RIMSKO DOMINANTNO ŠTEVILO

POLONA PAVLIČ[1], JANEZ ŽEROVNIK[2,3]

[1]Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru
[2]Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani
[3]Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 05C69

Na podlagi motivacije iz vsakdanjega življenja predstavimo koncept dominacije ter rimske dominacije. Natančneje se posvetimo slednji. Predstavimo nekaj osnovnih lastnosti koncepta ter jih uporabimo za določitev vrednosti rimskih dominantnih števil nekaterih posebnih družin grafov.

THE ROMAN DOMINATION NUMBER

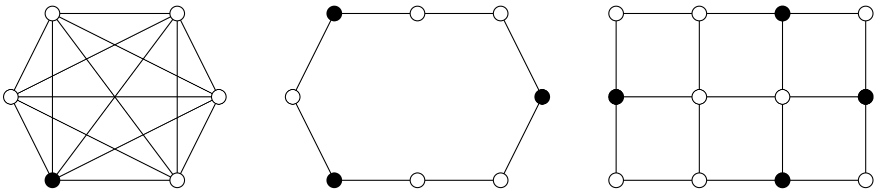
We present a concept of the domination and the Roman domination based on motivation from everyday life. We focus our attention to the Roman domination and present some basic properties of this graph invariant. Using these properties we determine the exact values of the Roman domination number of some special graph classes.

Uvod

Predstavljajmo si, da želimo po državi razporediti centre za reševanje tako, da bo teh čim manj in da bodo reševalci prispeli na pomoč v vsako občino v dogovorjeno kratkem času. Probleme te vrste učinkovito opišemo v jeziku teorije grafov takole: Vsako lokacijo predstavimo s točko, imenovano *vozlišče*, med dvema lokacijama pa narišemo črto (pravimo ji *povezava*), če obstaja (hitra) pot med tema lokacijama. Tako množico vozlišč skupaj s povezavami imenujemo *graf* in jo označimo z $G = (V, E)$, kjer V pomeni množico vozlišč, E pa množico povezav, tj. urejenih parov vozlišč. Če med dvema vozliščema obstaja povezava, pravimo, da sta *sosednji*. Množico vseh sosedov vozlišča u grafa G po navadi označimo z $N(u)$. Naj bo še $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Število sosedov vozlišča u imenujemo *stopnja vozlišča* u. Največjo med vsemi stopnjami vozlišč včasih označimo z $\Delta(G)$.

Problem razporeditev reševalnih enot lahko sedaj opišemo takole: občine predstavimo z grafom, nato pa vsako vozlišče označimo bodisi z 0 bodisi z 1. Pri tem 0 pomeni, da na lokaciji ni reševalne enote, 1 pa, da je. Če te oznake grafa izberemo tako, da je vsaka 0 sosednja z neko 1, potem dobimo zgoraj opisano situacijo. Pravimo, da smo tedaj graf *dominirali*, najmanjšemu možnemu številu enic, ki jih potrebujemo, da bo graf dominiran, pa pravimo *dominantno število grafa*, $\gamma(G)$. Množici vozlišč, označenih z 1 v dominaciji grafa, pravimo tudi *dominantna množica*. Dominantni množici, ki ima $\gamma(G)$ elementov, včasih rečemo tudi γ-*množica*.

Poglejmo sedaj nekaj primerov dominantnih števil preprostih grafov, ki jih najdemo na sliki 1. Prvi primer predstavlja graf, ki ima vse možne povezave na danih vozliščih. Imenujemo ga poln graf na šestih vozliščih. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n. Očitno je $\gamma(K_n) = 1$. Vozlišče dominantne množice je obarvano temneje. Na tem mestu definirajmo še *komplement* grafa G, ki ga označimo z $\overline{G}$. To je graf, katerega množica vozlišč je enaka množici vozlišč grafa G, povezave v komplementu pa so med tistimi vozlišči, kjer v osnovnem grafu povezav ni bilo. Komplement polnega grafa $\overline{K_n}$ je graf brez povezav. Očitno je $\gamma(\overline{K_n}) = n$. Drugi graf s slike 1 imenujemo cikel na n vozliščih, C_n. Razmislite, da je v splošnem $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Podobno velja tudi za grafe, imenovane poti na n vozliščih, P_n. Tak graf ima podobno kot cikel n vozlišč, med njimi pa izpustimo eno izmed povezav cikla. Tudi zanje je $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Zadnji graf na sliki 1 imenujemo mreža ter jo označimo z $G_{k,n}$. V našem primeru je $k = 4$ in $n = 3$. Za te grafe je bila določitev dominantnega števila dolga leta neznanka – obstajala je domneva, ki pa ni bila dokazana vse do leta 2011 [3].

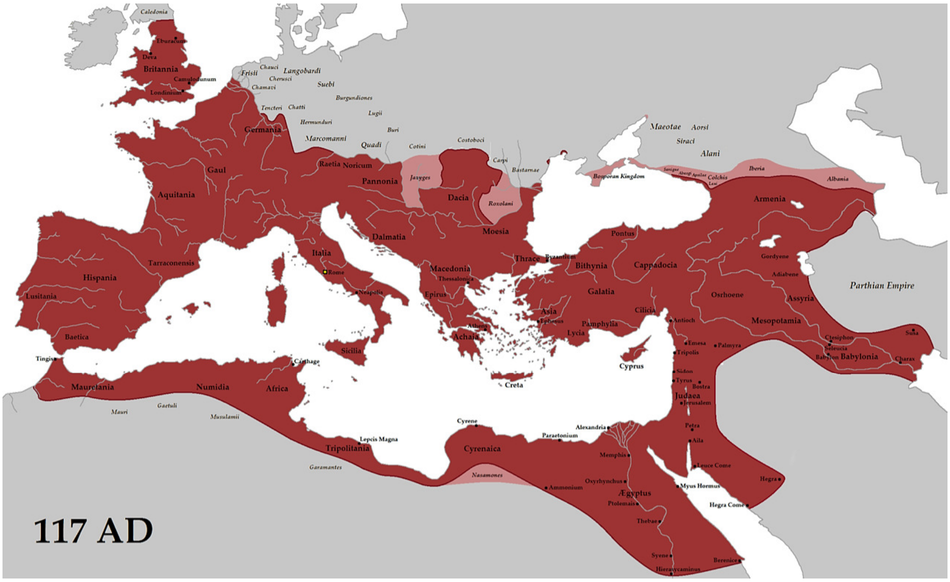


Slika 1. Dominantne množice nekaterih grafov.

Rimska dominacija

S takšnim opisom razporeditev reševalnih enot v mestu se nam lahko zgodi sledeča situacija: reševalna enota iz mesta, označenega z 1, mora posredovati pri nekem sosedu, ki nima svoje reševalne enote (je označeno z 0). Hkrati pa se v tem mestu, ki je poslalo reševalno ekipo k sosedom, zgodi nesreča.

V taki obliki dominacije torej nimamo nikakršne rezerve, ki pa je v realnih situacijah še kako pomembna. Enega takih zanimivih problemov je že v času svojega vladanja rimskemu imperiju v 4. stoletju postavil cesar Konstantin [6, 7, 8]. Ko je prevzel vladanje rimskemu imperiju, se je ta raztezal od severne Afrike, prek Male Azije do polovice Britanije ter čez celotno Iberijo na zahodu (slika 2). Predhodniki so cesarju v dolga leta trajajočih vojnah osvojili ogromno ozemlja, a sosednji narodi so vse močneje vpadali na zavzeta območja in vojska rimskega imperija se je ob posredovanjih prepolovila. Konstantin je tako postavil vprašanje, kako z legijami, ki so mu ostale, zastražiti province tako, da bodo bodisi zastražene z manjšo enoto vojske, bodisi bo v provinco lahko prišel na pomoč del vojske iz so-



Slika 2. Rimski imperij v 2. stoletju [9].

sednje province, ki pa bo zastražena z večjo enoto vojske in tako tudi po posredovanju pri sosedih ne bo ostala nezastražena.

Opazimo, da je tudi to neke vrste dominacija, vendar tukaj dominiramo graf, ki predstavlja na primer ozemlje rimskega imperija, z dvema različnima vrstama vozlišč – takimi, ki dominirajo le sebe, ter takimi, ki dominirajo sebe ter vsa sosednja vozlišča. V jeziku teorije grafov bomo sedaj vozlišča grafa označili z elementi množice $\{0, 1, 2\}$ tako, da bo vsako vozlišče, označeno z 0, sosednje z vsaj enim, ki je označeno z 2. Vozlišča, označena z 1, rabijo le za to, da dominirajo sama sebe in nimajo vpliva na sosede. Tak tip dominacije po zgodbi, ki smo jo navedli zgoraj, imenujemo *rimska dominacija*. Najmanjša izmed vsot takih oznak vozlišč je *rimsko dominantno število* grafa. Poglejmo si še formalno definicijo [2]:

Definicija 1. *Rimska dominantna funkcija* grafa $G = (V, E)$ je taka preslikava $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$, pri kateri je vsako vozlišče u s $f(u) = 0$, sosednje z nekim vozliščem v s $f(v) = 2$. Vrednost rimske dominantne funkcije je število $w(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. Najmanjši vrednosti rimske dominantne funkcije grafa G pravimo *rimsko dominantno število* grafa G in ga označimo z $\gamma_R(G)$.

Rimsko dominantno funkcijo (kratko RDF), ki realizira $w(f) = \gamma_R(G)$, imenujemo tudi γ_R*-funkcija*. Glede na neko rimsko dominantno funkcijo

f lahko množico vozlišč grafa G zapišemo kot urejeno particijo (V_0, V_1, V_2) množice V, kjer je $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$ za $i \in \{0, 1, 2\}$. Pišemo tudi $f = (V_0, V_1, V_2)$. Vpeljimo še oznako $n_i = |V_i|$ za število vozlišč v V_i za $i = 0, 1, 2$. V tem jeziku je vrednost rimske dominantne funkcije $f = (V_0, V_1, V_2)$ enaka $w(f) = n_1 + 2n_2$.

Razmislite, da lahko na tak način s pomočjo enega vozlišča z oznako 2 učinkovito odbijemo le en napad na njegovega soseda, ki ima oznako 0. Primer, ko lahko vozlišče posreduje pri več hkratnih napadih na sosednje vozlišče, natančneje pojasnjuje definicija k-rimskega dominantnega števila [4], ki pa je tukaj ne bomo podrobneje opisovali.

Dodajmo še, da je dovolj preučevati povezane grafe (take, pri katerih za poljubni dve vozlišči obstaja pot med njima). Namreč, (rimsko) dominantno število grafa, ki ni povezan, je vsota (rimskih) dominantnih števil njegovih povezanih komponent (delov). Zato, če ne bo posebej pisalo, imejmo v mislih povezane grafe.

Lastnosti rimskih dominantnih funkcij

Začnimo z nekaterimi preprostimi posledicami definicije rimskega dominantnega števila, ki bodo koristne tako pri dokazovanju izrekov kot tudi za boljšo predstavo o konceptu.

Trditev 2 ([1, 2]). *Naj bo $G = (V, E)$ graf na vsaj treh vozliščih in $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka γ_R-funkcija grafa G. Potem velja:*

1. *$V_1 \cup V_2$ je dominantna množica grafa G;*
2. *V_2 je γ-množica grafa, induciranega[1] na $V_0 \cup V_2$;*
3. *neko vozlišče iz V_1 je sosednje še največ z enim vozliščem iz V_1;*
4. *med vozlišči množic V_1 in V_2 ni povezav;*
5. *$\gamma_R(G) \leq |V(G)| - \Delta(G) + 1$.*

Dokaz. Točki 1 in 2 sledita direktno iz definicije rimskega dominantnega števila. Točko 3 dokažemo takole: Naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ γ_R-funkcija grafa G. Če bi bilo neko vozlišče $u \in V_1$ sosednje z dvema različnima vozliščema $v, w \in V_1$, lahko tvorimo novo rimsko dominantno funkcijo g takole: naj bo $g(u) = 2$, $g(v) = g(w) = 0$ ter $g(x) = f(x)$ za vsa druga vozlišča grafa G. Opazimo, da ima rimska dominantna funkcija g vrednost za 1 manjšo od najmanjše možne, kar je protislovje.

---

[1]Graf, induciran na množici $X \subseteq V(G)$, je graf, katerega množica vozlišč je množica X, povezave med vozlišči iz X pa so vse, ki so bile povezave med temi vozlišči tudi že v grafu G.

Poglejmo še točko 4. Naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ taka γ_R-funkcija grafa G, da je uv povezava grafa G in je $f(u) = 1$ ter $f(v) = 2$. Potem je tudi $f' = (V_0 \cup \{u\}, V_1 \setminus \{u\}, V_2)$ γ_R-funkcija grafa G z za 1 manjšo vrednostjo, kar pa je protislovje (f je bila γ_R-funkcija, torej RDF najmanjše vrednosti, mi pa smo našli še manjšo).

Nazadnje se lotimo še točke 5. Naj bo vozlišče u vozlišče največje stopnje v G. Potem je $f = (N(u), V(G) \setminus N[u], \{u\})$ RDF grafa G vrednosti $w(f) = (|V(G)| - (\Delta(G) + 1)) + 2 = |V(G)| - \Delta(G) + 1$. ∎

Ker očitno obstaja povezava med dominantnim številom ter rimskim dominantnim številom, bomo v nadaljevanju natančneje preučili, kakšen je odnos med tema grafovskima invariantama.

Trditev 3. *Naj bo G graf. Potem velja:*

1. $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$;
2. $\gamma_R(G) = \gamma(G)$ *natanko tedaj, ko je* $G = \overline{K_n}$.

Dokaz. Naj bo D neka γ-množica grafa G. Potem je $(V(G) \setminus D, \emptyset, D)$ rimska dominantna funkcija grafa G vrednosti $2\gamma(G)$. Zato je $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$. Za poljubno γ_R-funkcijo $f = (V_0, V_1, V_2)$ grafa G pa je množica $V_1 \cup V_2$ očitno tudi dominantna množica grafa (ne nujno najmanjša), zato je $\gamma(G) \leq n_1 + n_2 \leq n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G)$, in tako je dokazana prva trditev.

Za grafe brez povezav je očitno $\gamma_R(G) = \gamma(G)$. Vzemimo nazadnje še tak graf G, da je $\gamma_R(G) = \gamma(G)$, in naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka njegova γ_R-funkcija. Ker je $V_1 \cup V_2$ dominantna množica, je, podobno kot zgoraj, $\gamma(G) \leq n_1 + n_2 \leq n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G)$, vendar morajo po predpostavki, če pogledamo začetek in konec neenakosti, povsod v resnici nastopati enačaji. Zato je $n_2 = |V_2| = 0$. Po definiciji RDF je zato tudi $V_0 = \emptyset$. Torej je $\gamma_R(G) = n_1 = |V(G)| = n$ in zato tudi $\gamma(G) = n$, iz česar pa sledi, da je G nujno graf $\overline{K_n}$. ∎

Dodajmo še, da graf G, ki zadošča enakosti $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$, imenujemo *rimski graf*. Ena možnih preprostih karakterizacij rimskih grafov je naslednja:

Trditev 4. *Graf G je rimski graf natanko tedaj, ko obstaja taka γ_R-funkcija grafa G, da je $V_1 = \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo G graf in recimo, da obstaja taka γ_R-funkcija $f = (V_0, V_1, V_2)$ grafa G, da je $V_1 = \emptyset$. Potem je vrednost te γ_R-funkcije $w(f) = n_1 + 2n_2 = 0 + 2n_2$, in ker je množica V_2 tudi dominantna množica, je $w(f) = 2n_2 \geq 2\gamma(G)$. Po trditvi 3 je $w(f) = \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$, zato je $w(f) = 2\gamma(G)$. Torej je G rimski graf.

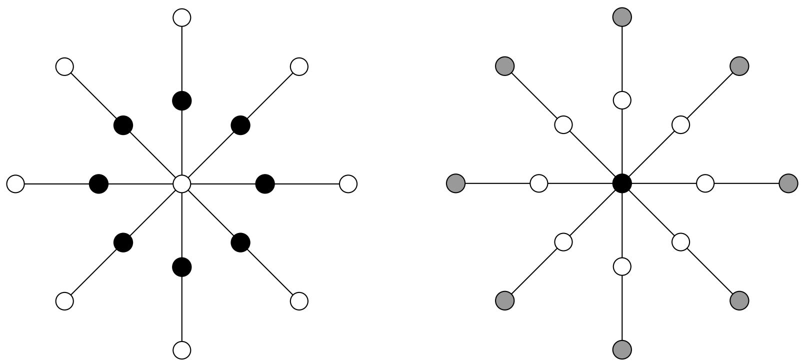
Za dokaz v drugo smer vzemimo rimski graf G. To je tak graf, da je $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$. Ker je $V_1 \cup V_2$ dominantna množica grafa G ter je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, je $\gamma(G) \leq |V_1 \cup V_2| = n_1 + n_2$. Ker pa je G rimski graf, je

$$2\gamma(G) = 2n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G) = n_1 + 2n_2,$$

iz česar sledi, da je $n_1 = 0$ oziroma $V_1 = \emptyset$. ■

Na primerih s slike 1 so rimski grafi polni grafi K_n za $n > 1$ ter cikli C_{3k} in C_{3k+2}. Tretji graf s slike 1, mreža $G_{4,3}$, je primer grafa, ki ni rimski. Razmislite, da je $\gamma_R(G_{4,3}) = 7$.

Glede na trditev 3 bi bilo zanimivo pogledati še, kolikšna je lahko dejanska razlika med γ_R in 2γ. Iz preprostega primera grafa, imenovanega subdividirana zvezda, $\overline{S}_{1,8}$ na sliki 3, lahko vidimo, da je razlika med $\gamma_R(G)$ in $2\gamma(G)$ lahko poljubno velika. Na desni sliki, ki prikazuje γ_R-funkcijo, je črno vozlišče iz V_2 v γ_R-funkciji, siva vozlišča pa so vozlišča iz V_1 v γ_R-funkciji. V splošnem za subdividirano zvezdo velja, da je rimsko dominantno število $\gamma_R\left(\overline{S}_{1,n}\right) = 2 + n$, medtem ko je dvakratnik dominantnega števila $2\gamma\left(\overline{S}_{1,n}\right) = 2n$.



Slika 3. γ-množica in γ_R-funkcija subdividirane zvezde $\overline{S}_{1,8}$.

Določiti rimsko dominantno število poljubnega grafa je zelo težek problem. V matematiki take težke probleme (večina res zanimivih je takih) imenujemo *NP-polni problemi*. Pojasnimo, kaj to pomeni.

Recimo, da imamo neki odločitveni problem. To je tak, na katerega lahko odgovorimo z da ali ne. Če zanj obstaja rešitev, ki jo lahko poiščemo dovolj hitro (v jeziku algoritmov v polinomskem času), pravimo, da ta problem pripada razredu P. Če pa za problem znamo za možno rešitev v polinomskem času preveriti, ali je prava, pravimo, da problem pripada razredu NP. Gotovo je $P \subseteq NP$, ne ve pa se, ali je morda $P = NP$. Večina raziskovalcev deluje, kot da to ni res. Problem, ali je $P = NP$, je eden od sedmih problemov tisočletja, ki jih je leta 2000 objavil ameriški

Clay Mathematics Institute. Za rešitev vsakega od njih je razpisal nagrado milijon ameriških dolarjev. Do danes je bil rešen le eden (Poincaréjeva domneva). Torej ob predpostavki, da je $P \neq NP$, to, da je neki problem NP-poln, nekoliko poenostavljeno rečeno pomeni, da ne obstaja dovolj hiter algoritem (polinomski), ki bi poiskal rešitev zastavljenega problema, le za možno rešitev lahko dovolj hitro preverimo, ali je prava. V našem primeru je tak problem določitev rimskega dominantnega števila poljubnega grafa [1]. Zato so se različni raziskovalci omejevali na iskanje rimskih dominantnih števil manjših družin grafov. O nekaterih rezultatih smo govorili že pri rimskih grafih (za polne grafe in cikle).

Grafi z majhnimi rimskimi dominantnimi števili

Za konec še karakterizirajmo grafe, ki imajo rimsko dominantno število 2 ali 3. Take grafe bomo opisali v jeziku maksimalne stopnje vozlišč grafa. Rimsko dominantno število 2 imajo natanko tisti grafi, ki premorejo vozlišče stopnje $|V(G)|-1$, rimsko dominantno število 3 pa grafi, ki premorejo vozlišče stopnje $|V(G)|-2$, ne pa vozlišča stopnje $|V(G)|-1$.

Trditev 5 ([5]). *Za povezan graf G na vsaj dveh vozliščih so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. $\gamma_R(G) = 2$;
2. $\gamma(G) = 1$;
3. $\Delta(G) = |V(G)| - 1$.

Dokaz. Naj bo $n = |V(G)|$. Če graf G vsebuje vozlišče stopnje $n-1$, potem je očitno $\gamma(G) = 1$ in $\gamma_R(G) = 2$.

Recimo sedaj, da je $\gamma(G) = 1$ in $u \in V(G)$ dominira G. Potem je $f = (V(G) \setminus \{u\}, \emptyset, \{u\})$ γ_R-funkcija grafa G (ker je G povezan in ima vsaj dve vozlišči).

Naj bo nazadnje še $\gamma_R(G) = 2$. Če je $f = (V(G) \setminus \{u\}, \emptyset, \{u\})$ γ_R-funkcija grafa G, potem mora biti vsako vozlišče iz $V(G) \setminus \{u\}$ sosednje z u, z drugimi besedami, u je stopnje $n-1$. Po drugi strani pa je lahko tudi $f = (V(G) \setminus \{u,v\}, \{u,v\}, \emptyset)$ γ_R-funkcija grafa G, katere vrednost je 2. To pa se lahko zgodi samo v primeru, ko je G graf K_2 (G je povezan). V tem posebnem primeru sta obe vozlišči stopnje $n-1$. ■

Trditev 6 ([5]). *Naj bo G povezan graf na vsaj dveh vozliščih. Tedaj je $\gamma_R(G) = 3$ natanko tedaj, ko je $\Delta(G) = |V(G)| - 2$.*

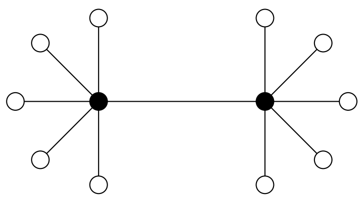
Dokaz. Naj bo $\gamma_R(G) = 3$ in naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka γ_R-funkcija grafa G. Če je $V_2 = \emptyset$, je očitno $|V(G)| = 3$, in ker je G povezan, je to bodisi

P_3 bodisi K_3. Ampak $\gamma_R(P_3) = \gamma_R(K_3) = 2$, kar je protislovje. Zato je $|V_1| = |V_2| = 1$.

Naj bo $u \in V_1$ in $v \in V_2$. Po trditvi 2, točka 4, uv ni povezava grafa G, vsa druga vozlišča grafa G pa morajo biti po definiciji RDF sosednja z v. Zato je v stopnje $|V(G)| - 2$. Trditev 5 zagotavlja, da G nima vozlišča višje stopnje, to je stopnje $|V(G)| - 1$.

Da dokončamo dokaz, recimo, da je $\Delta(G) = |V(G)| - 2$. Potem je po točki 5 trditve 2 $\gamma_R(G) \leq |V(G)| - (|V(G)| - 2) + 1 = 3$, ker velja trditev 5, pa je tudi $\gamma_R(G) \geq 3$. Torej je $\gamma_R(G) = 3$ ∎

Glede na zadnji trditvi je na prvi pogled videti, da bi lahko veljalo, da je $\gamma_R(G) = 4$ natanko tedaj, ko je $\Delta(G) = |V(G)| - 3$. Graf s slike 4 je tak, da je $\gamma_R(G) = 4$, $\Delta(G) = 6$, vozlišč pa ima kar 12. Vsaj v eno smer torej ta trditev ne drži. Sami pa lahko preverite, ali velja, da iz $\Delta(G) = |V(G)| - 3$ sledi, da je $\gamma_R(G) = 4$.



Slika 4. Graf, imenovan dvojna zvezda.

LITERATURA

[1] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Price in D. B. West, *Extremal problems for Roman domination*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **23** (2009), 1575–1586.

[2] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer, S. M. Hedetniemi in S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*, Discrete Mathematics **278** (2004), 11–22.

[3] D. Gonçalves, A. Pinlou, M. Rao in S. Thomassé, *The domination number of grids*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **25** (2011), 1443–1453.

[4] M. A. Henning, *Defending the roman empire from multiple attacks*, Discrete Mathematics **271** (2003), 101–115.

[5] T. Kraner Šumenjak, P. Pavlič in A. Tepeh, *On the Roman domination in the lexicographic product of graphs*, Discrete Applied Mathematics **160** (2012), 2030–2036.

[6] C. S. ReVelle, *Can you protect the Roman Empire*, Johns Hopkins Magazine **49** (1997), 40.

[7] C. S. ReVelle in K. E. Rosing, *Defendens Imperium Romanum: a classical problem in military strategy*, The American Mathematical Monthly **107** (2000), 585–594.

[8] I. Stewart, *Defend the Roman Empire!*, Scientific American **281** (1999), 94–96.

[9] Ancient Rome, `www.en.wikipedia.org/wiki/Ancient_Rome`, ogled september 2012.