

KONFIGURACIJSKI PROSTORI IN TOPOLOŠKA KOMPLEKSNOST

ALEKSANDRA FRANC

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55M30, 55R80

Na nekaj primerih pogledamo, kako določimo konfiguracijski prostor robotskega sistema. Spoznamo še pojem topološke kompleksnosti in s pomočjo znanega Brouwerjevega rezultata o vektorskih poljih na sferah poiščemo eksplisitna pravila gibanja ter določimo topološko kompleksnost sfer.

CONFIGURATION SPACES AND TOPOLOGICAL COMPLEXITY

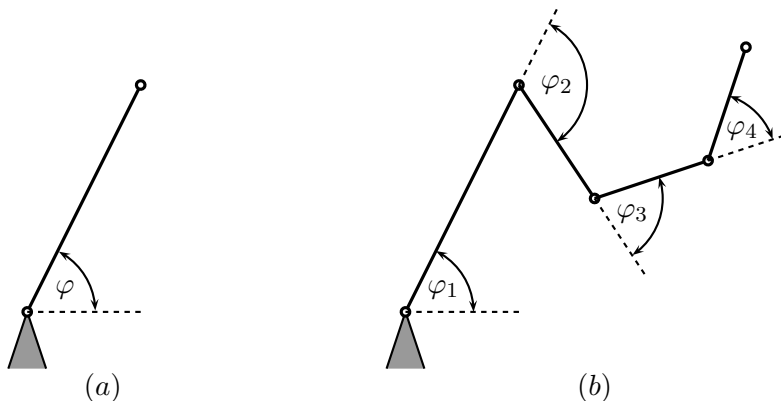
We look at a few examples of configuration spaces and introduce the notion of topological complexity. Finally, we use the famous Hairy Ball Theorem of Brouwer to construct explicit motion planning rules and determine the topological complexity of spheres.

Konfiguracijski prostori

Poiskati želimo matematične modele, ki dobro opisujejo mehanske, robotske ali fizikalne sisteme. Tak sistem je lahko na primer robotska roka v tovarni avtomobilov, robotski sesalnik, ki se vozi po naši dnevni sobi, vozički, s katerimi po tirih na tovarniških tleh prevažamo komponente iz enega dela tovarne v drugega, molekula plina, ki potuje po prostoru, ali pa recimo vrtavka.

Pri vsakem takem sistemu opazujemo *konfiguracijski prostor*, tj. prostor vseh možnih položajev oziroma stanj sistema. Če želimo sistem premakniti iz enega stanja v drugo, potem moramo samo poiskati neko pot v konfiguracijskem prostoru, ki ti stanji povezuje, in ta pot, če obstaja, nam bo povedala, prek katerih stanj moramo izvesti premik. Z vprašanjem obstoja in zveznih izbiri takih poti se bomo ukvarjali v razdelku o topološki kompleksnosti, tukaj pa si na nekaj primerih oglejmo, kako lahko določimo konfiguracijski prostor danega sistema. Spodnji primeri so večinoma povzeti po [1, §3.5].

Primer 1. Denimo, da je naš sistem sestavljen iz ene same robotske roke, ki je vpeta v enem krajišču in se lahko prosto vrti v ravnini, kot nakazuje slika 1(a). Položaj roke je natančno določen s kotom φ , ki ga roka oklepa z vodoravnico. Kot φ je lahko poljubno število z intervala $[0, 2\pi]$, pri čemer krajišči 0 in 2π določata isti položaj. Konfiguracijski prostor tega sistema je torej krožnica S^1 .

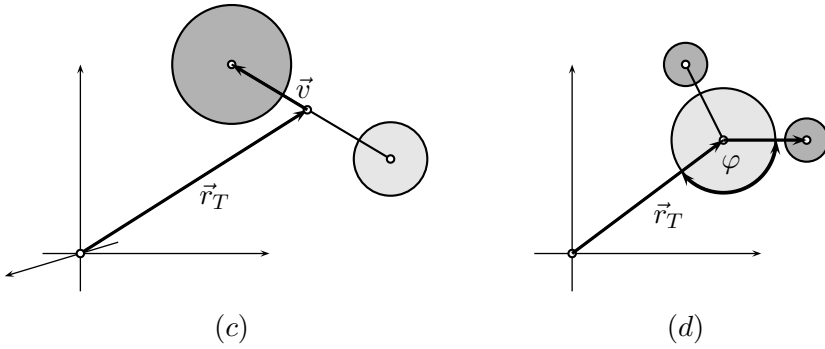


Slika 1. Enostavna (a) in sestavljena (b) robotska roka. Položaj sistema je natančno določen z označenimi koti φ oziroma φ_i , $i = 1, \dots, n$, konfiguracijski prostor pa je krožnica S^1 oziroma produkt $S^1 \times \dots \times S^1$ n kopij krožnice, kjer je n število ročic.

Primer 2. Posplošitev prejšnjega primera je robotska roka, sestavljena iz več zaporedno vezanih ročic, ki so vse prosto vrtljive v isti ravnini. Primer takega sistema je prikazan na sliki 1(b). Tokrat je stanje sistema povsem določeno, če poznamo še kote, ki jih vsaka naslednja ročica oklepa s tisto pred njo. Vsak od kotov $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je spet neko število z intervala $[0, 2\pi]$, pri čemer krajišči 0 in 2π določata isti položaj, poleg tega pa lahko kote izberemo poljubno. Možni položaji sistema torej ustrezajo urejenim n -tericam $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ in konfiguracijski prostor je produkt n kopij krožnice, $S^1 \times \dots \times S^1$. Konfiguracijski prostor za primer $n = 2$ je prikazan na sliki 4(b).

Primer 3. Na sliki 2(c) je shema molekule ogljikovega monoksida, ki jo sestavljata atom ogljika (večji, temnejši) in atom kisika (manjši, svetlejši). Zanimajo nas vsi možni položaji te molekule v $\mathbb{R}^3$. Njen položaj je natanko določen, če poznamo krajevni vektor težišča $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^3$ in vektor $\vec{v}$, ki določa smer od težišča do središča ogljikovega atoma. Slednji določa neko smer v $\mathbb{R}^3$, njegova velikost pa je vedno enaka, zato leži na neki sferi $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Konfiguracijski prostor tega sistema je torej $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

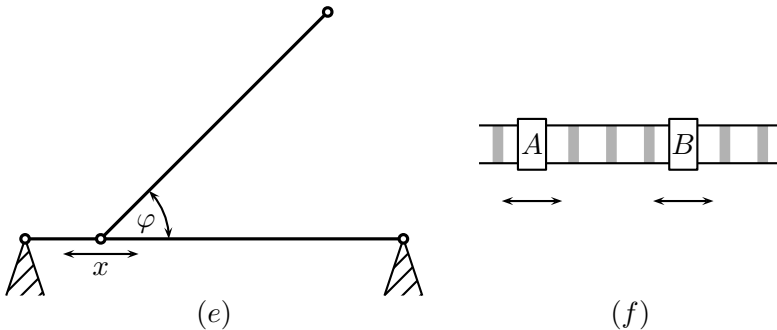
Primer 4. Konfiguracijski prostor molekule vode v ravnini je $\mathbb{R}^2 \times S^1$, saj je njen položaj natančno določen s krajevnim vektorjem središča atoma kisika $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^2$ in s kotom $\varphi \in S^1$, ki ga ta vektor oklepa z enim od obeh vodikovih atomov. Seveda moramo vnaprej določiti, katerega od obeh vodikovih atomov smo izbrali. Na sliki 2(d) smo ga izbrali tako, da drugi vodikov atom oklepa kot $\varphi + 104,45^\circ$ z vektorjem $\vec{r}_T$, merjeno od $\vec{r}_T$ v smeri, ki je



Slika 2. Molekuli ogljikovega monoksida (c) in vode (d) v prostoru $\mathbb{R}^3$ in v ravnini $\mathbb{R}^2$.

nasprotna vrtenju urinih kazalcev. Ta konfiguracijski prostor si lažje predstavljamo, če upoštevamo, da je ravnina $\mathbb{R}^2$ homeomorfna odprtemu disku $\mathring{B}^2$, in tako dobimo odprt torus $\mathring{B}^2 \times S^1$, kot vidimo na sliki 4(d).

Pa recimo, da je molekula vode v $\mathbb{R}^3$. Položaj kisikovega atoma določimo s krajevnim vektorjem $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^3$. Položaj prvega vodikovega atoma je potem določen z nekim vektorjem smeri $\vec{v} \in S^2$. Drugi vodikov atom je lahko kjerkoli na krožnici, ki jo opiše, ko molekulo zavrtimo okrog osi, ki poteka čez središči preostalih dveh atomov. Zato za določitev položaja molekule potrebujemo še drugi vektor smeri $\vec{u} \in S^1$. Konfiguracijski prostor je torej $\mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^1$.



Slika 3. Enostavna robotska roka s premikajočim se vrtiliščem (e) in sistem dveh robotov na neskončnem tiru (f).

Primer 5. Denimo, da vrtilišče robotske roke iz primera 1 ni fiksno, ampak se lahko premika vzdolž neke daljice, tirnice dolžine $d > 0$. Shema sistema

je na sliki 3(e). Položaj sistema je določen z razdaljo $x \in [0, d]$ od levega pritrdišča tirnice do vrtilišča ter s kotom $\varphi \in S^1$, ki ga ročica oklepa s tirnico. Konfiguracijski prostor je torej kolobar $[0, d] \times S^1$, produkt intervala in krožnice s slike 4(e).

Primer 6. Nazadnje si oglejmo še primer dveh robotov, označimo ju z A in B , ki se premikata po neskončni tirnici, kot vidimo na sliki 3(f). Robota lahko predstavimo s točkama na realni osi. Njuna položaja sta torej določena s parom realnih števil (x_A, x_B) . Seveda robota ne smeta biti istočasno v isti točki, zato je konfiguracijski prostor množica

$$\{(x_A, x_B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_A \neq x_B\},$$

tj. ravnina brez simetrane $y = x$. Opazimo, da je v tem primeru konfiguracijski prostor sestavljen iz dveh kosov. V vseh drugih primerih so bili konfiguracijski prostori povezani s potmi in smo lahko iz poljubnega stanja sistema prešli v poljubno drugo stanje. V tem primeru pa očitno ne moremo robotov samo s premikanjem po premici pripeljati iz stanja, ko se robot A nahaja levo od robota B , do stanja, ko je robot B levo od robota A . Konfiguracijski prostor smo narisali na sliki 4(f).

Posplošitev tega primera je konfiguracijski prostor n različnih točk v m -razsežnem evklidskem prostoru,

$$F(\mathbb{R}^m, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^m)^n \mid x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\}.$$

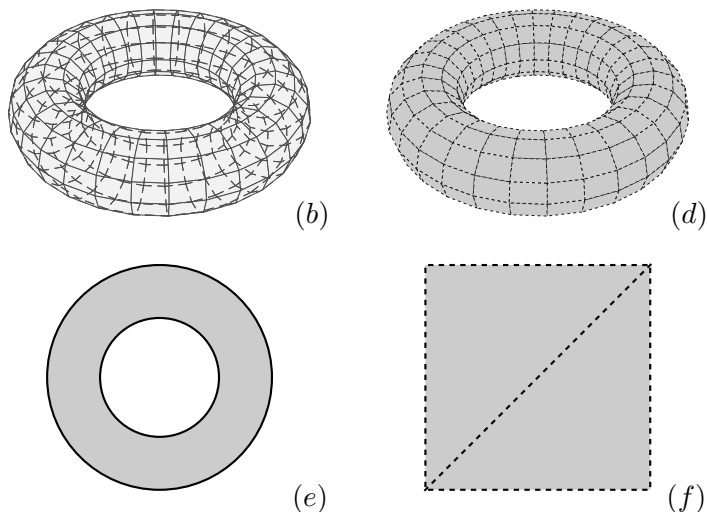
Pred nekaj leti sta Farber in Grant [7] dokončno izračunala topološko kompleksnost $F(\mathbb{R}^m, n)$. To invarianto bomo spoznali v naslednjem razdelku.

Topološka kompleksnost

Topološka kompleksnost, ki jo je vpeljal Farber [3] leta 2001, meri, kako zapleteno je gibanje po konfiguracijskem prostoru nekega robotskega sistema. Tukaj bomo podali nekaj osnovnih dejstev, podrobnosti pa lahko bralec najde v Farberjevih člankih [3], [4], [6] ali pa v četrtem poglavju knjige [5]. Čeprav vse trditve veljajo tudi v večji splošnosti (na primer za CW komplekse), bomo tukaj predpostavili, da je konfiguracijski prostor mnogoterost, tj. prostor, v katerem ima vsaka točka okolico, homeomorfno evklidskemu prostoru $\mathbb{R}^k$ ali pa polprostoru $\mathbb{R}_+^k$ za neki fiksni $k \in \mathbb{N}$.

Naj bo topološki prostor X konfiguracijski prostor nekega robotskega sistema. Gibanje robota lahko predstavimo s potjo med dvema točkama (začetnim in končnim položajem robota). Predpostavimo, da je X povezan s potmi, tako da je res mogoče priti iz vsake točke do vsake druge, in označimo z X^I prostor vseh poti v X . Naj bo π preslikava

$$\pi: X^I \rightarrow X \times X, \quad \pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1)),$$



Slika 4. Konfiguracijski prostori: (b) torus $S^1 \times S^1$ za robotsko roko z dvema ročicama, (d) polni torus brez robnega torusa $\hat{B}^2 \times S^1$ za molekulo vode v $\mathbb{R}^2$, (e) kolobar $I \times S^1$ za ročico na premičnem pritrdišču in (f) ravnina brez simetrale lihih kvadrantov za dva robota na premici.

ki vsaki poti $\alpha: I \rightarrow X$ priredi njeno začetno in končno točko. Iščemo algoritem $s: X \times X \rightarrow X^I$, ki bi za poljuben par točk $(x, y) \in X \times X$ vrnil neko pot $s(x, y): I \rightarrow X$, poleg tega pa želimo, da bi bile te poti zvezno odvisne od x in y . Seveda bo veljalo tudi $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$. Preslikavi s s takimi lastnostmi pravimo *prerez*.

Hitro se lahko prepričamo, da prerez, ki je zvezen na vsem $X \times X$, obstaja le tedaj, ko je prostor X kontraktibilen (tj. lahko ga skrčimo v točko $x_0 \in X$ z zvezno preslikavo $H: X \times I \rightarrow X$, za katero je $H(x, 0) = x$ in $H(x, 1) = x_0$ za vse $x \in X$) [3, izrek 1]. Namesto globalnega si torej raje oglejmo lokalne zvezne prereze. Vprašajmo se, najmanj koliko lokalnih prerezov potrebujemo, da lahko za poljuben par točk dobimo pot med njima. Tako naravno pridemo do naslednje definicije [3, definicija 2]:

Definicija 1. *Topološka kompleksnost* $\text{TC}(X)$ prostora X je najmanjše naravno število n , za katero obstajajo pokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ produkta $X \times X$ z odprtimi množicami in preslikave $s_i: U_i \rightarrow X^I$, za katere je $\pi \circ s_i = \text{id}_{U_i}$, $i = 1, \dots, n$. Če tak n ne obstaja, pravimo, da je $\text{TC}(X) = \infty$.

Formulacija je zelo podobna definiciji Lusternik-Schnirelmannove kategorije [2, definicija 1.1]:

Definicija 2. *Lusternik-Schnirelmannova (LS) kategorija* $\text{cat}(X)$ prostora X je najmanjše naravno število n , za katero obstaja pokritje $\{U_1, \dots, U_n\}$

prostora X z odprtimi množicami, ki jih lahko znotraj X skrčimo v točko. Če tak n ne obstaja, pravimo, da je $\text{cat}(X) = \infty$.

Takoj opazimo, da je topološko kompleksnost in LS kategorijo v splošnem težko določiti neposredno po definiciji. Poiskati moramo namreč pokritje z najmanjšim možnim številom množic z želenimi lastnostmi, potem pa moramo še dokazati, da je res optimalno. Pri tem so nam v pomoč številne zgornje in spodnje meje. Tukaj bomo našeli nekaj najpreprostejših.

LS kategorija je omejena z dimenzijo [9, trditev 2.1]. Analogna dimenzijska neenakost velja tudi za topološko kompleksnost, hkrati pa lahko topološko kompleksnost omejimo z LS kategorijo navzgor in navzdol [3, izrek 4] in [3, izrek 5]:

Trditev 1. *Naj bo X s potmi povezana mnogoterost. Tedaj je:*

$$(a) \text{ cat}(X) \leq \dim(X) + 1,$$

$$(b) \text{ TC}(X) \leq 2 \cdot \dim(X) + 1 \text{ in}$$

$$(c) \text{ cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) - 1.$$

Dimenzijski oceni za LS kategorijo in topološko kompleksnost lahko še izboljšamo, če je prostor X visoko povezan (pri $n \geq 1$ pravimo, da je prostor X n -povezan, če je za vse $i \leq n$ vsaka preslikava $S^i \rightarrow X$ homotopna neki konstantni preslikavi, tj. če lahko slike poljubnih sfer dimenzij n ali manj znotraj prostora X skrčimo v točko). Rezultat za LS kategorijo je izpeljal James [9, trditev 5.1], za topološko kompleksnost pa Farber [4, izrek 5.2].

Izrek 2. *Naj bo X $(p-1)$ -povezana mnogoterost. Potem je*

$$(a) \text{ cat}(X) \leq \frac{\dim(X)}{p} + 1 \text{ in}$$

$$(b) \text{ TC}(X) < \frac{2 \cdot \dim(X) + 1}{p} + 1.$$

Primer 7. Poglejmo, kaj nam te zgornje meje povedo o sferah. Sfera S^n je n -dimenzionalen in $(n-1)$ -povezan prostor (S^m ne moremo homotopsko netrivialno preslikati v S^n pri $m \leq n-1$, npr. krožnico na sferi lahko vedno skrčimo v točko). Iz ocene 1(a) dobimo slabo zgornjo mejo $\text{cat}(S^n) \leq n+1$, iz ocene 2(a) pa boljšo

$$\text{cat}(S^n) \leq \frac{n}{n} + 1 = 2.$$

Izkaže se, da je $\text{cat}(S^n) = 2$. Po definiciji je namreč LS kategorija prostora enaka 1 natanko tedaj, ko je prostor kontraktibilen, sfere pa to niso (to lahko dokažemo s pomočjo Brouwerjevega izreka o fiksnih točkah preslikav na diskih). Kategorična spodnja meja 1(c) nam pove, da je $2 \leq$

$\text{TC}(S^n)$. Dimenzijska ocena za topološko kompleksnost 1(b) pravi, da je $\text{TC}(S^n) \leq 2n + 1$, medtem ko dobimo s pomočjo LS kategorije boljšo oceno 1(c): $\text{TC}(S^n) \leq 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Če upoštevamo še povezanost, dobimo

$$\text{TC}(S^n) < \frac{2n+1}{n} + 1 = 2 + 1 + \frac{1}{n} = 3 + \frac{1}{n}.$$

Ker je $\text{TC}(S^n)$ naravno število, lahko spet sklepamo le, da je $\text{TC}(S^n) \leq 3$. Izkaže pa se, da je ta meja ostra samo za sode n , medtem ko pri lihih n velja $\text{TC}(S^n) = 2$. To bomo pokazali v naslednjem razdelku.

Sfere

V tem razdelku bomo določili topološko kompleksnost sfer S^n . Pomagali si bomo z znanim Brouwerjevim rezultatom o (ne)počesanih sferah:

Izrek 3. *Na S^n obstaja povsod neničelno gladko tangentno vektorsko polje natanko tedaj, ko je n lih.*

Najprej razložimo, od kod izreku ime. Sfero S^n predstavimo kot podmnožico točk

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

v $\mathbb{R}^{n+1}$. Vektorsko polje na S^n je preslikava $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ki vsaki točki sfere priredi neki vektor iz $\mathbb{R}^{n+1}$. Lahko si torej predstavljamo, da iz vsake točke na sferi S^n raste las, ki kaže v neko smer v $\mathbb{R}^{n+1}$. Sfero želimo počesati, tj. radi bi dosegli, da je v vsaki točki pripadajoči vektor tangenta na sfero (pravokoten na polmer). Zgornji izrek nam pove, da pri lihih n to vedno lahko storimo, pri sodih n pa nikoli. O prvem se lahko hitro prepričamo, saj ni težko videti, da za sfero

$$S^{2n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1\}$$

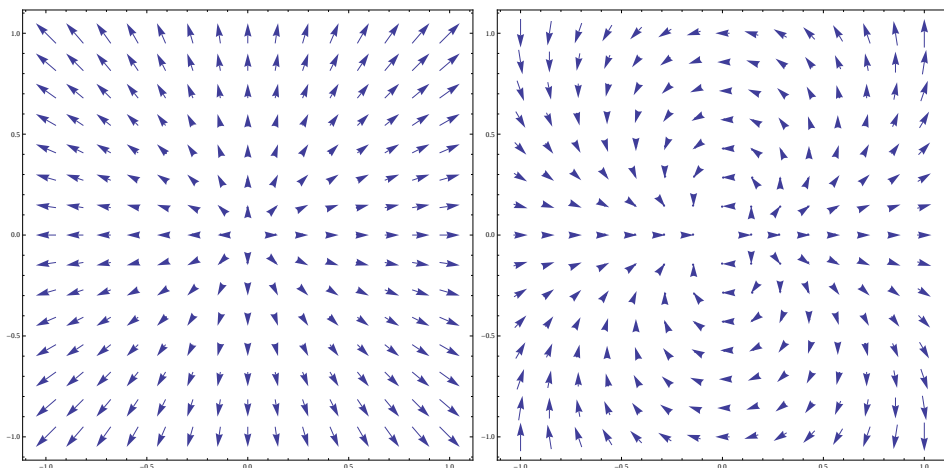
predpis

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$$

krajevemu vektorju vsake točke sfere priredi neki vektor, ki je nanj pravokoten (njun skalarni produkt je enak 0). Težje je dokazati, da za sfere sodih dimenzij takega predpisa ni.

Krožnico S^1 torej lahko počesemo, medtem ko bomo na žogi S^2 vedno dobili kak vrtinec, singularno točko, v kateri bo polje enako nič. Dva primera okolice singularne točke sta prikazana na sliki 5.

Vrnimo se k topološki kompleksnosti. V primeru 7 smo ugotovili, da je $2 \leq \text{TC}(S^n) \leq 3$. Za lihe n je $\text{TC}(S^n) = 2$, kar dokažemo tako, da



Slika 5. Dva primera obnašanja vektorskega polja v okolici singularne točke.

konstruiramo pokritje $S^n \times S^n$ z dvema množicama, nad katerima obstajata zvezna prereza.

Naj bo

$$U_1 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq -y\},$$

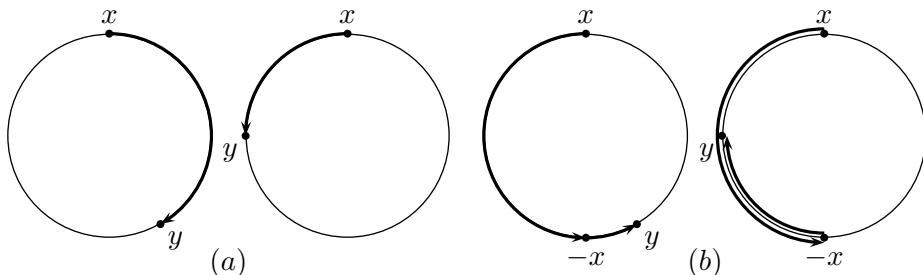
$$U_2 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y\}.$$

Iz prve množice smo torej izvzeli pare antipodnih točk, iz druge pa tiste pare, kjer sta obe koordinati enaki.

Prerez $s_1: U_1 \rightarrow (S^n)^I$ naj vsakemu paru točk $(x, y) \in U_1$ priredi pot $s_1(x, y)$, ki teče od x do y po krajšem loku vzdolž glavne krožnice, določene z x in y . Ker točki x in y nista antipodni, je prerez s_1 dobro definiran in poljubnemu paru točk $(x, y) \in U_1$ priredi najkrajšo možno pot po sferi od x do y .

Zdaj pa uporabimo dejstvo, da imamo pri lihih n na S^n neko povsod neničelno tangentno vektorsko polje v . To polje v vsaki točki sfere S^n natanko določa neko glavno krožnico in še neko odlikovano smer na tej krožnici. Prerez $s_2: U_2 \rightarrow (S^n)^I$ naj vsakemu paru točk $(x, y) \in U_2$ priredi pot $s_2(x, y)$, ki gre najprej od x do antipodne točke $-x$ vzdolž glavne krožnice v smeri, določeni z $v(x)$, nato pa teče od $-x$ do y po najkrajši možni poti. Tudi prerez s_2 je dobro definiran, ker polje v ni nikjer enako nič in ker točki $-x$ in y nista antipodni. Na sliki 6 sta za primer $n = 1$ prikazana po dva primera za vsak prerez.

Na sferah sodih dimenzij pa ne obstajajo povsod neničelna tangentna vektorska polja, zato zgornja ideja odpove. Z nekaj iznajdljivosti lahko najdemo pokritje s tremi množicami. Za sode n obstaja na S^n tangentno vektorsko polje, ki je neničelno povsod razen v eni točki $x_0 \in S^n$. Množico U_1 in prerez s_1 definiramo enako kot pri lihih n . Množico U_2 nekoliko



Slika 6. Na sliki (a) sta prikazani poti $s_1(x, y)$ za dve različni (generični) izbiri x in y . Na sliki (b) sta prikazani poti $s_2(x, y)$ pri istih dveh izbirah za x in y . Če je $x = y$, je $s_1(x, x) = c_x$ konstantna pot, $s_2(x, x)$ pa ni definirana. Če je $y = -x$, opiše $s_2(x, -x)$ lok med x in $-x$ v pozitivni smeri (določeni z vektorskim poljem v), $s_1(x, -x)$ pa ni definirana.

popravimo:

$$U_2 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y, x \neq x_0\}.$$

Na tem U_2 lahko definiramo s_2 kot zgoraj, saj je $v(x)$ za $x \in U_2$ neničelno. Skupaj množici U_1 in U_2 pokrijeta ves $S^n \times S^n$ razen točke $(x_0, -x_0)$. Izberimo poljubno kontraktibilno okolico U_3 točke $(x_0, -x_0)$. Nad U_3 tedaj obstaja zvezen prerez s_3 .

S konstrukcijo pokritja smo torej dobili še eno potrditev, da je $\text{TC}(S^n) \leq 3$. Potrebujemo še spodnjo mejo, ki bi pokazala, da za sode n velja $\text{TC}(S^n) > 2$. Dobimo jo iz kohomološke ocene.

Farber [3, izrek 7] je pokazal naslednji izrek:

Izrek 4. Naj bo k obseg. Tedaj je $\text{TC}(X) \geq \text{zcl}_k(X) + 1$.

Tukaj je $\text{zcl}_k(X)$ dolžina najdaljšega netrivialnega produkta določenih kohomoloških razredov. V primeru sodih sfer S^{2k} lahko najdemo kohomološke razrede a_k , za katere je $a_k^2 \neq 0$, od koder potem sklepamo, da je $\text{zcl}_{\mathbb{Q}}(S^{2k}) \geq 2$ in zato $\text{TC}(S^{2k}) \geq 3$. Za lihe sfere taki razredi ne obstajajo.

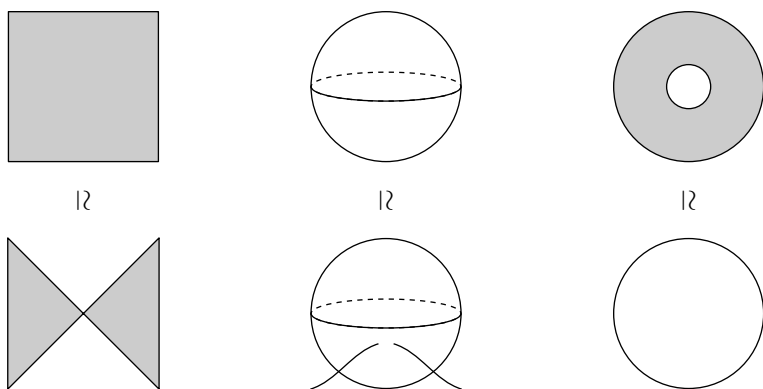
Dokazali smo:

Izrek 5. Za n -dimenzionalno sfero S^n velja:

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 2; & n \text{ lih,} \\ 3; & n \text{ sod.} \end{cases}$$

Kaj pa topološke kompleksnosti konfiguracijskih prostorov iz prvega razdelka? Pomagali si bomo z dejstvom, da je topološka kompleksnost homotopska invarianta. To pomeni, da se ne spremeni, če prostor zamenjamo s

kakšnim drugim homotopsko ekvivalentnim prostorom. Tako bi lahko na primer skrčili v točko poljuben kontraktibilen podprostor, pa to ne bi vplivalo na topološko kompleksnost. Lahko bi tudi na prostor v poljubni točki vzdolž enega od krajišč prilepili interval (rečemo, da smo dodali brk), ali pa celo skrčili cel kontraktibilen faktor v produktu prostorov v točko. To so zgolj najpreprostejši in geometrično nazorni primeri konstrukcij, ki ne spremenijo homotopskega tipa prostora, a za naše potrebe bodo zadoščali. Nekaj primerov je ilustriranih na sliki 7.



Slika 7. V kvadratu $I \times I$ stisnemo v točko daljico $\{\frac{1}{2}\} \times I$, sferi S^2 dodamo dva brka, v kolobarju $S^1 \times I$ skrčimo kontraktibilni faktor I v točko. V vseh treh primerih tako dobimo prostor, ki je homotopsko ekvivalenten prvotnemu.

- (a) **Enostavna robotska roka:** Konfiguracijski prostor je krožnica in vemo, da je $\text{TC}(S^1) = 2$.
- (b) **Sestavljena robotska roka:** Topološko kompleksnost produkta n krožnic je izpeljal Farber [3, izrek 12]:

$$\text{TC}(S^1 \times \dots \times S^1) = n + 1.$$

- (c) **Molekula CO v prostoru:** Prostor $\mathbb{R}^3 \times S^2$ je homotopsko ekvivalenten sferi S^2 (faktor $\mathbb{R}^3$ je kontraktibilen in ga lahko skrčimo v točko), zato je

$$\text{TC}(\mathbb{R}^3 \times S^2) = \text{TC}(S^2) = 3.$$

- (d) **Molekula H₂O v ravnini:** Prostor $\mathbb{R}^2 \times S^1$ je homotopsko ekvivalenten krožnici S^1 , zato je

$$\text{TC}(\mathbb{R}^2 \times S^1) = \text{TC}(S^1) = 2.$$

- (e) **Enostavna robotska roka s premikajočim se vrtilščem:** Prostor $I \times S^1$ je prav tako homotopsko ekvivalenten krožnici S^1 , zato je

$$\mathrm{TC}(I \times S^1) = \mathrm{TC}(S^1) = 2.$$

- (f) **Roboti v evklidskem prostoru:** Pri konfiguracijskih prostorih n robotov v $\mathbb{R}^m$ so zanimivi le primeri, ko je $n \geq 2$ in $m \geq 2$. Pri $n = 1$ je namreč

$$F(\mathbb{R}^m, 1) = \mathbb{R}^m$$

in $\mathrm{TC}(F(\mathbb{R}^m, 1)) = 1$, pri $m = 1$ pa dobimo prostore

$$F(\mathbb{R}, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\},$$

ki niso povezani s potmi. Hiperravnine $x_i = x_j$ jih namreč razdelijo na $n!$ kontraktibilnih kosov, vsak ustreza nekemu vrstnemu redu n točk na premici, tj. neki permutaciji n elementov.

Pri $m, n \geq 2$ velja

$$\mathrm{TC}(F(\mathbb{R}^m, n)) = \begin{cases} 2n - 1; & m \text{ lih,} \\ 2n - 2; & m \text{ sod.} \end{cases}$$

LITERATURA

- [1] C. Adams in R. Franzosa, *Introduction to Topology: Pure and Applied*, Pearson, 2008.
- [2] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea in D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs **103**, AMS, 2003.
- [3] M. Farber, *Topological Complexity of Motion Planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 211–221.
- [4] M. Farber, *Instabilities of Robot Motion*, Topology and its Applications **140** (2004), 245–266.
- [5] M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, EMS Publishing House, Zürich, 2008.
- [6] M. Farber, *Topology of robot motion planning*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology, Paul Biran, Octav Cornea, Francois Lalonde editors, Springer, 2006, 185–230.
- [7] M. Farber in M. Grant *Topological complexity of configuration spaces*, Proceedings of the AMS **137** (2009), 1841–1847.
- [8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, dostopno na <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>
- [9] I. M. James, *On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331–348.