

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **18** (1990/1991)

Številka 5

Strani 290–293

Vilko Domajnko:

MALA ZBIRKA NALOG L. FIBONACCIJA

Ključne besede: naloge, Presekova nadloga.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/18/1054-Domajnko.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

MALA ZBIRKA NALOG L. FIBONACCIJA

Italijanski matematik **Leonardo Fibonacci** (1170 - 1250) velja za najpomembnejšega evropskega matematika v 13. stoletju. Med drugim je Evropejcem prvi predlagal uporabo desetih števk (cifer) - številskih znamenj, ki jih danes uporabljamo širom sveta, v njegovem času pa so jih uporabljali zgolj v arabskih deželah. Poleg tega pa so pomembni tudi njegovi prispevki k teoriji diofantskih enačb, pri reševanju kubičnih enačb in še kje. Marsikomu pa je ime poznano zaradi Fibonaccijevega zaporedja.



Leonardo Fibonacci

Leta 1228 je Fibonacci izdal znamenito delo *Liber abaci* (Knjiga o abaku). In prav iz te knjige izvira tudi večina izmed dvanajsterice nalog, ponujenih v pokušino bralcem Preseka. Zahtevnostni spekter teh nalog je kar širok. Med njimi je namreč veliko takšnih, ki se jih lahko lotijo že tudi osnovnošolci, z nekaterimi drugimi pa utegnejo imeti precej opravka tudi v matematiki spretnjši srednješolci. A kakorkoli že - rešitve tistih nalog, ki jih boste zmogli, nam seveda le pošljite. Nagrade vas čakajo!

Še tole - preden se zares lotite reševanja nalog, preberite tudi *Opombe k nalogam in namige za reševanje*. Utegne koristiti!

Zdaj pa zares.

1. Kralj je poslal 30 ljudi v svoj ogromni sadovnjak, da bi mu tam sadili drevesa.

Povej, koliko dni bi potrebovalo 36 ljudi za to, da bi posadili 4400 dreves, če je znano, da je onih 30 ljudi sadilo 1000 dreves natanko 9 dni.

2. Katero število da, če ga množiš z $\frac{19}{20}$, svoj kvadrat?

3. Koliko parov zajcev dobimo od enega para novorojenih zajcev po enem letu, če privzamemo, da vsak izmed parov skoti vsak mesec po en nov par, ki je zatem ploden od drugega meseca starosti naprej, in da med temi zajci ni smrtnih primerov?
4. Neki mož ima sadovnjak z jablanami, v katerega vodi sedem vrat. Ko se je nekoč vračal iz sadovnjaka, je dal stražarju pri prvih vratih polovico jabolok iz košare, ki jo je nosil s seboj. Zatem mu je dodal še eno jabolko. Drugemu je dal polovico tistega, kar mu je ostalo, in spet še eno jabolko povrh. In tako naprej tudi vsakemu izmed naslednjih petih stražarjev - polovico jabolok iz košare, za povrh pa še eno. Naposled je zapustil sadovnjak z enim samim jabolkom v košari.
Koliko jabolok je nabral ta dobri mož tistikrat v svojem sadovnjaku?
5. Nekdo je vložil en denarij. Zaradi obresti bo imel čez pet let že dva denarija, pet let zatem pa se mu bo bogastvo v banki znova podvojilo. Povej, na koliko denarijev bi zrasel ta njegov vloženi denarij v sto letih?
6. Neki mož je zapustil svojemu najstarejšemu sinu en zlatnik in še sedmino vseh preostalih zlatnikov. Zatem je dal drugemu najstarejšemu sinu iz preostale vsote dva zlatnika in spet še sedmino vseh preostalih zlatnikov. Od tega, kar mu je ostalo, je dal tretjemu sinu tri zlatnike in še sedmino vseh preostalih. In tako naprej - vsak naslednji je dobil po en zlatnik več od prejšnjega in še sedmino vseh preostalih zlatnikov povrh. Zadnji, najmlajši, je naposled dobil, kar je pač ostalo. Toda, glej - vsi sinovi so dobili enako!
Koliko sinov je imel mož in koliko zlatnikov jim je razdelil?
7. Katerih pet uteži je treba izbrati, da bi se dalo z njihovo pomočjo stehitati katerokoli breme, ki ni težje od 30 kilogramov in čigar težo merimo z naravnim številom?
Tudi uteži naj tehtajo celo število kilogramov. Tehtaš tako, da na eno stran tehtnice postavljaš uteži, na drugo stran pa breme.
8. Oni je kupil 30 ptičkov za vsega skupaj 30 cekinov. S cenami je bilo na semnju pa takole: za tri vrabce je bilo treba odšteti po cekin, za prav toliko so prodajali tudi par divjih golobov, medtem ko so bili domači golobi že po dva cekina vsak. Kupil je od vsakega po nekaj.
Koliko ptičev te in one vrste je torej tedaj nosil domov?

9. Dokaži, da je produkt vsote dveh kvadratov z vsoto drugih dveh kvadratov spet vsota dveh kvadratov.
10. Poišči tak ulomek x , da bosta števili $x^2 + 5$ in $x^2 - 5$ vsako zase kvadrata nekega drugega ulomka.
11. Trije imajo skupaj veliko denarja. Prvi je lastnik polovice, drugi tretjine, tretji pa šestine vsega. Potem pa se spro med seboj in vsak izmed njih si nagrabi s tega kupa, dokler tam ne ostane prav nič več. Ko se spet nekoliko pomirijo, vrne prvi polovico tistega, kar je vzel, drugi tretjino nagrabljenega, tretji pa le šestino nagrabljenega. Ves vrnjeni denar dajo znova na en kup in si ga potem še enkrat razdele med seboj na enake dele. In začuda - na tak način dobi vsak spet prav tisti znesek, ki mu je pripadal po dogovoru že od vsega začetka!
Povej, koliko denarja je bilo na tistem kupu na začetku in koliko je dobil vsak izmed teh treh.
12. Reši enačbo $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Opombe k nalogam in namigi za reševanje

3. Že omenjeno Fibonaccijevo zaporedje se mora za svojo popularnost zahvaliti najbrž prav tej nalogi.
5. Fibonacci je v svojih tekstih poimenoval znana števila z *numerus* ali *denarij*, kar pomeni denar, neznana števila pa z *res*, kar pomeni stvar.
6. To nalogo zasledimo tudi v delih nekaterih kasnejših znamenitih matematikov. Tako sta se z njo ukvarjala tudi francoski matematik *Nicolas Chuquet* (umrl pribl. 1500) in pa *Leonhard Euler* (1707 - 1783), vsem znani švicarski matematik.
7. Naloga je v literaturi bolj znana pod imenom Bachetov problem o utežeh. Francoski matematik *Claude Gaspard Bachet de Méziriac* (1587 - 1630) jo je leta 1612 objavil v svoji znameniti zbirki *Problèmes plaisants et delectables* (Zabavni in očarljivi problemi).
9. Uporaba črkovnih simbolov v algebri je bila v 13. stoletju seveda šele v povojih. Sicer pa naloga govori o t.i. Fibonaccijevi enačbi.
10. Zadnje tri naloge iz te zbirke so znane po tem, da jih je moral Fibonacci reševati na nekem matematičnem tekmovanju. Rešil jih je naravnost bravurozno, čeprav zagotovo niso vse lahke. Ker je tudi ta naloga v dani obliki zelo zahtevna, namignimo, da ima iskani ulomek imenovalac 12.

11. Množica vseh rešitev te naloge je neskončna. Morda bi bilo zanimivo poiskati najmanjšo neničelno celoštevilsko rešitev.
12. Namignimo, da enačba ne premore racionalnih korenov. Fibonacci je znal poiskati njen koren na devet decimalnih mest natančno. Ga zmorete prekositi?

Literatura

Boyer Carl Benjamin: *A history of mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968,
Dadić Žarko: *Razvoj matematike*, Zagreb, Školska knjiga, 1975,
Eves Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, New York, Holt Rinehart and Winston, 1969.

Vilko Domajnko