

EULERJEVA ŠTEVILA V ANALIZI

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 11B68, 26A06, 60E99

V članku definiramo Eulerjeva števila. Pokažemo primere integralov, vsot in številskih vrst, kjer nastopajo Eulerjeva in Bernoullijeva števila. Obravnavan je tudi zakon recipročnega hiperboličnega kosinusa v teoriji verjetnosti.

EULER NUMBERS IN ANALYSIS

In this article, the Euler numbers are defined. We show examples of integrals, sums and series where the Euler and Bernoulli numbers occur. The hyperbolic secant distribution in probability theory is also discussed.

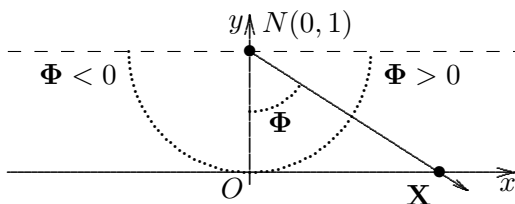
Uvod

Čeprav je v prispevku največ govora o *Eulerjevih številih* v analizi, ga pričenjamo v verjetnostnem računu s preprostim geometrijskim primerom, ki nas bo postopoma pripeljal do Eulerjevih števil in spremljajočih polinomov. Spoznali bomo nekaj zgledov v analizi, kjer nastopajo Eulerjeva števila, seznanili pa se bomo tudi s postopkom, kako lahko na hitro seštejemo nekatere alternirajoče vsote. Izogniti se ne bomo mogli *Bernoullijevim številom*, o katerih pa bomo zapisali le najnujnejše. Tudi sicer Eulerjeva in Bernoullijeva števila pogosto obravnavamo skupaj.

V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu (Oxy) iz točke $N(0, 1)$ na ordinatni osi potegnemo poltrak, ki oklepa z osjo y slučajno izbrani kot Φ (slika 1). Poltrak preseka os x v točki z absciso $\mathbf{X}$. Predpostavili bomo, da je slučajna spremenljivka Φ enakomerno porazdeljena na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Geometrijskemu opisu lahko dodamo tudi fizikalno preobleko. V steni $y = 1$ je v točki N izvor delcev, ki potujejo v vseh smereh. Zanima nas, kako je porazdeljena abscisa $\mathbf{X}$, v kateri delec zadene os x , zadetek pa zazna primeren detektor. Pri tem predpostavimo, da je smer delcev popolnoma slučajna in porazdeljena enakomerno glede na kot Φ .

V nadaljevanju bomo v glavnem uporabljali definicije iz [4]. Porazdelitveno funkcijo katerekoli *zvezno* porazdeljene slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ bomo


 Slika 1. Slučajni spremenljivki Φ in $\mathbf{X}$

označevali s $F_{\mathbf{X}}$, gostoto s $p_{\mathbf{X}}$, s $P[A]$ pa verjetnost dogodka A . Spomnimo:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = \int_{-\infty}^x p_{\mathbf{X}}(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Zanima nas, kako je porazdeljena naša slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki jo očitno povezuje s Φ formula $\mathbf{X} = \operatorname{tg} \Phi$. Gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke Φ opišemo tako: $p_{\Phi}(\phi) = 1/\pi$ za $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ in $p_{\Phi}(\phi) = 0$ sicer. Za slučajno spremenljivko $\mathbf{X} = \operatorname{tg} \Phi$ potem velja:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = P[\operatorname{tg} \Phi < x] = \int_{-\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} p_{\Phi}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Zato je

$$p_{\mathbf{X}}(x) = F'_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \quad (1)$$

Pravimo, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ porazdeljena po *standardiziranem Cauchyjevem zakonu* oziroma da ima $\mathbf{X}$ *standardizirano Cauchyjevo porazdelitev*. Po standardiziranem Cauchyjevem zakonu (1) je na primer porazdeljen tudi kvocient neodvisnih, standardizirano normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki imata gostoto $p(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$.

Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki je porazdeljena po sicer preprostem standardiziranem Cauchyjevem zakonu, pa ima žal od vseh začetnih momentov $\nu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{X}}(x) dx$ samo enega: $\nu_0 = 1$. Porazdelitev torej nima niti matematičnega upanja niti disperzije, zato se v statistiki pri ocenjevanju parametrov ne obnese. Zaradi tega vzamemo primerno funkcijo slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$. Ena takih je logaritem njene absolutne vrednosti. Videli

bomo, da ima nova slučajna spremenljivka vse začetne momente in da je njena porazdelitev zelo podobna normalni.

Oglejmo si, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $\mathbf{Y} = \frac{2}{\pi} \log |\mathbf{X}|$, če je slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ porazdeljena po standardiziranem Cauchyjevem zakonu. Faktor $2/\pi$ pred logaritmom izberemo zato, da se nova porazdelitev ujema s standardizirano normalno v matematičnem upanju in disperziji. Podobno kot v prejšnjem računu dobimo

$$F_{\mathbf{Y}}(x) = P[\mathbf{Y} < x] = P\left[\frac{2}{\pi} \log |\mathbf{X}| < x\right] = 2 \int_0^{\exp(\pi x/2)} p_{\mathbf{X}}(\xi) d\xi.$$

Potem imamo seveda

$$p_{\mathbf{Y}}(x) = F'_{\mathbf{Y}}(x) = 2p_{\mathbf{X}}(\exp(\pi x/2)) \cdot \frac{\pi}{2} \exp(\pi x/2) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{Y}$ je dana s predpisom

$$F_{\mathbf{Y}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\exp(\pi x/2)} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\exp(\pi x/2)).$$

Za slučajno spremenljivko $\mathbf{Y}$, ki ima gostoto

$$p_{\mathbf{Y}}(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)}, \quad (2)$$

pravimo, da je porazdeljena po *zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa* ali po *zakonu hiperboličnega sekansa* (angl. *hyperbolic secant distribution*).

Leonhard Euler (1707–1783) je leta 1755 v svojem delu [2] med drugim obravnaval tudi razvoj funkcije $z \mapsto 1/\cos z$, ki jo imenujemo *sekans*, v potenčno vrsto. Analogno vpeljemo funkcijo $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$, ki jo imenujemo *hiperbolični sekans* (*secans hyperbolicus*) ali *recipročni hiperbolični kosinus*. Pri tem je z lahko kompleksno število. Ker ta funkcija nastopa v porazdelitvi (2), si bomo po kratki razpravi o potenčnih vrstah in rodovnih funkcijah poglobljevali njen razvoj v potenčno vrsto. Hiperbolične funkcije, kakršne poznamo danes, je vpeljal Johann Heinrich Lambert (1728–1777).

1. Potenčne vrste in rodovne funkcije

Potenčna vrsta s številskimi koeficienti a_k realne ali kompleksne spremenljivke z ima obliko $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Včasih nas zanimata njen konvergenčni

krog in vsota, drugič pa bolj njeni koeficienti a_k . Glede na to obravnavamo *prave* in *formalne potenčne vrste*. Koeficienti a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) so lahko zapisani na različne načine glede na konkretne potrebe. Pogosto imajo koeficienti izbrane uteži $w_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), tako da imamo opravka z vrstami $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / w_k$. Največkrat uporabljamo $w_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) in takrat govorimo o *običajnih* potenčnih vrstah. Pogosto pa je $w_k = k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) in tedaj vrstam $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k!$ pravimo *eksponentne* potenčne vrste ali vrste eksponentne oblike, ker nas spominjajo na eksponentno funkcijo in vrsto: $\exp(az) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k / k!$.

Običajne potenčne vrste seštevamo, odštevamo in množimo takole:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Koeficiente c_k produkta dobimo s *konvolucijo* koeficientov obeh faktorjev:

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Ko gre za prave potenčne vrste, veljajo enakosti na skupnem konvergenčnem krogu potenčnih vrst na obeh straneh enačaje.

Kadar pa imata potenčni vrsti eksponentno obliko, je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \pm b_k}{k!} z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k,$$

pri čemer velja

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Koeficiente c_k produkta dobimo z *binomsko konvolucijo* koeficientov a_k in b_k obeh faktorjev. Izraz za c_k v (4) izpeljemo iz navadne konvolucije (3):

$$\frac{c_k}{k!} = \sum_{j=0}^k \frac{a_j}{j!} \frac{b_{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} a_j b_{k-j} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

Iz tega očitno sledi (4).

Na splošno je funkcija F običajna oziroma eksponentna rodovna funkcija številskega zaporedja $a_0, a_1, a_2, \dots$, če obstaja v neki okolici točke $z = 0$ razvoj v potenčno vrsto $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ oziroma $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k!$.

Podobno je funkcija $\mathcal{F}$ običajna oziroma eksponentna rodovna funkcija funkcijskega zaporedja $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, če obstaja v neki okolici točke $z = 0$ za vsak x z nekega intervala $\mathcal{I}$ razvoj v potenčno vrsto $\mathcal{F}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) z^k$ oziroma $\mathcal{F}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) z^k / k!$. Izraz *rodovna funkcija* se uporablja zato, ker taka funkcija *porodi* (generira) številsko oziroma funkcijsko zaporedje.

Rodovne funkcije ločimo glede na obliko njihovega razvoja v potenčne vrste, torej glede na dano zaporedje uteži (w_k) . Z rodovnimi funkcijami oziroma s potenčnimi vrstami računamo in s tem odkrivamo razne enakosti za člene zaporedja, ki jih generirajo.

Definicija 1. Eulerjeva števila E_k so koeficienti v razvoju

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} z^k \quad (|z| < \pi/2). \quad (5)$$

Funkcija $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$ je torej eksponentna rodovna funkcija Eulerjevih števil E_k . Najprej bomo pogledali nekatere njihove lastnosti.

Izrek 1. Vsa Eulerjeva števila lihega indeksa so enaka 0 in veljata razvoja

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \quad \frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \quad (|z| < \pi/2). \quad (6)$$

Dokaz. Funkcija $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$ ima pole v točkah $z_k = (2k - 1)\pi i/2$, kjer je k poljubno celo število. Teorija analitičnih funkcij (več na primer v [5]) pove, da potenčna vrsta te funkcije absolutno in enakomerno konvergira na odprtem krogu, ki ima središče v točki 0 in ki sega do najbližje singularnosti funkcije, to pa sta točki $z_0 = -\pi i/2$ in $z_1 = \pi i/2$. Zato ima potenčna vrsta funkcije konvergenčni polmer enak $\pi/2$. Ker je očitno to soda funkcija, so vsa Eulerjeva števila E_k z lihim indeksom enaka 0 in njen razvoj v potenčno vrsto je tak, kakršen je naveden v (6). Z zamenjavo $z \rightarrow iz$ takoj najdemo tudi drugi razvoj v (6). ■

Izrek 2. *Za Eulerjeva števila velja rekurzija*

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad E_0 = 1. \quad (7)$$

Dokaz. Označimo $s(z) = 1/\operatorname{ch} z$. Najprej lahko izrazimo $E_{2k} = s^{(2k)}(0)$ in $E_0 = s(0) = 1$, nato pa z $2n$ -kratnim odvajanjem enakosti $s(z) \cdot \operatorname{ch} z = 1$ še:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \operatorname{ch}^{(2n-k)}(z) s^{(k)}(z) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ker ima funkcija ch za odvod lihega reda funkcijo sh , ki ima pri $z = 0$ vrednost 0, za odvod sodega reda pa funkcijo ch , ki ima za $z = 0$ vrednost 1, res velja (7). ■

Tako lahko Eulerjeva števila izračunamo postopoma. Iz $\binom{2}{0}E_0 + \binom{2}{2}E_2 = 0$ dobimo $E_2 = -1$. Iz $\binom{4}{0}E_0 + \binom{4}{2}E_2 + \binom{4}{4}E_4 = 0$ pa $E_4 = 5$. Na tak način izračunamo še $E_6 = -61$, $E_8 = 1385$. Več števil $|E_n|$ in njihovih razcepov na prafaktorje je zbranih v razpredelnici 1. Opazimo, da z rastočim sodim indeksom zelo hitro naraščajo.

Opomba. Zgornja vpeljava Eulerjevih števil E_n (angl. Euler numbers) je povzeta po [3]. V nekaterih virih so $|E_n|$ Eulerjeva števila, v nekaterih pa $E_n^* = |E_{2n}|$. Prav tako je treba biti pazljiv pri *Bernoullijevih številih* B_n .

Euler pri zaporedjih še ni uporabljal indeksov, ampak si je pomagal z zaporednimi latinskimi, grškimi in gotskimi črkami. Števila E_n^* je označil po vrsti kar z $\alpha, \beta, \dots, \kappa$. Pri $\kappa = E_9^*$ se je zmotil, saj je v [2] objavil napačen rezultat: $\kappa = 2\,404\,879\,661\,671$.

Simbolično lahko napišemo rekurzijo (7) tudi takole:

$$(E + 1)^{2n} + (E - 1)^{2n} = 0, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Formalna binoma potenciramo, nato pa eksponente zamenjamo z indeksi.

Števila $|E_{2n}|$ imajo svoj kombinatorični pomen. Za $n = 1, 2, 3, \dots$ je $|E_{2n}|$ enako številu A_{2n} alternirajočih permutacij osnovne razporedbe $(1\,2\,\dots\,2n)$, to je permutacij, v katerih se izmenjujejo dvigi in spusti. Prvi dvig mora biti na začetku, gledano z leve strani. Dvigov je n , spustov pa $n - 1$. Za $n = 1$ je že kar osnovna razporedba (12) alternirajoča, ima pač 1

Eulerjeva števila v analizi

n	$ E_n $	Razcep na prafaktorje
0	1	
2	1	
4	5	5
6	61	61
8	1 385	$5 \cdot 277$
10	50 521	$19 \cdot 2\,659$
12	2 702 765	$5 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 967$
14	199 360 981	$47 \cdot 4\,241\,723$
16	19 391 512 145	$5 \cdot 17 \cdot 228\,135\,437$
18	2 404 879 675 441	$79 \cdot 349 \cdot 87\,224\,971$
20	370 371 188 237 525	$5^2 \cdot 41\,737 \cdot 354\,957\,173$

Razpredelnica 1. Nekaj začetnih Eulerjevih števil

dvig in 0 spustov, zato je $A_2 = 1$. Za $n = 2$ imamo $A_4 = 5$ alternirajočih permutacij, dobljenih iz osnovne razporedbe (1234), in sicer so to: (1324), (2314), (1423), (2413), (3412). Vse imajo po dva dviga in en spust. Res je $A_2 = |E_2| = 1$ in $A_4 = |E_4| = 5$.

V kombinatoriki se po Eulerju imenujejo tudi *eulerjevska števila* (angl. Eulerian numbers) $A_{n,k}$, ki štejejo permutacije s k dvigi osnovne razporedbe $(1\,2\,\dots\,n)$. Tako je na primer $A_{4,2} = 11$, ker je toliko permutacij osnovne razporedbe (1234) z dvema dvigoma, in sicer so to: (1324), (2134), (2314), (3124), (1243), (1342), (2341), (1423), (2413), (3412), (4123).

2. Integrali, ki se izražajo z Eulerjevimi števili

Pokazali bomo, da se z Eulerjevimi števili da izraziti nekatere integrale. Najprej bomo izračunali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) \, dx}{\operatorname{ch} x} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{in} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax) \, dx}{\operatorname{ch} x} \quad (-1 < a < 1).$$

Pomembna sta za izračun začetnih momentov in karakteristične funkcije porazdelitve po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa. Za izračun obeh integralov bomo uporabili iz kompleksne analize dobro znano metodo ostankov ali residuov (glej na primer [5]).

Izrek 3. Za vsako realno število a je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)}, \quad (8)$$

za vsako realno število a ($-1 < a < 1$) pa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}. \quad (9)$$

Dokaz. Kompleksno funkcijo $z \mapsto f(z) = \exp(aiz) / \operatorname{ch} z$ integriramo v ravnini kompleksnih števil (z) v pozitivni smeri vzdolž ograje $\mathcal{C}_R$ pravokotnika, ki ima oglišča v točkah $-R$, R , $R + \pi i$, $-R + \pi i$, v katerem ima funkcija f enostaven pol $z_1 = \pi i/2$. Pri tem je R poljubno pozitivno realno število. Dobimo:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{\exp(aix) dx}{\operatorname{ch} x} + \int_0^{\pi} \frac{\exp(ai(R + iy)) i dy}{\operatorname{ch}(R + iy)} + \\ &\quad + \int_R^{-R} \frac{\exp(ai(x + \pi i)) dx}{\operatorname{ch}(x + \pi i)} + \int_{\pi}^0 \frac{\exp(ai(-R + iy)) i dy}{\operatorname{ch}(-R + iy)} = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = 2\pi i \frac{\exp(ai\pi i/2)}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = 2\pi \exp(-a\pi/2). \end{aligned}$$

Naredimo limitni proces, ko $R \rightarrow \infty$. Prvi člen tedaj konvergira proti

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix) dx}{\operatorname{ch} x},$$

tretji pa proti

$$-\exp(-a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix) dx}{\operatorname{ch}(x + \pi i)} = \exp(-a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix) dx}{\operatorname{ch} x} = \exp(-a\pi) I.$$

Drugi integral najprej ocenimo:

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(ai(R + iy)) i dy}{\operatorname{ch}(R + iy)} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(aiR) \exp(-ay) i dy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\pi \frac{\exp(-ay) dy}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 R \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R \sin^2 y}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sh} R} \int_0^\pi \exp(-ay) dy. \end{aligned}$$

Zadnji izraz pa konvergira proti 0, ko $R \rightarrow \infty$. Isto ugotovimo za četrti integral. Pri tem upoštevamo, da je vedno $\operatorname{ch} R \geq \operatorname{sh} R$. Tako najdemo najprej relacijo $(1 + \exp(-a\pi))I = 2\pi \exp(-a\pi/2)$, nato pa še

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{2\pi \exp(-\pi a/2)}{1 + \exp(-\pi a)}.$$

Nazadnje dobimo po preoblikovanju enakost (8).

Podobno, z integracijo vzdolž $\mathcal{C}_R$, izračunamo integral (9), le da vzamemo funkcijo $z \mapsto g(z) = \exp(az)/\operatorname{ch} z$, ki ima znotraj pravokotnika enostaven pol $z_1 = \pi i/2$ in $\operatorname{Res}(g(z), z_1) = -i \exp(a\pi i/2)$. Z limitnim procesom, ko $R \rightarrow \infty$, dobimo z upoštevanjem pogoja $-1 < a < 1$ najprej za

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax) dx}{\operatorname{ch} x}$$

enačbo $J + \exp(a\pi i)J = (1 + \exp(a\pi i))J = 2\pi \exp(a\pi i/2)$, nato s primerjavo realnih delov obeh strani dobljene enačbe še $(1 + \cos(\pi a))J = 2\cos^2(\pi a/2)J = 2\pi \cos(\pi a/2)$ in nazadnje:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Če zamenjamo integracijsko spremenljivko x z $-x$, dobimo še

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

in z upoštevanjem enakosti $2\operatorname{ch}(ax) = \exp(ax) + \exp(-ax)$ končno (9). ■

Izrek 4. Za vsako nenegativno celo število k velja:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|. \quad (10)$$

Dokaz. Najprej uporabimo (6) in izrazimo z Eulerjevimi števili:

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{\pi^{2k+1} a^{2k}}{2^{2k}} \quad (-1 < a < 1). \quad (11)$$

Po drugi strani pa lahko z vrsto

$$\frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} x^{2k}}{(2k)! \operatorname{ch} x},$$

ki absolutno in enakomerno konvergira glede na spremenljivko x na vsakem omejenem intervalu, pri čemer je

$$\frac{|\cos(ax)|}{\operatorname{ch} x} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} x^{2k}}{(2k)! \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x}$$

in $\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch}(ax)/\operatorname{ch} x) dx < \infty$ zaradi (9), po medsebojni zamenjavi vrstnega reda integriranja in seštevanja zapišemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x}.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci a^{2k} v relaciji

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{\pi^{2k+1} a^{2k}}{2^{2k}}$$

dobimo

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} (-1)^k E_{2k}.$$

Ker je očitno integral na levi strani pozitivno število, mora veljati enakost $(-1)^k E_{2k} = |E_{2k}|$ in s tem končno (10). ■

Zaradi rekurzije (7) so vsa Eulerjeva števila cela. Obenem pa smo pravkar v dokazu spoznali, da velja enakost $(-1)^k E_{2k} = |E_{2k}|$.

Posledica 5. *Eulerjevim številom E_{2n} , ki so vsa cela števila, se predznak izmenično menja.*

Posledica 6. *Za vsako nenegativno celo število k velja:*

$$\int_0^{\infty} \frac{\log^{2k} x \, dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|. \quad (12)$$

Dokaz. Če vpeljemo novo integracijsko spremenljivko $x = \log u$ v integral (10), dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} \, dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int_1^{\infty} \frac{\log^{2k} u \, du}{1+u^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|.$$

Ker očitno dobimo (po zamenjavi integracijske spremenljivke $u \mapsto 1/u$)

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^{2k} u \, du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{\log^{2k} u \, du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\log^{2k} u \, du}{1+u^2},$$

imamo nazadnje integral (12). ■

3. Polinomi, katerih koeficienti so produkti Eulerjevih števil in binomskih koeficientov

Vpeljimo zaporedje polinomov

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

ki imajo preprosto rodovno funkcijo, s katero si bomo pomagali poiskati nekatere njihove lastnosti.

Izrek 7. *Zaporedje polinomov $F_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ima rodovno funkcijo*

$$\mathcal{G}(x, z) = \frac{\exp(xz)}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!} z^n \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right). \quad (14)$$

Dokaz. Z uporabo binomske konvolucije (4) lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, z) &= \exp(xz) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j}{j!} z^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!} z^n.\end{aligned}$$

Pri tem je x realna, z pa kompleksna spremenljivka, ki je lahko v krogu, ki ima središče v točki 0 in sega do najbližje singularnosti funkcije $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$, to je $\pi i/2$ oziroma $-\pi i/2$. Zato dobljena vrsta konvergira absolutno in enakomerno pri pogoju $|z| < \pi/2$ za vsak realen x . ■

Očitno je $F_0(x) = 1$ in $F_n(0) = E_n$ za vsak indeks n . Stopnja polinoma $F_n(x)$ je ravno njegov indeks, zato je zaporedje $F_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) pravo polinomsko zaporedje in vsak polinom $P(x)$ z realnimi koeficienti lahko enolično izrazimo v obliki $P(x) = \sum_{k \geq 0} c_k F_k(x)$ z realnimi koeficienti c_k .

Polinome $F_n(x)$ lahko zapišemo tudi simbolično:

$$F_n(x) = (E + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k}, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Radi pa bi imeli preprost postopek, po katerem jih izračunamo.

Izrek 8. *Za polinome $F_n(x)$ velja enakost*

$$F_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(x) y^{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Dokaz. Povečajmo v rodovni funkciji (14) spremenljivko x za y :

$$\mathcal{G}(x + y, z) = \frac{\exp((x + y)z)}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x + y)}{n!} z^n.$$

Po drugi strani pa dobimo s pomočjo (4) tudi razvoj:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x + y, z) &= \exp(yz) \cdot \mathcal{G}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{j!} z^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(x) y^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^n v obeh zapisih najdemo (15). ■

Izrek 9. Potenca x^n se izraža s polinomi $F_n(x)$ v obliki

$$x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} F_{n-2k}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Pri tem pomeni $\lfloor n/2 \rfloor$ največje celo število, ki ne presega $n/2$.

Dokaz. Naj bo $c_j = 1$ za vse sode indekse j in 0 sicer. Iz enakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!} = \exp(xz) = \operatorname{ch} z \cdot \mathcal{G}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k!} z^k$$

dobimo po podobnem postopku kot v prejšnjem dokazu enakost

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k F_{n-k}(x),$$

iz katere takoj sledi (16). ■

Izrek 10. Za odvod polinoma $F_n(x)$ velja enakost

$$F'_n(x) = nF_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

Dokaz. Z odvajanjem rodovne funkcije (14) dobimo najprej enakost

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, z) = z \mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(x)}{n!} z^n,$$

pri čemer smo upoštevali $F_0(x) = 1$, nato pa še

$$\mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(x)}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_{n-1}(x)}{n!} z^{n-1}.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^{n-1} v obeh vrstah najdemo (17). ■

Z enakostjo (17) in z upoštevanjem pogoja $F_n(0) = E_n$ lahko hitro zapišemo nekaj začetnih polinomov $F_n(x)$:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1, \\ F_1(x) &= x, \\ F_2(x) &= x^2 - 1 = (x-1)(x+1), \\ F_3(x) &= x^3 - 3x = x(x^2 - 3), \\ F_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 5 = (x-1)(x+1)(x^2 - 5), \\ F_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 25x = x(x^2 - 5)^2. \end{aligned}$$

Izrek 11. Za polinome $F_n(x)$ velja naslednja enakost:

$$F_n(x-1) + F_n(x+1) = 2x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Dokaz. Oglejmo si izraz

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \frac{\exp((x-1)z) + \exp((x+1)z)}{\operatorname{ch} z} = 2 \exp(xz).$$

Po eni strani je

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x-1) + F_n(x+1)}{n!} z^n,$$

po drugi strani pa

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^n potrdimo veljavnost enakosti (18). ■

Izrek 12. Polinomi $F_n(x)$ so sode funkcije, ko je indeks n sodo število, in lihe funkcije, ko je n liho število:

$$F_n(-x) = (-1)^n F_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Dokaz. Iz enakosti

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{\exp(-xz)}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(-x)}{n!} z^n$$

in iz enakosti

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{\exp(x(-z))}{\operatorname{ch}(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_n(x)}{n!} z^n$$

sledi po primerjavi koeficientov pri potenci z^n takoj enakost (19). ■

Polinomi $F_n(x)$ so v tesni zvezi z Eulerjevimi polinomi $E_n(x)$, katerih rodovna funkcija je

$$\mathcal{H}(x, z) = \frac{2 \exp(xz)}{\exp z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} z^n \quad (|z| < \pi).$$

Preprosta primerjava pokaže, da veljajo relacije:

$$2^n E_n(x) = F_n(2x - 1), \quad E_n = F_n(0) = 2^n E_n(1/2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Polinome $F_n(x)$, ki imajo celoštevilске koeficiente, smo uvedli zato, ker je z njimi nekoliko udobneje računati kot s polinomi $E_n(x)$.

4. Nekatere vsote z Eulerjevimi števili

Pokazali bomo, kdaj se vrednosti polinomov $F_n(x)$ da izraziti še kako drugače. Hitro se vidi, da gre to lepo za lihe indekse n in naravne x , za katere pa moramo posebej obravnavati sodi in lihi primer.

Izrek 13. *Za poljubni naravni števili n in k velja formula:*

$$F_{2n-1}(2k) = 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} (2j-1)^{2n-1}. \quad (20)$$

Dokaz. Formulo (20) pri danem n dokažemo z metodo popolne indukcije glede na število k . Za $k = 1$ stoji $F_{2n-1}(2)$ na levi strani v (20), z relacijo (18) pa imamo $F_{2n-1}(2) = 2 - F_{2n-1}(0) = 2 - E_{2n-1} = 2$, kar dobimo za $k = 1$ tudi na desni strani v (20), ki zato velja za $k = 1$. Indukcijski korak spet naredimo z relacijo (18): $F_{2n-1}(2k+2) = 2(2k+1)^{2n-1} - F_{2n-1}(2k)$. S predpostavko, da (20) že velja za neko naravno število k , imamo:

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(2k+2) &= 2(2k+1)^{2n-1} + 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k+1} (2j-1)^{2n-1} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+k+1} (2j-1)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Torej velja formula (20) tudi, če v njej zamenjamo k s $k+1$, in je zato pravilna za vsako naravno število k . ■

V posebnih primerih imamo:

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(2) &= 2, \\ F_{2n-1}(4) &= 2(3^{2n-1} - 1), \\ F_{2n-1}(6) &= 2(5^{2n-1} - 3^{2n-1} + 1), \\ F_{2n+1}(8) &= 2(7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 3^{2n-1} - 1). \end{aligned}$$

Da bi tako izrazili tudi $(E + 1)^n = F_n(1)$, $(E + 3)^n = F_n(3)$, $\dots$, si oglejmo

$$\mathcal{G}(1, z) = \frac{\exp z}{\operatorname{ch} z} = \frac{(\exp z + \exp(-z)) + (\exp z - \exp(-z))}{\exp z + \exp(-z)} = 1 + \operatorname{th} z.$$

Za lihe x in n v $F_n(x)$ nam bodo prišla prav *Bernoullijeva števila* B_n .

Definicija 2. Bernoullijeva števila B_k so koeficienti v razvoju

$$\frac{z}{\exp z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \quad (|z| < 2\pi). \quad (21)$$

Funkcija $z \mapsto z/(\exp z - 1)$ je rodovna funkcija Bernoullijevih števil in ima v točki $z = 0$ odpravljivo singularnost, tej točki najbližji pol pa v $z = 2\pi i$ oziroma $z = -2\pi i$, zato ima konvergenčni krog potenčne vrste (21) polmer 2π . Več o Bernoullijevih številih najdemo na primer v [1, 3]. Ponovimo le najnujnejše. Vsa Bernoullijeva števila lihega indeksa od vključno tretjega naprej so enaka 0, Bernoullijevim številom sodega indeksa od 2 naprej pa se predznak izmenično spreminja: $B_{2n+1} = 0$, $|B_{2n}| = (-1)^{n-1} B_{2n}$ za $n = 1, 2, 3, \dots$. Vsa Bernoullijeva števila so racionalna.

Izrek 14. *Obstajata naslednja razvoja v potenčni vrsti:*

$$z \operatorname{cth} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < \pi) \quad (22)$$

in

$$\operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad (|z| < \pi/2). \quad (23)$$

Dokaz. Iz (21) lahko najprej izrazimo

$$\frac{z}{\exp z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

nato pa po preureditvi leve strani zapišemo

$$\frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < 2\pi).$$

Z zamenjavo spremenljivke $z \rightarrow 2z$ takoj dobimo (22). Razvoj (23) pa je posledica elementarne enakosti $2 \operatorname{cth}(2z) = \operatorname{cth} z + \operatorname{th} z$ in (22). ■

Iz enakosti

$$\mathcal{G}(1, z) = \frac{\exp z}{\operatorname{ch} z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(1)}{n!} z^n = 1 + \operatorname{th} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n-1)!(2n)} z^{2n-1},$$

ki jo dobimo iz rodovne funkcije polinomov $F_n(x)$ in iz (23), sklepamo, da je

$$\begin{aligned} F_0(1) &= 1, \\ F_{2n}(1) &= 0, \\ F_{2n-1}(1) &= \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (24)$$

Izrek 15. Za poljubni naravni števili n in k velja formula:

$$F_n(2k+1) = 2^{n+1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} j^n + (-1)^k F_n(1). \quad (25)$$

Dokaz. Tudi formulo (25) pri danem n dokažemo z metodo popolne indukcije glede na število k . Za $k = 1$ stoji $F_n(3)$ na levi strani v (25), z relacijo (18) pa imamo $F_n(3) = 2^{n+1} - F_n(1)$, kar dobimo za $k = 1$ tudi na desni strani v (25), ki zato res velja za $k = 1$. Indukcijski korak spet naredimo z relacijo (18): $F_n(2k+3) = 2(2k+2)^n - F_n(2k+1)$. S predpostavko, da (25) že velja za neko naravno število k , imamo:

$$\begin{aligned} F_n(2k+3) &= 2(2k+2)^n + 2^{n+1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k+1} j^n + (-1)^{k+1} F_n(1) = \\ &= 2^{n+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+k+1} j^n + (-1)^{k+1} F_n(1). \end{aligned}$$

Torej velja formula (25) tudi, če v njej zamenjamo k s $k+1$, in je zato pravilna za vsako naravno število k . ■

V posebnih primerih dobimo:

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(3) &= 2^{2n} - \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}, \\ F_{2n-1}(5) &= 2^{4n-1} - 2^{2n} + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}. \end{aligned}$$

5. Alternirajoče vsote naravnih potenc

Znano je, da se vsote $\sum_{j=1}^k j^n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + k^n$ za vsak naraven eksponent n dajo v preprosti obliki izraziti z Bernoullijevimi polinomi (več v [1, 3]). Z našimi polinomi $F_n(x)$ pa lahko izrazimo alternirajoče vsote

$$s(k, n) = \sum_{j=1}^k (-1)^j j^n = -1^n + 2^n - 3^n + \dots + (-1)^k k^n.$$

Iz formule (25) namreč lahko brez težav izrazimo:

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j j^n = -1^n + 2^n - 3^n + \dots + (-1)^k k^n = \frac{(-1)^k F_n(2k+1) - F_n(1)}{2^{n+1}}.$$

Pri tem sta k in n poljubni naravni števili. Za posebne primere $n = 1, 2, 3$ s pomočjo formul, ki sledijo izreku 8, dobimo:

$$\begin{aligned} s(k, 1) &= -1 + 2 - 3 + \dots + (-1)^k k = \frac{(-1)^k (2k+1) - 1}{4}, \\ s(k, 2) &= -1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^k k^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2}, \\ s(k, 3) &= -1^3 + 2^3 - 3^3 + \dots + (-1)^k k^3 = \frac{(-1)^k (2k+1)(2k^2 + 2k - 1) + 1}{8}. \end{aligned}$$

Izrek 11 pa nam omogoča sešteti alternirajoče vsote potenc lihih števil:

$$s_l(k, 2n-1) = \sum_{j=1}^k (-1)^j (2j-1)^{2n-1} = \frac{1}{2} (-1)^k F_{2n-1}(2k).$$

Za $n = 1, 2, 3$ dobimo na primer:

$$\begin{aligned} s_l(k, 1) &= -1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^k (2k-1) = (-1)^k k, \\ s_l(k, 3) &= -1^3 + 3^3 - 5^3 + \dots + (-1)^k (2k-1)^3 = (-1)^k k(4k^2 - 3), \\ s_l(k, 5) &= -1^5 + 3^5 - 5^5 + \dots + (-1)^k (2k-1)^5 = (-1)^k k(4k^2 - 5)^2. \end{aligned}$$

Z alternirajočimi vsotami potenc sodih števil potem ni večjih težav:

$$s_s(k, 2n-1) = \sum_{j=1}^k (-1)^j (2j)^{2n-1} = 2^{2n-1} \sum_{j=1}^k (-1)^j j^{2n-1} = 2^{2n-1} s(k, 2n-1).$$

6. Še primera iz verjetnostnega računa:

A. Naj bo slučajna spremenljivka $\mathbf{Y}$ porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$, slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ pa naj bo definirana z izrazom $\mathbf{X} = \frac{2}{\pi} \log \operatorname{tg}(\pi \mathbf{Y}/2)$. Njeno porazdelitveno funkcijo najdemo po znanem postopku:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = P\left[\frac{2}{\pi} \log \operatorname{tg}(\pi \mathbf{Y}/2) < x\right] = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\exp(\pi x/2)).$$

To pomeni, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{X} = \frac{2}{\pi} \log \operatorname{tg}(\pi \mathbf{Y}/2)$ porazdeljena po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa, če je slučajna spremenljivka $\mathbf{Y}$ porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$. S tem lahko tako porazdelitev simuliramo z računalniškim generatorjem slučajnih števil.

B. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki je porazdeljena po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa, ima začetne momente $\nu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{X}}(x) dx$ za $n = 0, 1, 2, \dots$. Najdemo jih neposredno z uporabo rezultata (10): $\nu_{2n} = |E_{2n}|$ in $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \dots$. Naštejmo jih nekaj: $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 5$. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ ima matematično upanje 0, disperzijo 1, standardno deviacijo 1, asimetrijo 0 in eksces 2 (za definicije glej na primer [1, 4]). Za primerjavo: standardizirana normalna porazdelitev premore prav take številske karakteristike razen ekscesa, ki je 0. Zato včasih v statistiki normalno porazdelitev nadomestijo z našo porazdelitvijo recipročnega hiperboličnega kosinusa.

LITERATURA

- [1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.
- [2] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana, Sankt Peterburg, 1755.
- [3] I. S. Gradshteyn in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, edited by A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.
- [4] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Matematika – fizika 3, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.
- [5] I. Vidav, *Višja matematika III*, Matematika – fizika 8, DZS, Ljubljana, 1976.