Delo z nadarjenimi učenci pri matematiki v tretji triadi osnovne šole

Work with Gifted Pupils at Mathematical Lessons in the Third Triad of Primary School

Darinka Rogina
Osnovna šola Loka
Črnomelj

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljenih nekaj preizkušenih načinov dela, idej, skrbno izbranih nalog za delo z nadarjenimi učenci pri matematiki v 3. triadi osnovne šole.

Ključne besede: nadarjeni učenci, matematika, geometrijske naloge, naloge iz vsakdanjega življenja, medpredmetno naloge.

Σ Abstract

The article describes some of the proven work methods, ideas, and carefully selected exercises for work with gifted pupils at mathematical lessons in the third triad of primary school.

***Key words:** gifted pupils, mathematics, geometry exercises, everyday life mathematical exercises, cross-curricular exercises*

α Uvod

Nadarjeni učenci – splošno

Nadarjeni učenci so po Zakonu o osnovni šoli (11. člen) učenci s posebnimi potrebami.[11]

Na šoli jih odkrivamo že v 1. in 2. triadi, intenzivno pa v 3. triadi. V postopku odkrivanja sodelujejo šolska svetovalna služba (testi sposobnosti in nadarjenosti), učitelji in starši.

Učitelji matematike smo pozorni na nekatere značilnosti, ki so skupne matematično nadarjenim učencem.

Ti učenci:

- imajo razvito logično in divergentno mišljenje,
- znajo sklepati in kritično presojati,
- pri reševanju problemov imajo izviren pristop, izkazujejo visoko stopnjo ustvarjalnosti pri iskanju nenavadnih rešitev,
- so radovedni, vedoželjni, se hitro učijo, imajo dober spomin, natančno opazujejo, razumejo matematične ideje in povezave,
- k delu pristopijo analitično, so sistematični in zanesljivi,
- zlahka ugotovijo vzorce, pravila, lastnosti,
- svoje znanje znajo uporabiti, tudi v neobičajnem kontekstu,
- skoncentrirajo se za daljši čas, sledijo dolgoročnim dejavnostim, vztrajajo pri iskanju rešitve, so vešči pri postavljanju vprašanj in so sposobni slediti rdeči niti raziskovanja,
- imajo visoke aspiracije, posledično visoko storilnostno motivacijo, in uživajo v dosežkih.

Delo z nadarjenimi učenci pri matematiki na naši šoli

Na šoli učencem, ki kažejo nadarjenost za matematiko, prilagodimo oblike in metode dela, vključimo jih k dodatnemu pouku, interesnim dejavnostim, svetujemo jim udeležbo na pripravah na tekmovanja. Ti učenci delajo tudi raziskovalne in seminarske naloge, v 8. in 9. razredu imajo nivojski pouk matematike.

Učence 8. in 9. razreda, ki izkazujejo izrazito nadarjenost pri matematiki tudi z dosežki na področnih tekmovanjih, vključimo v program za nadarjene z osebnim mentorstvom.

Na začetku leta se s temi učenci pogovorim o vsebini in načinu dela pri tako imenovanem individualnem pouku. Včasih je to samo en učenec, kakšno leto je skupinica večja, a ne večja od 4 učencev. Dobivamo se enkrat tedensko, pred tekmovanji bolj intenzivno, tudi v popoldanskem času.

Naloga učitelja je med drugim priprava ustreznih nalog, zanimivih, dovolj zahtevnih, predvideti je treba različne strategije reševanja posamezne naloge, različne »intervencije«, tudi v obliki dodatnih, nekoliko lažjih nalog, če je osnovna naloga prezahtevna (najprej konkretni podatki, šele nato splošno). Naloge morajo biti za posameznega učenca ravno prav zahtevne, tako da jih z veliko truda zmore rešiti. Da je zmogel rešiti težko nalogo, je za učenca nepopisna sreča in najboljša motivacija, da se bo spoprijel s še zahtevnejšimi primeri. Zahtevnost nalog pri obdelavi posamezne učne teme stopnjujem.

Z nadarjenimi učenci pogosto obiščemo spletno stran www.nrich.maths.org, ki jo podpira Univerza Cambridge. Na tej spletni strani vsak mesec objavijo zanimive matematične probleme za različne starostne stopnje, od nižjih razredov OŠ do prvih letnikov srednje šole. Naloge so objavljene od 1. do 21. v mesecu in do tega datuma tudi pričakujejo rešitve, ki jih, v angleščini seveda, prispevajo mladi z vseh koncev sveta. Vsakega 1. v mesecu pravilne rešitve in reševalce omenijo, izvirne, dobre rešitve pa objavijo v celoti.

V lanskem šolskem letu so se trije devetošolci naše šole ukvarjali z dvema problemoma.

V prvi nalogi so se ukvarjali s problemom, ko enakostranični trikotnik rotira okoli enakostraničnega trikotnika, pa okoli kvadrata, okoli pravilnega petkotnika, splošno okoli pravilnega n-kotnika. Iskali so obsege različnih »rožic«, ki so nastale z rotacijo. Izpeljali so tudi splošno formulo za izračun obsega »rožice«, ki nastane, če enakostranični trikotnik rotira okoli poljubnega n-kotnika (glej Triangles and Petals – september 2010).

V drugi nalogi so raziskovali zvezo med Celzijevo, Fahrenheitovo in Kelvinovo temperaturno lestvico. (glej Temperature – maj 2011).

Naloge, privzete z www.nrich.maths.org, učenci dobijo v izvirniku, torej v angleškem jeziku. Skupaj se o zastavljenem problemu pogovorimo, razjasnimo morebitne nejasnosti. Rešitev običajno izdelajo v slovenščini (pravijo, da še vedno bolje razmišljajo v maternem jeziku), nato pa jo prevedejo v angleščino. Če se kje zatakne, priskoči na pomoč učitelj angleščine. Zgodi se, da je kak problem zanje pretrd oreh in ga ne uspejo rešiti; tedaj zelo napeto pričakujejo 1. v mesecu, ko na spletni strani običajno vidijo rešitev nekoga drugega. Pomembno je, da se s problemom ukvarjajo, včasih je pot pomembnejša od cilja.

Naloge, ki jih pripravim za nadarjene učence, iščem na različnih javno dostopnih spletnih straneh, domačih in tujih, veliko izzivov najdem v nalogah s preteklih tekmovanj, kakšno nalogo pa sestavim tudi sama.

V nadaljevanju navajam nekaj nalog, ki so jih učenci z veseljem reševali v preteklih letih. Opažam, da zelo radi rešujejo naloge, ki povezujejo matematiko z drugimi področji (fiziko, kemijo, tehniko …), in tako vidijo uporabo matematične teorije v konkretnih primerih (linearna funkcija v povezavi s fiziko). Nadarjeni učenci zelo radi rešujejo probleme iz vsakdanjega življenja (zahtevni problemi s področja procentnega računa). Pritegnejo jih geometrijski problemi, zlasti pa tudi naloge, pri katerih se je treba odločati med različnimi izbirami.

β Izbrane naloge za delo z nadarjenimi učenci

Naloge s področja medpredmetnega povezovanja

1. naloga

Temperatura (v °C) v pečici je linearno odvisna od časa t (v minutah). Če je pečica vključena 5 minut, doseže temperaturo 55 °C, če je vključena 10 minut, se temperatura poveča na 87 °C.

a) Določi enačbo linearne funkcije, ki opisuje odvisnost temperature T v pečici od časa t!
b) Kolikšna je temperatura po pol ure?
c) Biskvit je treba dati v pečico, ko je temperatura v njej 175 °C. Koliko minut po vključitvi je treba vanjo dati biskvit?
d) Drobno pecivo je treba vstaviti v pečico, potem ko je v njej temperatura med 150 °C in 180 °C. V katerem časovnem intervalu je potrebno, potem ko smo vključili pečico, vanjo vstaviti drobno pecivo? Meje intervala zaokroži na celo vrednost minute!

Vir [3]: http://dokumenti.ncvvo.hr/Nacionalni_ispiti_06/MPM_IIdio.pdf

Reševanje

a) Učenci zapišejo splošno enačbo linearne funkcije $T(t) = kt + n$ in z uporabo 2 točk, ki sta podatka (5,55) in (10,87,) pridejo do enačbe

$$T(t) = 6{,}4t + 23 \qquad (1)$$

b) Potem ko vstavijo v enačbo (1) podatek t = 30 minut, pridejo do rešitve, da je temperatura v pečici po pol ure 215 °C.

c) Iz enačbe (1) izpeljejo čas t.

$$t = \frac{T - 23}{6{,}4} \qquad (2)$$

V (2) vstavijo T = 175 °C in izračunajo, da je treba biskvit vstaviti v pečico po 23,7 minutah.

d) Podobno izračunajo, da je treba drobno pecivo vstaviti v pečico v intervalu 20 min < t < 25 min po vključitvi pečice.

2. naloga

Znano je, da je med Fahrenheitovo in Celzijevo temperaturno lestvico obstaja linearna odvisnost, in sicer

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32.$$

a) Voda zavre pri 100 °C. Koliko Fahrenheitovih stopinj je to?

b) Zunaj je 15 °C. Koliko Fahrenheitovih stopinj je to?

c) Iz enačbe $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ izrazi C in izračunaj, koliko Celzijevih stopinj je 115 °F!

d) Ali obstaja temperatura, ki je enaka v °F in v °C? Ugotovitev prikaži tudi grafično!

Reševanje in komentar

Z odgovori na prva tri vprašanja učenci niso imeli težav, nekaj dodatnih pojasnil pa so potrebovali pri reševanju d) primera.

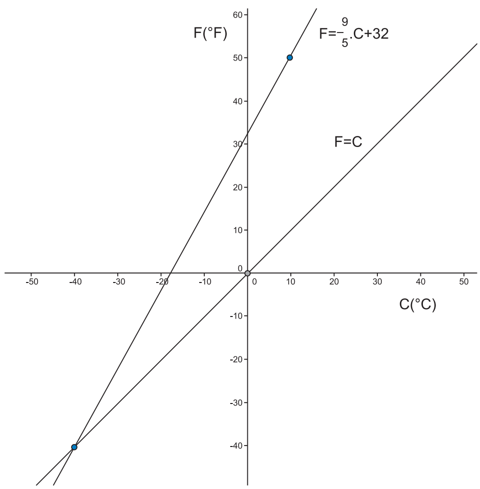
Najprej računska rešitev:

$F = C$, pri čemer namesto F vstavimo $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ in dobimo

$$C = \frac{9}{5} \cdot C + 32 \qquad (1)$$

Z rešitvijo enačbe (1) dobimo odgovor, da je ta temperatura -40 °.

In še grafična predstavitev:



V naslednjih dveh nalogah ne gre za linearni funkciji. Z njima razširimo pojem odvisnosti dveh količin, še posebej če učenci, ki so sicer zelo radovedni in vedoželjni, postavljajo dodatna vprašanja. Naloga 3 je zanimiva tudi zato, ker se učenci srečajo s potenco z negativnim eksponentom. Nalogo 4 rešujemo z metodo ekstremalnih problemov (brez odvoda).

3. naloga

Število bakterij B v telesu je odvisno od časa t (v urah), in sicer velja:

$$B(t) = 1000 \cdot 2^{3t}$$

a) Koliko bakterij je bilo v telesu na začetku merjenja ($t = 0$)?
b) Ali je bilo v telesu kaj bakterij 1 uro pred začetkom opazovanja ($t = -1$)?
c) Koliko je bilo bakterij v telesu po 40 minutah od začetka merjenja?
d) Čez koliko časa bo v telesu 1024000 bakterij?

Reševanje

a) $B(0) = 1000 \cdot 2^0 = 1000$

Na začetku opazovanja je bilo v telesu 1000 bakterij.

b) $B(-1) = 1000 \cdot 2^{-3} = 125$

Eno uro pred začetkom opazovanja je bilo v telesu 125 bakterij.

c) $B(\frac{40}{60} = \frac{2}{3}) = 1000 \cdot 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4000$

40 minut po začetku opazovanja je bilo v telesu 4000 bakterij.

d) Odgovor na vprašanje prinese reševanje enačbe, ki jo nadarjeni učenci zmorejo rešiti z znanjem osnovnošolske matematike.

$1024000 = 1000 \cdot 2^{3t}$

(Enačbo delimo s 1000.)

$1024 = 2^{3t}$

(1024 zapišemo kot potenco števila 2.)

$2^{10} = 2^{3t}$

$3t = 10$

$t = 3\frac{1}{3}h$

V telesu bo 1024000 bakterij po 3 urah in 20 minutah.

4. naloga

Temperatura T (v °C) v rastlinjaku t ur potem, ko se zmrači, je podana z enačbo

$T(t) = \frac{1}{4}t^2 - 5t + 30$,

pri čemer je $0 \le t \le 12$. Zmrači se ob 19. uri.

a) Kolikšna je bila temperatura ob 21. uri?
b) Ob kateri uri je bila temperatura najmanjša?
c) Kolikšna je bila najnižja temperatura v rastlinjaku?

Vir [4]: http://www.gssjd.hr/nastavni-predmeti/matematika/nacionalni-ispiti-iz-matematike/zadaci-s-nacionalnih-ispita/

Reševanje:

a) $T(2) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 30 = 21$

Ob 21. uri je bila temperatura 21°C.

b) Ker učenci v osnovni šoli ne poznajo odvoda, s katerim bi elegantno odgovorili na vprašanje b)

$(T' = \frac{1}{4} \cdot 2t - 5 = 0 \quad \text{in} \quad t = 10)$,

so rešili nalogo tako, da so izračunali T v odvisnosti od t in izračune prikazali v preglednici.

t [h]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12
T [°C]	30	25,25	21	17,25	14	11,25	9	7,25	6	5,25	**5**	5,25	6

Najnižja temperatura je bila čez 10 ur, to je ob 5. uri zjutraj.

c) Najnižja temperatura v rastlinjaku je 5 °C.

Problemi iz vsakdanjega življenja, pri katerih se je treba odločati med različnimi možnostmi

5. naloga

Družina Mesojedec se je odločila kupiti rabljen avtomobil, ki stane 5800 €. V prodajnem salonu jim ponujajo 2 možnosti:

a) če plačajo z gotovino, jim dajo 5 % popusta;

b) lahko pa plačajo 1000 € takoj, nato pa po 230 € mesečno 24 mesecev.

Ker je kriza in Mesojedčevi nimajo gotovine za celoten avto, se odločijo za drugo ponudbo.

Koliko € več bodo plačali, kot če bi plačali z gotovino? Izrazi v %!

Reševanje in komentar

a) $5\ \%$ od $5800\ € = \frac{5}{100} \cdot 5800\ € = 290\ €$

$5800\ € - 290\ € = 5510\ €$

Če bi Mesojedčevi plačali z gotovino, bi za avtomobil plačali 5510 €.

b) $30\ € \cdot 24 = 5520\ €$

$5520\ € + 1000\ € = 6520\ €$

$6520\ € - 5510\ € = 1010\ €$

$\frac{1010}{5510} \approx 18{,}3\ \%$

Ker so se Mesojedčevi morali odločiti za 2. ponudbo, bodo plačali 1010 € več, kar je približno 18,3 % več, kot če bi plačali z gotovino.

Take naloge se mi zdijo pomembne z vidika vsakdanjega življenja. Od šole se danes pričakuje, da posameznika pripravi na drugačen način življenja, v katerem je za mladega šolajočega se človeka le malo zaposlitvenih možnosti. Od posameznika se tako pričakuje, da se učinkovito odloča pri razreševanju različnih problemov, zato take in podobne naloge učence usposobijo za inteligentno odločanje.

6. naloga

Trije učenci 9. razreda obiskujejo različne šole. Pisali so 2 testa iz matematike.

- Matic je pri prvem testu dosegel 24 od 60 točk, pri drugem pa 32 od 40 točk.
- Kristjan je pri prvem testu dosegel 35 od 70 točk, pri drugem pa 54 od 60 točk.
- Ninin dosežek je 27 od 90 točk pri prvem testu in 45 od 50 točk pri drugem testu.

a) Kateri izmed učencev je dosegel najboljši rezultat pri prvem in kateri pri drugem testu?

Učiteljice matematike menijo, da je bil drugi test vsebinsko pomembnejši, zato se odločijo, da bodo končno oceno oblikovale tako, da bodo od prvega testa vzele 30 % točk, od drugega pa 70 %.

b) Izračunaj dosežek posameznega učenca v %, upoštevajoč zgornji ključ.

Dosežke predstavi v preglednici!

(Opomba: Naloga je zgolj hipotetična. V naši OŠ velja, da so vse pridobljene ocene enakovredne in ne obstajajo delne ocene, ki bi jih lahko sestavljali v neko drugo oceno.)

Reševanje in komentar

a)

Učenci	Dosežene točke 1. testa v %	Dosežene točke 2. testa v %	Razlika
Matic	40 %	80 %	40 %
Kristjan	50 %	90 %	40 %
Nina	30 %	90 %	60 %

b)

Učenci	30 % 1. testa	70 % 2. testa	Skupaj
Matic	12 %	56 %	68 %
Kristjan	15 %	63 %	78 %
Nina	9 %	63 %	72 %

Najboljši rezultat je dosegel Kristjan.

3. naloga

Gospod Ciklama se je s svojim avtom odpravil v Veliko mesto. Glede parkiranja ima na voljo 4 različne možnosti:

A Parkirati je možno v parkirni hiši blizu kliničnega centra, kjer je cena parkiranja 0,80 € za prvo uro, nato pa za vsako naslednjo uro 0,50 €.

B Parkira lahko na Mestnem trgu, kjer stane prva ura 1,50 €, vsaka naslednja ura pa 0,30 €.

C Obstaja možnost, da avto pusti v predmestju, kjer vsaka ura parkiranja stane 0,40 €. V tem primeru se mora v center Velikega mesta peljati z mestnim avtobusom – vožnja v mesto in nazaj stane 0,60 €.

D Na voljo ima možnost, da avto pusti v 15 km oddaljeni Črni vasi, kjer je parkiranje na železniški postaji brezplačno, povratna vozovnica za vlak pa stane 3,50 €.

Svetuj gospodu Ciklami najugodnejšo varianto parkiranja.

Reševanje in komentar

Učenci so imeli kar precej težav, da so izbrali pravo strategijo reševanja te naloge. Najprej so poskušali z grafično potjo, pa so se zapletli. Ni jim bilo jasno, kaj pomeni pri A za vsako naslednjo uro 0,5 €. Ali to pomeni, da je cena parkiranja do 2 ur enaka, če parkira 1 uro in 1 minuto ali če parkira 2 uri? Kar nekaj časa je potekala možganska nevihta - kresala so se mnenja, padali so najrazličnejši predlogi, nato pa je prevladalo mnenje, da bo najbolje vse štiri možnosti predstaviti v preglednici.

Ure parkiranja	PARKIRNA HIŠA	MESTNI TRG	PRED-MESTJE	ČRNA VAS
1	**0,80 €**	1,50 €	1,00 €	3,50 €
2	**1,30 €**	1,80 €	1,40 €	3,50 €
3	**1,80 €**	2,10 €	**1,80 €**	3,50 €
4	2,30 €	2,40 €	**2,20 €**	3,50 €
5	2,80 €	2,70 €	**2,60 €**	3,50 €
6	3,30 €	**3,00 €**	**3,00 €**	3,50 €
7	3,80 €	**3,30 €**	3,40 €	3,50 €
8	4,30 €	3,60 €	3,80 €	**3,50 €**
9	4,80 €	3,90 €	4,20 €	**3,50 €**
10	5,30 €	4,20 €	4,60 €	**3,50 €**

Ugotovitve

1. Če bo gospod Ciklama parkiral 3 ure ali manj, naj parkira v PARKIRNI HIŠI.
2. Če bo parkiral 3 ure in več, a največ 6 ur, naj uporabi parkirišče v PREDMESTJU.

3. Če namerava parkirati 7 ur, naj parkira na MESTNEM TRGU.
4. Če bo v Ljubljani ostal več kot 7 ur, naj parkira v ČRNI VASI in pride v VELIKO MESTO z vlakom.

Nalogo lahko nadgradimo z dodatno nalogo:

Oblikuj take pogoje parkiranja na posameznih parkiriščih, da bodo veljali spodnji scenariji.

a) Na parkirišču A je ugodneje parkirati, če traja parkiranje manj kot 5 ur, sicer je ugodnejše parkirišče B.
b) Parkiraš lahko na parkiriščih C, D, in E. Parkirišče C je najcenejše, če traja parkiranje manj kot 2 uri, če parkiraš med 2 in 6 urami, je najcenejše parkirišče D, parkirišče E pa je najcenejše, če parkiraš več kot 6 ur.
c) Parkiraš lahko na parkiriščih F, G, in H. Če parkiraš 3 ure ali manj, je najugodnejše parkirišče F, če parkiraš več kot 3 ure, je najugodnejše parkirišče G. Parkirišče H ni nikoli najcenejše.
d) Parkiraš lahko na parkiriščih I, J, in K. Parkirišče I je vedno cenejše od J in K, ne glede na to, koliko časa parkiraš.

Komentar

Naloga je zelo koristna. Učenci se učijo zastavljati matematično smiselna vprašanja, učijo se iskati pravilnosti, postavljati domneve, jih preverjati ter sporočati svoje ugotovitve na najprimernejši način (preglednica).

Vse to počno na zahtevnostni ravni, ki jo še obvladajo, kar jim vzbuja zadovoljstvo.

Cilj dodatnih nalog je modeliranje danih življenjskih situacij in predstavlja za učence precejšen napor.

4. naloga

V nekem trenutku je bila cena bencina na bencinski črpalki A in bencinski črpalki B enaka.

Na črpalki A so bencin zaporedoma povečali za 5 %, 6 %, 4 %, na črpalki B pa so ceno zaporedoma povečali za 2 %, 10 % in za 6 %.

Na kateri bencinski črpalki je bila cena po 3 podražitvah višja in za koliko %?

Vir [5]: http://www.stkpula.hr/mat-natj/zadaci/2010/2010-OS-drz-78-zad+rj/2010-OS-drz-78-zad.pdf

Opomba: Naloga je zgolj hipotetična. Ceno naftnih derivatov v Sloveniji določa Uredba o oblikovanju cen naftnih derivatov (UL, št. 76/2012), trgovci jo morajo pri podražitvah upoštevati. Pri vseh prodajalcih naftnih derivatov so cene enake.

Reševanje

ČRPALKA A
Začetna cena: x
1. podražitev:
$x + 5\ \% \cdot x = 105\ \% \cdot x$
2. podražitev:
$105\ \% \cdot x + 6\ \%$ od $105\ \% \cdot x = 111{,}3\ \% \cdot x$
3. podražitev:
$111{,}3\ \% \cdot x + 4\ \%$ od $111{,}3\ \% \cdot x =$
$= 115{,}752\ \% \cdot x \doteq 115{,}8\ \% \cdot x$

ČRPALKA B
Začetna cena: x
1. podražitev:
$x + 2\ \% \cdot x = 102\ \% \cdot x$
2. podražitev:
$102\ \% \cdot x + 10\ \%$ od $102\ \% \cdot x = 112{,}2\ \% \cdot x$
3. podražitev:
$112{,}2\ \% \cdot x + 6\ \%$ od $112{,}2\ \% \cdot x =$
$= 118{,}932\ \% \cdot x \doteq 119\ \% \cdot x$

Po 3 podražitvah je bencin dražji na črpalki B, in sicer za $\frac{3{,}2\% \cdot x}{115{,}8\% \cdot x} \doteq 2{,}7\ \%$.

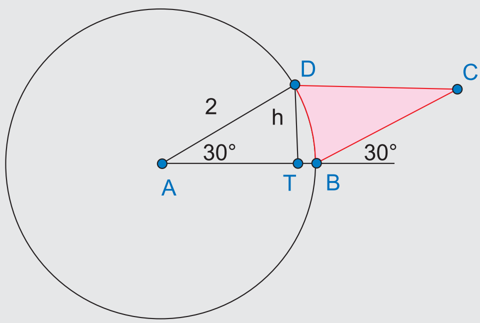
Komentar

Z reševanjem te naloge so imeli učenci kar nekaj težav, saj niso vedeli, kako bi se je lotili. Potrebna je bila »intervencija« v obliki lažjih nalog s konkretnimi podatki, šele nato so se lahko lotili te naloge.

Geometrijski problemi

1. naloga

Dana je krožnica s središčem A in polmerom 2 cm. Lik $ABCD$ je paralelogram. Izračunaj ploščino osenčenega dela paralelograma na dve decimalki natančno.



Vir [6]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade10.html

Reševanje, komentar

Ploščino osenčenega dela dobimo tako, da od ploščine paralelograma, ki je romb, odštejemo ploščino krožnega izseka. Višina romba h = 1, saj je pravokotni trikotnik polovica enakostraničnega trikotnika.

Torej velja:

$$p = p_{\text{paralelograma}} - p_{\text{krožnega izseka}}$$

$$p = |AB| \cdot h - \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$$

$$p = 2 \cdot 1 - \frac{\pi \cdot 4 \cdot 30°}{360°}$$

$$p = 2 - \frac{\pi}{3}$$

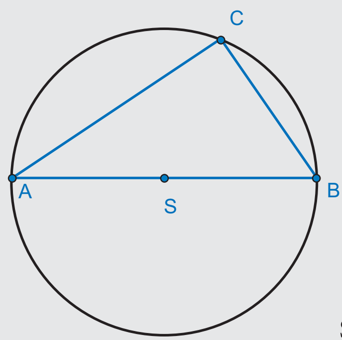
$$p = 0{,}95$$

Ploščina osenčenega dela meri 0,95 cm^2.

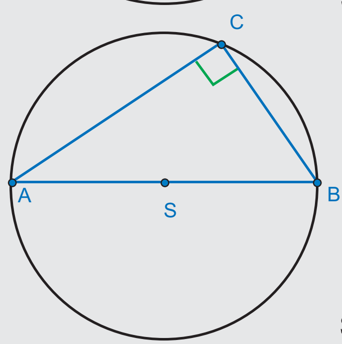
Pri reševanju te naloge je učencem predstavljalo največjo težavo odkriti, da je zaradi pravega kota in kota 30º trikotnik ATD polovica enakostraničnega trikotnika.

2. naloga

V krogu je AB premer in meri 10 cm. Ploščina trikotnika ABC (oglišče C leži na krožnici) je *11 cm²*. Izračunaj obseg trikotnika ABC.



Slika 1



Slika 2

Vir [7]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade12.html

Reševanje, komentar

Ob tej nalogi sem pomišljala, ali naj učencem ponudim sliko 1 ali sliko 2. Sama bi se na začetku odločila za sliko 1, saj iz podatkov, da je daljica AB premer kroga in točka C točka, ki leži na krožnici, učenci sami ugotovijo, da je trikotnik ABC pravokoten. Če tega sami ne bi ugotovili, bi jim kot intervencijo ponudila sliko 2.

Ker je AB premer in ker točka C leži na krožnici, je trikotnik ABC pravokoten.

Naj velja $|AB| = c$, $|BC| = a$ in $|AC| = b$.

1. Velja Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2$, torej $a^2 + b^2 = 100$.
2. Hkrati velja $p = \dfrac{ab}{2}$ torej $ab = 22$.
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2+b^2) + 2ab = 100 + 2 \cdot 22 = 144$
4. Torej velja $(a+b)^2 = 144$ in s korenjenjem obeh strani enačbe dobimo, da je $a + b = 12$.
5. $o = a + b + c = 12 + 10 = 22$

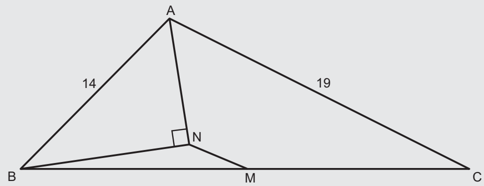
Obseg trikotnika ABC je 22 cm.

Večina učencev pri reševanju te naloge ugotovi, da je $a^2 + b^2 = 100$ in $ab = 22$. Potem nadaljujejo reševanje tako, da iz enačbe $ab = 22$ izrazijo $a = \dfrac{22}{b}$ in to vstavijo v enačbo $a^2 + b^2 = 100$.

Dobijo enačbo 4. stopnje, ki je z osnovnošolskim znanjem ne znajo rešiti. Tu in tam kak učenec samostojno pride do zamisli in reši je nalogo tako, kot je opisano zgoraj. Večina učencev pa tu potrebuje nekaj usmerjanja.

3. naloga

V trikotniku ABC je točka M središče daljice BC, daljica AN leži na simetrali kota BAC, daljici AN in BN sta pravokotni. Stranici trikotnika ABC sta dolgi: $AB = 14$ cm in $AC = 19$ cm. Koliko je dolga daljica MN?



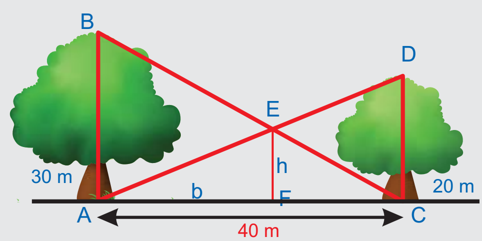
Vir [8]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade11.html

Reševanje in komentar

Ideja, ki pripelje do rešitve, je, da je treba daljico BN podaljšati do daljice AC. Točko, v kateri nosilka daljice BN seka daljico AC, označimo z E. Ugotovimo, da sta trikotnika BNA in ANE skladna (ujemanje v stranici in priležnih kotih). To pomeni, da je $|AB| = |AE| = 14$ cm in $|EC| = 5$ cm. Ker velja $|BN| = |NE|$ in je točka M središče daljice BC, je daljica NM srednjica v trikotniku BCE in zato enaka polovici dolžine stranice $|CE|$, torej meri 2,5 cm.

4. naloga

Dve drevesi sta 40 m narazen. Prvo drevo je visoko 30 m, drugo pa 20 m. Izračunaj višino h!



Vir [9]: http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade7.html

Rešitev

1. Ugotovimo, da je $\Delta ABC \approx \Delta CFE$, in zato velja

$$AB : AC = EF : FC$$
$$30 : 40 = h : (40 - b)$$
$$40\,h = 30 \cdot (40 - b)$$
$$40h = 1200 - 30b,$$
enačbo delimo z 10
$$4h = 120 - 3b$$
$$h = \frac{120 - 3b}{4} \qquad (1)$$

2. Vidimo tudi, da je $\Delta ADC \approx \Delta AFE$, in ta ko velja

$$AC : CD = AF : EF$$
$$40 : 20 = b : h$$
$$40h = 20b$$
$$h = \frac{b}{2} \qquad (2)$$

3. Enačbi (1) in (2) izenačimo in dobimo:

$$\frac{120 - 3b}{4} = \frac{b}{2},$$
enačbo pomnožimo s 4:
$$120 = 5b$$
$$b = 24\ m$$

4. Vstavimo $b = 24\ m$ v enačbo (1) in dobimo $h = 12\ m$.

Učenec, ki se je lansko leto ukvarjal s to nalogo, jo je rešil na svoj, zame zelo izviren in presenetljiv način, ki ga v svojem razmisleku nisem predvidela.

Kakšna je bila njegova pot?

Postavil je pravokotni koordinatni sistem s koordinatnim izhodiščem v točki $A(0, 0)$, abscisna os je tako postala premica skozi točko $C(40, 0)$, ordinatna os pa premica skozi točko $B(0, 30)$.

Problem je tako prevedel v iskanje enačb premic skozi točki (A, D) in (B, C) in njunega presečišča $E(b, h)$.

Tako je našel enačbo premice skozi $A(0,0)$ in $D(40,20)$: $y = \frac{1}{2}x$ in $\qquad (1)$

enačbo premice skozi točki $B(0,30)$ in $C(40,0)$:

$$y = -\frac{3}{4}x + 30 \qquad (2)$$

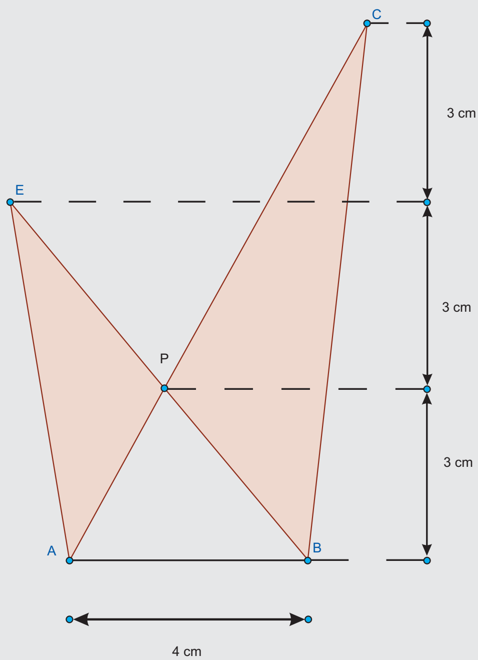
Enačbi (1) in (2) je izenačil in dobil enačbo $\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + 30$, pomnožil je s 4:

$$2x = -3x + 120$$
$$5x = 120$$
$x = 24$ in z vstavitvijo v (1) $y = 12$.

Koordinate točke E so (24,12), torej velja $b = 24\ m$ in $h = 12\ m$.

5. naloga

Izračunaj vsoto ploščin osenčenih trikotnikov, ki se »poljubljata« v skupni točki P.



Vir [10]: http://nrich.maths.org/542

Reševanje in komentar

Ko učenci vidijo naslov naloge, se najprej veselo nasmejejo in postavijo raziskovalno vprašanje: »Ali se tudi trikotnika lahko poljubljata?«

Nato iščejo idejo in večina nadarjenih učencev pride do naslednje rešitve:

$$p_{PBC} = p_{ABC} - p_{ABP} = \frac{4 \cdot 9}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 18 - 6 = 12$$

$$p_{APE} = p_{ABE} - p_{ABP} = \frac{4 \cdot 6}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 12 - 6 = 6$$

Vsota ploščin osenčenih trikotnikov je 18 cm^2

Nalogo lahko uporabimo kot problem, ključno vprašanje, »vžig« na začetku obravnave ploščine trikotnika v 7. razredu.

γ Zaključek

Delo z nadarjenimi učenci v 3. triadi osnovne šole v okviru dodatnega pouka in individualnih ur je nadaljevanje dela, ki ga opravim pri rednem pouku matematike. Na naši šoli izvajamo nivojski pouk, saj menimo, da je za poučevanje matematike ustreznejši. Pomembno je, da je pouk v najvišji zahtevnostni ravni problemsko naravnan, vendar postopen.

Nadarjenim učencem ponudim naloge, pa tudi različne aktivnosti, pri katerih razvijajo matematične procese, kot so iskanje vzorcev, ocenjevanje rezultata, razgraditev kompleksnega problema na posamezne naloge, utemeljevanje, oblikovanje in preverjanje hipotez, posploševanje, dokazovanje … Poznavanje in obvladovanje matematičnih procesov in strategij je, poleg obvladovanja matematičnih pojmov in veščin, nujno za obravnavo problemskih situacij.

Pri obravnavi posamezne učne teme tako učenci osvojijo osnovna in konceptualna znanja, rutinska in kompleksna proceduralna znanja in se lotijo problemskih znanj. [1] in [2]

Kako uporabiti znanje v novih situacijah, kako poiskati ustrezne strategije reševanja določenega problema?

Naloge, ki so predstavljene v članku, so v praksi preizkušen odgovor na zgornje vprašanje.

Poseben primer je motivacija – kako učence pritegniti k reševanju zahtevnih matematičnih nalog, ko pa jih danes obkroža toliko vsega, kar vzbuja njihovo pozornost? Tu igrajo pomembno vlogo matematična tekmovanja. Ko učencu enkrat uspe s svojim talentom, a tudi s trdim delom, osvojiti npr. srebrno Vegovo priznanje, smo ga največkrat pridobili, da bo trdo delal tudi prihodnje leto.

Motivacijsko zelo uspešno je tudi v članku opisano reševanje matematičnih problemov na spletni strani www.nrich.maths.org, ki daje mednarodno dimenzijo, učencem in učitelju pa potrditev, da smo na pravi poti, saj se tudi na drugih koncih sveta ukvarjajo s podobnimi matematičnimi problemi.

δ Viri in literatura:

1. Predmetna kurikularna komisija za matematiko, Učni načrt: *program osnovnošolskega izobraževanja. Matematika,* Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2006.
2. Predmetna komisija za posodabljanje učnega načrta za matematiko, *Predlog posodobljenega učnega načrta. Matematika*, Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana, 2008.
3. http://dokumenti.ncvvo.hr/Nacionalni_ispiti_06/MPM_IIdio.pdf, (20. 4. 2012)
4. http://www.gssjd.hr/nastavni-predmeti/matematika/nacionalni-ispiti-iz-matematike/zadaci-s-nacionalnih-ispita/, (20. 4. 2012)
5. http://www.stkpula.hr/mat-natj/zadaci/2010/2010-OS-drz-78-zad+rj/2010-OS-drz-78-zad.pdf, (24. 4. 2012)
6. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade10.html, (24. 4. 2012)
7. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade12.html, (24. 4. 2012)
8. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade11.html, (24. 4. 2012)
9. http://www.mystfx.ca/special/mathproblems/grade7.html, (24. 4. 2012)
10. http://nrich.maths.org/542, (20. 4. 2012)
11. Zakon o osnovni šoli, Državni zbor RS, 2006