Bojan Kuzma
ZBIRKA IZPITNIH NALOG IZ VERJETNOSTI

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 9)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.2(075.8)(079.1)(0.034.2)

KUZMA, Bojan
Zbirka izpitnih nalog iz verjetnosti [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 9)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_9_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-8-8

246644992

Zbirka izpitnih nalog iz verjetnosti

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje. Pričujoča zbirka obravnava teme iz verjetnosti. Zbirka je nastajala skozi več let, ko sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru iz predmetov Verjetnost ter Verjetnostni račun in statistika. Zato kakšne od nalog vsebujejo tudi vprašanja iz Statistike. Kljub temu sem se odločil, da bom tudi takšne izpite obdržal v tej zbirki, kajti večina vprašanj na njih še vedno sodi v področje verjetnosti. Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Uščumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Glede na raznovrstnost snovi sem bil dolgo časa v dilemi, v katerem vrstnem redu naj zbirko uredim. Odločil sem se za kronološki razpored. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Kolokviji

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

19.1.1996

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni z gostoto
$$p(x,y) := \begin{cases} Cxy(x+y); & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$
Izračunaj C in preveri, če sta X in Y neodvisni.

2. Slučajni spremenljivki ζ in ξ sta neodvisni in porazdeljeni z gostoto
$$p(t) := \begin{cases} 0; & x < 0 \\ ae^{-ax} & \text{sicer} \end{cases} \quad (a > 0).$$
Poišči gostoto slučajne spremenljivke $X := \frac{\xi}{\zeta}$!

3. Izračunaj vse začetne in centralne momente spremenljivke ξ iz prejšnje naloge.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$ z neznanima parametroma a in σ. Zanjo imamo slučajni vzorec
$$3,2 \quad 3,0 \quad 3,4 \quad 3,1 \quad 3,1 \quad 3,0 \quad 3,3 \quad 2,9 \quad 2,9 \quad 3,2$$
Preizkusi z njim hipotezo $H_0(a = 3,2)$ in hipotezo$H_1(\sigma = 0,18)$!

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

25.11.1996

1. Iz škatle, ki vsebuje b belih, c črnih in a rdečih kroglic povlečemo vsakič po eno kroglico. Izračunaj verjetnost, da bomo potegnili belo kroglico pred črno, če kroglice vsakič vrnemo nazaj v škatlo.

2. Na neskončno šahovsko tablo s kvadratki dolžine a je padel kovanec premera $2r < a$. Izračunaj verjetnost, da
   (a) celotni kovanec leži znotraj enega kvadratka.
   (b) celotni kovanec leži znotraj dveh kvadratov.

3. Tristan in Izolda igrata igro do popolnega poraza enega izmed njiju. Na začetku ima Tristan dvoje jabolk, Izolda pa tri. V vsakem koraku dobi Tristan od Izolde eno jabolko z verjetnostjo p, Izolda pa pravtako eno jabolko od Tristana z verjetnostjo $q := 1 - p$. Izračunaj verjetnost, da zmaga Izolda.

4. Delavec v tovarni oskrbuje štiri stroje, ki stojijo enakomerno nanizani v ravni vrsti z medsebojno razdaljo d. V dani časovni enoti mora delavec oskrbeti i–ti stroj z verjetnostjo $p_i := \frac{1}{4}$; pri tem gre iz stroja, ki ga je ravnokar oskrbel direktno k i–temu stroju. Poišči povprečno dolžino poti, ki jo mora opraviti naš delavec!

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

17.1.1997

1. Slučajni vektor (X, Y) je enakomerno razporejen znotraj območja, ki ga omejuje krivulja $|x| + |y| = 1$.
   (a) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani?
   (b) Ali sta neodvisni?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni; prva je porazdeljena normalno s parametroma a in σ, druga pa enakomerno na intervalu $[-\pi, \pi]$. Naj bo $T := X \sin Y$.
   Dokaži, da je gostota p_T slučajne spremenljivke T podana s formulo
   $$p_T(x) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 \sin^2 v}}}{\sin v}\, dv.$$

3. Dan je slučajni vektor (X, Y); za katerega je $E(X) = E(Y) = 0,\ D(X) = 100, D(Y) = 25$ in $E(XY) = 16$. Slučajni vektor (U, V) je z vektorjem (X, Y) povezan na sledeč način:
   $$X = U; \quad Y = aU + V \qquad (a \in \mathbb{R}).$$
   Določi takšno vrednost parametera a, da bo vektor (U, V) nekoreliran. Pri tej vrednosti določi še matematični upanji ter disperziji spremenljivk U in V.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto
   $$p(t) := \begin{cases} \frac{2b-2t}{b^2}; & t \in [0, b] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Določi cenilko parametera b po metodi momentov.
   (b) S pomočjo gornje cenilke izračunaj b, če smo pri realizaciji X dobili naslednje rezultate

število	frekvenca
.3	50
.5	155
.8	221
1.0	128
1.2	271
1.3	175

(c) Ali je dobljena cenilka parametra b nepristranska?

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

4.4.1997

1. N enakih strojev je razporejenih v pravilni N–kotnik. Delavec jih oskrbuje po vrstnem redu—tisti, ki se prej pokvari, je tudi oskrbljen najprej; pri tem delavec ubere najkrajšo pot po *obodu* N–kotnika od stroja, ki ga je ravnokar oskrbel, do pokvarjenega stroja. Izračunaj poprečno dolžino opravljene poti. Ali bi bilo bolj ekonomično, ko bi se delavec takoj po oskrbi stroja vrnil v središče N–kotnika?

2. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka in f njena karakteristična funkcija. Dokaži, da velja neenačba
$$\big|f(t+h) - f(t)\big| \leq 2\sqrt{1 - \operatorname{Re} f(h)}.$$
(Nasvet: Dokaži, da je leva stran manjša od $2\int |\sin(hx/2)| \cdot p'\,dx$ in nato uporabi neenakost Cauchy–Schwarz–Bunjakovski.)

3. Homogena markovska veriga s stanjima E_1 in E_2 je v začetku z verjetnostjo $1/3$ v stanju E_1. Z verjetnostjo 1 preide iz stanja E_1 vase in z verjetnostjo $2/3$ iz stanja E_2 vase. S kolikšnimi verjetnostmi se veriga po n prehodih nahaja v teh stanjih? Klasificirajte stanji E_1 oz. E_2.

4. V Velikem jezeru je N rib. Da bi približno odkrili njihovo število, so vanj spustili 100 markiranih rib. Čez nekaj časa so polovili 400 rib in med njimi je bilo natanko 5 markiranih. Poišči čim ožji interval $[a, b]$, da bomo lahko z gotovostjo vsaj 95% trdili, da je v Velikem jezeru med a in b rib.
(Nasvet: Uporabi Laplaceov limitni izrek $P(\alpha \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < \beta) \simeq \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$. Najožji interval dobiš, če je $\alpha = -\beta$.)

KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

1. Dva igralca izmenično mečeta pošten kovanec; vsakič, ko pade grb, dobi igralec, ki je vrgel grb, en košček čokolade. Zmaga tisti igralec, ki ima prvi tri koščke čokolade več kot drugi.

   (a) Izračunaj verjetnost, da zmaga tisti, ki je igro začel

   (b) Izračunaj verjetnost, da se igra nikoli ne konča

2. Na palici dolžine l si slučajno in neodvisno izberemo dve točki M in N. Palica nam tako razpade na tri dele. Kolika je verjetnost, da bo dolžina vsakega izmed tako dobljenih delov manjša od a $(l \geq a \geq \frac{l}{3})$?

3. Slučajna spremenljivka X ima gostoto porazdelitve

$$p(x) := Ae^{-\frac{|x-a|}{a}} \quad (a > 0).$$

   Določi konstanto A, matematično upanje in disperzijo.

4. Diskretna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo podano z

$$G(t) := \frac{t}{3 - 2t}.$$

   Izračunaj njeno matematično upanje, disperzijo in verjetnost, da zavzeme vrednosti na intervalu $(3, 6]$.

KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

4.12.1997

1. Dva igralca eden za drugim mečeta obtežen kovanec; grb pade z verjetnostjo p. Igralec, ki je vrgel grb, dobi točko, drugače pa ne dobi ničesar. Zmaga tisti, ki prvi zbere n točk več od drugega. Kolika je verjetnost, da zmaga igralec, ki je bil drugi na vrsti?

2. Palico dolžine l prelomimo na dva dela. Nato si z verjetnostjo p izberemo krajši in z verjetnostjo $q = 1 - p$ daljši del. Določi gostoto porazdelitve dolžine izbranega dela, če je točka preloma palice enakomerno porazdeljena po celi palici.

3. Na daljici dolžine a naključno razporedimo dve točki. Kolika je verjetnost, da bo razdalja med njima večja od vsote razdalj posamezne točke do najbližjega oglišča.

4. Poišči disperzijo Pascalove slučajne spremenljivke, ki zavzame vrednosti $m, m+1, \ldots$ z verjetnostmi $p_k := \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$.
   (Nasvet: Najprej preveri, da je $G(t) := (1 - qt)^{-m}$ rodovna funkcija te porazdelitve.)

KOLOKVIJ IZ OSNOV VERJETNOSTI

4.12.1997

1. Med petnajstimi žarnicami jih je pet pokvarjenih. Na slepo srečo si izberemo tri. Izračunaj verjetnost, da

   (a) Nismo izbrali nobene pokvarjene.

   (b) Smo izbrali natanko eno pokvarjeno.

   (c) Smo izbrali vsaj eno pokvarjeno.

2. Na neki univerzi je 60% vseh študentov ženskega spola. Na gradbeništvo je vpisanih 18% vseh študentk in 24% vseh študenov moškega spola. Če na slepo izberemo študenta, za katerega ugotovimo, da študira gradbeništvo, poišči verjetnost, da je ženskega spola.

3. Med petimi ključi nam le dva odpreta ključavnico. Kolikokrat povprečno moramo seči v žep, da vstopimo skozi vrata, če

   (a) ključ vsakič vrnemo?

   (b) ga ne vračamo?

4. Izračunaj verjetnost, da je razlika dveh pozitivnih realnih števil manjša od njunega produkta. (Števili sta manjši od ena).

KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI

16.1.1998

1. Dve pošteni kocki vržemo dvakrat zapored. Naj slučajna spremenljivka X meri število padlih sedmic na obeh kockah, spremenljivka Y pa naj meri število padlih dvojk na prvi kocki.

   (a) Ali sta X in Y neodvisni?

   (b) Izračunaj kovarianco $\mathrm{Cov(X, Y)}$ in korelacijo $\mathrm{r(X, Y)}$

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno in enakomerno na intervalu $[-a, a]$. Bodi

$$Y := \begin{cases} -a/2; & X \le -a/2 \\ a/2; & X \ge a/2 \\ X; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Nariši porazdelitveno funkcijo Y in izračunaj njeno matematično upanje.

3. 48 zdravnikov je odgovarjalo na vprašanje "ali je potrebno pri neki bolezni pacientom dajati tudi aspirin?" Pri tem jih je 26 odgovorilo z *DA*, 12 jih je odgovorilo *NE*, preostali pa odgovora niso vedeli. Preveri na stopnji značilnosti $\alpha = 1\%$ hipotezo, da so odgovori dani povsem naključno; da je torej verjetnost vsakega odgovora enaka.

4. Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je podana z enačbo

$$G_X(t) := \frac{2 + 5\,t^2\,\log 2 - 5\,t^2\,\log(2-t)}{(2 + 5\,\log 2)}.$$

   Poišči $E(X),\ D(X)$ ter $P[X > 1]$.

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

3.2.1998

1. Slučajni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen znotraj kroga polmera r s središčem v koordinatnem izhodišču. Poišči povprečno vrednost ter disperzijo dolžine vektorja (X, Y)!

2. Za slučajni spremenljivki X in Y vemo, da je $E(X) = -1,\ E(Y) = 2$, poleg tega pa je $D(X) = 1,\ D(Y) = 25$ in $E(XY) = \alpha$. Poišči vsa možna števila α, in pokaži, da ležijo v nekem zaprtem intervalu. Če je $\alpha = 1$, ali lahko poiščeš taki števili a in b, da bo $\mathrm{Cov(X, aX + bY)} = 0$; Če lahko, kakšni sta tedaj matematični upanje in disperzija spremenljivke $V := aX + bY$?

3. Pokaži, da je

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{(4-2x-2y+xy)(1+x+y+xy)^2}{A}; & (x,y) \in [-1,1]^2 \\ 0; & x < -1 \vee y < -1 \\ (2-y)\ (2+2y)^2; & x > 1 \\ g(x); & \text{sicer} \end{cases}$$

   porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y) pri primerno izbrani konstantni A in funkciji g. Izračunaj A in g ter $P[XY > 0]$.

4. Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X je

$$p_X(x) := \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + x^2}.$$

   Po njenem dvakratnem realiziranju smo dobili vrednosti (x_1, x_2). Oceni parameter c po metodi maksimalne zanesljivosti (za vzorce dolžine 2). Nato dobljeno cenilko popravi, da bo postala nepristranska.

KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA IN STATISTIKE

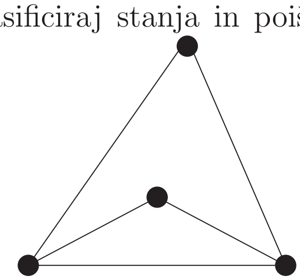
5.5.1998

1. Naj bodo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne, in X_n porazdeljena enakomerno na intervalu $[n, n^2 + 2n]$. Ali porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk
$$Y_n := \frac{X_n - n}{n^2}$$
konvergirajo šibko k porazdelitveni funkciji neke slučajne spremenljivke Y? Če je odgovor pritrdilen, določi Y.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno na zgornji polovici kroga s središčem v točki $T(1, 0)$ in polmera $r = 1$. Izračunaj regresijo $E(Y/X)$, in povej, katero znano krivuljo dobiš.

3. Poišči gostoto verjetnosti karakteristične funkcije
$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t|; & -1 \leq t \leq 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

4. Delec se v enakomernih časovnih presledkih giblje po ogliščih mreže, prikazane na spodnji sliki; pri tem se z isto verjetnostjo pomakne na katerokoli sosedno oglišče. Zapiši prehodno matriko ustrezne Markovske verige, klasificiraj stanja in poišči stacionarno porazdelitev.



3 Pisni izpiti

IZPIT IZ VERJETNOSTI

13.4.1994

1. Na intervalu $(0, a)$; $a > 0$ slučajno izberemo točko. Določi kovarianco med dolžino krajšega in dolžino daljšega nastalega odseka !

2. Slučajna spremenljivka ima rodovno funkcijo

$$G(t) := 6t^2(t-3)^{-1}(t-4)^{-1}.$$

Izračunaj porazdelitveni zakon zanjo!

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno na območju $\mathscr{D}$, ki ga omejujeta krivulji

   (a) $y = 2 - 2x - x^2$ in

   (b) $y = x - 1$.

   Izračunaj regresijsko krivuljo $E(Y/X)$!

4. Slučajno spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu (a, b), kjer sta $a < b$ neznana parametra.

   (i) Oceni parametra a in b po obeh metodah!

   (ii) Neznano slučajno spremenljivko Z smo realizirali 1000 krat in dobili naslednje rezultate: Na stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$ preizkusi

interval	frekvenca
$[-100, -1)$	10
$[-1, 1)$	100
$[1, 10)$	100
$[10, 15)$	150
$[15, 30)$	20
$[30, 40)$	190
$[40, 50)$	90
$[50, 55)$	100
$[55, 60)$	200
$[60, 100]$	40

hipotezo, da je Z porazdeljena enako kot X!

IZPIT IZ VERJETNOSTI

21.2.1995

1. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzame le pozitivne celoštevilske vrednosti, in f njena rodovna funkcija.

   - Določi rodovno funkcijo za slučajno spremenljivko $Y := 4X + 1$!
   - Pokaži, da Y in X nista neodvisni!
   - V primeru, ko je rodovna funkcija spremenljivke X podana z

   $$f(z) := \frac{2z}{3 - z};$$

   izračunaj še $E(Y)$ in $D(Y)$!

2. Na intervalu $[0, b]$ slučajno izberemo točko, ki $[0, b]$ razdeli na dva dela. Naj slučajna spremenljivka X meri dolžino krajšega, slučajna spremenljivka Y pa dolžino daljšega od dobljenih delov. Izračunaj pogojno matematično upanje $E(X/Y)$.

3. Na krožnico polmera 1 slučajno in neodvisno nanesemo tri točke (porazdelitev za vsako točko je enakomerna).
   Izračunaj verjetnost, da sta poljubni dve točki oddaljeni za manj kot $\frac{1}{2}$.

4. Igralno kocko smo vrgli 1000-krat. Rezultate metov smo si zapisali v naslednjo tabelo: Ali lahko trdimo, da kocka ni poštena?

cifra	frekvenca
1	50
2	155
3	221
4	128
5	271
6	175

(Nasvet: test χ^2.)

5. Klasificirajte stanja homogene markovske verige z matriko prehodnih verjetnosti P v odvisnosti od parametra $p \in [0,\ 1]$! Oznaka: $q = 1 - p$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

IZPIT IZ VERJETNOSTI

21.2.1995

1. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzame le pozitivne celoštevilske vrednosti, in f njena rodovna funkcija.

   - Določi rodovno funkcijo za slučajno spremenljivko $Y := 5X + 1$!
   - Preveri, če sta Y in X neodvisni.
   - V primeru, ko je rodovna funkcija spremenljivke X podana z

     $$f(z) := \frac{2z}{3-z};$$

     izračunaj še $E(Y)$ in $D(Y)$!

2. Na intervalu $[0, b]$ slučajno izberemo točko, ki $[0, b]$ razdeli na dva dela. Naj slučajna spremenljivka X meri dolžino krajšega, slučajna spremenljivka Y pa dolžino daljšega od dobljenih delov. Izračunaj pogojno matematično upanje $E(X/Y)$.

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke

   $$T := \sqrt{-2\ln Y}\cos(2\pi X).$$

   (Nasvet: Najprej dokaži, da je gostota slučajne spremenljivke T enaka

   $$\int_0^{1/4} \frac{t}{\cos^2(2\,\pi\,x)} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\cos^2(2\,\pi\,x)}}\,dx + \int_{3/4}^{1} \frac{t}{\cos^2(2\,\pi\,x)} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\cos^2(2\,\pi\,x)}}\,dx.$$

   Nato v dobljena integrala vstavi novo spremenljivko $u := \tan(2\pi x)$.)

4. Igralno kocko smo vrgli 1000-krat. Rezultate metov smo si zapisali v naslednjo tabelo:

cifra	frekvenca
1	60
2	145
3	221
4	128
5	271
6	175

Ali lahko trdimo, da kocka ni poštena?
(Nasvet: test χ^2.)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

18.4.1995

1. Za dogodka A in B (ne nujno disjunktna) velja sledeče:
$$\begin{aligned} P[A] &= 2P[B] \\ P[A|B] &= 3P[A|\overline{B}] \\ P[A \cup B] &= r \end{aligned}$$
Izračunaj $P[A]$. Pri katerih r je naloga smiselna ?

2. Slučajne spremenljivke X_1, X_2 in M so neodvisne; prvi dve sta porazdeljeni z gostoto
$$\rho(x) := \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ e^{-x}; & x > 0 \end{cases};$$
M pa je diskretna in porazdeljena po
$$M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$
Določi porazdelitev slučajne spremenljivke $S := \sum_{i=1}^{M} X_i$, in izračunaj njeno matematično upanje!

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto $p(x) := Ae^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$). Določi neznan parameter A, poišči karakteristično funkcijo in določi vse začetne momente !

4. Prehodna matrika homogene Markovske verige je
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$
Klasificiraj njena stanja in določi stacionarno porazdelitev !

IZPIT IZ VERJETNOSTI

31.8.1995

1. Palico dolžine a naključno prelomimo na 2. mestih. Slučajna spremenljivka X meri najkrajšega, Y pa najdaljšega izmed tako dobljenih odsekov.

   (a) Ali sta neodvisni?

   (b) Izračunaj njuno kovarianco!

2. Ali ima lahko slučajna spremenljivka rodovno funkcijo oblike $F(t) := e^t - a\sin(t)$ za kakšen $a \in \mathbb{R}$? Odgovor utemelji!
   (Nasvet: najlažje bo šlo s Taylorjevo vrsto)

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto

$$p(x,y) := \begin{cases} C\,xy^2; & 0 < x, y < 1, \quad x + y < 1 \\ 0; & \text{drugod} \end{cases}$$

   Določi konstanto C, nato še izračunaj regresijski krivulji $E(Y/X)$ oziroma $E(X/Y)$!

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$ z neznanima parametroma a in σ. Zanjo imamo slučajni vzorec

$$3,2 \quad 3,0 \quad 3,4 \quad 3,1 \quad 3,1 \quad 3,0 \quad 3,3 \quad 2,9 \quad 2,9 \quad 3,2$$

   Preizkusi z njim hipotezo $H_0(a = 3,2)$ in hipotezo $H_1(\sigma = 0,18)$!

IZIPT IZ VERJETNOSTI

1. Na krožnico polmera 1 slučajno in neodvisno nanesemo tri točke (porazdelitev za vsako točko je enakomerna).
   Izračunaj verjetnost, da sta poljubni dve točki oddaljeni za manj kot 1!
   (Nasvet: reši nalogo najprej za dve točki)

2. Neodvisni slučajni spremenljivki X in Y sta enako porazdeljeni z gostoto verjetnosti

$$p(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{,t¿0;} \\ 0 & \text{, sicer} \end{cases}$$

   Kolikšna je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke $T := X - Y$?
   Izračunaj še $E(T)$ in $D(T)$!

3. Dana je slučajna spremenljivka X, ki ima gostoto porazdelitve

$$p(x) := \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

   Določi njeno karakteristično funkcijo, vse začetne momente ter disperzijo!

4. Igralno kocko smo vrgli 1000-krat. Rezultate metov smo si zapisali v naslednjo tabelo: Ali lahko trdimo, da kocka ni poštena?

cifra	frekvenca
1	51
2	160
3	221
4	128
5	270
6	170

   (Nasvet: test χ^2.)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

2.7.1996

1. Na robu kvadrata K, z oglišči v točkah $T_1(1,-1)$, $T_2(1,1)$, $T_3(-1,1)$, $T_4(-1,-1)$ si slučajno izberemo točko. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo te točke od koordinatnega izhodišča. Izračunaj njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve.

2. Za kakšne dogodke A in B velja enakost
$$P[A] = P[A|B] + P[A|\overline{B}] \ ?$$
Tu nam $P[X]$ pomeni verjetnost dogodka X.
(Nasvet: Upoštevaj, da mora biti $P[A] \geq P[AB]$.)

3. Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je oblike
$$G(t) := \frac{t^2}{2-t}.$$
Izračunaj verjetnostno funkcijo X, njeno mediano in matematično upanje.

4. Naj bo slučajna spremenljivka porazdeljena enakomerno na intervalu $(1-a, 2a)$ pri nekem neznanem parametru a. Slučajno spremenljivko dvakrat realiziramo. Določi cenilko parametra a po obeh metodah in oceni a, če smo pri realizaciji dobili naslednji vrednosti:
$$0, \ -1.$$

IZPIT IZ VERJETNOSTI

2.9.1996

1. Kocka, ki ima pobarvane stranice, je razdeljena na 1000 enakih kockic; v notranjosti velike kocke ni nobene barve. Veliko kocko razdremo in na slepo izvlečemo eno malo kockico. Poišči verjetnost, da bo imela dve stranici pobarvani!

2. Igralca A in B začneta igro z začetnim kapitalom tri oziroma štiri dolarje. Igra poteka tako, da igralca izmenično mečeta kovanec. Če pade grb, dobi tisti, ki je grb vrgel od nasprotnika en dolar, v nasprotnem primeru pa mora en dolar plačati nasprotniku. Igra se konča, ko eden od igralcev izgubi ves denar. Izračunaj verjetnost, da zmaga igralec A.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno na krogu s središčem v koordinatnem izhodišču in polmera 1. Poišči matematično upanje razdalje (X, Y) do točke 0!

4. Slučajna spremenljivka je porazdeljena enakomerno; $E(X) = 4$ in $D(X) = 3$. Poišči njeno gostoto in njeno mediano!

IZPIT IZ VERJETNOSTI

17.9.1996

1. Dokaži, da iz $p(B/A) = p(B/\bar{A})$ sledi neodvisnost dogodkov A in B!

2. Igralca A in B začneta igro na sledeč način: Najprej da igralec A igralcu B a jabolk. Nato igralec B meče kovanec dokler prvič ne pade grb. Končno vrne igralec B igralcu A toliko jabolk, kolikokrat je metal kovanec. Določi število a, da bo igra poštena.

3. Za slučajni vektor (X, Y) je

   $$E(X) = 0, \quad E(Y) = 2, \quad D(X) = 2, \quad D(Y) = 1 \quad \text{in} \quad r(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Poišči matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke $Z := 2X - 3Y$.

4. Poišči verjetnost, da bodo koreni kvadratne enačbe

   $$x^2 + 2ax + b$$

   (a) realni.

   (b) pozitivni.

   (Tu sta a in b realni števili; $|a| \leq n$ in $|b| \leq m$.) Kaj se zgodi, ko m, n naraščata preko vseh meja?

5. Diskretna slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu

   $$P(X = k) := \frac{a^k}{(1 + a)^{k+1}}; \qquad (a > 0, \ k \in \mathbb{N}).$$

   Poišči njeno karakteristično funkcijo in nato še matematično upanje ter disperzijo.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

24.1.1997

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in normalno porazdeljeni; $E(X) = a$, $E(Y) = b$ in $D(X) = D(Y) = \sigma$. Poišči premer kroga s središčem v točki (a, b), v katerem se vektor (X, Y) nahaja z verjetnostjo 90%.
   (Nasvet: pri integraciji uvedi polarne koordinate!)

2. Na neki prireditvi je bilo n moških in n žensk; skupno torej $2n$ ljudi. Poišči verjetnost, da se bodo posedli za ravno mizo tako, da dve osebi istega spola ne bosta sedeli skupaj. Poišči isto verjetnost, če je miza okrogla.

3. Na palico dolžine 1 slučajno in neodvisno nanesemo tri točke (porazdelitev za vsako točko je enakomerna).
   Izračunaj verjetnost, da sta poljubni dve točki oddaljeni za manj kot $\frac{1}{5}$!

4. Porazdelitvena funkcija F slučajne spremenljivke X ima obliko

$$F(x) := \begin{cases} e^{-x^{-a}}; & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \qquad (a > 0).$$

   Poišči porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $Y := -\frac{1}{X}$!

IZPIT IZ VERJETNOSTI

7.2.1997

1. Poišči verjetnost, da bo imel kub naravnega števila (torej N^3) zadnji dve cifri enaki 1

2. Poišči zvezo med a in b, da bo
$$f(z) := \frac{az}{b+z}$$
rodovna funkcija neke slučajne spremenljivke Y. Izračunaj še $E(Y)$ in $D(Y)$!

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0,1]$. Dokaži, da je gostota porazdelitve slučajne spremenljivke $T := \sqrt{-2\ln Y}\cos(2\pi X)$ enaka
$$p(t) := \int_\Omega \frac{te^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\cos^2(2\,\pi\,x)}}}{\cos^2(2\,\pi\,x)}\,dx,$$
kjer je $\Omega := [1/4, 3/4]$ za $t < 0$ oziroma $\Omega = [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ za $t \le 0$. Nato v dobljena integrala vstavi novo spremenljivko $u := \tan(2\pi x)$ in dokaži, da je T porazdeljena normalno.

4. Na enotskem krogu smo si slučajno izbrali tri točke A, B in C. Izračunaj verjetnost, da je trikotnik ABC topokotni.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

9.6.1997

1. Verjetnost, da z röntgenskim pregledom ugotovimo TBC pri bolnem človeku je β, medtem ko je verjetnost, da zdravega človeka pomotoma proglasimo za bolnega enaka α. Naj bo γ delež vseh bolnikov s TBC v celotni populaciji ljudi.
   Izračunaj verjetnost, da je oseba, ki so ji z röntgenskim pregledom ugotovili TBC v resnici zdrava! Pri katerem deležu γ je ta verjetnost ekstremna?

2. Slučajni spremenljivka T je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 2\pi]$; slučajni spremenljivki X in Y pa definiramo z $X := \cos T$ in $Y := \sin T$. Poišči kovarianco med X in Y. Ali sta neodvisni? Utemelji!

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gostoto

$$p(x,y) := \begin{cases} a\,xy(x+y); & 0 < x, y < 1, \\ 0; & \text{drugod} \end{cases}$$

   Določi konstanto a, porazdelitveno funkcijo $F_{X,Y}$ in obe robni porazdelitvi.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$ z neznanima parametroma a in σ. Zanjo imamo slučajni vzorec

$$3,2 \quad 3,0 \quad 3,4 \quad 3,1 \quad 3,1 \quad 3,0 \quad 3,3 \quad 2,9 \quad 2,9 \quad 3,2$$

   Preizkusi z njim na stopnji značilnosti $\alpha = 0.02$ hipotezo $H_0(a = 3,2)$ in hipotezo $H_1(\sigma = 0,18)$!

5. Delec se giblje po vseh naravnih številih vključno z 0; z verjetnostjo p skoči iz števila i na število $i+1$ in z verjetnostjo $q := 1-p$ skoči na število $(i-1)\cdot \operatorname{sgn} i$. Zapiši prehodno matriko P in določi stacionarno porazdelitev!
   (Nasvet: Stacionarno porazdelitev lahko dobiš tudi tako, da zapišeš $(P^\top - I)x = 0$, kjer je $x = (x_1, x_2, \ldots)^\top$. Tako dobiš diferenčno enačbo, ki povezuje x_k z x_{k+1}.)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

23.6.1997

1. Daljico AB dolžine l smo slučajno prelomili v dveh točkah. Daljica nam tako razpade na tri dele. Poišči verjetnost, da bo dolžina najkrajšega dela večja od a, kjer je $0 < a < \frac{l}{3}$.

2. Pet atomov si izmenjuje virtualne fotone; vsakič, ko pride foton do atoma T_1, ga le ta z isto verjetnostjo pošlje kateremukoli od preostalih delcov. Če pride foton do atoma T_2, jo z enako verjetnostjo poda delcem T_3, T_4 in T_5. Atom T_3 foton ali absorbira, in ga ne podaja več naprej, ali pa ga z isto verjetnostjo poda atomu T_1, medtem ko si atoma T_4 in T_5 foton izmenjujeta. Izračunaj verjetnost, da pride foton od atoma T_1 do enega od atomov T_4 oz. T_5.
   (Nasvet: Če je A dogodek, katerega verjetnost računamo, bodi A/T_3 dogodek, da se zgodi A, če je foton ravnokar pri atomu T_3, ITD. Nato uporabi pogojno verjetnost)

3. Na rob kvadrata, ki ga določajo oglišča $T_1(-1,-1)$, $T_2(-1,1)$ pade zrnce peska. Naj slučajna spremenljivka D meri njegovo oddaljenost od koordinatnega izhodišča. Izračunaj poprečno vrednost D.

4. Diskretna slučajna spremenljivka X lahko zavzameme le nenegativne celoštevilske vrednosti $0, 1, \ldots$, in je porazdeljena po zakonu

   $$P(X = t) = p(1-p)^{t-1}; \qquad (0 < p < 1)$$

   Oceni parameter p po metodi maksimalne zanesljivosti.

5. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto $p(x) := Ae^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$). Določi neznan parameter A, poišči karakteristično funkcijo in določi vse začetne momente !

6. Prehodna matrika homogene Markovske verige je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Klasificiraj njena stanja in določi stacionarno porazdelitev !

Opomba. Kanditati iz Pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 2,4,5,6. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

1.9.1997

1. Naj bo $p(A) = a$ in $p(B) = b$. Za katere vrednosti konstant $a, b \in [0,1]$ je
$$p(A/B) < \frac{a+b-1}{b}?$$

2. Pri vsakem naravnem številu $n \in \mathbb{N}$ poišči verjetnost, da bo pri n metih kovanca padel grb liho mnogo krat.

3. Bodi n neko fiksno naravno število. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen diskretno po zakonu
$$P(X = k, Y = m) := \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p^k q^m (1-p-q)^{n-k-m};$$
tu sta k, m nenegativni celi števili, za kateri je $k + m \leq n$; poleg tega pa je $p, q > 0$ in $p + q \leq 1$. Poišči matematično upanje za X in Y. (Nasvet: Upoštevaj, da je $P(X = k) = \sum_{m=0}^{n-k} P(X = k, Y = m) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \sum_{m=0}^{n-k} \cdots$.)

4. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen normalno po zakonu $N(a, a, \sigma, \tau, r)$; torej je gostota podana z
$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - \frac{2r(x-a)(y-a)}{\sigma\tau} + \frac{(y-a)^2}{\tau^2}\right)}.$$
Naj bo $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ realizacija slučajnega vektorja, in $\bar{X}$ poprečje prvih komponent, ter $\bar{Y}$ poprečje Y_i–jev. Pokaži, da je statistika $\hat{a} := t\bar{X} + (1-t)\hat{Y}$ nepristranska cenilka parametra a pri vsakem $t \in [0, 1]$.

5. Prehodna matrika neskončne homogene Markovske verige je

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{bmatrix}.$$

Klasificiraj njena stanja glede na minljivost in ničelnost.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

12.9.1997

1. Med števili $1, 2, \ldots, N$ izberemo slučajno k različnih števil. Kolikšna je verjetnost naslednjih dogodkov:

   (a) Vsako od teh števil je večkratnik danega števila q.

   (a') Vsako od teh števil je večkratnik točno enega od danih števil q_1, q_2. (Nasvet: Nasprotni dogodek lahko zapišemo kot unijo dveh dogodkov: da obstaja število, ki *ni* večkratnik nobenega od q_1, q_2 in, da obstaja število, ki je večkratnik *obeh*.)

2. Dva pozabljiva sostanovalca na različne načine pozabljata dežnike. Oseba A vedno vzame dežnik, ko gre ven; oseba B pa vzame dežnik z verjetnostjo $p = 1/2$. Vsak od njiju lahko pozabi dežnik v trgovini z verjetnostjo $p = 1/4$. Po obisku treh trgovin se vrneta domov. Določi verjetnosti:

   (a) da imata oba dežnik,

   (b) imata samo en dežnik,

   (c) da je oseba B izgubila dežnik, če veš, da imata skupaj en sam dežnik.

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Poišči gostoto p_T slučajne spremenljivke

$$T := \frac{X}{X+Y}$$

4. Celoštevilčna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) := \frac{(-1+a)^3\, t^2}{(-1+a\,t)^3}$$

   Poišči cenilko parametra po obeh metodah.

5. Slučajna spremenljivka Y_1 je enakomerno porazdeljena na $[0,1]$. Če je pri realizaciji $Y_1 = x_1$, naj bo slučajna spremenljivka Y_2 porazdeljena enakomerno na intervalu $[x_1, x_1+1]$. Če je pri realizaciji $Y_2 = x_2$, naj bo slučajna spremenljivka Y_3 porazdeljena enakomerno na $[x_2, x_2+1]$. Poišči $E(Y_i);\ i = 1, 2, 3$.

Opomba. Kandidati iz pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 1,3,4,5. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

15.9.1997

1. Med števili $1, 2, \ldots, N$ izberemo slučajno k različnih števil. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je vsako od teh števil večkratnik danega števila q.

2. Dva pozabljiva sostanovalca na različne načine pozabljata dežnike. Oseba A vedno vzame dežnik, ko gre ven; oseba B pa vzame dežnik z verjetnostjo $p = 1/2$. Vsak od njiju lahko pozabi dežnik v trgovini z verjetnostjo $p = 1/4$. Po obisku treh trgovin se vrneta domov. Določi verjetnosti:

   (a) da imata oba dežnik,

   (b) imata samo en dežnik,

   (c) da je oseba B izgubila dežnik, če veš, da imata skupaj en sam dežnik.

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Poišči gostoto p_T slučajne spremenljivke

$$T := \frac{X}{X+Y}$$

4. Celoštevilčna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) := \frac{(-1+a)^3\, t^2}{(-1+a\,t)^3}$$

   Poišči cenilko parametra po obeh metodah.

5. Slučajna spremenljivka Y_1 je enakomerno porazdeljena na $[0, 1]$. Če je pri realizaciji $Y_1 = x_1$, naj bo slučajna spremenljivka Y_2 porazdeljena enakomerno na intervalu $[x_1, x_1 + 1]$. Če je pri realizaciji $Y_2 = x_2$, naj bo slučajna spremenljivka Y_3 porazdeljena enakomerno na $[x_2, x_2 + 1]$. Poišči $E(Y_i)$; $i = 1, 2, 3$.

Opomba. Kandidati iz pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 1,3,4,5. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

8.12.1997

1. Na ravnini so narisane vzporednice, ki so med sabo oddaljene d enot. Na ravnino pada igla dolžine $l \leq d$. Kakšna je verjetnost, da bo presekala eno izmed vzporednic?

2. Palico dolžine l prelomimo na dva dela. Nato si z verjetnostjo p izberemo krajši in z verjetnostjo $q = 1 - p$ daljši del. Izračunaj poprečno dolžino izbranega dela, če je točka preloma palice enakomerno porazdeljena po celi palici.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen enakomerno na trikotniku z oglišči v točkah $T_1(0,0)$, $T_2(1,0)$ in $T_3(0,1)$. Poišči regresijsko krivuljo $E(Y/X)$ ter pogojno porazdelitveno gostoto $p_{(X/Y)}$.

4. Celoštevilčna slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo

$$G_X(t) := \frac{(-1+a)^3\, t^2}{(-1+a\,t)^3}$$

Poišči cenilko parametra po obeh metodah.

5. Homogena Markovska veriga ima prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Izračunaj porazdelitev verjetnosti po 4. koraku, če je začetna porazdelitev $(1, 0, 0)$. Določi stacionarno porazdelitev, klasificiraj stanja in izračunaj povprečen čas prve vrnitve v povrnljiva, pozitivna stanja.

Opomba. Kandidati iz pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 1,3,4,5. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

27.1.1998

1. Za okroglo mizo sedi n žensk in n moških; skupno torej $2n$ ljudi. Kakšna je verjetnost, da nobeni dve ženski ne bosta sedeli skupaj. Ali je verjetnost ista, če je miza ravna?

2. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p_X(x) := \begin{cases} kx; & x \in [0, 8] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

   Določi neznano število k, izračunaj $P(X > 5|B)$, kjer je B dogodek, da X zavzame vrednosti med 4 in 7, ter določi $E(X)$.

3. Pošten kovanec vržemo štirikrat. Naj slučajna spremenljivka X meri število grbov, slučajna spremenljivka Y pa naj meri največje število *zaporednih* grbov (če npr. pade GGCG, je $Y = 2$). Poišči Cov(X, Y) in $\rho(X, Y)$.

4. V Ljubljani in Mariboru so merili koncentracijo žveplovega dioksida v enem dnevu. Pri tem so dobili naslednje rezultate (v mg/m^3)

Lj	25	80	55	24	33	75	61	62	27	65
Mb	51	54	40	45	36	35	12	11		

   Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 1\%$ trdimo, da je zrak v Ljubljani bolj onesnažen?
   Upoštevaš lahko, da so izmerki razporejeni približno normalno, in da sta merilni napravi enako natančni.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

27.1.1998

(a) Granato izstrelimo pod kotom α glede na ravno podlago. Poišči popre\v{c}en domet granate in nariši porazdelitveno funkcijo dometa, če je kot α enakomerno porazdeljen na $[0, \pi/2]$.

(b) Slučajna spremenljivka X ima gostoto verjetnosti enako

$$p_X(x) := \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$

Od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y je porazdeljena enakomerno na intervalu $[-1, 1]$. Poišči gostoto verjetnosti in matematično upanje slučajne spremenljivke $T := |X - Y|$.

(c) Slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo enako $G_X(t) := e^{t-1}$. Od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y zavzame vrednost 0 z verjetnostjo $p_0 := 1/3$ in 1 z verjetnostjo $p_1 := 2/3$. Določi rodovno funkcijo slučajne spremenljivke $X + Y$ in njeno gostoto porazdelitve.

(d) Diskretna slučajna spremenljivka X lahko zavzameme le nenegativne celoštevilske vrednosti n, in je porazdeljena po zakonu

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}; \qquad (0 < p < 1)$$

Oceni parameter p po metodi maksimalne zanesljivosti.

(e) Diskretne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ so neodvisne in enako porazdeljene; njihova karakteristična funkcija je enaka $f(t) := \cos t$. Poišči karakteristično funkcijo spremenljivke

$$S := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

in določi njeno gostoto porazdelitve.

(f) Homogena Markovska veriga ima prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Klasificiraj njena stanja.

Opomba. Kandidati iz pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 2,4,5,6. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA in STATISTIKE

25.2.1998

(a) Kovanec mečemo toliko časa, da prvič dvakrat zaporedoma pade grb; slučajna spremenljivka X meri število za to potrebnih metov. Če je verjetnost, da pade grb enaka p, poišči porazdelitveni zakon spremenljivke X.
(Nasvet: Naj bo A dogodek, da grb v $n-3$ metih *ni padel dvakrat zaporedoma*. Verjetnost dogodka A lahko računaš po formuli o popolni verjetnosti; odtod pa je $P[X=n] = P(A)qp^2$ za $n \geq 4$.)

(b) Neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ so porazdeljene po zakonu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/5 & 3/10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Izračunaj verjetnosti dogodkov $X_1 = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ pri $n = 1$ in pri $n \geq 2$.

(c) Obteženo kocko mečemo toliko časa, da pade dvojka ali pa petka. Poskus smo ponovili desetkrat, in pri tem dobili naslednje rezultate:

poskus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
potrebni meti	1	5	3	8	6	7	9	2	10	7

Po metodi momentov poišči cenilko za verjetnost dogodka, da pade dvojka ali petica, in v jo uporabi v našem primeru.

(d) Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enako porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Poišči gostoto p_T slučajne spremenljivke

$$T := \frac{X}{X+2Y}$$

(e) Slučajna spremenljivka Y_1 je enakomerno porazdeljena na $[0, 1]$. Če je pri realizaciji $Y_1 = x_1$, naj bo slučajna spremenljivka Y_2 porazdeljena enakomerno na intervalu $[x_1, x_1 + 1]$. Če je pri realizaciji $Y_2 = x_2$, naj bo slučajna spremenljivka Y_3 porazdeljena enakomerno na $[x_2, x_2 + 1]$. Poišči $E(Y_i)$; $i = 1, 2, 3$.

Opomba. Kandidati iz pedagoške fakultete rešujejo naloge številka 1,3,4,5. Ostali rešujejo prve štiri.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

25.2.1998

(a) Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzame le pozitivne celoštevilske vrednosti, in f njena rodovna funkcija.

- Določi rodovno funkcijo za slučajno spremenljivko $Y := 4 + 2X$!
- V primeru, ko je rodovna funkcija spremenljivke X podana z

$$G_X(z) := \frac{2z}{3-z};$$

izračunaj še $E(Y)$ in $D(Y)$!

(b) Kovanec polmera 1 pade v krog polmera $a > 4$. Poišči verjetnost, da je kovanec bližje središču kroga kot njegovemu zunanjemu robu.

(c) Verjetnost, da tarčo zadene prvi strelec je 1/5, da jo zadene drugi pa 1/4. Strelca se pri streljanju izmenjujeta, dokler eden izmed njiju tarčo ne zadene.

i. Kolikokrat v poprečju se zamenjata?
ii. Kolikokrat se morata zamenjati, da bo tarča zadeta vsaj s 95% verjetnostjo?

(d) Stehtali smo 14 paketov pralnega praška, in pri tem dobili naslednje rezultate:

kg	9.3	9.4	9.5	9.7	9.9	10.0	10.2	10.4
št. paketov	1	2	2	1	4	1	2	1

Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$ zavrnemo trditev proizvajalca, da je v paketih poprečno 10kg praška? Predpostavi, da so izmerki zaradi netočnosti tehtnice porazdeljeni približno normalno.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

3.6.1998

(a) Na daljici dolžine 1 slučajno izberemo tri točke. Kakšna je verjetnost, da prva izbrana točka leži med zadnjima dvema?

(b) Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe enako porazdeljeni po zakonu

$$P[X = k] = p(1-p)^k; \qquad (0 < p < 1).$$

Poišči porazdelitev spremenljivke $Z := \min\{X, Y\}$ in njeno matematično upanje.

(c) Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je $G_X(t) := e^{t-1}$; od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y pa zavzame le vrednosti 0 in 1; 0 z verjetnostjo 1/3. Določi rodovno funkcijo in porazdelitveni zakon spremenljivke $X + Y$.

(d) Slučajna spremenljivka X ima gostoto

$$p(x) := \begin{cases} e^{q-x}; & x > q \\ 0; & x \leq q \end{cases}$$

Zanjo imamo vzorec $1{\cdot}5, 3{\cdot}0, 3{\cdot}1$. Oceni parameter q po obeh metodah.

(e) Markovska veriga ima prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi vse zaprte množice stanj, in pokaži, da je veriga razcepna. Nato klasificiraj njena stanja in poišči stacionarno porazdelitev.

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

10.6.1998

(a) Na daljici AB dolžine l si slučajno izberemo točki M in N. Izračunaj verjetnost, da je razdalja med M in A manjša od razdalje med N in B.

(b) Naj bo zvezna slučajna spremenljivka X porazdeljena enakomerno na $[-2, 2]$. Poišči porazdelitveno funkcijo spremenljivke $Y = \min\{1, 1/X\}$!

(c) Igralec A vrže 3 poštene kovance, igralec B pa 2. Zmaga tisti, ki je vrgel več grbov; s tem od nasprotnika dobi vse kovance, s katerimi je le–ta igral (torej ima skupno 5 kovancev). Če sta oba vrgla enako število, se igra ponovi. Koliko kovancev v povprečju dobi prvi, in koliko drugi?

(d) V tedenskem poročilu so reševalci zabeležili naslednje število nujnih primerov

PO	TO	SR	ČE	PE	SO	NE
20	25	45	40	30	30	13

Ali lahko z gotovostjo 95% trdimo, da je število nesreč odvisno od dneva?

IZPIT IZ VERJETNOSTI

24.6.1998

(a) Na robu kvadrata K, z oglišči v točkah $T_1(1,-1)$, $T_2(1,1)$, $T_3(-1,1)$, $T_4(-1,-1)$ si slučajno izberemo točko. Naj slučajna spremenljivka X meri razdaljo te točke od koordinatnega izhodišča. Izračunaj njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve.

(b) Za kakšne dogodke A in B velja enakost

$$P[A] = P[A|B] + P[A|\overline{B}]\ ?$$

Tu nam $P[X]$ pomeni verjetnost dogodka X.
(Nasvet: Upoštevaj, da mora biti $P[A] \geq P[AB]$.)

(c) Denimo, da so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene. Če je $E(X_1) = a$ in je $D(X_1) = \sigma^2$, poišči $E(X_k - \bar{X})$ ter $D(X_k - \bar{X})$; tu je

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(d) Naj bo gostota porazdelitve slučajne spremenljivke X enaka

$$p(x) := \begin{cases} 2x/a^2; & x \in [0,a] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

pri nekem $a > 0$. Poišči cenilko parametra a po metodi momentov in po metodi maksimalne zanesljivosti. Preiskusi ju na vzorcu

$$0\dot{}5,\ -1\dot{}0,\ 0\dot{}7,\ 0\dot{}4.$$

(e) Homogena Markovska veriga je podana z matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Poišči vse zaprte množice stanj, določi stacionarno porazdelitev in izračunaj porazdelitev po treh prehodih, če je začetna porazdelitev verjetnosti podana z vektorjem $(1/2, 0, 1/4, 0, 1/4)$.

(f) Slučajni vektor je porazdeljen enakomerno v kvadratu z oglišči v točkah $T_1(1,0)$, $T_2(0,1)$, $T_3(-1,0)$, $T_4(0,-1)$. Poišči pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na dogodek $X < 2Y$ in njeno pogojno matematično upanje.

IZPIT IZ VERJETNOSTI

30.6.1998

(a) Verjetnost, da strelec A zadene tarčo je $\frac{1}{4}$, verjetnost, da jo zadene strelec B pa je $\frac{1}{3}$.

i. Izračunaj verjetnost, da bo tarča zadeta, če vemo, da sta oba strelca ustrelita dvakrat.

ii. Denimo, da vsak strelec ustreli samo enkrat. Pri ogledu tarče smo ugotovili, da je v njej en sam izstrelek. Kakšna je verjetnost, da jo je zadel strelec A?

iii. Recimo, da ima A na voljo le dva strela. Kolikokrat mora še ustreliti strelec B, da bo tarča zadeta z vsaj 90% verjetnostjo?

(b) Diskretni slučajni vektor (X, Y) ima naslednjo porazdelitev:

$X \backslash Y$	-3	2	4
1	$0,1$	$0,2$	$0,2$
3	$0,3$	$0,1$	$0,1$

i. Poišči porazdelitev spremenljivk X oz. Y !

ii. Izračunaj kovarianco, $\text{cov}(X, Y)$!

iii. Izračunaj korelacijo, tj. $\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$!

iv. Ali sta X in Y neodvisni?

(c) Rodovna funkcija diskretne slučajne spremenljivke X je podana z

$$G_X(t) := 1 - \sqrt{1 - t^2}$$

Poišči $E(X)$, $D(X)$ ter izračunaj verjetnost, da X zavzame lihe vrednosti.

(d) Učenci petih različnih šol so se na maturitetnem preizkusu znanja takole odrezali:

	A	B	C	D	E
zadosten	10	15	5	4	5
dober	20	25	25	15	16
odličen	7	3	10	4	6

(Tabela podaja število učencev iz posameznih šol, ki so dosegli ustrezen uspeh.) Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ zavrnemo hipotezo, da je znanje neodvisno od posamezne šole?

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA in STATISTIKE

20.8.1998

(a) Pri metu kovanca pade cifra z verjetnostjo p in grb z verjetnostjo $1-p$; $(0 < p < 1)$. Poišči verjetnost P_n, da bo v n metih padla cifra sodo mnogokrat.
(Nasvet: Poiskusi P_n izraziti s P_{n-1}.)

(b) Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, porazdeljeni z gostoto

$$p_X(x) = p_Y(x) := \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Naj bo $U := \min\{X, Y\}$ in $V := \max\{X, Y\}$. Ali sta U in V neodvisni?
(Nasvet: Upoštevaj formulo $P[U < u, V < v] = P[U < u, V < v, X \leq Y] + P[U < u, V < v, X > Y]$.)

(c) Celoštevilska slučajna spremenljivka X ima rodovno funkcijo enako

$$G_X(t) := \frac{t^2}{2-t}$$

Izračunaj njeno matematično upanje in disperzijo, ter verjetnost, da zavzame soda števila.

(d) Učenci petih različnih šol so se na maturitetnem preizkusu znanja takole odrezali:

	A	B	C	D	E
zadosten	10	15	5	4	5
dober	20	25	25	15	16
odličen	7	3	10	4	6

(Tabela podaja število učencev iz posameznih šol, ki so dosegli ustrezen uspeh.) Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ zavrnemo hipotezo, da je znanje neodvisno od posamezne šole?

(e) V žari se nahaja prvih n naravnih števil; eno za drugo jih brez vračanja potegnemo k. Slučajna spremenljivka X_i nam vrne cifro, ki smo jo izvlekli na i–tem mestu. Koliko je matematično upanje slučajne spremenljivke

$$T := \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Kaj nam meri spremenljivka T?

(f) Klasificirajte stanja homogene markovske verige z matriko prehodnih verjetnosti P v odvisnosti od parametra $p \in [0,\ 1]$! Oznaka: $q = 1 - p$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

27.8.1998

(a) Vržemo dve pošteni kocki; naj bo A dogodek, da je vsota pik strogo večja od 5 in strogo manjša od 10, B pa dogodek, da je produkt pik večji ali kvečjemu enak 9. Izračunaj verjetnosti $P[A]$, $P[B]$, $P[A \cup B]$ ter $P[A \backslash B]$.

(b) Na voljo imamo osem škatel s kroglicami; v petih sta po dve beli in tri črne kroglice, v treh pa po pet belih in tri črne kroglice. Na slepo si izberemo škatlo in iz nje potegnemo belo kroglico. Kakšna je verjetnost, da izbrana škatla pripada drugi skupini?

(c) Štiri različne kape med seboj pomešamo, in jih razdelimo njihovim lastnikom; vsak dobi po eno kapo. Poišči poprečno število lastnikov, ki so dobili svojo kapo. Nariši tudi porazdelitveno funkcijo ustrezne slučajne spremenljivke.

(d) Dva različna tipa kave so testirali na vsebnost kofeina; pri tem so od obeh proizvajalcev vzeli nekaj 100 gramskih zavojčkov in jih analizirali. Rezultati (v mg/100g) so podani v spodnji tabeli

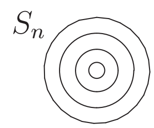
A	20·0	21·4	20·2	23·6	25·1	22·6		
B	24·2	21·8	23·7	22·8	27·0	25·3	23·1	26·8

Predpostavimo, da so pri obeh proizvajalcih odstopanja od idealne vsebnosti kofeina enaka. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testiraj hipotezo, da obe vrsti kave vsebujeta v poprečju enako mnogo kofeina.

IZPIT IZ VERJETNOSTNEGA RAČUNA in STATISTIKE

7.9.1998

(a) V ravnini je dano 5 koncentričnih krogov $S_1, S_2, \ldots, S_5$ s središčem v točki $(0,0)$; polmer k–tega kroga bodi k enot. Verjetnost, da točka A pade v notranjost kroga S_5 je enakomerno porazdeljena znotraj kroga S_5. Poišči verjetnost, da kvadrat, ki ima središče v točki $(0,0)$ in eno oglišče v točki A seka *natanko* k krogov!



(b) Slučajni vektor (X, Y) lahko zavzame le diskretne vrednosti z verjetnostmi

$$p_{i,j} := \frac{C}{(i+j-1)(i+j)(i+j+1)}; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Poišči konstanto C, marginalne porazdelitve in kovarianco med X in Y.
(Nasvet: Pri iskanju marginalne porazdelitve si lahko pomagaš tako, da $p_{i,j}$ razbiješ na parcialne ulomke $p_{i,j} = \frac{a}{(i+j-1)} + \frac{b}{(i+j)} + \frac{c}{(i+j+1)}$. Nato napiši prvih nekaj členov, jih pokrajšaj, in nadaljuj z indukcijo. Pri kovarianci najprej ugotovi, če sploh obstaja.)

(c) Poišči verjetnost, da bo pri n metih kovanca padlo liho mnogo grbov, če veš, da grb pade z verjetnostjo p; $0 < p < 1$.

(d) Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$ z neznanima parametroma a in σ. Zanjo imamo slučajni vzorec

$$3,2 \quad 3,0 \quad 3,4 \quad 3,1 \quad 3,1 \quad 3,0 \quad 3,3 \quad 2,9 \quad 2,9 \quad 3,2$$

Preizkusi z njim hipotezo $H_0(a = 3^{\cdot}2)$ in hipotezo $H_1(\sigma = 0^{\cdot}18)$!

(e) Slučajne spremenljivke X, Y in N so neodvisne; N je diskretna in zavzame vrednost 0 z verjetnostjo p in 1 z verjetnostjo $1-p$; $0 < p < 1$. Izrazi karakteristično funkcijo spremenljivke

$$T := N \cdot X + (1-N) \cdot Y$$

s karakterističnima funkcijama f_X in f_Y spremenljivk X oz. Y.

(f) Klasificiraj stanja homogene Markovske verige s prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

IZPIT IZ OSNOV VERJETNOSTI

15.9.1998

(a) Poišči verjetnost, da bo v n metih obteženega kovanca grb padel dvakrat; drugič v poslednjem metu. Privzemi, da grb pade z verjetnostjo p.

(b) V krog polmera 1 pade točka $T(x, y)$; njena verjetnost je enakomerno porazdeljena po celem krogu. Poišči verjetnost, da je $x^2 > y$.

(c) Dvakrat vržemo pošten kovanec, nato pa še tolikokrat pošteno igralno kocko, koliko krat je padel grb. Naj slučajna spremenljivka X meri število grbov, Y pa vsoto vseh pik, ki smo jih vrgli s kocko. Poišči porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) in kovarianco $\text{Cov}(X, Y)$! (Če smo vrgli dve cifri, se smatra, da je ustrezna vsota enaka 0.)

(d) Dva hladilnika enake prostornine so večkrat zmerili glede na porabo kWh/dan Pri tem so dobili naslednje rezultate

tip A	1.8	1.5	1.5	1.7	1.2	1.7	1.3	1.2	1.2	1.6
tip B	1.5	1.4	1.6	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3		

Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 5\%$ trdimo, da je drugi hladilnik varčnejši?
Upoštevaš lahko, da so izmerki razporejeni približno normalno, in da sta merilni napravi enako natančni.