritegnila, da se loti izdelave svoje kamere. Seveda je svetovni splet neizčrpen vir koristnih informacij, načrtov in kalkulatorjev raznih parametrov, ki nam olajšajo načrtovanje. Upam, da bomo kdaj v prihodnosti brali članke o novi domači kameri, mogoče o nadgradnji predstavljene, o novih načinih izdelave, novih idejah.





↓ ↓ ↓



	ANODNITOK	BIKOBORBA	SCALAFREDET	OHLMERITEV	LONECANIK	VLIVANCICETOR	ESNAOHCETOR	NOEKREATOR	TNTFREYTLACANI	CELASTEVILAVILA	NALČIKMLEKOV	NMAATABAROMETER	EBUONINOSOTOM	EZAVOKOLICAPIAR	TRDNESNOVOVI	STANCAVAT
	GLASBENA	LEONARDIS	ESTEPERANTO	KOSTASTARC	TARSKI	FONOLAHAC	CERNOKINAVAVANUDE	GALJEDRSKAREAKC	VASKOATASJEJKALONČAR	SSOMANLČRIRIZELON	MLETIVTICNICAREGO	JVOVKOV	ZIRKKE	ROSS	ENEJ	VALKIRE

Z

### REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 48/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Retrogradno gibanje**. Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani MARIJANA MARINŠEK iz Celja, KAREL RANKEL iz Kranja in LUKA ŽERDIN iz Maribora, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.





# EkspONENTNE VRAGOLIJE



SIMON ČOPAR



## Uvod

S funkcijami se pri matematiki nevede soočimo, še preden nam jih uradno predstavijo. Najbolj smo navajeni funkcij ene spremenljivke, ki preslikajo realno število v novo realno število in jih znamo lepo ponazoriti z grafom. Pomislimo na funkcije, sestavljene iz osnovnih aritmetičnih operacij, kot so: število množimo z 2 ali število kvadriramo. Polinomom, ki jih lahko sestavimo zgolj z osnovnimi aritmetičnimi operacijami, se v višjih razredih osnovne in kasneje tudi srednje šole, pridružijo še druge funkcije, ki jih najdemo na žepnem računalu. Te funkcije – trigonometrične funkcije, kot so sinus, kosinus, tangens, njihove inverzne funkcije ter eksponentna in logaritemska funkcija imenujemo tudi elementarne funkcije.

Ko rišemo grafe funkcij, smo omejeni praktično le z velikostjo papirja ter s svojo domišljijo, prav tako pa lahko v nedogled kombiniramo funkcije, ki jih imamo na voljo. Verjetno je marsikateri bralec v razvedrilo med urami matematike pritiskal po računalu in sestavljal funkcije, kot so  $\log(\sin(x^2))$  ali  $x^x$ . Obstajajo še kakšne funkcije, ki jih z njim ne moremo izraziti?

V tem prispevku vas bom peljal po zaviti poti, polni nenavadnih funkcij, na katero me je v gimnazijskih časih zavedla radovednost o enačbi  $2^x = x^2$ . Ogleдали si bomo izraze, ki zadevajo potenciranje, in medtem spoznali tudi, kako lahko s šolskim računalom izračunamo vrednosti funkcij, ki nimajo svojega gumba in jih tudi ne moremo sestaviti iz elementarnih funkcij.

## Reševanje enačb

Najenostavnejša uporaba funkcij je kar vstavljanje. Če imamo funkcijo  $f(x) = x^2$ , ji lahko kot argument podamo npr. število  $x = 2$  in dobimo vrednost  $f(2) = 4$ . Argument funkcije pa ni vedno znano

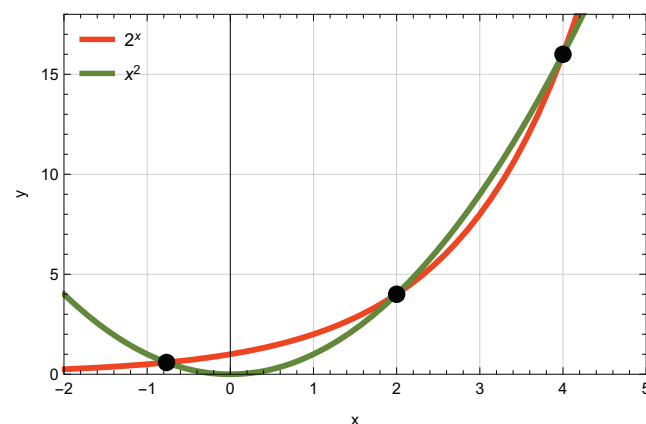
število, običajno moramo za reševanje matematičnih problemov rešiti tudi kakšno enačbo. Grafično to pomeni iskanje presečišč dveh krivulj. Kadar rešujemo kvadratno enačbo  $ax^2 + bx + c = 0$ , iščemo presečišče parabole (leva stran) in vodoravne osi (desna stran). Za ta primer znamo s pomočjo znanega obrazca presečišči izračunati analitično:

$$\blacksquare x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

V tem obrazcu nastopa funkcija kvadratnega korena, ki nam omogoči, da dobimo obe presečišči z vstavljanjem števil v računalu. Podobno npr. enačbo  $2^x = 4$ , če rešitve že ne uganemo, rešimo z uporabo dvojnškega logaritma  $x = \ln_2 4 = 2$ . Pri tem moramo seveda paziti, da presečišča sploh obstajajo.

Lahko vsako enačbo, v kateri nastopajo elementarne funkcije, rešimo z uporabo elementarnih funkcij? Na žalost je odgovor v večini primerov negativen. Oglejmo si igrivo enačbo, ki se vpraša, v katerem primeru nam menjava osnove in eksponenta ne spremeni rezultata

$$\blacksquare x^2 = 2^x.$$



SLIKA 1.

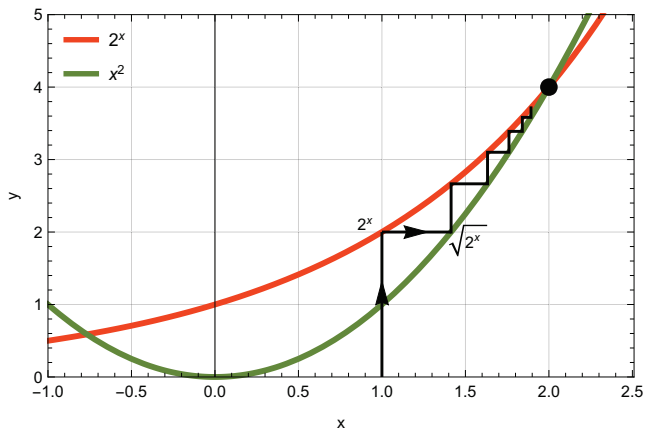
Leva in desna stran enačbe  $x^2 = 2^x$ . Opazimo tri presečišča: pozitivni pri  $x = 2$  in  $x = 4$  ter eno negativno, ki ga bomo še izračunali.



→ Grafa funkcij na levi in desni strani enačaja (slika 1) nam namigneta, da lahko pričakujemo tri presečišča – eno pri negativnem  $x$  in dve pozitivni. Ena pozitivna rešitev,  $x = 2$ , je očitna, saj velja  $2^2 = 2^2$ . Drugo,  $x = 4$ , za ta primer lahko uganemo; če se še tako trudimo, pa spremenljivke  $x$  ne moremo izraziti. Največ, kar lahko naredimo, je, da enačbo korenimo in vzamemo pozitivno vrednost. Na desni strani še vedno nastopa naša neznanica, lahko pa dobljeni izraz razumemo kot preslikavo, ki vstavljeno vrednost na desni preslika v novo vrednost

- $x \mapsto \sqrt{2^x}$ .

Sosledje operacij potenciranja in korenjenja na sliki prepoznamo kot sledenje od vrednosti  $x$  navpično do krivulje  $2^x$ , pozitivni koren pa odgovori na vprašanje, kje vodoravnica skozi ravnokar dobljeno točko seka desno polovico krivulje  $x^2$ . Slika 2 nas hitro prepriča, da je dobljeno število bližje presečišču kot prejšnje.



SLIKA 2.

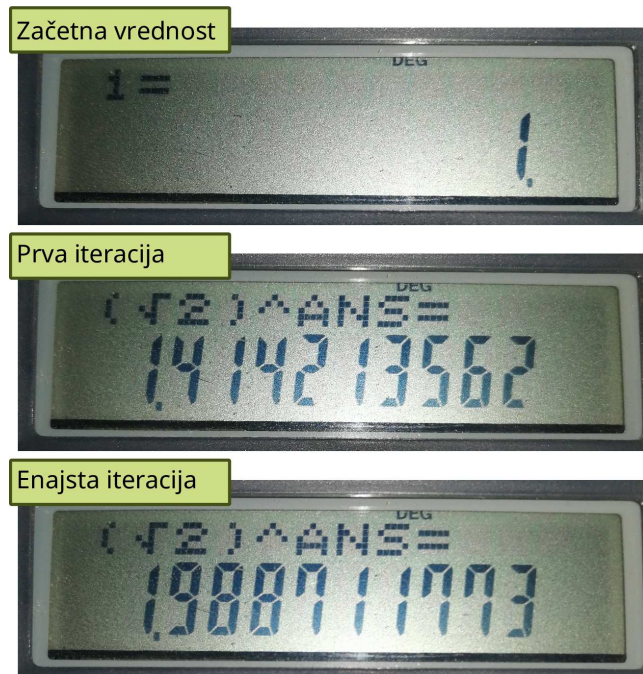
Iterativno iskanje presečišča z začetno vrednostjo  $x = 1$ . Če sledimo izračunom, navpične črte izračunajo  $2^x$  iz trenutnega približka, vodoravne pa rezultat korenijo. Po zadostnem številu ponovitev se poljubno približamo rešitvi  $x = 2$ .

Če postopek dovolj časa ponavljamo, dobimo poljubno dober približek rešitve – temu postopku rečemo tudi iteracija. S tem postopkom dobimo zaporedje izrazov

- $x \mapsto \sqrt{2^x} \mapsto \sqrt{2^{\sqrt{2^x}}} \mapsto \dots \mapsto \sqrt{2^{\sqrt{2^{\sqrt{2^{\dots}}}}}}$ .

Spomnimo še, da pri stolpu potenc izvajamo operacije od zgoraj navzdol, torej  $x^{y^z} = x^{(y^z)}$ .

Z običajnim šolskim računalom, ki dovoljuje vnos izrazov, lahko rezultat dobimo na zelo preprost način z gumbom [Ans], ki ponazarja rezultat prejšnjega računa. Vstavimo začetni približek, npr.  $x = 1$ , pritisnemo [=], vpišemo zgornjo enačbo z [Ans] namesto  $x$  ter pritisnemo enačaj, kot kaže slika 3, dokler se številke ne spreminjajo samo še na decimalnih mestih, ki nas ne zanimajo več. Tabela 1 prikazuje, kako se vrednosti približujejo rešitvi  $x = 2$ .



SLIKA 3.

Iteracija z računalom. Prvi korak si zapomni začetno število  $x = 1$  kot prejšnji rezultat, na katerega se potem sklicuje [Ans]. Z nekaj pritiski na enačaj dobimo poljubno natančen rezultat.

Podobno lahko s slike vidimo, da, če vzamemo negativni kvadratni koren, iščemo presečišče z levo stranjo parabole, s čimer najdemo skrivnostno negativno rešitev

- $x \mapsto -\sqrt{2^x} \mapsto -\sqrt{2^{-\sqrt{2^x}}} \mapsto \dots \mapsto -\sqrt{1/2^{\sqrt{1/2^{\sqrt{1/2^{\dots}}}}}}$ .

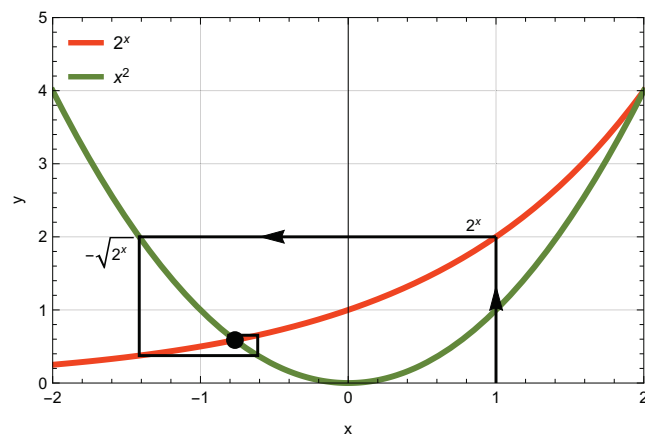
Uporabili smo še dejstvo, da minusi v potenci pomenijo obratne vrednosti osnove, kar porabi vse minuse

iteracija	$x \rightarrow \sqrt{2}^x$	$x \rightarrow \sqrt{1/2}^x$	$x \rightarrow 1,5^x$
1	1,414213562373	0,707106781187	1,500000000000
2	1,632526919438	0,782654027356	1,837117307087
3	1,760839555880	0,762427988549	2,106203352149
4	1,840910869291	0,767791240292	2,349005318612
5	1,892712696829	0,766365425098	2,592025704908
6	1,926999701847	0,766744218071	2,860441497461
7	1,950034773806	0,766643566773	3,189324761899
8	1,965664886517	0,766670310130	3,644283987905
9	1,976341754410	0,766663204247	4,382546732246
10	1,983668399304	0,766665092319	5,911914873331
50	1,999999993049	0,766664695962	napaka
$\infty$	2,000000000000	0,766664695962	/

**TABELA 1.**

Vmesni rezultati iteracije potenciranja za tri različne osnove. Prvi dve konvergirata k vrednostima funkcije  $T(\sqrt{2})$  ter  $T(\sqrt{1/2})$ , tretja pa ne konvergira.

razen tistega spredaj. V drugem stolpcu tabele 1 najdemo zaporedne vrednosti te iteracije brez sprednjega minusa, začneši s približkom  $x = 1$ .



**SLIKA 4.**

Iteracija z začetne vrednosti  $x = 1$  z negativnim korenem,  $x \rightarrow -\sqrt{2}^x$ , nas privede do negativnega presečišča.

### Stolpi potenc

Opazimo, da smo v obeh primerih računali vrednost neskončnega stolpa enakih potenc. Namesto  $\sqrt{2}$  ali  $\sqrt{1/2}$  bi lahko vstavili tudi druga števila, zato si kar predpišimo funkcijo  $T$ , ki dano število postavi v ne-

skončni stolp potenc

- $T(x) = x^{-x^{-x^{\dots}}}$ .

Vsaj ena točka te funkcije je očitna na pamet:  $T(1) = 1$ . Iteracijo lahko na računalu poskusimo s poljubnim  $x$ . Po nekaj poskusih opazimo, da nam pri prevelikih začetnih številih, npr. za število  $x = 1,5$  v 3. stolpcu tabele 1, števila pobegnejo v neskončnost. Slika 5 prikazuje graf funkcije  $T(x)$  z označenima vrednostma, ki smo ju potrebovali za izračun presečišč.

Katero je pa največje število, ki ga še lahko vstavimo v naš stolp potenc, da se iteracija še vedno ustavi? Za ta odgovor si moramo ogledati še eno sorodno funkcijo.

### Lambertova funkcija

Pobljže si oglejmo funkcijo

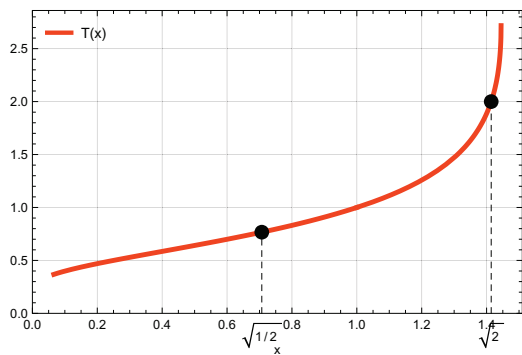
- $f(x) = xe^x$ ,

kjer je  $e \approx 2,71828$  osnova naravnega logaritma. Želimo poiskati inverz te funkcije oz. izraziti  $y$  iz enačbe

- $x = f(y) = ye^y$ .

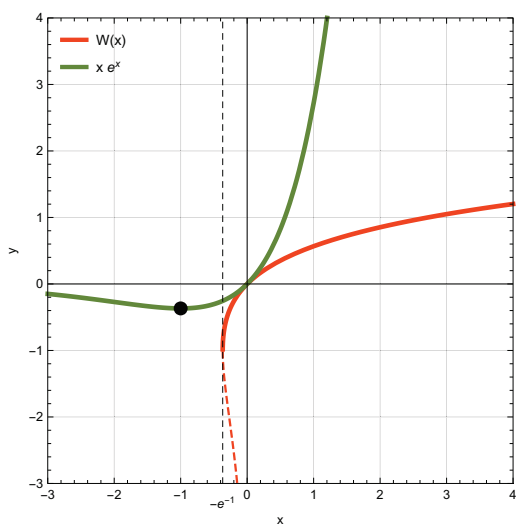
Izkaže se, da tega ne moremo storiti zgolj z elementarnimi funkcijami. Ker se reševanje te enačbe





**SLIKA 5.**

Graf funkcije  $T(x)$ , ki jo izračunamo z neskončno iteracijo potenciranja.



**SLIKA 6.**

Graf funkcije  $f(x) = x e^x$  ter njenega inverza, Lambertove funkcije  $W(x)$ . Črtnani del ne pride v poštev, saj funkcija ne more imeti dveh vrednosti.

v znanosti pogosto pojavi, so matematiki funkciji, ki enačbo reši, dali ime in oznako, četudi ni dobila svojega gumba na računalih. Vpeljemo Lambertovo funkcijo  $W$ , ki po definiciji reši zgornjo enačbo

- $y = W(x)$ .

Ta funkcija nam pomaga v fiziki pri izpeljavi Wienovega zakona, pri obravnavi vezij, ki vsebujejo diode, in še kje.

Ker je Lambertova funkcija inverz funkcije  $f(x)$ , dobimo njen graf, prikazan na sliki 6, z zrcaljenjem grafa  $f(x)$  preko diagonale. Pri tem izberemo le zgornjo vejo rešitve, podobno kot to storimo pri kvadratnem korenu. Opazimo, da funkcija nima rešitve pod določeno vrednostjo. Ta najnižja vrednost  $x_{\min}$ , ki jo še smemo vstaviti, je enaka vrednosti funkcije  $f(x)$  v njenem minimumu. Funkcija  $f(x)$  ima minimum pri  $x = -1$ , njena vrednost v tej točki pa je  $x_{\min} = f(-1) = -e^{-1}$ . Bralci, ki poznajo odvod, lahko to trditev tudi sami preizkusijo, ostale pa lahko o tem prepriča slika 6.

Lambertovo funkcijo bomo sedaj uporabili za izračun lastnosti stolpov potenc. Kot je veljalo za osnovo  $\sqrt{2}$ , velja za funkcijo  $T(x)$  v splošnem zveza

- $T(x) = x^{T(x)}$ .

Če želimo uporabiti Lambertovo funkcijo, moramo enačbo preoblikovati v obliko  $f(\square) = \square e^{\square} = \blacksquare$ . Pomaga nam zveza  $x = e^{\ln x}$ , kjer je  $\ln x$  naravni logaritem:

- $T(x)x^{-T(x)} = 1$
- $T(x)e^{-\ln x T(x)} = 1$ .

Da bo v potenci stal isti izraz kot pred njo, množimo enačbo z  $-\ln x$ :

- $-\ln x T(x)e^{-\ln x T(x)} = -\ln x$ .

Na levi prepoznamo  $f(\square) = f(-\ln x T(x))$ , od koder lahko z Lambertovo funkcijo izluščimo

- $-\ln x T(x) = W(-\ln x)$ ,

oz. v končni obliki

- $T(x) = -\frac{W(-\ln x)}{\ln x}$ .

Če imamo na voljo funkcijo  $W$ , lahko izračunamo vrednosti neskončnih stolpov potenc tudi na ta način. V računalniškem programu Mathematica jo npr. najdemo pod imenom ProductLog, v programu Maple pa pod imenom LambertW.

Izvedemo pa še nekaj več. Ker je minimalna vrednost, ki jo še dovoljuje funkcija  $W$ , enaka  $-e^{-1}$ , dobimo pogoj za maksimalno vrednost, ki jo smemo dati v neskončen stolp potenc:

- $x_{\max} = e^{1/e} \approx 1,44467$ .

To ni veliko več od  $\sqrt{2}$ , ki smo ga vstavljali za rešitev enačbe  $2^x = x^2$ , ter manj od 1,5, za katerega smo videli, da iteracija uide v neskončnost.

### Posplošitve

Funkciji  $2^x$  in  $x^2$  sta se na pozitivnih številih sekali dvakrat: enkrat pri  $x = 2$ , ki je bil tudi rezultat naše iteracije, in enkrat pri  $x = 4$ . Za konec si vprašanje še posplošimo na splošno osnovo  $a$ ,

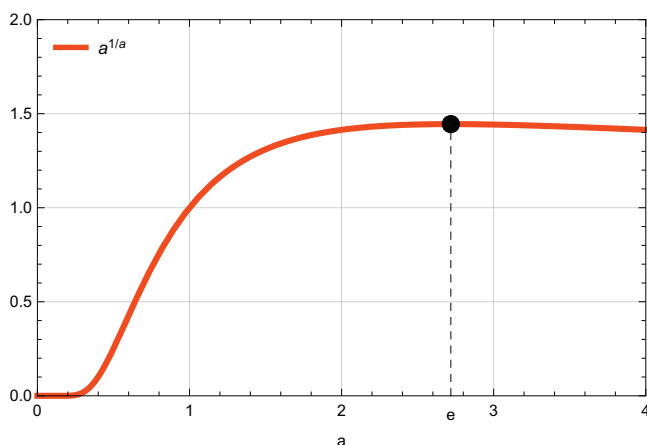
- $x^a = a^x$ ,

ki jo na podoben način lahko obrnemo v iteracijski postopek

- $x \rightarrow (a^{1/a})^x$

oziroma

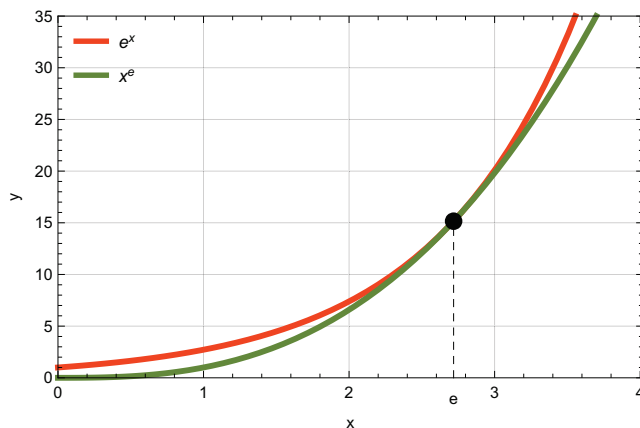
- $x_L = T(a^{1/a})$ .



SLIKA 7.

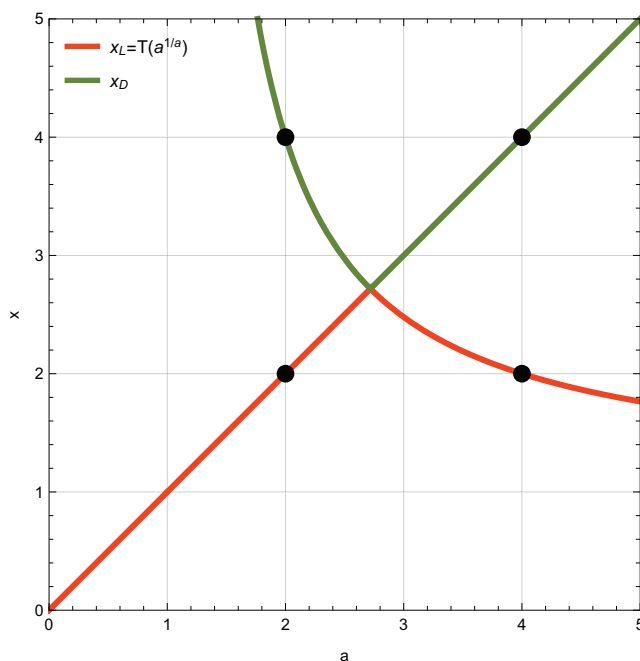
Graf funkcije  $a^{1/a}$ . Maksimum ima pri  $a = e$ .

Pri tem smo označili rešitev z  $x_L$ , ker ta iteracija vedno vodi le do levega izmed obeh pozitivnih presečišč, tako kot se je to zgodilo na sliki 2. Funkcija  $a^{1/a}$ , ki nastopa v argumentu naše funkcije (slika 7), ima maksimum pri  $a = e$ , kjer ravno dosežemo zgornjo mejo definicijskega območja  $T$ , za katerega smo pokazali, da je pri  $e^{1/e}$ . Za manjše vrednosti,  $a < e$ , nam bo ta funkcija dala le trivialno rešitev. Kot smo videli na sliki 2, je prvo pozitivno presečišče



SLIKA 8.

Grafa funkcij  $e^x$  in  $x^e$  so ne sekata dvakrat, temveč se le dotakneta.



SLIKA 9.

Levo in desno pozitivno presečišče krivulj  $a^x$  in  $x^a$ . Zaradi simetrije problema desne rešitve pri  $a < e$  ustrezajo zrcaljenju leve rešitve pri  $a > e$ . Označeni sta rešitvi pri  $a = 2$ , ki znašata  $x_L = 2$  in  $x_D = 4$ , ter enaki rešitvi pri  $a = 4$ .



→ pri  $x_L = a$ . Pri  $a = e$  se funkciji  $a^x$  in  $x^a$  ne sekata dvakrat, temveč se le dotakneta, kot kaže slika 8.

Za  $a > e$  presečišči zamenjata vlogi in nam iteracijski postopek da drugo, zanimivejšo rešitev. Hkrati opazimo, da sta v enačbi  $a^x = x^a$  spremenljivki  $x$  in  $a$  zamenljivi. To pomeni, da lahko z zrcaljenjem rešitev za  $a > e$  dobimo drugo presečišče tudi za  $a < e$ , kjer bi sicer z iteracijo dobili le  $x_L = a$ . Slika 9 prikazuje rešitev, ki jo dobimo z iteracijo  $x_L = T(a^{1/a})$ , ter njeno zrcalno sliko, ki nam pomaga določiti  $x_D$ . To nam vsaj grafično pokaže vejo rešitve, ki vsebuje  $x_D = 4$  s slike 1.

Pozorni bralec bo opazil, da nismo ničesar rekli o spodnji meji definicijskega območja funkcije  $T(x)$ . Več o tem si lahko preberete v viru [1]. Prav tako se nismo posvečali analitičnemu izrazu za desno rešitev  $x_D$ , za katerega bi potrebovali spodnjo, črtkano vejo inverza funkcije  $f(x)$  s slike 6. Te ne dobimo z neskončno iteracijo potenciranja temveč z neskončno iteracijo logaritmiranja.

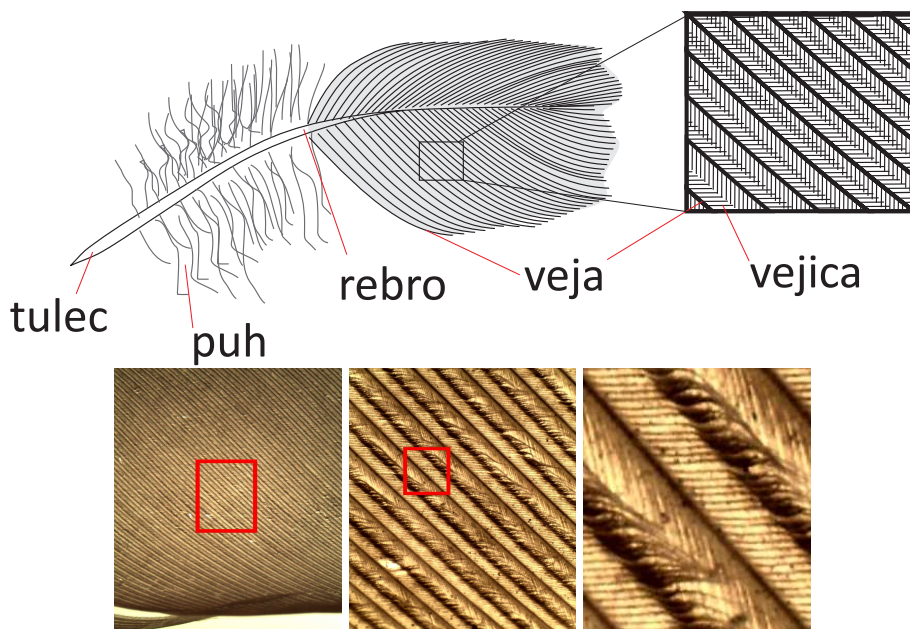
Iteracija je le ena izmed mnogih numeričnih metod za reševanje enačb in s tem za izračun večjega nabora funkcij. Uporaba gumba Ans nas reši pred stalnim ročnim vstavljanjem

prejšnjega približka v računalu. Na prvi pogled se zdi, da je iteracija manj natančna kot računanje z vgrajenimi funkcijami, saj delamo s približki. Zavedati pa se moramo, da se izračun vseh funkcij na koncu prevede na zaporedje seštevanj in množenj. Žepna računala in računalniki vedno vrnejo le približen rezultat z vnaprej znanim številom decimalnih mest. Tudi pri pisnem deljenju števil izvajamo zaporedje seštevanj, odštevanj in množenj, postopek pa ustavimo, ko smo z natančnostjo zadovoljni. Ločnica med elementarnimi in »specialnimi« funkcijami, kamor bi lahko šteli Lambertovo funkcijo in neskončni stolp potenc, leži torej le v dogovoru ter morda v obstoju vnaprej pripravljenih gumbov na žepnem računalu.

### Literatura

- [1] Luca Moroni, *The strange properties of the infinite power tower*, 2019. arXiv:1908.05559 [math.HO].

× × ×



**SLIKA 3 K PRISPEVKU NARAVNA UKLONSKA MREŽICA.**

Mikroskopska slika peresa v različnih povečavah (zgoraj). Shematski prikaz sestave peresa (spodaj).

# Naravna uklonska mrežica



ALEŠ MOHORIČ

→ Gotovo ste na svojih sprehodih v naravi že našli ptičje pero. Pa ste kdaj pogledali skozenj proti drobni svetilki? Če je svetloba iz svetilke bela, opazimo, kako se razkloni v več mavričnih lis. Slika 1 kaže fotografijo peresa, za katerim sveti diodna svetilka pametnega telefona. Mavričnih lis na fotografiji ni videti, svetilko za peresom zaznamo le po osvetljenih peresnih rebrih in pridihu modrikaste ter rdečkaste barve.

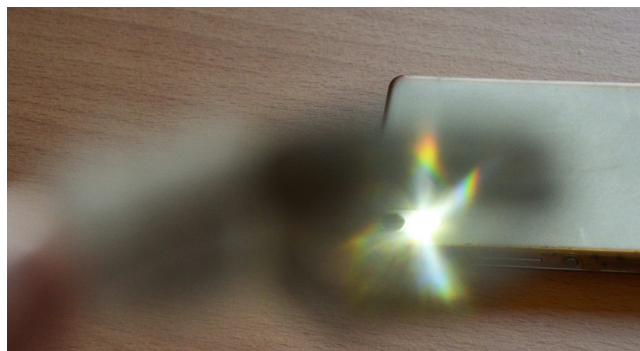
Uklonski pojav omenjene mavrične lise lažje zaznamo z očmi kot pa s kamero, ki ima manjšo globinsko ostrino. Pojav pa pride do izraza tudi na fotografiji, ko kamero izostrimo na neskončnost. Takrat se točkasta svetilka razpotegne v svetel križ z mavričnimi lisami na koncu krakov. Izid poskusa kaže slika 2.

Razlog, da pero razkloni svetlobo svetilke na več mavričnih lis, odkrijemo, če z mikroskopom pogledamo podrobno strukturo peresa. Iz rebra peresa



SLIKA 1.

Pero, za katerim je svetilka pametnega telefona. Pero je od kamere oddaljeno za stežaj roke, svetilka pa je daleč zadaj. Fotografija je izostrena na pero, slika telefona v ozadju ni ostra.



SLIKA 2.

Fotografija svetilke, narejena skozi pero, kamera je izostrena na svetilko in ne na pero. Fotografija je narejena s fotoaparatom, ki omogoča ročno ostrenje.

na dve nasprotni strani izraščajo veje, iz njih pa še drobnejše vejice. Vejice tvorijo urejeno strukturo, ki deluje kot uklonska mrežica. Uklonska mrežica je element, s katerim v fiziki razklonimo svetlobo na njene spektralne komponente. Narejena je kot glavnik, z množico dolgih, ozkih rež, le velikost rež je dosti manjša, tako da jih pride nekaj sto na milimeter. Uklonska mrežica razkloni ozek curek bele svetlobe v ravnini pravokotni na reže, tako da nastane več svetlejših mavričnih lis razporejenih v črti. Če prekrizamo dve mrežici, opazimo mavrične lise razporejene po celi ravnini. Na mikroskopskem posnetku v največji povečavi (slika 3 desno) lahko jasno vidimo dva niza vejic, ki ležijo med seboj približno pod pravim kotom. Zaradi prehajanja svetlobe skozi tako urejene reže med vejicami, je uklonska slika taka, kot da bi prekrizali dve uklonski mrežici.

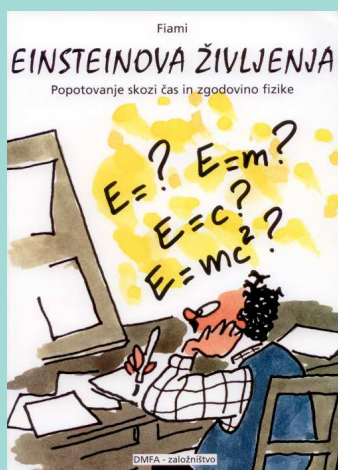
Vidimo, da tudi v naravi najdemo spektralne pripomočke, ki razkrivajo pisano naravo svetlobe. Tak primer je še npr. mavrica ali pa obarvana tanka plast olja. Ko boste naslednjič našli pero, le pokukajte skozenj, ali opazite kaj novega in nenavadnega. Potem, ko prijemate pero, si pa le umijte roke z milom, če v okolici razsaja ptičja gripa.

× × ×

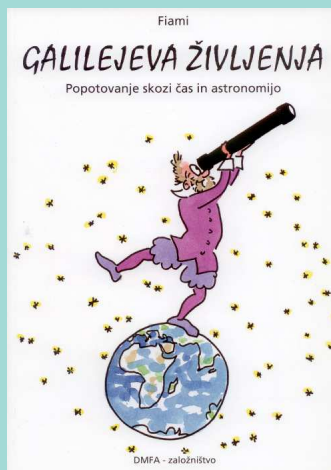
# Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvezo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.