UNIVERZA V LJUBLJANI

Naravoslovna fakulteta

ODVISNOST TRANSPORTNIH LASTNOSTI REAKTORJEV IN REFLEKTORJEV OD LASTNOSTI SESTAVNIH DELOV

/Disertacija/

M.RIBARIČ

Avgust 1959

K A Z A L O

Uvod 1

1. Refleksijske lastnosti telesa
   a) Nestacionarni pojavi 2
   b) Stacionarni pojavi 5

2. Adicijske formule za refleksijske lastnosti 6

3. Lastnosti sestavljenega telesa pri enakomernem sipanju
   a) Nestacionaren primer 14
   b) Stacionaren primer 15

Povzetek 18

Dodatek 19

Uvod.

Pri telesih, ki nam rabijo za nevtronske reflektorje, so najvažnejše njihove refleksijske lastnosti. Z njimi je določena odvisnost med vstopajočimi in izstopajočimi nevtroni. Pri sestavljenih reflektorjih se pojavi vprašanje, kako so odvisne njihove refleksijske lastnosti od lastnosti sestavnih delov. Za rešitev tega vprašanja moramo poiskati adicijske formule, ki nam bodo pokazale, kakšna je ta odvisnost.

Problem obdelamo matematično tako, da poiščemo najprej - v okviru linearne transportne teorije - matematičen opis refleksijskih lastnosti, nato pa izpeljemo iskane adicijske formule za telesa, ki so sestavljena iz dveh delov. S tem je problem adicijskih formul rešen tudi za telesa, ki so sestavljena iz več delov. Z lastnostmi sestavnih delov izrazimo tudi pogoj za kritičnost sestavljenega telesa - reaktorja.

Podrobneje pa smo si ogledali lastnosti sestavljenega telesa v primeru, ko je sipanje v nekem smislu enakomerno. V tem primeru lahko matematično dokažemo nekatere lastnosti reaktorja.

V dodatku smo izdelali matematična sredstva iz funkcionalne analize, ki jih potrebujemo pri obravnavi navedenega problema.

1. Refleksijske lastnosti telesa.

a) Nestacionarni pojavi.

Zaradi enostavnosti privzemimo, da ima obravnavano telo T stalno obliko in končno razsežno, odsekoma gladko mejno ploskev M. Skozi njo naj prehajajo različno hitri nevtroni, $v \in /0,c/$. Smer prehoda označimo z $\underline{s}$. V vsaki točki $\underline{r} \in M$ razdelimo prostorski kot $\Omega = 4\pi$ na del Ω_-, ki ga tvorijo vse smeri $\underline{s}_-$ vstopajočih ter na del Ω_+, tvorjen iz smeri $\underline{s}_+$ izstopajočih nevtronov,

$$\Omega_- + \Omega_- = 4\pi . \tag{1.1}$$

Zaznamujmo z dJ povprečno število nevtronov, ki gredo s hitrostjo med v in v+dv v časovnem intervalu med t in t+dt v okolici dS točke $\underline{r}$ skozi mejno ploskev M v smereh, ki leže v elementu prostorskega kota $d\Omega$ okoli smeri $\underline{s}$. Dogajanje na mejni ploskvi M v časovnem intervalu $/0,t_0/$ opišimo z gostoto nevtronskega toka $i = i(v,\underline{r},\underline{s},t)$; $v \in /0,c/$, $\underline{r} \in M$, $\underline{s} \in \Omega$, $t \in /0,t_0/$ ter

$$dJ = i(v,\underline{r},\underline{s},t)\, dv\, dS\, d\Omega\, dt . \tag{1.2}$$

Porazdelitvena funkcija i je pri različnih okoliščinah različna, nikoli negativna ter vedno taka, da je celotno število nevtronov

$$J = \int_0^c \int_M \int_\Omega \int_0^{t_0} i\, dv\, dS\, d\Omega\, dt, \tag{1.3}$$

ki gredo skozi M v razdobju /0,t/, končno. Privzemimo, da imajo fizikalen pomen vse porazdelitve $i \geq 0$, pri katerih je $J < \infty$. Vse te funkcije tvorijo zaprto množico K(D.1, D.2, D.3)[(x)] v Banachovem prostoru I. Ta prostor tvorimo iz vseh realnih merljivih funkcij $f(v,\underline{r},\underline{s},t)$; $v \in /0,c/$, $\underline{r} \in M$, $\underline{s} \in \Omega$, $t \in /0,t_0/$, za katere eksistira integral

$$\|f\| = \int_0^c \int_M \int_\Omega \int_0^{t_0} |f|\, dv\, dS\, d\Omega\, dt, \tag{1.4}$$

s katerim je definirana norma. Definirajmo še gostoto toka

(x) V tekstu bomo z (D. ..) zaznamovali tiste odstavke v dodatku, ki vsebujejo tekstu ustrezna matematična sredstva.

vstopajočih nevtronov

$$i_- = i \qquad \underline{s} = \underline{s}_-$$
$$= 0 \qquad = \underline{s}_+ , \tag{1.5}$$

ter ustrezni podprostor $I_- \in I$,

$$I_- = \{ f: f \in I;\ f=0,\ \underline{s}=\underline{s}_+ \} ,$$

z množico

$$K_- = \{ i_-: i_- \in I_-;\ i_- \geq 0 \} .$$

Podprostoru I_- ustrezni projektor zaznamujemo s P_-. V nadaljnjem bomo vedno s $K\{::\}$ zaznamovali množico vseh nenegativnih funkcij iz ustreznega Banachovega prostora $I\{::\}$. Na analogen način kot i_- definiramo tudi gostoto toka izstopajočih nevtronov

$$i_+ = i \qquad \underline{s} = \underline{s}_+$$
$$= 0 \qquad = \underline{s}_- , \tag{1.6}$$

ter ustrezni podprostor I_+ z množico K_+.

Del izstopajočih nevtronov je posledica vstopajočih, tako da i_+ ni neodvisen od i_-. Pač pa privzemimo, da je vhodni tok i_- neodvisen od izhodnega toka i_+. To dosežemo s tem, da izstopajočim nevtronom na primeren način preprečimo povratek v telo. Če vhodnega toka ni, more imeti telo kljub temu neki izhodni tok. Zaznamujmo ga s q,

$$i_+ = q, \qquad i_- = 0 . \tag{1.7}$$

Ta tok je posledica spontanih cepitev jeder v telesu ter nevtronov, ki so prišli v telo v razdobju $t < 0$.

Izstopajoči nevtroni $i_+ - q$ so posledica vhodnega toka i_-. Privzeli smo, da so fizikalno smiselne vse porazdelitve $i_- \in K_-$. Vsako porazdelitev i_- spremeni telo na enoličen način v neko porazdelitev $i_+ - q$. S to odvisnostjo med i_- in $i_+ - q$ je definiran neki operator A,

$$i_+ - q = Ai_- , \tag{1.8}$$

nad množico K_-. Za matematično obravnavo je ugodno razširiti njegovo definicijsko območje na ves K. To storimo z relacijo

$$Ai = A\,P_-i, \qquad i \in K, \tag{1.9}$$

kjer smo označili razširjeni operator z isto črko. Operator A je posplošenje pojmov albeda in transparence iz transportne teorije[1]; zato mu recimo albedo. Albedo in q karakterizirata refleksijske lastnosti telesa.

V okviru natančnosti, ki ustreza linearni transportni teoriji zanemarimo medsebojni vpliv nevtronov ter njihov vpliv na lastnosti telesa. Zato privzemimo: i) Operator A preslika vsako porazdelitev $i \in K$ v porazdelitev iz K,

$$A\,K \subset K, \tag{1.10}$$

ii) Za poljubni porazdelitvi $i', i'' \in K$ velja:

$$A(i' + i'') = Ai' + Ai''. \tag{1.11}$$

Za operator, ki zadošča relacijam (1.10) in (1.11), bomo rekli, da je aditiven (D.4).

Zaradi vhodnega toka i_- pride v razdobju $/0,t_0/$ v telo $\| i_- \|$, zapusti pa ga $\| Ai_- \|$ nevtronov. Razmerje $\| Ai_- \| / \| i_- \|$ je odvisno od porazdelitve toka i_-, vendar je pri realnem telesu navzgor omejeno. Njegova natančna zgornja meja je albedova norma

$$\| A \| = \sup \| Ai \| / \| i \| = \sup \| Ai_- \| / \| i_- \| . \tag{1.12}$$

Albedo realnega telesa je zato omejen operator. To pa sledi tudi že iz njegove aditivnosti (D.5). Če je $\| A \| > 1$, moremo dobiti pri primerni porazdelitvi i_- v razdobju $/0,t_0/$ iz telesa več nevtronov kot smo jih porabili za njihov nastanek. Če je $\| A \| < 1$, pa to ni mogoče.

Tok izstopajočih nevtronov je v razdobju $/0,t_1/$, $0 \leq t_1 \leq t_0$, neodvisen od poznejšega toka vstopajočih nevtronov. Albedo ima zato lastnost kavzalnosti,

$$Ai_- = 0 \quad \text{za} \quad t \in /0,t_1/, \quad \text{če je} \quad i_- = 0 \quad \text{za} \quad t \in /0,t_1/. \tag{1.13}$$

Del vstopajočih nevtronov gre naravnost in nemoteno skozi telo, del pa se jih v telesu sipa, absorbira in multiplicira. S pomočjo aditivnih operatorjev D in S opišimo izhodni tok, ki ga povzroče vstopajoči nevtroni direktno oziroma indirektno,

$$A = D + S. \tag{1.14}$$

S in D imata tudi lastnost kavzalnosti. Ker morejo kvečjemu vsi vstopajoči nevtroni priti nemoteno skozi telo, je vedno

$$\| D \| \leq 1.$$

Iz pomena operatorja D sledi, da je odvisen le od geometrijskih lastnosti telesa. Če telo ne vsebuje materije, je $S = 0$ in $\| D \| = 1$.

Sipanje nevtronov na atomih je skoraj izotropno. Pri dovolj velikem telesu imajo sipani izstopajoči nevtroni vse možne hitrosti, ne glede na porazdelitev le-teh pri vstopajočih. Četudi pridejo vsi nevtroni $i\_$ istočasno v telo, ga sipani ne zapuste istočasno. V splošnem so zato sipani nevtroni $Si\_$ porazdeljeni bolj enakomerno kot vstopajoči $i\_$. Podrobneje si bomo ogledali telesa, pri katerih je vpliv porazdelitve vhodnega toka na porazdelitev sipanih nevtronov toliko zabrisan, da ne glede na porazdelitev določenega števila vstopajočih nevtronov gostota izstopajočih nevtronov $Si\_$ v nobenem primeru ne preseže neke, za telo karakteristične, porazdelitve $s \in K_+$,

$$Si\_ < \| i\_ \| \cdot s . \tag{1.15}$$

V takem primeru lahko rečemo, da je sipanje enakomerno.

b) <u>Stacionarni pojavi.</u>

Če ima podkritično telo stalne lastnosti, ustreza stacionarnemu vhodnemu toku stacionaren izhodni tok. V takem primeru opišemo lastnosti telesa tako kot pri nestacionarnih pojavih. Toda porazdelitve i so od časa neodvisne. Obdržimo prejšnjim analogne oznake in dobimo vse rezultate iz prejšnih s tem, da postavimo $t_o = 1$. Operatorji A, S, D, imajo analogne lastnosti kot prej, razen (1.13) in (1.15). Če je sipanje elastično, je $\|Ai_-\| = \|i_-\|$ za vsak $i_- \in K_-$.

2. Adicijske formule za refleksijske lastnosti.

Obravnavali bomo iz dveh končno razsežnih teles T' in T'' sestavljeno telo T. Njihovi mejni ploskvi M' in M'' naj bosta taki, da seka poljubna premica stično ploskev $M' \cap M''$ največ d-krat. Za mejno ploskev M sestavljenega telesa vzamemo ploskvi M' in M'', z izjemo stične ploskve,

$$M = M' \cup M'' - M' \cap M''. \tag{2.1}$$

Dogajanje na ploskvah M' in M'' opišemo z ustreznima gostotama nevtronskih tokov $i' \in K'$ in $i'' \in K''$. Privzemimo za znane lastnosti q_1 in A_1 dela T' ter q_2 in A_2 dela T''. Preden sestavimo T' in T'', ju enakomerno premažimo z zanemarljivo tanko plastjo absorbirajoče snovi. Ta plast zmanjša pri prehodu nevtronskega toka njegovo intenziteto za neki faktor $\sqrt{\lambda} \in /0,1/$. Zato se s premazanjem spremene lastnosti T' in T''. Zaznamujmo jih z A', A'', q' in q'' in imamo

$$A' = \lambda A_1, \quad A'' = \lambda A_2, \quad q' = \sqrt{\lambda} q_1, \quad q'' = \sqrt{\lambda} q_2$$

ter

$$i'_+ = q' + A' i'_- \tag{2.2}$$

in

$$i''_+ = q'' + A'' i''_-.$$

Če vsebuje snov, s katero smo premazali sestavna dela, neodvisne izvore, pride h q' in q'' še dodaten sumand.

Na stični ploskvi $M' \cap M''$ prehajajo nevtroni iz enega dela telesa v drugi del. To dejstvo izrazimo z

$$i'_+ = i''_- \quad \text{ter} \quad i'_- = i''_+ \quad \text{za} \quad \underline{r} \in M' \cap M''. \tag{2.3}$$

Na ploskvi M pa naj bo izstopajočim nevtronom i'_+ in i''_+ onemogočena vrnitev v telo T. Zato sta vhodna tokova i'_- in i''_- na meji M med seboj neodvisna. Tam z njima definiramo gostoto vhodnega toka i_- sestavljenega telesa,

$$i_- = i'_-, \qquad \underline{r} \in M' - M",$$
$$= i"_-, \qquad \underline{r} \in M" - M'. \qquad (2.4)$$

Podobno definiramo tudi gostoto izhodnega toka i_+ sestavljenega telesa,

$$i_+ = i'_+, \qquad \underline{r} \in M' - M",$$
$$= i"_+, \qquad \underline{r} \in M" - M'. \qquad (2.5)$$

Vhodni tok i_- je neodvisen od izhodnega toka i_+, ker smo privzeli, da je izstopajočim nevtronom na meji M onemogočena vrnitev v telo. Refleksijske lastnosti telesa T so podane z zvezo med i_+ in i_-, ki jo bomo določili iz lastnosti q', $q"$, A' in $A"$ sestavnih delov T' in $T"$.

Dogajanje na mejnih ploskvah opišimo v nestacionarnem primeru s funkcijo $i = i(v,\underline{r},\underline{s},t)$, ki je podana z

$\underline{r} \in$	$M' - M"$		$M" - M'$		$M' \cap M"$	
$\underline{s} \in$	Ω'_+	Ω'_-	$\Omega"_+$	$\Omega"_-$	$\Omega'_+ = \Omega"_-$	$\Omega'_- = \Omega"_+$
$i =$	i'_+	i'_-	$i"_+$	$i"_-$	$i'_+ = i"_-$	$i'_- = i"_+$. (2.6)

Vse fizikalno smiselne porazdelitve i tvorijo zaprto množico K v Banachovem prostoru I, ki ga tvorimo iz vseh merljivih funkcij $f(v,\underline{r},\underline{s},t)$; $v \in /0,c/$, $\underline{r} \in M' \cup M"$, $\underline{s} \in \Omega$, $t \in /0,t_0/$, katerih norma

$$\|f\| = \int_0^c \int_{M' \cup M"} \int_{\Omega} \int_0^{t_0} |f| \, dv \, dS \, d\Omega \, dt \qquad (2.7)$$

je končna. V stacionarnem primeru so funkcije i in f od časa neodvisne ter $t_0 = 1$.

Tvorimo iz I' in $I"$ podprostora prostora I s tem, da razširimo z relacijama

$$i' = 0, \qquad \underline{r} \in M" - M',$$
ter
$$i" = 0, \qquad \underline{r} \in M' - M", \qquad (2.8)$$

definicijska polja funkcij $i' \in I'$ in $i" \in I"$. Zaznamujmo s P' in $P"$ podprostoroma I' oziroma $I"$ ustrezna projektorja. Potem ko razširimo še definicijsko polje funkcij i_+ in i_- z relacijama

$$i_- = 0 \text{ in } i_+ = 0 \text{ za } \underline{r} \in M' \cap M'' , \tag{2.9}$$

tvorijo le-te množico K_1 iz podprostora

$$I_1 = \left\{ i : i \in I ;\ i = 0,\ \underline{r} \in M' \cap M'' \right\} .$$

Zaznamujmo s P podprostoru I_1 ustrezni projektor, da dobimo iz (2.4),(2.5) in (2.9)

$$i_+ = P(i'_+ + i''_+)$$

in

$$i_- = P(i'_- + i''_-) . \tag{2.1o}$$

Tabela I. kaže, kako se tako razširjene funkcije i_+, i'_+, i''_+, i_-, i'_-, $i''_- \in K$ izražajo s funkcijo i.

$\underline{r} \in$	$M' - M''$		$M'' - M'$		$M' \cap M''$	
$\underline{s} \in$	Ω'_+	Ω'_-	Ω''_+	Ω''_-	Ω'_+	Ω'_-
i'_+	i	0	0	0	i	0
i'_-	0	i	0	0	0	i
i''_+	0	0	i	0	0	i
i''_-	0	0	0	i	i	0
i_+	i	0	i	0	0	0
i_-	0	i	0	i	0	0

Tabela I.

Z enačbo (2.8) smo razširili zalogo vrednosti operatorjev A' in A'' v podmnožico množice K. Z relacijama

$$A'i = A'P'i$$

in

$$A''i = A''P''i , \quad i \in K , \tag{2.11}$$

razširimo še njihova definicijska območja na vso množico K. Enačbi (2.2) ohranita po vseh teh razširitvah svojo obliko.

Refleksijske lastnosti sestavljenega telesa spoznamo iz zveze med vhodnim i_- in izhodnim tokom i_+. Da bi ugotovili to zvezo, določimo izhodna tokova i'_+ in i''_+ v odvisnosti od vhodnega toka i_-. V ta namen moramo najprej izračunati vhodna tokova i'_- in i''_-. Vhodni tok i'_- sestavljata dva tokova: i) na meji $M' - M''$ vhodni tok i_- ii) na meji $M' \cap M''$ izhodni tok i''_+ (glej Tab.I. ali 2.3 in 2.4). To zapišemo s pomočjo projektorja P' tako

$$i'_- = P'(i_- + i''_+) \tag{2.12}$$

ter analogno vhodni tok

$$i''_- = P''(i_- + i'_+) \,. \tag{2.12a}$$

Iz (2.12),(2.12a),(2.2),(2.11) dobimo enačbi

$$\begin{aligned} i'_+ &= q' + A'(i_- + i''_+) \\ \text{in} \quad i''_+ &= q'' + A''(i_- + i'_+). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Iz njih sledi enačba

$$(1 - A'A'')i'_+ = q' + A'q'' + A'(1 + A'')i_- \,. \tag{2.14}$$

Za i''_+ moremo dobiti analogno enačbo. Zadostuje pa, če rešimo le eno, ker sledi rešitev druge iz enačb (2.13).

Prevedimo enačbo (2.14) v nekoliko enostavnejšo obliko. Zaznamujmo z $y \in K'_+$ desno stran enačbe (2.14) in jo z upoštevanjem (2.11) zapišimo na sledeč način:

$$i'_+ = A'A''P''i'_+ + y \,. \tag{2.15}$$

S pomočjo en.(2.15) moremo izračunati tok i'_+ iz njegovih vrednosti $P''i'_+$, ki jih zavzame na stični ploskvi $M' \cap M''$. Tok $P''i'_+$ zadošča enačbi

$$(1 - P''A'A'')P''i'_+ = P''y \,, \tag{2.16}$$

ki jo dobimo iz en.(2.15) s tem, da jo pomnožimo s P'' in upoštevamo en.(211). Matematično interpretiramo en.(2.16) kot nehomogeno enačbo (D.12), ki ustreza aditivnemu operatorju $P''A'A''P'$ definiranemu nad množico $P''K'_+$. Enačba (2.16) je ključna enačba za obravnavo lastnosti sestavljenega telesa. Če jo namreč rešimo, dobimo iz enačb (2.15) in (2.13) eksplicitna izraza za izhodna tokova i'_+ in i''_+.

Pri sestavnih delih smo privzeli, da ustreza vsakemu vhodnemu toku enolično neki izhodni tok ter da ima albedo določene lastnosti. Sestavljeno telo pa more imeti dokaj drugačne lastnosti. Primer za to je nadkritično telo sestavljeno iz podkritičnih sestavnih delov. Kajti pri nadkritičnem telesu ni mogoč poljuben stacionaren vhodni tok. Zato se pojavi pri sestavljenem telesu dvoje vprašanj:

i) Ali so lastnosti sestavljenega telesa že določene z danimi lastnostmi q', q'', A' in A'' sestavnih delov, to je, ali ima enačba (2.16) kvečjemu eno samo rešitev.

ii) Ali je telo T z vhodnim tokom i_- fizikalno možno. Le če je, ima enačba (2.16) rešitev.

Za telesa, pri katerih je sipanje v nekem smislu enakomerno, si bomo v naslednjem poglavju podrobneje ogledali odgovor na oba vprašanja. Sedaj pa prevedimo oba vprašanja v nekoliko drugačno obliko:

i) Enačba (2.16) ima kvečjemu eno samo rešitev le takrat, ko ima enačba

$$(1 - P''A'A'')P''i'_+ = 0, \qquad P''i'_+ \in P''K'_+ , \tag{2.17}$$

le trivialno rešitev (D.14). Če ima enačba (2.17) netrivialno rešitev, more imeti sestavljeno telo izhodni tok, četudi so $q' = 0$, $q'' = 0$ in $i_- = 0$. To pa je možno le v stacionarnem primeru, če je sestavljeno telo kritično. To fizikalno dejstvo bomo matematično dokazali v naslednjem poglavju in sicer za telesa, pri katerih je sipanje enakomerno. Zato bomo rekli enačbi (2.17) kritična enačba.

ii) Če je enačba (2.16) rešljiva, potem je vrsta

$$P''i'_+ = \sum_0^\infty{}_j\, P''(A'A'')^j P''y , \tag{2.18}$$

ena njena rešitev (D.13). Zato je enačba (2.16) rešljiva le za tiste y, pri katerih vrsta (2.18) konvergira.

Vrsto (2.18) moremo dobiti neposredno iz fizikalne slike. V ta namen si oglejmo stacionaren primer s $q'' = 0$, $P''q' = q'$ in $i_- = 0$. Naj bo problem realen, da $P''i'_+$ eksistira. Če dela T'' ni, potem je $P''i'_+ = q'$. Tako pa gredo nevtroni q' skozi $M' \cap M''$ v T''.

Od tam se jih del $P'A''q'$ vrne skozi $M'\cap M''$ v T' in prispeva delež $P''A'A''q'$ k izhodnemu toku $P''i'_+$. Toda tudi ta delež gre skozi $M'\cap M''$ v T'' in ko se vrne, prispeva k izhodnemu toku $P''i'_+$ delež $P''(A'A'')^2q'$, i.t.d. Zato vsebuje izhodni tok $P''i'_+$ neutrone, ki niso bili v T'' - q', ki so bili enkrat v T'' - $P''A'A''q'$, dvakrat - $P''(A'A'')^2q'$, n-krat - $P''(A'A'')^nq'$, i.t.d. Zato je

$$P''i'_+ = q' + P''A'A''q' + P''(A'A'')^2q' + \dots\dots \quad .$$

To pa je ravno vrsta (2.18) za naš primer $P''y = q'$. Podoben premislek nas pripelje tako v splošnem stacionarnem, kakor tudi v nestacionarnem primeru do vrste (2.18). Iz povedanega je razvidno, kako prispeva del T'' k zvečanju izhodnega toka $P''i'_+$.

V vrsti (2.18) pove $P''(A'A'')^ny$ tisti del toka $P''i'_+$, ki je nastal iz neutronov $P''y$ po n-kratni vrnitvi iz T''. Norma $\| P''(A'A'')^nP'\|$ je natančna zgornja meja razmerja $\| P''(A'A'')^ny\| / \| P''y\|$ in ima naslednjo zanimivo lastnost: Ali je $\| P''(A'A'')^nP'\| \geq 1$ za $n = 1, 2, 3, \dots$, ali pa je $\lim_n \| P''(A'A'')^nP'\| = 0$ (D.6). Ta drugi primer, ki bo za nas posebno važen, nastopi za vse $\lambda < \lambda_0$,

$$\lambda_0 = \lim_n \| P''(A_1A_2)^nP'\|^{-1/2n} = \lim_n \| P'(A_2A_1)^nP''\|^{-1/2n} \quad . \tag{2.19}$$

V naslednjem poglavju bomo videli v kakšni zvezi je λ_0 s kritičnostjo sestavljenega telesa. Če sestavna dela nimata multiplikacijskih lastnosti je $\| A'\| < 1$ in $\| A''\| < 1$ in je zato $\lim_n \| P''(A'A'')^nP'\| = 0$.

Če je $\lambda < \lambda_0$, je enačba (2.16) enolično rešljiva za vse $P''y \in P''K'_+$ (D.15). V tem primeru dobimo z aditivnim operatorjem $(1 - P''A'A'')^{-1}$ (D.16) iz enačb (2.10),(2.13),(2.15) in (2.16) po primerni ureditvi zvezo

$$i_+ = q + Ai_- \, , \tag{2.20}$$

med vhodnim i_- in izhodnim tokom i_+. Ta zveza je podana z neodvisnim izhodnim tokom

$$q = (P + A)(q' + q'') \tag{2.21}$$

sestavljenega telesa in njegovim albedom

$$A = PA' + P(1 + A')(1 - A''A')^{-1} A''(1 + A') =$$
$$= PA'' + P(1 + A'')(1 - A'A'')^{-1} A'(1 + A'') ,$$

kjer je

$$(1 - A'A'')^{-1} = 1 + A'A''(1 - P''A'A'')^{-1} = \sum_{0}^{\infty} (A'A'')^{i} \, . \tag{2.22}$$

Formule (2.21) in (2.22) so iskane adicijske formule za refleksijske lastnosti. Tako smo prišli do rezultata, da za $\lambda < \lambda_0$ albedo sestavljenega telesa eksistira in je aditiven operator. Slednje dobimo iz aditivnosti operatorja $(1 - A'A'')^{-1}$ in enačbe (2.22). Iz (2.21) vidimo, kako prispevata k neodvisnemu izhodnemu toku q tokova q' in q'' na meji M neposredno, ter na meji $M' \cap M''$ posredno, kot neodvisni del vhodnih tokov i'_- in i''_-. Izraza (2.21) in (2.22) imata strnjeno obliko zato, ker smo primerno razširili definicijska območja porazdelitvenih funkcij in albedov.

Če nekemu vhodnemu toku i_- ustreza enolično izhodni tok i_+, potem dobimo zvezo med njima iz enačb (2.1o),(2.13), (2.15) in (2.16). To zvezo moremo napisati tudi v obliki enačb (2.2o),(2.21) in (2.22). Če pa je i_+ enolično določen za vsak $i_- \in K_1$, potem ima sestavljeno telo albedo A, ki je podan z enačbo (2.22).

Če sta T' in T'' prazni telesi, je $A' = D'$ in $A'' = D''$ ter

$$(D'D'')^{n} = 0 \, , \; 2n - 1 > d, \tag{2.23}$$

Zato je v tem primeru enačba (2.14) vedno rešljiva (D.12). Relacija (2.23) sledi iz pomena operatorja $(D'D'')^{n}$, ki priredi na meji M'' vstopajočim nevtronom i''_- na meji M' izstopajoče nevtrone $(D'D'')^{n} i''_-$. Ti nastanejo iz i''_- tako, da gredo nevtroni i''_- n-krat skozi T' in T'' in pri tem njihove preme poti sekajo (2n-1)-krat stično ploskev $M' \cap M''$. Iz privzetja, da je to mogoče največ d-krat, sledi (2.23). Iz (2.23) in (D.16) dobimo: albedo

$$D = PD' + P(1 + D')(1 - D''D')^{-1}D''(1 + D') \tag{2.24}$$

praznega sestavljenega telesa se izraža s končno vsoto različnih produktov operatorjev D' in D''. Na analogen način kot pri relaciji (2.23) se prepričamo:

$$P''(D'D'')^{n}P' = 0, \quad n \geq n_o \, , \tag{2.25}$$

kjer smo z n_o zaznamovali najmanjše celo število večje od $(d - 1)/2$.

Če ima sestavljeno telo q in A, jih moremo določiti iz tovrstnih lastnosti poljubnega števila sestavnih delov z enačbami (2.2o),(2.21) in (2.22). V ta namen združujemo po dva sestavna dela v nov sestavni del, dokler ne sestavimo celo telo.

Albedo A' in samostojni izvori q' posredujejo zvezo med i'_+ in i'_- v primeru, ko izstopajoči nevtroni i'_+ ničesar ne prispevajo vhodnemu toku i'_-. Včasih pa nas zanima zveza med i'_+ in i'_- pri telesu T' z odsekoma vdrto mejno ploskvijo, če ni izstopajočim nevtronom preprečena vrnitev v telo. V tem primeru i'_- ni povsem neodvisen od i'_+. Ta primer moremo obravnavati kot sestavljeno telo, katerega sestavna dela sta T' in primerno izbrano prazno telo T''. Telo T'' izberemo tako, da posreduje njegov albedo $A'' = D''$ ustrezno zvezo med i'_+ in i'_-. Isti problem nastopi pri obravnavi dveh ločenih teles, pri katerih prehajajo nevtroni iz enega telesa v drugo skozi prostor med njima.

Del vstopajočih nevtronov i_- gre nemoteno skozi T, ostali pa se v njem sipajo. Zato analogno (1.14) razstavimo albedo A na dva dela D in S. Sipalne lastnosti sestavnih delov ne vplivajo na nevtrone Di_-, ki gredo nemoteno skozi telo. Zato je D kar enak albedu ustreznega praznega telesa, (2.24). Sipalni operator S pa dobimo iz

$$S = A - D \, . \tag{2.26}$$

3. Lastnosti sestavljenega telesa pri enakomernem sipanju.

a) Nestacionaren primer.

Ker v nestacionarnem primeru fizikalni sliki ne bi ustrezalo, da bi imela kritična enačba (2.17) netrivialno rešitev pričakujemo, da bo imela enačba (2.16) kvečjemu enolično rešitev. Prav tako ni mogoče, da bi zaradi vpliva T" izhodni tok i'_+ v končnem razdobju $/0,t_0/$ narasel čez vse meje; to pa pomeni konvergenco vrste (2.18) za vsak y. Iz zgornjih navedb lahko sklepamo, da je enačba (2.16) vedno enolično rešljiva. Če privzamemo, da imata S' in S" lastnost enakomernega sipanja (1.15), moremo te domneve tudi dokazati.

V ta namen si oglejmo lastnosti operatorja

$$P"A'A"P' = P"D'D"P' + P"(D'S" + S'A")P'. \qquad (3.1)$$

Sumand P"D'D"P' je nilpotenten (2.25); ker je produkt operatorjev, ki imajo lastnost kavzalnosti, ima to lastnost tudi sam. Drugi sumand P"(D'S" + S'A")P' ima prav tako lastnost kavzalnosti, poleg tega pa še lastnost enakomernega sipanja,

$$P"(D'S" + S'A")y \leq \|P"y\|\, s\,, \qquad y \in K'_+$$

z

$$s = P"D's" + \|A"\|\, P"s', \qquad s \in P"K'_+ \qquad (3.2.)$$

Relacija (3.2) sledi iz privzetja, da imata S' in S" lastnost enakomernega sipanja. Iz naštetih lastnosti operatorja P"A'A"P' sledi $\lim_n \|P"(A'A")^n P'\| = 0$ (D.11). Za primer enakomernega sipanja so gornje domneve s tem dokazane (D.15).

Če imata S' in S" lastnost enakomernega sipanja je $\lim_n \|P"(A'A")^n P'\| = 0$ za vsako vrednost λ in je zato $\lambda_0 = oo$ (D.11), (D.6). Pri poljubnem λ albedo A torej eksistira, je aditiven ter ima lastnost kavzalnosti in enakomernega sipanja. Slednji dve lastnosti sledita iz (2.22),(2.24),(2.26),(D.16), iz kavzalnosti operatorja A'A" in dejstva, da ima $(A'A")^n$, $2n-1 > d$, zaradi (2.23) lastnost enakomernega sipanja

$$(A'A")^n\, y \leq \|P"y\|\, s_1\,, \qquad s_1 \in K'_+\,. \qquad (3.3)$$

Funkcija s_1 se podobno izraža z s' in s" kot funkcija s v (3.2).

b) <u>Stacionaren primer.</u>

Del $P''(A'A'')^n y$ izstopajočih nevtronov $P''I'_+$ (2.18) vsebuje nevtrone, ki so bili sipani v T' in T'' vsega skupaj najmanj $[n/n_o]$-krat. O tem se moremo prepričati, če zapišemo $P''(A'A'')^n$ v obliki produkta $[n/n_o]$ faktorjev $P''(A'A'')^{n_o}$ od katerih prispeva vsak zaradi (2.25) vsaj po eno sipanje. Po vsakem sipanju je porazdelitev nevtronskega toka bolj razmazana in v nekem smislu enakomernejša. Zato pričakujemo, da bodo pri različnih porazdelitvah toka $P''y$ oblike ustrezni porazdelitev $P''(A'A'')^n y$ med seboj tem bolj podobne, čim večje bo število $[n/n_o]$. Podrobneje si bomo ogledali lastnosti sestavljenega telesa, pri katerem se zaradi sipanja toliko zabriše vpliv porazdelitve toka $P''y$, da moremo izbrati tako porazdelitev $s \in P''K'_+$ in naravno število n_2, da velja za vsak $P''y \in P''K'_+$ naslednja ocena

$$\varepsilon s \leq P''(A'A'')^{n_2} y \leq \|P''y\| \, s \, , \tag{3.4}$$

kjer je ε od $P''y$ odvisno število, ki je pozitivno za vsak $P''y \neq 0$. Pri takem telesu T bomo rekli, da je sipanje enakomerno. Če pomnožimo relacijo (3.4) s $P''(A'A'')^m$ vidimo, da veljajo analogne relacije za vse $n > n_2$. Eksponent n_2 je večji od n_o. V nasprotnem primeru bi vseboval tok $P''(A'A'')^n y$ nesipane nevtrone $P''(D'D'')^n y$, pri katerih pa ne more biti izpolnjena desna stran relacije (3.4). Zahteva $\varepsilon > 0$ za vsak $P''y \neq 0$ pove, da gre pri poljubni porazdelitvi $P''y$ vedno del nevtronov zaradi sipanja $2n_2$-krat skozi stično ploskev. Privzemimo še, da sta S' in S'' integralska operatorja z zveznim jedrom. S' in S'' sta zato totalno zvezna, zaradi (2.25) je totalno zvezen tudi operator $P''(A'A'')^{n_o} P'$. S privzetji, da je sipanje enakomerno in da sta S' in S'' totalno zvezna, lahko matematično dokažemo nekaj lastnosti sestavljenega telesa, ki jih na podlagi fizikalne slike pričakujemo pri realnem telesu. V ta namen potrebna matematična sredstva so zbrana v dodatku od 18-tega odstavka naprej. Tam je množica $P''K'_+$ zaznamovana kar s K.

V nestacionarnem primeru dobimo iz (3.3) za vse potence $P''(A'A'')^n P'$, $n \geq n_o$, relacijo, ki je analogna desni strani relacije (3.4). Zaradi kavzalnosti pa ni mogoče določiti porazdelitve s v relaciji (3.4) tako, da bi bila le-ta izpolnjena za vsak $P''y \neq 0$ s pomočjo pozitivnega ε.

Poglejmo si primer, v katerem ne povzroče tokovi i_-, q' in q'' nobenega toka nevtronov iz T' v T''. V tem primeru je $P''y \neq 0$. Iz (2.13), (2.15), (2.16) in (2.17) pa dobimo

$$i'_+ = y + A'A''(P''i'_+)_o$$

in

$$i''_+ = q'' + A''(\,i_- + (P''i'_+)_o\,), \tag{3.5}$$

kjer je $(P''i'_+)_o$ rešitev kritične enačbe

$$(1 - \lambda^2 P''A_1A_2)(P''i'_+)_o = 0 \tag{3.6}$$

Vprašamo se, ali moremo izbrati $0 < \lambda \leq 1$ tako, da bo imela kritična enačba netrivialno rešitev. Potreben in zadosten pogoj za to je

$$\lambda_o \leq 1 \quad \text{in} \quad \lambda = \lambda_o\,. \tag{3.7}$$

Za $\lambda = \lambda_o$ ima kritična enačba eno samo netrivialno rešitev, ki je določena do konstantnega faktorja. To sledi iz (3.4) in totalne zveznosti operatorja $P''(A_1A_2)^{n_o}P'$ (D.23, D.24). Zato je pri $\lambda = \lambda_o$ sestavljeno telo kritično.

Privzemimo $\lambda_o > 1$, potem razlikujemo tri primere:

i) telo T je nadkritično, če je $\lambda > \lambda_o$

ii) telo T je kritično, če je $\lambda = \lambda_o$

iii) telo T je podkritično, če je $\lambda < \lambda_o$

i) Pri nadkritičnem telesu so realno možni le taki q', q'' in i_-, pri katerih je $P''y = 0$. Le v tem primeru je enačba (2.16) enolično rešljiva (D.19, D.23). Iz (2.15) in (2.13) dobimo

$$i'_+ = y$$

in

$$i''_+ = q'' + A''i_-. \tag{3.8}$$

ii) Pri kritičnem telesu so možni le taki q', q'' in i_-, pri katerih je $P''y = 0$. Problem ni enolično določen z A', A'', q', q'' in i_-. Nevtronska tokova i'_+ in i''_+ sta podana z enačbo (3.5) in moreta biti od nič različna tudi pri $q' = 0$, $q'' = 0$ in $i_- = 0$.

iii) Podkritično telo ima albedo, ki je podan z (2.22). Realno so možni poljubni tokovi q', q'' in i_-. Ta primer smo podrobneje obravnavali v prejšnjem poglavju.

Oglejmo si, kako se spreminjajo lastnosti podkritičnega telesa T, če gre λ proti kritični vrednosti λ_0. Izkaže se (D.21), da je izhodni tok $P''i'_+$ pri poljubnem $P''y \neq 0$ tako velik kot želimo, če je le λ dovolj blizu λ_0,

$$\|P''i'_+\| \to \infty , \quad \lambda \to \lambda_0 , \qquad P''y \neq 0 \tag{3.9}$$

Njegova oblika $P''i'_+ / \| P''i'_+ \|$ pa je tem bolj podobna lastni funkciji kritične enačbe (3.6), čim bliže je λ kritični vrednosti λ_0 (D.24),

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} P''i'_+ / \|P''i'_+\| = (P''i'_+)_0 / \| (P''i'_+)_0 \| , \qquad P''y \neq 0. \tag{3.10}$$

Analogno velja tudi za i'_+ in i''_+.

Zaradi spontanih cepitev atomskih jeder ima realno telo vedno nekaj samostojnih izvorov q' in q''. Ti izvori, ki imajo zanemarljivo jakost, povzročijo pri podkritičnem telesu T poljubno velik izhodni tok i_+, tudi pri $i_- = 0$, če je le λ dovolj blizu kritični vrednosti λ_0. Njegova oblika $i_+/\|i_+\|$ je približno podana z lastno funkcijo kritične enačbe,

$$i_+/\|i_+\| \sim P(1 + A')A''(P''i'_+)_0 / \| P(1 + A')A''(P''i'_+)_0 \| . \tag{3.11}$$

Povzetek.

V linearnem približku smo poiskali opis refleksijskih lastnosti telesa z albedom A in z neodvisnimi izvori q. Lastnosti A in q sestavljenega telesa smo izrazili s pomočjo adicijskih formul z lastnostmi sestavnih delov. Če je sipanje v nekem smislu enakomerno, smo lahko matematično dokazali nekaj takih lastnosti sestavljenega telesa, ki jih običajno pripisujemo reaktorju:

i) V končnem razdobju je pri reaktorju, ki je sestavljen iz poljubnih sestavnih delov, realno možen poljuben tok vstopajočih nevtronov.

ii) Pri podkritičnem reaktorju je dopusten poljuben tok vstopajočih nevtronov. Pri kritičnem in nadkritičnem reaktorju so možni le taki tokovi vstopajočih nevtronov, pri katerih ni sodelovanja med obema podkritičnema sestavnima deloma.

iii) Če postaja reaktor kritičen, gre pri poljubnem vhodnem toku tok izstopajočih nevtronov čez vse meje. Pri tem se njegova oblika vedno bolj približuje obliki kritične porazdelitve, ki je s kritično enačbo določena do konstantnega faktorja.

Pri enakomernem sipanju nam je tudi uspelo izraziti kritičen pogoj neodvisno od rešitve kritične enačbe.

Dodatek.

1 Definicija. V Banachovem prostoru B imamo zaprto množico K, katere elementi imajo naslednje lastnosti:

$\alpha x \in K$, če je $x \in K$ in $\alpha \geq 0$, (1)

$x + y \in K$, če je $x,y \in K$, (2)

$\| x + y \| \geq \| x \|$, če je $x,y \in K$, (3)

če množica $\{x_i\}_0^{\infty} \subset K$ in če je $\lim_n \| \sum_0^n x_i \| < \infty$, potem je vrsta $\sum_0^{\infty} x_i$ konvergentna, to je $\sum_0^{\infty} x_i \in K$. (4)

2 Lema. Za elemente množice K velja:

$$x = 0, \text{ če je } x,-x \in K, \tag{1}$$

in

$$\| x \| \geq \| y \|, \text{ če je } x,y,x-y \in K. \tag{2}$$

Dokaz: 1) Če je $x,-x \in K$, potem iz (1.3) sledi $0 = \| x - x \| \geq \| x \|$ in je zato $x = 0$.

2) Če so $x,y,x-y \in K$, potem je $x = y + z$, $z \in K$. Zato iz (1.3) dobimo $\| x \| = \| y + z \| \geq \| y \|$. Q.E.D.

3 Zgled. V prostoru $L_p(0,1)$ je primer za K vsaka množica

$$K_p = \{ r(t)\exp(i\varphi(t)) : r(t) \in L_p(0,1); |\varphi(t) - \alpha(t)| \leq a(t) \}, \tag{1}$$

ki je določena z dvema realnima funkcijama $0 \leq \alpha(t) \leq 2\pi$ in $0 \leq a(t) \leq \pi/4$, $t \in /0,1/$. Vrednosti funkcij iz množice K_p, ki ustrezajo določeni vrednosti argumenta t, leže na kompleksni ravnini na kotu z odprtino $2a(t)$ in vrhom v koordinatnem izhodišču. Njegova simetrala oklepa z realno osjo kot $\alpha(t)$. Iz te geometrijske slike sledi, da je K_p zaprta množica in da zadošča zahtevam (1.1),(1.2) in (1.3). Relacijo (1.4) dokažemo s pomočjo Caushyjevega pogoja. Pri tem si pomagamo s pomožnim koordinatnim sistemom v kompleksni ravnini, ki ima osi $e_1 = \exp i(\alpha(t) - \pi/4)$ in $e_2 = \exp i(\alpha(t) + \pi/4)$, ter z neenačbo

$$(x + y)^p \geq x^p + y^p, \quad x,y \geq 0, \quad p \geq 1.$$

V prostoru l_p so zgledi za množico K analogni.

4 Definicija. Rekli bomo, da je A aditiven operator, če je definiran za vse $y \in K$ in če velja

$$A\,K \subset K \tag{1}$$

in

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad x,y \in K. \tag{2}$$

5 Lema. Aditiven operator A je homogen,

$$A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad \lambda \geq 0, \quad x \in K, \tag{1}$$

in omejen,

$$\|A(x/\|x\|)\| < \text{const.}, \quad x \in K. \tag{2}$$

Zato eksistira norma $\|A\|$, ki je definirana z

$$\|A\| = \sup_{x \in K} \|Ax\|/\|x\|. \tag{3}$$

Dokaz: 1) Iz (4.2) in (1.1) neposredno sledi veljavnost relacije (5.1) za vse pozitivne racionalne .

2) Če A ni omejen, potem eksistira neskončno zaporedje

$$\{x_n : x_n \in K;\ \|x_n\| = 1;\ \|Ax_n\| > n^3;\ n = 1,2,3,\dots\} . \tag{4}$$

Če upoštevamo (4.2),(1.3),(5.1) in (5.4), pridemo s pomočjo vrste

$$\sum_1^{\infty} x_n/n^2 \in K \text{ do protislovja:}$$

$$\infty > \|A \sum_1^{\infty} x_n/n^2\| \geq \lim_n \|A(x_n/n^2)\| \geq \lim_n n = \infty.$$

Zato je aditiven operator A vedno omejen.

3) Ker je A omejen, je tudi zvezen. Zato je (5.1) veljavna za vse $\lambda = 0$. Q.E.D.

<u>6 Alternativa.</u> Za vsak aditiven operator A velja; ali je

$$\|A^n\| \geq 1, \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots \quad , \tag{1}$$

ali pa je

$$\lim_n \|A^n\| = 0. \tag{2}$$

Za aditiven operator λA, $\lambda \geq 0$, velja (6.1), če je $\lambda \geq \lambda_0$, oziroma (6.2), če je $\lambda < \lambda_0$,

$$\lambda_0 = \lim_n \|A^n\|^{-1/n} . \tag{3}$$

Naj bosta A in B aditivna operatorja; potem je

$$\lim_n \|(AB)^n\|^{-1/n} = \lim_n \|(BA)^n\|^{-1/n} . \tag{4}$$

Dokaz: 1) Naj bo za $n = n_1$ norma $\|A^{n_1}\| = q < 1$, Izberimo tako naravno število N, da je $q^N \|A\|^i < 1$, $0 \leq i \leq n_1-1$. Tako dobimo za potenco $n \geq n_1 N$, $n = n_1(N+m) + i$, $m = 0,1,2,\ldots$, $0 \leq i \leq n_1-1$, oceno:
$\|A^n\| \leq \|A^{n_1}\|^{(N+m)} \|A\|^i < q^m$. Iz nje neposredno sledi (6.2).

2) Operator λA ustreza relacijam (6.1) le, če je $\lambda \geq \sup_{n=1,2,\ldots} \|A^n\|^{-1/n}$. Velja pa $\sup \|A^n\|^{-1/n} = \lim \|A^n\|^{-1/n}$ (2).

3) Dokaz en.(6.4) sledi iz ocene

$$\|(AB)^n\|^{-1/n} \geq (\|A\|\|B\|)^{-1/n} \|(BA)^{n-1}\|^{-(1-1/n)/n-1}$$

in ocene, ki jo dobimo iz nje, če zamenjamo A in B med seboj.
Q.E.D.

<u>7 Definicija.</u> Direktno vsoto N Banachovih prostorov $E_i = \{x_i\}$ zaznamujmo z $B_p^N = \{x\}$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots\ldots \quad , x_N). \tag{1}$$

V njej definirajmo normo $\|x\|$ z

$$\|x\| = (\sum_1^N \|x_i\|^p)^{1/p} , \quad p \geq 1. \tag{2}$$

Zaznamujmo z P_i ustrezne projektorje,

$$P_i x = (o, o, \dots , x_i, \dots , o) \text{ in } 1 = \sum_1^N P_i . \quad (3)$$

Prostor B_p^N preslikajmo v prostor $l_p^N = \{x'\}$,

$$x' = (x_1', x_2', \dots , x_N') \text{ in } \|x'\| = \left(\sum_1^N |x_i'|^p\right)^{1/p}, \quad (4)$$

tako, da vsakemu $x \in B_p^N$ priredimo x', ki ima komponente

$$x_i' = \|P_i x\|, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5)$$

Ta preslikava ohrani normo

$$\|x\| = \|x'\|. \quad (6)$$

Naj bo K_p^N Banachovemu prostoru B_p^N ustrezna zaprta množica, ki ima lastnosti (1.1),(1.2),(1.3),(1.4) in

$$P_i K_p^N \subset K_p^N , \quad 1 \leq i \leq N. \quad (7)$$

Naj bo A množici K_p^N ustrezni aditivni operator. Operatorju A priredimo z

$$A_{ij}' = \|P_i A P_j\|, \quad 1 \leq i,j \leq N, \quad (8)$$

matrični operator A' v prostoru l_p^N.

<u>8 Teorem</u>. Norma produkta poljubnega števila m aditivnih operatorjev A_k, ki ustrezajo množici K_p^N, je manjša ali kvečjemu enaka normi produkta njim ustreznih matričnih operatorjev A_k',

$$\left\| \prod_{k=1}^m A_k \right\| \leq \left\| \prod_{k=1}^m A_k' \right\| . \quad (1)$$

Dokaz: Iz (7.5),(7.3) in (7.8) sledi ocena

$$(Ax)_i' = \left\| \sum_1^N P_i A P_j (P_j x) \right\| \leq \sum_1^N A_{ij}' x_j' = (A'x')_i , \quad 1 \leq i \leq N.$$

Če jo uporabimo, dobimo iz (7.6) in (7.4) oceno

$$\Big\| \prod_{k=1}^{m} A_k x \Big\| \leq \Big\| A_m'\Big(\prod_{k=1}^{m-1} A_k x\Big)'\Big\| \leq \Big\| A_m' \, A_{m-1}'\Big(\prod_{k=1}^{m-2} A_k x\Big)'\Big\| \leq \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \leq \Big\| \prod_{k=1}^{m} A_k' x'\Big\| \leq \Big\| \prod_{k=1}^{m} A_k' \Big\| \, \|x\| ,$$

iz katere sledi (8.1).

<u>9 Lema</u>. Pri trikotniški matrici T,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= 1, \quad j \leq i, \quad 1 \leq i,j \leq N, \\ &= 0, \quad j > i, \end{aligned} \tag{1}$$

je n-ta potenca T^n podana z

$$\begin{aligned} (T^n)_{ij} &= \binom{i-j+n-1}{n-1}, \quad j \leq i, \\ &= \quad 0 , \qquad j > i. \end{aligned} \tag{2}$$

Za normo $\| T \|$ operatorja T v prostoru l_p^N velja ocena

$$\| T^n \| \leq N \max_{i,j} \, (T^n)_{ij} < N(n + N)^N, \tag{3}$$

Dokaz: 1) Za $n=2$ preverimo (9.2) neposredno. Za poljuben n pa si pomagamo s sklepom od $n-1$ na n; Iz (9.1) sledi

$$(T^n)_{ij} = (TT^{n-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} T_{ik}(T^{n-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{i} (T^{n-1})_{kj}.$$

Če v ta izraz vstavimo enačbo (9.2) za $n-1$, neposredno sledi njena veljavnost za n pri $i < j$. Za $i \geq j$ pa dobimo

$$(T^n)_{ij} = \sum_{k=j}^{i} \binom{k-j+n-2}{n-2} = \binom{i-j+n-1}{n-1}.$$

S tem je enačba (9.2) dokazana tudi za n pri $j \leq i$.

2) Oceno (9.3) dobimo s pomočjo Hoelderjeve neenačbe iz (9.2).

<u>10 Teorem.</u> Naj bo A množici K_p^N ustrezni aditivni operator, ki mu ustreza operator A';

$$A'_{ij} = 0, \quad j > i, \tag{1}$$

in

$$\max_{i,j} A'_{ij} = q < 1.$$

Operator A ima lastnost $\lim_n \| A^n \| = 0.$

Dokaz: Iz (8.1),(10.1) in (9.3) sledi

$$\lim_n \| A^n \| \leq \lim_n \|(A')^n\| \leq \lim_n q^n \|T^n\| < \lim_n q^n N(n+N)^N = 0. \text{ Q.E.D.}$$

<u>11 Zgled.</u> Banachov prostor $L_p(0,1) = \{ x(t) \}$ moremo interpretirati kot prostor B_p^N, ki je direktna vsota poljubnega števila N prostorov E_i,

$$E_i = L_p \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \quad 1 \leq i \leq N. \tag{1}$$

Za množico K_p^N vzemimo kar množico K_p, ki je podana z (3.1). Kot primer za teorem lo si oglejmo množici K_p ustrezni aditivni operator S, ki ima lastnost kavzalnosti,

$$Sx = 0, \quad t \in /0,t_1/, \quad \text{če je} \quad x = 0, \quad t \in /0,t_1/, \tag{2}$$

in ki ustreza za vse $x \in K_p$ relaciji

$$\|x\| s - Sx \in K_p, \quad s \in K_p. \tag{3}$$

Njemu ustrezni operator S' ima namreč pri zadosti velikem N lastnosti (lo.1). Dokaz: 1) Neposredno iz (7.8),(7.3),(11.1) in (11.2) sledi

$$S'_{ij} = \| P_i S P_j \| = 0, \quad i < j.$$

2) Iz (7.8),(7.3),(7.2),(2.2) in (11.3) dobimo oceno

$$S'_{ij} = \sup \|P_i S(P_j x)\| / \|x_j\| \leq \|P_i s\|.$$

$$\lim_N q \leq \lim_N \max_i \|P_i s\| = \lim_N \max_i \left(\int_{\frac{i-1}{N}}^{i/N} |s(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = 0 , \quad (4)$$

ker je $|s| \in L_p(0,1)$. Q.E.D.

Naj bo D aditiven nilpotenten operator,

$$D^n = 0, \quad n \geq n_o, \tag{5}$$

ki ima lastnost kavzalnosti (11.2). Operator $A = S + D$ je quasinilpotenten, to je: za vsako vrednost konstante λ je

$$\lim_n \| \lambda^n A^n \| = 0.$$

Dokaz: Ker imata S in D lastnost kavzalnosti (11.2), ima tudi $(\lambda A)^{n_o}$ to lastnost. Iz (11.5) in (11.3) pa sledi, da zadošča $(\lambda A)^{n_o}$ tudi relaciji, ki je analogna relaciji (11.3). Zato ima $((\lambda A)^{n_o})'$ pri zadosti velikem N lastnosti (10.1). Torej je $\|(\lambda A)^{mn_o}\| < 1$ pri zadosti velikem naravnem številu m. Zato dobimo iz alternative 6: $\lim_n \|(\lambda A)^n\| = 0$. Q.E.D.

<u>12 Lema</u>. Naj bo

$$(1 - A)x = y, \quad y \in K, \tag{1}$$

aditivnemu operatorju A ustrezna nehomogena enačba. Neumanova vrsta

$$x_{ap} = \sum_o^{\infty} A^i y , \tag{2}$$

je rešitev enačbe (12.1), če je $x_{ap} \in K$.

Dokaz: Naj bo $x_{ap} \in K$, potem je

$$\left\| \sum_o^{\infty} A^i y - A \sum_o^{\infty} A^i y - y \right\| \leq (1 + \|A\|) \lim_n \left\| \sum_n^{\infty} A^i y \right\| = 0. \text{ Q.E.D.}$$

<u>13 Teorem</u>. Če ima enačba (12.1) rešitev $x_1 \in K$, potem je tudi $x_{ap} \in K$ njena rešitev. Razlika $x_1 - x_{ap} = \lim_n A^n x_1 \in K$ ustreza homogeni enačbi

$$(1 - A)x = 0, \quad x \in K. \tag{1}$$

Dokaz: 1) Če zapišemo rešitev x_1 v obliki

$$x_1 = y + Ay + A^2y + A^3y + \ldots\ldots + A^ny + A^{n+1}x_1 \qquad (2)$$

in upoštevamo (2.2), dobimo

$$\lim_n \left\| \sum_0^n A^i y \right\| \leq \|x_1\| < \infty. \qquad (3)$$

Iz (13.3) in (1.4) sledi, da je vrsta $x_{ap} \in K$ in je zato po lemi 12 x_{ap} tudi rešitev ustrezne enačbe (12.1)

2) Caushyjeva pogoja za zaporedje $A^n x_1$ in za vrsto x_{ap} sta ekvivalentna, kajti iz (13.2) dobimo

$$\| A^{n+m}x_1 - A^n x_1 \| = \left\| \sum_n^{n+m-1} A^i y \right\|.$$

Ker je vrsta x_{ap} konvergentna in K zaprta množica, je $\lim_n A^n x_1 \in K$. Iz (13.2) dobimo tudi

$$\|x_1 - x_{ap} - \lim_i A^i x_1\| \leq \lim_n \|A^n x_1 - \lim_i A^i x_1\| + \lim_n \left\| \sum_n^{\infty} A^i y \right\| = 0.$$

Da ustreza razlika $x_1 - x_{ap}$ enačbi (13.1), sledi iz $x_1 - x_{ap} \in K$ in

$$y = (1 - A)x_1 = (1 - A)x_{ap} + (1 - A)(x_1 - x_{ap}) =$$
$$= y + (1 - A)(x_1 - x_{ap}).$$ Q.E.D.

<u>14 Teorem</u>. Če je enačba (12.1) rešljiva, potem ima eno samo rešitev le tedaj, ko ima ustrezna homogena enačba (13.1) le trivialno rešitev.

Dokaz: 1) Potrebnost navedenega pogoja je očitna.

2) Naj ima en.(13.1) le trivialno rešitev in en.(12.1) rešitev x_1. Potem je po teoremu 13 tudi x_{ap} rešitev, medtem ko je razlika $x_1 - x_{ap}$ rešitev enačbe (13.1). Ker smo privzeli, da ima en.(13.1) le trivialno rešitev, je $x_1 = x_{ap}$. S tem smo pokazali, da je navedeni pogoj tudi zadosten. Q.E.D.

<u>15 Teorem</u>. Rekli bomo, da je vrsta x_{ap} enakomerno konvergentna, če nad množico $\{y: y \in K; \|y\| = 1\}$ enakomerno zadošča Caushyjevem pogoju. Potreben in zadosten pogoj za enakomerno konvergenco vrste x_{ap} je $\lim_n \|A^n\| = 0$. Če je ta pogoj izpolnjen, je x_{ap} edina rešitev enačbe (12.1), ki pripada K.

Dokaz: 1) Potrebnost pogoja je razvidna neposredno iz alternative 6 in definicije za enakomerno konvergenco.

2) Zadostnost pogoja sledi iz ocene

$$\Big\|\sum_n^{n+m} A^i y\Big\| \leq \|y\|\sum_n^{\infty}\|A^i\| = \|y\|\sum_{[n/n_1]}^{\infty}\sum_0^{n_1}\|A^{jn_1+i}\| \leq$$

$$\leq \|y\|\sum_{[n/n_1]}^{\infty}\sum_0^{n_1}\|A^{n_1}\|^j\|A\|^i = \|y\| q^{[n/n_1]}\Big(\sum_0^{n_1}\|A\|^i\Big)/(1-q), m > 0, n > n_1,$$

z

$$q = \|A^{n_1}\| < 1,$$

ki pove, da zadošča x_{ap} enakomerno Caushajevem pogoju. Zato je po lemi 12 x_{ap} rešitev enačbe (12.1).

3) Da je x_{ap} edina rešitev en.(12.1), sledi iz teorema 14 in dejstva, da ima pri $\lim_n\|A^n\| = 0$ en.(13.1) le trivialno rešitev. Vsaka rešitev x en.(13.1) ustreza namreč tudi enačbam

$$(1 - A^n)x = 0, \quad n = 1,2,\dots \quad ,$$

iz katerih dobimo oceno $\|x\| \leq \|x\| \lim_n \|A^n\| = 0$. Q.E.D.

<u>16. Teorem</u>. Iz aditivnega operatorja A tvorimo operator $(1 - \lambda A)$ z definicijskim poljem $\{x: x \in K; (1 - \lambda A)x \in K\}$. Za $\lambda < \lambda_0$ eksistira njemu inverzni operator $(1 - \lambda A)^{-1}$, ki je aditiven in podan z enakomerno konvergentno vrsto

$$(1 - \lambda A)^{-1} = \sum_0^{\infty}(\lambda A)^i. \tag{1}$$

Dokaz sledi neposredno iz definicije 4, teorema 15 in alternative 6.

<u>17 Zgled.</u> Vzemimo za množico K_p vse nenegativne funkcije iz $L_p(0,1)$, $a(t)=0$, $\alpha(t)=0$. Aditiven operator A,

$$Ax(t) = x(at), \quad 0 < a \leq 1,$$

preslika K_p vase in je $\|A^n\| = a^{-n/p}$.

Poskusimo rekonstruirati pozitivno naraščajočo funkcijo $x(t) \in K_p$ iz enačbe $x(t) - x(at) = y(t)$. Ker je $y(t) \in K_p$, dobimo iz teorema 13

$$x(t) = x_{ap}(t) + \lim_n x(a^n t) .$$

Iz teorema 15 in (6.3) sledi: Enačba

$$x(t) - \lambda x(at) = y(t), \lambda < a^{1/p}, \; y(t) \in K_p,$$

ima eno samo rešitev v K_p. Ta je podana z enakomerno konvergentno vrsto x_{ap}.

<u>18 Definicija.</u> Rekli bomo, da je aditiven operator A enakomeren, če eksistira tako naravno število n_2 in tak element $s \in K$, da velja za vse $x \in K$

$$\|x\| s - A^{n_2} x \in K \tag{1}$$

in če moremo izbrati za vsak $x \in K$, $x \neq 0$, tak $\varepsilon > 0$, da je

$$A^{n_2} x - \varepsilon s \in K. \tag{2}$$

<u>19 Teorem.</u> Aditivnemu in enakomernemu operatorju A ustrezna enačba (12.1) je rešljiva za nek $y_1 \in K$, $y_1 \neq 0$ le, če je $\lim_n \|A^n\| = 0$.

Dokaz: 1) Zadostnost pogoja sledi iz teorema 15.

2) Pokažimo še njegovo potrebnost. Naj bo en.(12.1) rešljiva za y_1. Iz teorema 13 in (12.2) sledi: $\lim_n \|A^n y_1\| = 0$. Iz (18.1),(18.2) in (2.2) dobimo za vsak y K oceno

$$\|A^n y\| = \|A^{n-n_2} A^{n_2} y\| \leq \|y\| \|A^{n-n_2} s\| \leq \|y\| / \varepsilon_1 \; \|A^n y_1\| \tag{1}$$

in je zato

$$\lim_n \|A^n\| \leq \lim_n \|A^n y_1\|/\varepsilon_1 = 0. \quad \text{Q.E.D.} \tag{2}$$

<u>20 Lema</u>. Če je aditivnemu in enakomernemu operatorju A ustrezni $\lambda_0 < \infty$ in $y \neq 0$, $y \in K$, potem je $A^n y \neq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Dokaz: Če bi bil za nek $y_1 \neq 0$ in $n = n'$ $A^{n'} y_1 = 0$, potem bi iz ocene (19.1) sledilo $\|A^n\| = 0$ za $n \geq n'$, ter iz (6.3) $\lambda_0 = \infty$. To pa je v protislovju s predpostavko $\lambda_0 < \infty$. Q.E.D.

<u>21 Teorem</u>. Če je enakomernemu in aditivnemu operatorju ustrezni $\lambda_0 < \infty$ in $y \neq 0$, $y \in K$, potem je

$$\lim_{\lambda < \lambda_0, \lambda \to \lambda_0} \| A^n (1 - \lambda A)^{-1} y \| = \infty, \quad n = 0,1,2,\ldots \;.$$

Dokaz: Naraščajoče zaporedje $\|\sum_n^m (\lambda_0 A)^i y\|$, $m = n, n+1,\ldots$ gre za vsak $y \in K$, $y \neq 0$, z rastočim m proti ∞. V nasprotnem primeru sledi namreč iz (1.4), leme 12 in teorema 19: $\lim_n \|(\lambda_0 A)^n\| = 0$, kar je v protislovju z alternativo 6. Zato sledi dokaz neposredno iz teorema 16 in ocene

$$\|\sum_n^\infty (\lambda A)^i y\| \geq \|\sum_n^m (\lambda/\lambda_0)^i (\lambda_0 A)^i y\| \geq (\lambda/\lambda_0)^m \|\sum_n^m (\lambda_0 A)^i y\|, \quad ,$$

v kateri postane desna stran poljubno velika, če izberemo za m dovolj veliko naravno število in $\lambda < \lambda_0$ dovolj blizu λ_0.

<u>22 Lema</u>. Če je A aditiven in enakomeren ter $\lambda_0 < \infty$, potem ima množica

$$\{x(n,\lambda) : x(n,\lambda) = \| A^n (1 - \lambda A)^{-1} y\|^{-1} A^n (1 - \lambda A)^{-1} y, \ y \in K,$$
$$y \neq 0, \ n = 0,1,2,\ldots \ , \lambda \in (0,\lambda_0)\} \subset K \tag{1}$$

lastnost

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| (1 - \lambda_0 A)\, x(n,\lambda)\| = 0 \text{ in } \|x(n,\lambda)\| = 1. \tag{2}$$

Dokaz: Da elementi $x(n,\lambda)$ eksistirajo, sledi iz teorema

16 in leme 20. Limita (22.2) pa sledi iz teorema 21 in ocene

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \| (1 - \lambda_0 A)x(n,\lambda)\| \leq \|A^n\| \, \|y\| \lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A^n(1 - \lambda A)^{-1}y\|^{-1} +$$
$$+ \|A\| \lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) = 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

23 **Teorem.** Pri aditivnem in enakomernem operatorju A je ustrezna homogena enačba

$$(1 - \lambda A)x = 0, \ \|x\| = 1, \quad x \in K, \tag{1}$$

rešljiva pri realnih λ kvečjemu za $\lambda = \lambda_0$. Če rešitev eksistira, je enolična in ustreza relacijam

$$\lambda_0^{n_2} s - x \in K \tag{2}$$

in

$$x - \varepsilon s \in K, \ \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Dokaz: 1) Iz (23.1) in (2.1) sledi, da more biti lastna vrednost λ kvečjemu pozitivna. Če je λ_1 lastna vrednost in x_1 ustrezna lastna funkcija, potem dobimo iz (23.1) $\lim_n \|(\lambda_1 A)^n x_1\| = 1$. Zato sledi iz alternative 6 $\lambda_1 \geq \lambda_0$. Če bi bil λ_1 večji od λ_0, bi iz (19.1),(19,2) in limite

$$\lim_n \| (\lambda_0 A)^n x_1 \| = \lim_n (\lambda_0/\lambda_1)^n \| (\lambda_1 A)^n x_1 \| = 0$$

dobili $\lim_n \| (\lambda_0 A)^n \| = 0$. To pa je v protislovju z alternativo 6, in je zato $\lambda_1 = \lambda_0$. Relacije (23.2) in (23.3) slede neposredno iz (18.1) in (18.2) ter $\lambda_0 > 0$.

2) Pokažimo še, da sta lastni funkciji x_1 in x_2, ki ustrezata lastni vrednosti λ_0, med seboj enaki. Tvorimo razliko $x_1 - ax_2$ in poiščimo supremum vseh števil a, pri katerih je $x_1 - ax_2 \in K$. Iz (23.2),(23.3) in (2.1) sledi $a \leq \lambda_0^{n_2}/\varepsilon_2$. Poleg tega pa vsi $a \leq 0$ ustrezajo tej relaciji. Zato sup a eksistira in zaradi zaprtosti množice K velja:

$$x_1 - (\sup a)x_2 \in K.$$

Uporabimo za $x_1 - (\sup a)x_2$ relacijo (18.2); dobimo

$$x_1 - (\sup a)x_2 - \varepsilon s \in K.$$

Iz te relacije in (23.2) sledi

$$x_1 - (\sup a + \varepsilon\lambda_0^{-n_2})x_2 \in K.$$

Primerjajmo to relacijo z definicijo $\sup a$; dobimo $\varepsilon = 0$. Zato je po definiciji 18 : $x_1 - (\sup a)x_2 = 0$, to je $x_1 = x_2$.Q.E.D.

24 Teorem. Če je neka potenca n_3 aditivnega in enakomernega operatorja A totalno zvezna ter ustrezni $\lambda_0 < \infty$, potem je λ_0 lastna vrednost in

$$x_o = \lim_{\lambda \to \lambda_0} x(n,\lambda), \quad n \geq 0, \tag{1}$$

ustrezna lastna funkcija z normo ena.

Dokaz: Dokažimo najprej teorem za $n=n_3$. Zato si oglejmo zaporedja oblike

$$X_i = \left\{x(n_3,\lambda_{ik}) : k = 0,1,2,\ldots \; ; \quad \lim_k \lambda_{ik} = \lambda_0\right\}.$$

Iz (22.2), omejenosti A in zaprtosti K sledi: limita $x_i = \lim_k x(n_3, \lambda_{ik})$, $\|x_i\| = 1$, vsakega konvergentnega zaporedja X_i je lastni vrednosti λ_0 ustrezni lastni vektor operatorja A. Po teoremu 23 imajo zato vsa konvergentna zaporedja X_i isto limito. Zaznamujmo jo z x_o. Ker je A^{n_3} totalno zvezen, sledi neposredno iz (22.1) eksistenca vsaj enega konvergentnega zaporedja X_i. Pokažimo, da konvergira vsako zaporedje X_i k x_o in s tem zaključimo prvi del dokaza. Če neko zaporedje X_i ne konvergira k x_o, potem vsebuje tako neskončno zaporedje X_j, katerega elementi zadoščajo relaciji $\|x(n_3, \lambda_{jk}) - x_o\| > \vartheta > 0$. Toda zaradi totalne zveznosti operatorja A^{n_3} vsebuje tudi zaporedje X_j k x_o konvergentno podzaporedje. To pa je v protislovju z definicijo zaporedja X_j. Torej vsako zaporedje X_i konvergira k x_o, s čimer je en.(24.1) dokazana za $n = n_3$. Da velja en.(24.1) za vse $n \geq 0$, sledi iz relacije

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} x(n,\lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} x(n_3,\lambda) , \quad n \geq 0,$$

ki jo dobimo neposredno iz teorema 16,(22.1) in teorema 21. Q.E.D

Literatura:

1. Glasstone, S., Edlund, M.C., The Elements of Nuclear Reactor Theory. D.van Nostrand, N.York /1952/

2. Riesz, F., Sz-Nagy, B., Lekciji po Funkcionalnomu analizu. I.L. Moskva /1954/

Z A H V A L A

Zahvaljujem se akademiku profesorju dr.A.Peterlinu za vzpodbudo in naklonjenost, s katero je spremljal moje delo. Prav tako sem dolžan zahvalo profesorju dr.I.Kuščerju in profesorju dr.I. Vidavu za konstruktivno kritiko.

ZAHVALA

Zahvaljujem se [illegible] profesorju dr. [illegible] za vzpodbudo in nasvete, s katerimi je spremljal moje delo. Prav tako sem dolžan [illegible] profesorju dr. [illegible] in profesorju dr. I. Vidmarju za konstruktivno kritiko.