PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 2
Strani 116–117

Ivan Vidav:

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA SAME OSTROKOTNE TRIKOTNIKE

Ključne besede: matematika, geometrija, kvadrat, trikotnik.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-2-Vidav.pdf

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA SAME OSTROKOTNE TRIKOTNIKE

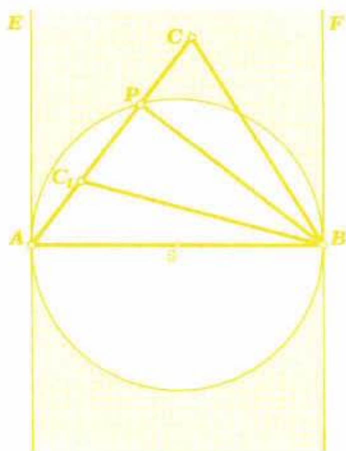
Pogosto naletimo v matematiki na probleme, ki so razumljivi brez posebnega znanja matematike, rešitev pa ni tako preprosta, kakor se zdi na prvi pogled. Takšno je npr. vprašanje, ki smo ga navedli v naslovu. Pri tem povejmo, da imenujemo trikotnik ostrokoten, če so vsi njegovi notranji koti ostri.

Nalogo lahko zastavimo tudi takole:

Sestavi iz samih ostrokotnih trikotnikov kvadrat!

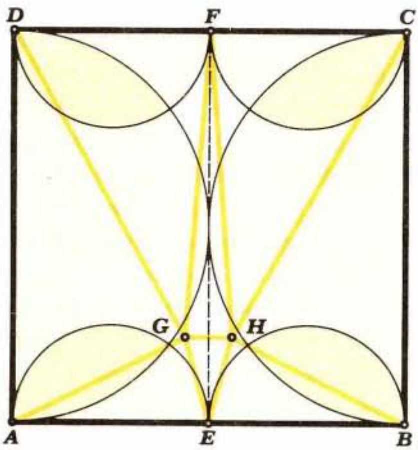
Rekli bi, da pač ne more biti posebno težko razrezati kvadrat na ostrokotne trikotnike. Vsak bralec pa se lahko sam s poskušanjem prepriča, da videz vara in da naloga ni tako preprosta, ker pravokotnih trikotnikov ne štejemo za ostrokotne.

Preden navedemo rešitev, si zastavimo tole vprašanje: Dana je osnovnica trikotnika AB. Kje mora ležati vrh C, da bo trikotnik ABC ostrokoten? Narišimo krog s premerom AB, v krajiščih A in B pa postavimo pravokotnici AE in BF (glej sliko 1). Trikotnik ABC je ostrokoten natanko tedaj, kadar leži vrh C med pravokotnicama AE in BF, toda zunaj kroga s premerom AB (na sliki 1 je to polje osenčeno). Če leži namreč vrh C na pravokotnici AE ali na njeni levi strani, je kot pri A pravi ali top; če leži vrh C na BF ali na desni te pravokotnice, je kot pri B pravi ali top. Naj bo zdaj vrh C med pravokotnicama, toda zunaj kroga. V tem primeru sta očitno kota pri A in B ostra. Kaj pa pri C? Če je P presečišče kroga s stranico AC, je kot APB kot v polkrogu, torej pravi kot. Kot pri C pa je oster, ker je manjši od pravega kota APB, ki je nepriležni zunanji kot kota pri C v trikotniku BPC. Podobno se prepričamo, da je v trikotniku ABC_1 kot pri C_1 top, če leži vrh C_1 v notranjosti kroga.



Denimo, da smo kvadrat razrezali na ostrokotne trikotnike. Oglišča teh trikotnikov so bodisi oglišča kvadrata, bodisi točke na stranicah kvadrata ali pa notranje točke. V vsakem notranjem oglišču T se stika najmanj pet izmed teh trikotnikov. Vsota kotov z vrhom v T - vsi ti koti so ostri - je namreč enaka polnemu kotu 360°; vsota štirih ali treh ostrih kotov pa je manjša od 360°. Podobno ugotovimo, da se v oglišču P, ki leži na kaki stranici kvadrata, stikajo najmanj trije trikotniki.

Rešitev naloge dobimo takole: Naj bo dan kvadrat $ABCD$. Označimo središči stranic AB in CD z E in F (glej sliko 2). Narišimo v notranjosti kvadrata polkroge s premeri AD, BC, AE, BE, CF in DF. Te polkrožne plošče ne pokrijejo vsega kvadrata. Na nepokritem delu v spodnji ali zgornji polovici kvadrata si izberemo točki G in H in sicer tako, da ležita simetrično glede na daljico EF. Zvežimo točko G s točkami A, E, F in D, točko H pa s točkami E, B, C in F. Tako smo razrezali kvadrat $ABCD$ na osem ostrokotnih trikotnikov. Trikotnika GHE in GHF sta namreč enakokraka. V enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici vedno ostra, kot ob vrhu pa je tudi oster, če je osnovnica dovolj majhna v primerjavi z višino. To je v našem primeru očitno res. (Osnovnico GH si lahko izberemo poljubno majhno.) Drugi trikotniki pa so ostrokotni iz razloga, ki smo ga navedli v začetku: Vrh G trikotnika AEG je med pravokotnicama AD in EF in zunaj kroga s premerom AE. Podobno ugotovimo, da so ostali trikotniki ostrokotni.



Brez dokaza naj povemo, da kvadrata ni mogoče razrezati na manj kakor osem ostrokotnih trikotnikov.

Bralec, ki ga to veseli, naj poskuša razrezati na same ostrokotne trikotnike enakokrak pravokoten trikotnik (to je polovico kvadrata). Naloga je rešljiva s sedmimi trikotniki.

Ivan Vidav