MANJ KOT NEKAJ, A VEČ KOT NIČ
Zenon, infinitezimali in paradoks kontinuuma

SAŠO DOLENC

Mnenja o tem, kaj je konstitutivno bistvo moderne znanosti, so deljena. Nekateri prisegajo na znanstveno metodo, drugi menijo, da znanost metode sploh nima, za tretje pa je znanost kar sinonim za objektivno vednost. Historično je stvar bolj jasna. Temelji moderne znanosti so bili postavljeni v sedemnajstem stoletju v delih Galileja, Keplerja, Descartesa, Leibniza, Newtona in še nekaterih. Sam pojem narave se je takrat namreč bistveno spremenil. Aristotelovo *physis*, katere bistvo je, da ji je vir gibanja oz. spreminjanja notranji (stvar ima svojo naravo le, če vsebuje počelo lastnega spreminjanja), je zamenjala galilejska narava, kjer telesa nimajo več nobene globine oz. notranje strukture, ampak je vse zvedeno le na kvantitativna medsebojna razmerja fizikalnih količin, ki so formulirana v matematičnem jeziku.

V nasprotju s prevladujočim prepričanjem pa argumenti za tako radikalno spremembo razumevanja narave niso bili pretirano prepričljivi. Težava je bila namreč v tem, da sama matematika, ki je v galilejski naravi neke vrste ogrodje sveta, dolgo časa ni uspela formulirati logično konsistentnega formalnega matematičnega aparata, ki bi omogočal matematizacijo spremenljivih naravnih pojavov, še posebej gibanja. Mišljenje gibanja je namreč vedno znova trčilo ob problem neskončne deljivosti kontinuuma, neskončnih zaporedij ali neskončnih vsot, kar je problematiziral že Zenon iz Elee v znanih aporijah. Čeprav so se v sedemnajstem stoletju zelo trudili, da bi novo matematično filozofijo narave formulirali zgolj z uporabo stare uveljavljene evklidske matematike, so vsi takšni poskusi propadli. Nova znanost se je morala sprijazniti z dejstvom, da brez uporabe trikov novega infinitezimalnega računa, ki na neki način uspe računati tudi z neskončnostmi, ne more formulirati nove fizike oz. galilejske narave.

Paradoks kontinuuma

V zadnjih treh knjigah Aristotelove *Fizike* – ko smo bralci že domači z osnovnimi načeli znanosti o spreminjanju in z analizo osnovnih pojmov te znanosti: neskončnost, mesto, praznina, čas – se avtor loti obravnave treh temeljnih kontinuumov in relacij med njimi. Trije temeljni kontinuumi so po Aristotelu: razdalja, čas in gibanje, njihove meje pa so točka, trenutek (zdaj) in pa trenutno gibanje.

Da si problem kontinuuma malo bolj razjasnimo, si poglejmo najprej nekaj za to vprašanje ključnih definicij iz Aristotelove *Fizike* (V.3):

> »Stvari so skupaj glede na lego, ko si delijo isto lego, narazen, ko imajo ločene lege, v stiku pa, ko imajo skupno le svojo skrajnost (mejo).«[1]

Zaporednost je urejenost po vrsti v zaporedje. Nekaj je zvezno (kontinuum), če je zaporedno in v stiku. Stvar je torej zvezna,

> »če so meje, v katerih se katerikoli njeni zaporedni deli stikajo, iste in skupne.«[2]

Če meje niso skupne, je stvar sicer lahko urejena v zaporedje, a ni zvezna. Primer takšnega zaporedja so števila. So urejena, a se ne stikajo. Točke in števila so diskretne količine in jih je potrebno razlikovati od zveznih količin geometrije. V aritmetiki ni zveznosti, v geometriji pa je.

Kakšno je torej razmerje med točko in črto? Točka je po Aristotelu nedeljiva, a ima svojo lego, črta pa je deljiva razsežnost. Z zbiranjem točk, ne glede na to kako daleč gremo, nikoli ne moremo priti do nečesa razsežnega in tako deljivega. Točka ne more biti zvezna s točko. Točka je lahko le meja (konec, začetek, rez) deljive velikosti, ne more pa biti njen del. Spomnimo se definicije zveznosti: stvar je zvezna, če so meje, v katerih se katerikoli njeni zaporedni deli stikajo, iste in skupne. Točka nima delov, zato je lahko le cela svoja lastna meja. Če ima več točk skupno mejo, so lahko le vse skupaj v isti legi, saj si drugače ne morejo deliti svoje meje, kar je v primeru točke kar cela točka.

Tu imamo dve na prvi pogled nasprotujoči si tezi: (1) na kontinuumu lahko povsod najdemo le točke; kjerkoli ga prerežemo, je tam točka, a (2) kontinuum ni sestavljen iz točk, ker točke nimajo razsežnosti. To velja tudi za čas in trenutke, kot za gibanje in trenutna gibanja. Razmerje med točko in kontinuumom ni analogno ne razmerju med delom in celoto, ne razmerju med vsebovanim in vsebujočim. Točko in trenutek lahko razumemo le kot limito (mejo) razdalje ali časa.

---

[1] Aristotel, *Fizika*, V.3, 226b21.

[2] *Ibid.*, 228a8.

To je temeljni paradoks neskončne deljivosti kontinuuma, ki ga Aristotel sicer eksplicitno ne zapiše v *Fiziki*, ampak v knjigi *O nastajanju in minevanju* (I.2, 316a14). Povzemimo le argument:

Če je črta (kontinuum) neskončno deljiva, potem jo lahko razrežemo na neskončno majhne dele. Zanima nas ali so ti neskončno majhni deli črte (točke) razsežni ali ne? Ponujata se nam dve možnosti:

- Če imajo neskončno majhni deli črte razsežnost, potem jih lahko še naprej delimo, torej še niso neskončno razdeljeni.
- Če pa nimajo razsežnosti, potem ni jasno, kako lahko iz njih sestavimo razsežno črto, saj vsota nerazsežnih enot ne more biti razsežna: $0 + 0 = 0$!

Če je kontinuum sestavljen iz nedeljivih delov, če se ga ne da neskončno deliti, potem sta dve možnosti: nedeljiv del ima neko velikost, a se vseeno ne da več deliti, kar ni smiselno, ali pa nedeljiv del nima velikosti, kjer pa tudi ni jasno kako lahko nekaj brez velikosti sestavi nekaj končno velikega.

Poglejmo sedaj, kako Aristotel razreši paradoks kontinuuma? Sekljanje razsežnosti na vedno manjše daljice je za Aristotela neskončni proces. Z vsakim razsekom dobimo novo točko (mejo) na črti, ampak še zmeraj imamo med mejami razsežne daljice. V sami črti (razsežnosti) je zmožnost, da jo lahko razsekavamo v nedogled. Neskončni proces (potencialna neskončnost) je za Aristotela edina neskončnost, ki lahko obstaja (*Fizika* III.6). A samo sekanje je ustvarjanje točk, gibanje točk ne ustvarja!

Temeljna Aristotelova ideja je, da so limite oz. točke le posledica zmožnosti v kontinuumu, da ga lahko v neskončnost delimo in tako udejanjamo vedno nove meje (točke), ki pa v samem kontinuumu še niso dejanske, ampak so zgolj možnost. Kontinuum torej ni sestavljen iz točk, čeprav lahko povsod, kjer ga prerežemo, najdemo točko. Bistveno je, da je ta točka lahko le konec ali začetek intervala, ne more pa biti sama po sebi. Kontinuum vedno sestavljajo intervali, točke pa so le konci intervalov. Če kontinuum delimo poljubno dolgo, ga lahko razdelimo na poljubno veliko poljubno majhnih intervalov, a to je neskončni proces. Če se še tako trudimo, interval ne more postati točka. Zvezni interval ima zmožnost, da se neskončno deli, a te zmožnosti ne more nikoli povsem udejanjiti. Lahko si sicer zamislimo neskončno zaporedje deljenja intervalov, a to je lahko le zaporedje brez konca, ne pa prisotna neskončnost.[3]

Aristotel je problem enega in mnoštva v predsokratski filozofiji narave, oziroma kako skupaj misliti manifestacije enega samega primarnega počela (*arhê*), ki so posledica nekega notranjega vira spreminjanja (*physis*) v tem počelu, rešil z vpeljavo razlikovanja med (z)možnostjo in dejanskostjo. K podob-

[3] Dedekind uvede definicijo kontinuuma (realna števila) kot množico, ki vsebuje mejne točke na vseh rezih.

ni rešitvi se zateče tudi pri težavah z neskončnostjo in kontinuumom. Neskončnost je zanj zgolj možnost, nikoli pa dejanskost.

Zenonove aporije

Aristotel je torej predpostavil, da so čas, prostor in gibanje kontinuumi. V naravi torej ni skokov (kot so domnevali atomisti), ampak vse teče gladko. Prepričan je bil, da je s svojo teorijo prostora, časa in gibanja kot kontinuumov rešil tudi vse štiri Zenonove aporije (*Fizika* VI.9), če se seveda strinjamo z njegovo rešitvijo za problem samega kontinuuma.[4]

Naštejmo vse štiri Zenonove aporije gibanja:

- *Polovica* (dihotomija): gibajoče telo ima v vsaki točki svoje poti do cilja pred sabo še neko razdaljo, ki jo je mogoče razdeliti na pol. Teh polovic (vedno krajših), ki bi jih telo moralo preiti, da bi prišlo na cilj, je neskončno, zato telo nikoli ne bi prišlo na cilj.
- *Ahil*: najhitrejši tekač nikoli ne ujame najpočasnejšega, saj v času, ki je potreben, da doseže točko, na kateri je počasni tekač, ta že premeri novo razdaljo in vselej obdrži (sicer vedno manjšo) prednost.
- *Puščica*: iz loka izstreljena puščica v vsakem trenutku zavzema točno določeno lego; zavzemanje določene lege pa je mirovanje; izstreljena puščica torej v resnici miruje.
- *Stadiona ali gibajočih vrst*: je malo bolj zapleten, zato več kasneje.

Poglejmo si sedaj podrobneje posamezne aporije:

Dihotomija in Ahil – Že Aristotel trdi, da temeljita aporiji Ahila in Dihotomije pravzaprav na istem problemu. Če teče želva s hitrostjo, ki je enaka polovici Ahilove, imamo povsem analogno situacijo. Kje je problem? Razdalja, ki jo želi preteči Ahil je kontinuum. Na tem kontinuumu lahko po sami definiciji kontinuuma kjerkoli postavimo zastavico in ga s tem razdelimo na dva dela. Zastavico lahko torej postavimo najprej na polovico celotne proge, potem na polovico zadnje polovice proge in nato na polovico te nove zadnje četrtine in tako naprej v neskončnost. Če je razdalja, ki jo želi Ahil preteči, res deljiva v neskončnost, če je kontinuum, potem lahko Ahilu na progi postavimo neskončno zastavic oziroma njegovo tekaško progo razdelimo na neskončno intervalov. Če hoče preteči to progo, mora preteči vse intervale in pobrati vse zastavice. Ker pa je zastavic in intervalov neskončno, mora tako opraviti

[4] Verjetno najbolj poglobljena študija antičnih virov in kasnejših interpretacij Zenona iz Elee, je zbrana v knjigi: Maurice Caveing, *Zénon d'Elée: prolégomènes aux doctrines du continu: étude historique et critique des fragments et témoignages*, J. Vrin, Pariz 1982.

neskončno opravil, da pride do cilja. Temeljno vprašanje je torej, ali lahko opravi neskončno opravil v končnem času?

Problem Ahila je seveda povsem analogen problemu neskončne deljivosti kontinuuma. Če je kontinuum neskončno deljiv, potem ga lahko delimo na vedno manjše intervale. V primeru Ahila je to delitev tekaške proge na polovične podintervale. Če bi bilo teh intervalov končno mnogo, težav ne bi bilo. Ahil bi lahko pretekel vse intervale in pobral vse zastavice. Za vsak naslednji interval bi seveda porabil manj časa, zato bi na cilj prišel povsem regularno. Kaj pa, če je intervalov neskončno? Če želi Ahil preteči razdaljo, mora preteči neskončno intervalov oziroma razsežnih daljic. Težava je predvsem z zadnjimi intervali tik pred ciljem. Če vzamemo še tako malo razdaljo od cilja, je v njej še zmeraj neskončno intervalov. Kako je lahko v poljubno majhni razdalji zmeraj neskončno podintervalov? Če ima vsak od intervalov razsežnost, ki je večja od točke, potem skupna razsežnost ne more biti poljubno majhna. To, da so vsi intervali večji od točke, pa je povsem nedvoumno, saj v delitvi intervalov zmeraj delimo nekaj razsežnega na pol. V vsakem koraku dobimo samo dva za polovico krajša intervala, nikoli pa točke oziroma intervala, ki ne bi imel razsežnosti.

Problem Dihotomije in Ahila je torej analogen problemu neskončne deljivosti kontinuuma. Če znamo rešiti ta problem, potem smo rešili tudi prvi dve Zenonovi aporiji.

Prva pot razrešitve paradoksa je, da preprosto zavrnemo razdaljo kot kontinuum in rečemo, da razdalja (in čas) ni neskončno deljiva, da na koncu pridemo do nekega »atoma« razdalje, ki ga ni več mogoče razdeliti na polovico in ga je moč »prepotovati« le v nekem atomarnem času. V tem primeru vse ostale teze postanejo nepotrebne: ni neskončnega deljenja, zato je število korakov do cilja končno in paradoks odpade. Vendar Aristotel takšni rešitvi ostro ugovarja.

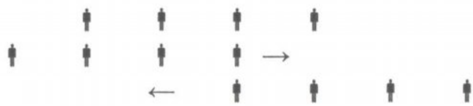
Gibanje, ki bi aktualiziralo vse vmesne točke se imenuje stakato gibanje. Poudarek vsaki noti v nasprotju z legato gibanjem, ki želi zliti posamezne note v celoto. Stakato gibanje je skokovito atomistično gibanje; to ni gibanje kot kontinuum, ampak gibanje kot zaporedje. Primer za zaporedje so naravna števila, primer za kontinuum pa daljica. Gibanje je enotni proces, ki ga sicer lahko delimo na podprocese, a podobno kot črte ne moremo sestaviti iz točk, tudi gibanja ne moremo dobiti iz zaporedja stanj. Gibanje je proces oziroma kontinuum.

To je tudi srž Aristotelove rešitve prvih dveh Zenonovih aporij. Neskončno intervalov, ki jih mora Ahil preteči, je sicer v sami razdalji, ki je kontinuum, možnih, a ti intervali so možni zgolj kot neskončni proces delitve. Če bi resnično uspeli postaviti vse vmesne zastavice, bi tudi Ahil potreboval neskončno časa, da bi jih pretekel oziroma pobral. Vendar bi potrebovali za postavitev vseh zastavic, tudi če bi imeli dovolj majhne za zadnjih nekaj neskončno intervalov, bi za to postavitev potrebovali neskončno časa. To bi bil neskončni proces, ki je po Aristotelu sicer možen, je pa neizvedljiv. Ni ga mogoče povsem udejanjiti.

Puščica – Argument puščice pravi, da če privzamemo atomarno sestavo časa, je atomarno tudi gibanje. Atomarno gibanje pa je mirovanje. Poglejmo! V enem atomu časa vse miruje, saj če bi bilo nekaj na začetku atoma časa drugače kot na koncu, to ne bi bil več atom, ampak bi ga lahko še delili, saj ni enoten. Atome časa si lahko zamislimo kot sličice na filmskem traku. Na vsaki sliki figure mirujejo, torej je samo gibanje tudi atomarno skakanje iz ene mirujoče podobe na drugo. Atomarno gibanje ni torej nič drugega kot vsota različnih mirovanj. Vsota mirovanj pa ne more biti gibanje.

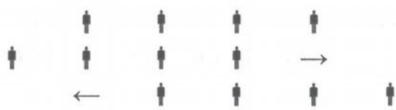
Stadion – Argument telovadcev v vrstah, ki korakajo po stadionu pravi, da iz neatomarnosti (torej zveznosti) gibanja sledi, da je nujno tudi čas kontinuum. Kaj pravi argument stadiona? Imamo tri vrste telovadcev. Prva vrsta miruje, druga koraka v eno stran, tretja pa z enako hitrostjo v drugo stran. Ob času t so telovadci poravnani kot na prvi sliki.

čas t



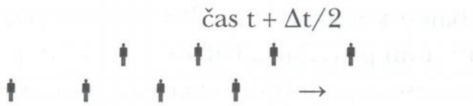
V času t plus en atom časa, so telovadci poravnani kot kaže druga slika.

čas t + Δt



Problem pa je, da so bili že vmes, med obema časoma poravnani telovadci druge in tretje vrste.

čas t + Δt/2



Če je gibanje zvezno, torej obstaja tudi vmesno stanje, ko sta poravnani samo obe gibajoči se vrsti. Če to stanje obstaja, potem obstaja tudi vmesni trenutek. Če privzamemo atomarnost časa in zveznost gibanja, potem vedno obstajajo tudi dogodki (npr. poravnave vrst), ki se dogodijo v času, ki je manjši od atoma časa. Kontinuum gibanja torej implicira kontinuum časa.

Če povzamemo: Zenonove aporije gibanja temeljijo na problemu kontinuuma, v kolikor razumemo razdaljo, čas in gibanje kot kontinuume. Kontinuum razdalje in čas kot ne-kontinuum (zaporedje) implicira zanikanje gibanja (dihotomija in Ahil). Atomizem časa implicira atomizem gibanja, kar pomeni zanikanje gibanja (puščica). Kontinuum gibanja implicira kontinuum časa (stadion). Zenonove aporije pokažejo, da lahko gibanje, kot nujno kontinuiran proces, mislimo zgolj z roko v roki s prostorom in časom kot kontumuumom, sicer so težave.[5]

Problem kontinuuma, ne katerem so osnovane tudi Zenonove aporije, temelji na problemu, ki je v samem jedru filozofije narave od Talesa naprej: gibanje (spreminjanje, čas...) mora biti kontinuirano, sicer ni gibanje, a kontinuum ni misljiv.

> »Zenonovi argumenti so v neki obliki nudili osnovo za skoraj vse teorije prostora, časa in neskončnosti, ki so jih postavili od njegovih dni do danes.«[6]

Problem matematizacije kontinuuma: nikakor se ga ne da prešteti

Temelj grške matematike je razlikovanje med geometrijo in aritmetiko, med kontinuumom in zaporedjem, med sliko in številom. Antična matema-

---

[5] Zenonova predpostavka je, da praznine ni. Tisto kar je, je polno, saj nikjer ni dela, ki ne bi bil zapolnjen, ker praznine pač ni. To kar je, je kontinuum, kar ne pomeni nič drugega, kot da je bivajoče povsod skupaj, da vmes ni nečesa drugega, kar ni bivajoče. Zenon se vpraša, kako uvesti v eno-bivajoče razlike? Kako najti razlike v kontinuumu? Pokaže, da pluralnosti in gibanja v enem-bivajočem kontinuumu ne more biti.

Če lahko potegnemo mejo kjerkoli, če je kontinuum Enega povsod deljiv, potem pademo v paradoks kontinuuma. Če je črta, ki je najpreprostejši model kontinuuma, povsod neskončno deljiva, potem jo lahko razrežemo na neskončno majhne dele. Če je kontinuum sestavljen iz nedeljivih delov, če se ga ne da neskončno deliti, potem sta dve možnosti: nedeljivi deli imajo neko razsežnost, a se vseeno ne dajo več deliti, kar je nerazumljivo, ali pa nedeljivi deli nimajo velikosti, kjer je pa tudi nejasno, saj ne vemo, kako lahko nekaj brez velikosti sestavi nekaj končno velikega. Če nekaj obstaja, mora imeti razsežnost. Stvar ima razsežnost samo, če je iz več delov. Če je kontinuum povsod deljiv, torej pademo torej v paradoks. Kaj pa, če je Eno-bivajoče deljivo zgolj na določenih mestih (v Enem obstajajo torej deli in meje), potem so ta mesta posebej odlikovana. Tam mora biti nekaj drugače. A drugače je lahko le po neki lastnosti oz. kvaliteti. To pa ne gre. Da ohranimo enotnost Enega, mora biti to ali povsod nedeljivo ali povsod deljivo.

[6] Bertrand Russell, *The Problem of Infinity Considered Historically*; v zborniku *Zeno's Paradoxes*, Hackett, 2001, str. 54.

tična fizika, katere najimenitnejši predstavnik je Arhimed, se je ukvarjala le z razmerji med zveznimi velikostni (magnitude kot kontinuumi). Zvezne velikosti vseskozi ostanejo nekaj bistveno različnega od števil, kar je temeljna ovira za nastanek matematične fizike v modernem pomenu besede.

Historično je bila Aristotelova restavracija intelegibilnosti zveznih kontinuiranih veličin zelo pomembna. Aristotel pravi, da je števna mnogoterost (*arithmos*) tista, ki jo je mogoče razbiti na ločene, nezvezne, diskretne dele, medtem ko so magnitude (*megethos*) zvezne mnogoterosti, ki jih na ločene sestavne dele ne moremo razbiti.

> »Potemtakem je določena kolikšnost množica, kadar je števna, medtem ko je kolikšnost velikost (*megethos*), kadar je merljiva. Mnoštvo pa se imenuje tisto, kar je po možnosti deljivo v dele, ki niso zvezni, velikost pa tisto, kar je deljivo v neprekinjene dele; izmed velikosti pa je tista, ki je v eni smeri zvezna, dolžina, tista, ki je v dveh smereh, širina, tista pa, ki je zvezna v treh smereh, globina. Izmed teh kolikosti pa je omejena množica število, omejena dolžina je črta, omejena širina je ploskev, globina pa je telo.«[7]

Črte ne moremo razbiti na točke, ampak le na daljice, ki pa niso ločene, ampak se vedno stikajo. V magnitudo lahko vnesemo le mero kot daljico, ki se ponavlja in potem štejemo ponovitve, a se takšna uvedba enote ne izide vedno, tudi če vzamemo še tako majhno enoto.

Tudi z razmerji med magnitudami, ki niso harmonična, so Grki znali računati. Znali so tudi primerjati razmerja nesorazmernih magnitud. Razmerje diagonale proti stranici kvadrata je lahko enako razmerju dveh drugih magnitud, kar so znali dokazati. Razmerja magnitud tvorijo torej mnogoterost, ki je bolj bogata od pitagorejske aritmetične števne mnogoterosti, vendar je ta nova mnogoterost manj abstraktna kot so števila, saj ne nudi univerzalne primerjave med magnitudami, ampak je obtežena z geometrijsko konkretno predstavo. Medsebojno je mogoče primerjati le magnitude iste geometrijske vrste: črte s črtami, površine s površinami. Poiskati površino ravninskega lika, je pomenilo, najti kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani ravninski lik, medtem ko je poiskati kubaturo nekega telesa, pomenilo, najti kocko s telesu enako prostornino.

Metoda izčrpavanja: primerjanje različnih magnitud

Za dokazovanje razmerij med istovrstnimi magnitudami, ki pa niso bile več le preproste daljice, ampak tudi krivulje, je Evdoks uvedel novo metodo

[7] Aristotel, *Metafizika*, 1020a10-14.

izčrpavanja. Z njeno pomočjo je lahko dokazal veliko hipotez o razmerjih med volumni teles ali površinami likov: volumen piramide je enak 1/3 volumna valja z enako osnovno ploskvijo in višino, razmerje med površinama dveh krogov je enako razmerju med površino kvadratov, ki imata za stranici diagonali krogov... Ime metode sicer izvira šele iz sedemnajstega stoletja, a jo je natančno opisal že Evklid v XII. knjigi svojih *Elementov*, kjer je obravnaval površine in volumne likov in teles, ki jih zamejujejo ukrivljene črte ali površine.

Metoda izčrpavanja temelji na Arhimedovem aksiomu. Če imamo dve različno veliki magnitudi, potem lahko zmeraj najdemo tako veliko število N, da bo manjša od obeh magnitud, če jo povečamo za N-krat, postala večja od druge magnitude. Na prvi pogled je to nekaj povsem intuitivno jasnega. Manjši magnitudi lahko vedno dodajamo druge enako velike magnitude in jo tako povečamo do poljubne velikosti. Kakor koli že določimo enoto, jo vedno lahko pomnožimo do poljubne velikosti.

Vendar to v antiki ni bilo nekaj samoumevnega. Težava je bila namreč z mejnimi magnitudami. Recimo kot, ki ga tvori tangenta s krivuljo v neki točki, se je Grkom zdel večji od nič, a hkrati njegovo podvajanje ni moglo tvoriti nobenega drugega večjega kota. Podobno je z deli črte, ki ostanejo, ko jo povsod razrežemo. To kar ostane niso ne točke, ne intervali. To, kar ostane, niso točke, ker imajo razsežnost večjo kot nič, intervali pa niso, ker njihova razsežnost ne more biti nekaj končnega, saj bi to pomenilo, da črte nismo še povsem razdelili. Za te mejne primere Arhimedov aksiom torej ne velja, saj lahko to mejno magnitudo poljubno množimo, a še zmeraj ne bo nekaj končnega.

Če od magnitude odvzamemo najprej del, ki ni manjši od polovice in potem od tega kar ostane spet del, ki ni manjši od polovice, na koncu ostane magnituda, ki je manjša od katere koli magnitude. Sedaj predpostavimo, da že vemo, da je razmerje površine dveh enakih mnogokotnikov enako razmerju kvadratov njunih premerov. To smo recimo že dokazali in za like z ravnimi mejami to ni težko. Če torej za kroge to pravilo ne velja, potem je med dejansko površino kroga in površino, ki bi zadostila enačbi, neka razlika. S poligoni pa se lahko krogu približamo tako, da bo razlika površin manjša od katerekoli še tako majhne magnitude. Če je torej površina kroga, ki jo napoveduje enačba, manjša od kroga, jo bomo torej v nekem koraku dodajanja poligonov nujno presegli, čeprav kroga še ne bomo prekrili. To pa vodi v protislovje, saj bi enak poligon, ki je manjši od kroga moral biti hkrati tudi večji.

Metoda izčrpavanja omogoča, da krivo črto razumemo kot sestavljeno iz kratkih ravnih odsekov, ki imajo velikost, a so poljubno majhni. Kakršno koli odstopanje od krivine že določimo, zmeraj bomo našli dovolj razdrobljenega člana zaporedja, ki bo krivini bolj podoben, kot smo določili, da je največje dopustno odstopanje.

Z metodo izčrpavanja lahko primerjamo dolžine, površine ali volumne ukrivljenih črt, površin ali teles z zaporedjem včrtanih in očrtanih ravnih likov. Da je razmerje površine dveh krogov enako razmerju kvadratov njunih premerov, lahko dokažemo tako, da krogu včrtujemo in očrtujemo pravilne mnogokotnike. V vsakem koraku podvojimo število stranic in tako razliko med površino kroga in površino mnogokotnika v vsakem koraku zmanjšamo za več kot polovico. Kakršno koli še tako majhno razliko med površino kroga in površino mnogokotnika določimo, vedno jo lahko z dodajanjem novih stranic presežemo.

Infinitezimalni račun

Če bi v zgodovini matematike iskali nekaj temeljnih mejnikov, ki so pomembno vplivali na njen razvoj, bi verjetno zmagala naslednja trojica: Evklidova grška sinteza takratnega matematičnega znanja (300 pr. n. š.), infinitezimalni račun in pojem funkcije (okrog leta 1700) in pa teorija množic (konec 19. stoletja). To so trije ključni dogodki, ki so zamajali same temelje matematične znanosti in pri vseh je bil ključen spopad z matematično neskončnostjo, ki so jo vedno uspeli nekako ukrotiti.

Grško krizo matematike je povzročilo sesutje pitagorejskega programa identifikacije geometrije (pojavni svet) in teorije števil (intelegibilna bistva sveta). Pitagorejski program, po katerem bi vso matematiko (predvsem geometrijo) prevedli na teorijo števil kot mnogoterosti enot, je propadel. Pitagorejci so zgroženi spoznali, da lahko med razdaljami v pravilnih likih najdemo tudi iracionalna razmerja, ki niso razmerja enot. Intelegibilno bistvo sveta torej ne more biti harmonija celih števil kot mnogoterosti enot, če je v pojavnem svetu (geometrija) nekaj, kar se na to bistvo sveta ne da zvesti. Grki so rešili problem tako, da za osnovo niso vzeli števil kot mnogoterosti enot, ampak magnitude kot osnovne elemente geometrije. Evklid je za temelj vzel magnitude (daljice) in aritmetiko prevedel na geometrijo, a tako izgubil abstraktno moč števila. Razmerja med magnitudami so sedaj lahko tudi nesoizmerna (iracionalna), vendar so možna le med magnitudami iste geometrijske vrste. Enotnega polja števila, ki bi omogočal univerzalno primerjavo količin, tako ni bilo več.[8]

---

[8] Podobno kot je eleatska kritika sesula *hilozoistično* fizikalno pojasnitev sveta, je tudi pitagorejsko številsko harmonijo kozmosa povozilo odkritje iracionalnih razmerij, ki niso harmonična. Če je bil pri fizikalnem pristopu problem, kako v osnovni element, oziroma

Grki so problem v teoriji z neskončnostjo v iracionalnih razmerjih števil razrešili tako, da so se oprli na jasno in nazorno predstavljivo geometrijo. Tako so lahko z analogijo števil kot daljic prišli v matematiki mnogo dlje kot bi zgolj s pojmom števila kot mnogoterosti enot. Vendar so morali plačati davek, saj tesna navezava teorije na konkretno geometrijo ni dopuščala, da bi lahko govorili o npr. magnitudi, ki ustreza razmerju intervala časa in intervala razdalje, ali pa volumna in površine telesa. Magnitude so bile le razmerja med geometrijsko (prestavljivo) istovrstnimi objekti.

V prvi polovici sedemnajstega stoletja se je matematika, po dolgem obdobju vegetiranja, spet zelo hitro razvijala. Takratni matematiki so se ubadali predvsem s problemi študija krivulj in s poskusi matematizacije gibanja. Iskali so tangente, površine in ekstreme krivulj, reševali inverzni problem tangente in se ukvarjali s kinetičnimi problemi, kako iz enačbe, ki opisuje spreminjanje razdalje s časom izračunati trenutno hitrost in pospešek. Ob reševanju teh problemov so spotoma iznašli veliko *ad hoc* novih praktičnih metod, ki danes spadajo v področje infinitezimalnega računa.[9] Splošno teorijo infinitezimalnega računa sta neodvisno drug od drugega razvila šele Newton in Leibniz, a kake bistveno večje eksaktnosti v samo teorijo nista vnesla. Predvsem sta poenotila mnoge že prej znane infinitezimalne metode in pokazala, da vsi ti problemi temeljijo na eni in isti matematični osnovi novega računa, ki se ukvarja z neskončno majhnimi količinami (*infinitezimali*).

Newton je svojo verzijo metode o računanju s fluksijami in fluenti[10] razvil

---

v to, kar obstaja, ki je Eno, uvesti raznolikost, mnoštvo, je pri pitagorejskem pristopu problem, da mnoštvo števil ne pokrije vsega mnoštva v svetu. Če je pri fizikalistih problem, kako priti od enega do mnoštva, je pri pitagorejcih problem, kako shajati zgolj z eno vrsto mnoštva. V svetu je, kot kaže, še neko drugo mnoštvo, ki ni aritmetično.

Aritmetično mnoštvo je mnoštvo dodajanja enot. Števila so množice razločljivih enot, ki jih lahko štejemo. Vse kar lahko preštejemo je števno mnoštvo. Ampak vsega v svetu ne moremo prešteti. Atomizem je neke vrste pitagorejski pristop k zgradbi sveta znotraj fizikalne perspektive. Pri atomizmu so enote materije ločene s praznino, zato jih lahko štejemo. Aritmetična mnogoterost je v svetu atomov edina mnogoterost.

[9] Gilles Persone de Roberval (1602–75) in Evangelista Torricelli neodvisno iznajdeta kinematično metodo za določanje tangent: krivulja naj bo generirana preko dveh znanih neodvisnih gibanj. Tangento lahko določita preko paralelograma hitrosti obeh gibanj. Pierre Fermat odkrije univerzalno metodo iskanja ekstremov krivulj, ki praktično deluje, a formalno ni povsem dokazana. Galileo Galilei načrtuje knjigo o nedeljivih enotah (*indivisibles*), a je nikoli ne dokonča, vendar svoje ideje prenese na učenca Bonaventure Cavalierija (1598–1647), ki o tej temi napiše knjigo *Geometria indivisibilibus*, v kateri površino obravnava kot sestavljeno iz nedoločenega števila vzporednih daljic, volumen pa iz nedoločenega števila vzporednih ravnih ploskev. Descartes iznajde analitično geometrijo, s pomočjo katere lahko geometrijske probleme prevede na algebraične.

[10] Newton obravnava »fluent« (tek) in »fluksijo« (hitrost teka) kot spremenljivki analitične geometrije, ki se s časom spreminjata. Fluksija opisuje mero spreminjanja (odvod) fluenta.

že v letih 1664–1666, ko se je pred kugo za nekaj let umaknil iz Cambridgea v domači Woolsthrope, vendar je še dolgo zatem ni objavil. Leibniz je na idejo diferencialnega računa prišel šele desetletje za Newtonom leta 1675. Svoja spoznanja je v obliki dveh člankov objavil v reviji *Acta eruditorum* (1684 in 1686), a sta ostala nekaj let skoraj neopažena. Šele brata Jacob in Johann Bernoulli sta po dolgem študiju leta 1690 prišla Leibnizovima člankoma do dna in menila, da novo računsko metodo končno razumeta. Leta 1696 je izšel že prvi učbenik infinitezimalne matematike *Analyse des infiniment petits*, ki ga je pod svojim imenom izdal Guillaume F. A. l'Hôpital, čeprav je bil sestavljen predvsem iz zapiskov zasebnih učnih ur, ki jih je v zgodnjih 1690-ih poslušal pri Johannu Bernoulliju. Prej dokaj slabo povezane metode računanja z infinitezimali, je v urejeno celoto spravil šele Leonhard Euler.[11]

Težave računanja z infinitezimali

Kaj je torej temeljna težava infinitezimalnega računa? Poglejmo si najbolj preprost primer, ki ga predstavlja enakomerno pospešeno gibanje (npr. padanje kamna v vakuumu) in na konkretnih težavah spoznajmo probleme, s katerimi se srečamo, če računamo s pomočjo infinitezimalnih količin. Razdalja, ki jo prepotuje prosto padajoč kamen je sorazmerna kvadratu časa, ki ga kamen porabi za padanje:

$$x(t)=t^2$$

Zanima nas, kako se s časom spreminja hitrost kamna v primeru, da za prepotovano razdaljo velja zgornja enačba. Hitrost je definirana kot razmerje med intervalom razdalje in intervalom časa: kolikšno razdaljo prepotuje kamen v določenem času:

$$\overline{v}_{[t_1,t_2]}=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

V dveh trenutkih izmerimo prepotovani razdalji kamna $x(t_1)$ in $x(t_2)$ in izračunamo povprečno hitrost, ki jo je imel kamen med trenutkoma t_1 in t_2. Vendar smo tako določili le povprečno hitrost na določenem časovnem intervalu. Nas pa zanima hitrost v posameznem trenutku, ne le povprečna hitrost na določenem intervalu med trenutkoma t_1 in t_2. Radi pa bi poznali hitrost, ki ni povprečje na nekem intervalu časa, ampak je trenutna hitrost v točno določenem trenutku. Do trenutne hitrosti lahko pridemo le tako, da interval, v katerem računamo povprečno hitrost, zmanjšamo do minimuma. Idealno bi bilo, če bi ga lahko zmanjšali kar na točko, ki je brez razsežnosti. Vendar bi

[11] Klasična zgodovina infinitezimalnega računa je knjiga: Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, 1949.

tako izgubili sam interval, ki pa ga potrebujemo, saj nastopa v sami definiciji hitrosti (hitrost je razmerje intervala razdalje proti intervalu časa).

Temeljna ideja infinitezimalnega računa je proces limite. Problem rešuje tako, da vzame najprej nek končno velik interval in zanj izračuna vrednost izraza, potem pa ta interval postopno zmanjšuje in opazuje, kako se spreminja vrednost izraza. Če se vrednost z manjšanjem intervala približuje eni in isti vrednosti, potem privzame, da bi bila vrednost izraza, če bi interval zmanjšali do točke, kar enaka vrednosti, kateri se izraz približuje z manjšanjem intervala. Poglejmo si to na našem konkretnem primeru. Določimo, da želimo vedeti, kakšna je trenutna hitrost padajočega kamna v času t. Za interval vzamemo trenutka t in $t + dt$:

$$t_2 = t + dt$$
$$t_1 = t$$

Ker poznamo enačbo spreminjanja razdalje padajočega kamna s časom: $x(t) = t^2$, lahko vrednosti iz enačbe vstavimo v definicijo hitrosti:

$$v(t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt}$$

Izraz nato malo preuredimo:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt} \\ &= \frac{t^2 + 2t \cdot dt + dt^2 - t^2}{dt} \\ &= \frac{2t \cdot dt + dt^2}{dt} \\ &= (2t + dt) \times \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

Dobili smo enačbo za trenutno hitrost v odvisnosti od časa $v(t)$ za primer enakomerno pospešenega gibanja. Ključno vprašanje sedaj je, kaj storiti z intervalom dt, ki še nastopa v enačbi? Zanima nas trenutna hitrost v času t, zato želimo, da je izraz dt čim manjši. Najraje bi videli, če velikosti sploh ne bi imel, saj tako hitrost ne bi bila več povprečje na nekem končno velikem intervalu dt, ampak hitrost v samem trenutku t. Vendar vrednosti za dt ne moremo kar preprosto postaviti na 0, saj bi zašli v težave. Poglejmo zakaj?

V primeru, da bi postavili vrednost za $dt = 0$, bi imel zgornji izraz za trenutno hitrost naslednjo obliko:

$$v(t) = (2t + 0) \times \frac{0}{0}$$

»Izumitelji« infinitezimalnega računa so ničle v zgornjem izrazu preprosto okrajšali in ostala jim je naslednja formula za trenutno hitrost:

$$v(t) = 2t$$

ki je sicer res »prava«, a krajšanje ničel v zgornjem izrazu je popolnoma skregano z osnovnimi pravili matematike. Če dopustimo, da je vrednost izraza $\frac{0}{0}=1$, kar smo storili v zadnjem koraku, potem matematika ne deluje več, saj lahko iz njega izpeljemo povsem absurdne rezultate. Poglejmo preprost primer:

$$\begin{aligned} 0&=0\\ 2\times 0&=3\times 0\\ \frac{2\times 0}{0}&=\frac{3\times 0}{0}\\ 2\times\frac{0}{0}&=3\times\frac{0}{0}\\ 2\times 1&=3\times 1\\ 2&=3 \end{aligned}$$

Iz predpostavke, da je $\frac{0}{0}=1$, smo izpeljali, da je $2 = 3$, kar lahko pomeni le, da nekaj z našim osnovni izrazom ni v redu.[12]

Vrednosti intervala *dt* torej nikakor ne moremo postaviti na nič, saj to vodi v nesmisel. Interval *dt* mora biti večji od nič, da lahko ulomek $\frac{dt}{dt}$ okrajšamo:

$$\frac{dt}{dt}=1, \qquad dt>0$$

$$\frac{dt}{dt}=\textit{nedoločeno}, \qquad dt=0$$

Vendar nastopi v izrazu za trenutno hitrost težava, ko privzamemo, da je $dt > 0$, saj sedaj ne moremo intervala *dt* zanemariti v prvem delu izraza, ko je dodan vrednosti trenutne hitrosti.[13]

Temeljna težava infinitezimalnega računa je torej, da so nekatere količine (infinitezimalne količine ali infinitezimali) lahko v istem izrazu enkrat zanemarljivi, torej lahko njihovo vrednost postavimo na nič, drugič pa je vse narobe, če njihovo vrednost postavimo na nič.[14]

»Priročno je imeti neskončno majhne količine za upoštevanja vredne, ko iščemo njihova razmerja, in zavržemo jih lahko vedno, ko se nahajajo zraven zanje neprimerno večjih količin. Tako lahko *dx* v izrazu $x + dx$

[12] Zanimivo je, da je L. Euler razumel infinitezimalni račun prav kot metodo določanja vrednosti izrazu $\frac{0}{0}$.

[13] Kako je iznajdba infinitezimalnega računa neposredno vplivala na znanost o gibanju, opisuje Michel Blay v knjigi *La naissance de la mécanique analytique,* PUF, Pariz 992.

[14] Integriranje je postopek, ko površino razdelimo na infinitezimalne dele in jih seštejemo. Vsota skoraj neskončno skoraj niča je lahko nekaj končnega. Pri odvajanju gledamo koeficient dveh infinitezimalno majhnih količin. Skoraj nič delimo s skoraj ničem in lahko dobimo nekaj končnega.

zavržemo. Vendar je drugače, če iščemo razmerje med $x + dx$ in x. Podobno izraza $x\,dx$ in $dx\,dx$ ne moreta stati skupaj. «[15]

V prvem učbeniku diferencialnega računa je bila uporaba infinitezimalov še bolj nejasno definirana:

> »Postulat I: Dve količini, ki se razlikujeta le za neskončno majhni del, lahko pri uporabi medsebojno zamenjujemo oziroma imamo lahko količino, ki se poveča ali zmanjša za neskončno majhni del, za nespremenjeno.«[16]

Tudi sam Leibniz je v mnogih pismih pojasnjeval naravo infinitezimala in tako prepričeval kolege, da je uporaba neskončno majhnih količin smiselna:

> »Neskončno majhno ni preprosto absolutni nič, ampak relativni nič oziroma izginjajoča količina, ki še ohranja karakter tega, kar izginja.«[17]

Morda najbolj znano kritiko infinitezimalnega računa je leta 1734 spisal George Berkeley in začel dolgo trajajočo debato o trdnosti osnov infinitezimalnega računa. V spisu *The Analist* je povzel takratno znanje o infinitezimalih in pokazal na nejasnosti in nedoslednosti pri njihovi uporabi. Sprašuje se po naravi infinitezimalov in stopnji njihove realnosti:

> »In kaj so te fluksije? Hitrosti izginjajočih prirastkov? In kaj so sami ti izginjajoči prirastki? Niso ne končne količine, ne neskončno majhne količine, a tudi nič ne. Ali jih ne bi raje imenovali duhovi umrlih količin?«[18]

Čeprav so rezultati, do katerih pride infinitezimalni račun, morda pravi, pa metoda po Berkelyjevem mnenju vsekakor ni dobro osnovana:

> »Če bi napravil zgolj eno napako, ne bi prišel do resnične rešitve problema. Ob dvojni napaki pa lahko prideš do resnice, čeprav ne do znanosti.«[19]

---

[15] Leibniz v pismu Wallisu 30. marca 1690; *Math. Schriften*, 4, 63. Citirano po Morris Kline, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, vol. I, Oxford University Press, 1974, str. 384.

[16] l'Hospital: *Analyse des infiniment petis*. Citirano po C. Houzel et. al.: *Philosophie et calcul de l'infini*, François Maspero, Pariz 1976, str. 212.

[17] Leibniz v pismu Guidu Grandiju; *Math. Schriften*, 4, 218. Citirano po Morris Kline, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, vol. I, Oxford University Press, 1974, str. 387.

[18] George Berkeley, *The Analyst*, par. 35. Citirano po zborniku *From Kant to Hilbert*, vol. I, str. 81.

[19] George Berkeley, *The Analyst*, par. 22. Citirano po zborniku *From Kant to Hilbert*, vol. I, str. 72.

Novoveška kriza matematike se je pojavila, ko so matematiki spoznali, da je jezik za opis naravnega gibanja (matematična fizika) novi infinitezimalni račun, ki pa ga takrat (še) niso znali jasno formulirati. Račun je namreč temeljil na skrivnostnih neskončno majhnih količinah (*infinitezimali*), ki so imeli neko razsežnost, a ta je bila neskončno majhna. Če so se Grki pri spopadu z iracionalnimi razmerji lahko iz golega mišljenja zatekli na pomoč k nazorni geometrijski predstavi, to pri problemu z infinitezimali ni bilo več mogoče. Infinitezimalov si ni mogoče geometrijsko predstavljati, vendar bi to matematiki še nekako sprejeli, če tudi pri samem formalizmu ne bi bilo težav. Infinitezimale lahko namreč nekje v računu zanemarimo, drugje pa je njihova velikost ključnega pomena. Zakaj je tako, pa takrat zares ni vedel nihče. Temeljni problem matematike v osemnajstem stoletju je bil torej: kako postaviti infinitezimalni račun na trdne temelje. Ker ti temeljni ne morejo biti nazorno geometrijski, je torej gotovost potrebno najti v formalizmu. Uporaba infinitezimalov mora imeti natančna pravila, ki so medsebojno konsistentna.[20]

Bistven mejnik v reševanju osnov infinitezimanega računa je predstavljala vpeljava pojma limite[21] in prehod od matematike spremenljivih količin in njihovih infinitezimalnih delov, k matematičnim funkcijam kot objektom, s katerimi se ukvarja infinitezimalni račun. S tem prehodom so se matematiki uspeli izogniti mnogim težavam z infinitezimali in uspeli zgraditi trdne osnove za infinitezimalno matematiko in tako posredno tudi za vso moderno fiziko.

***

Čeprav se je morala matematika distancirati tako od naivnega pitagorejstva, ki je števila videl empirično v svetu (grška matematična revolucija), kot tudi od intuicije, ki je matematiko razumela kot »odraz strukture mišljenja« (novoveška matematična revolucija), težavam povezanim s aporijami kontinuuma, ni mogla uiti. Celo več, te težave so bile ves čas v jedru njene problematike. Vendar je matematika, neizogibnim težavam navkljub, uspela razviti

---

[20] Tretja velika kriza v zgodovini matematike nastopi ob koncu devetnajstega stoletja, ko tudi konsistentnost kot kriterij za dobro osnovanost teorije ni več zanesljiva (Russell sesuje Fregeja, Gödel sesuje Hilberta; paradoksi teorije množic).

[21] Problematično končno vrednost (limito) mislimo kot tisto, kamor se zaporedje steka, čeprav zares tja nikoli ne pride. Limita je definirana kot stekališče zaporedja. Točka a je limita zaporedja, če v vsaki njeni okolici ležijo skoraj vsi členi zaporedja (zunaj jih je le končno mnogo). Na problematično mesto postavimo nadomestek (limito), ki se prilega sosedom, sam pa ni proizveden na enak način. Ko na nekem mestu metoda odpove, pogledamo kakšne rezultate daje metoda za vrednosti v bližini in iz njih določimo, kaj bi nam ustrezalo, da bi metoda dala kot rezultat na mestu, kjer sama metoda nima rezultatov. Če nam katera vrednost ustreza, potem določimo to kot limito metode na tem mestu. Limita je kot slika, ki jo obesimo na luknjo v steni. Tako vse izgleda lepo, a za sliko je še vedno luknja.

metodo računanja z infinitezimali, ki deluje. Matematika paradoksa kontinuuma sicer ni razrešila, ga je pa uspela matematizirati.

Literatura

Aristotel, *Metafizika,* (prevedel V. Kalan), Založba ZRC, Ljubljana 1999.

Aristotle, *Physics,* (prevedel R. Waterfield), Oxford University Press, 1999.

George Berkeley, »The Analyst«. Citirano po zborniku W. Ewald (ur.), *From Kant to Hilbert,* vol. I., Clarendon Press, Oxford 1999.

Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique,* PUF, Pariz 1992.

Carl B.Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development,* Dover, 1949.

Maurice Caveing, *Zénon d'Elée: prolégomènes aux doctrines du continu : étude historique et critique des fragments et témoignages,* J. Vrin, Pariz 1982.

C. Houzel et. al., *Philosophie et calcul de l'infini,* François Maspero, Pariz 1976.

Morris Kline, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times,* vol. I, Oxford University Press, 1974.

Bertrand Russell, »The Problem of Infinity Considered Historicaly«; v zborniku *Zeno's Paradoxes,* Hackett, 2001.