Geometrija prepogibanja papirja

Geometry of Folding Paper

Nada Razpet

Σ Povzetek

Iz lista papirja formata A4 bomo izdelali nekaj likov in jim določili obseg in ploščino. Enakostranični trikotnik in pravilni šestkotnik pa bomo zložili iz kvadratnega lista papirja. Vsem zloženim likom bomo izračunali dolžine stranic, obseg in ploščino. Večina računov temelji na poznavanjem skladnosti, podobnosti in Pitagorovem izreku. V srednji šoli pa lahko računamo tudi s kotnimi funkcijami. Postopek zlaganja lahko pokažemo in ga narišemo z Geogebro, ali pa učenci prepogibajo papir ob pomoči slik, ki smo jih s tem programom že narisali. Program je lahko tudi v pomoč učencem pri preverjanju lastnosti likov in izračunanih količin, kot so dolžine stranic, obsegi in ploščine likov.

Ključne besede: geometrija, prepogibanje papirja, liki, razvedrilna matematika, GeoGebra

Σ Abstract

We will make a few shapes from an A4 sheet of paper and determine their circumference and area. We will fold an equilateral triangle and regular hexagon from a square sheet of paper. We will calculate the lengths of the sides, the circumference and area of all the folded shapes. Most of the calculations are based *on the knowledge of symmetry, similarity and the Pythagorean theorem. In secondary school the calculations can also be done using trigonometric functions. The folding procedure can be demonstrated and drawn with Geogebra or pupils can fold the paper referring to pictures drawn previously with this program. The program can also assist pupils in checking the properties of shapes and of the calculated quantities, such as the lengths of sides, circumferences and areas of shapes.*

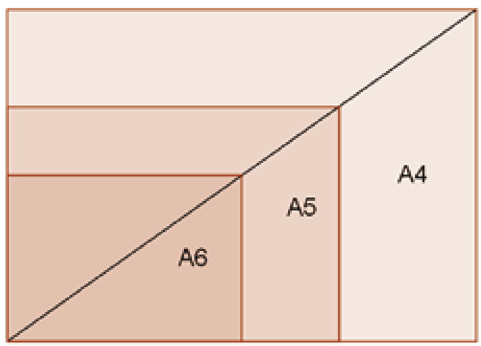
Key words: *geometry, folding paper, shapes, entertaining mathematics, GeoGebra.*

α Uvod

S prepogibanjem lista papirja formata A4 smo se prvič srečali na enem od seminarjev projekta TEMPUS, ki ga je vodil J. Monaghan (Leeds, 1993). Takrat smo se ukvarjali le z enakostraničnim in enakokrakim trikotnikom. Kasneje smo na seminarjih za učitelje matematike osnovnih in srednjih šol v Sloveniji (v okviru projekta Tempus in strokovnih srečanj DMFA Slovenije) obravnavali še druge like in zlaganje povezali z računalniškim programom Cabri. V prispevku bomo vse slike risali s prosto dostopnim programom GeoGebra.

β Prepogibanje lista papirja formata A4

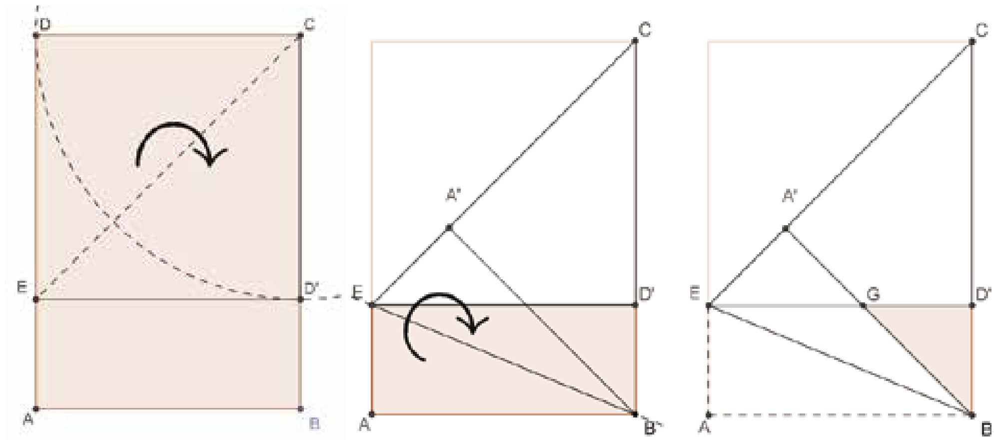
Papir formata A4 dobimo z zaporednim razpolavljanjem pole papirja s ploščino 1 m^2. To pomeni, da ima list papirja formata A4 ploščino 1/16 m^2. Dolžini stranic sta določeni tako, da sta v razmerju $a : b = 1 : \sqrt{2}$. Stranici takega lista sta potem približno a = 210 mm, $b \approx$ 297 mm. Če razrežemo list papirja (pravokotnik) po simetrali daljše stranice, dobimo dva skladna pravokotnika formata A5, s stranicama $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ in njuno razmerje je zopet $1 : \sqrt{2}$. Tudi list formata A6 ima tako razmerje stranic. Vsi ti pravokotniki so si podobni. S prepogibanjem to pokažemo tako, da pravokotnike prepognemo po diagonali in jih položimo drug na drugega tako, da se ujemajo v enem oglišču in ležijo prepognjene diagonale druga na drugi, kot to kaže Slika 1.



[Slika 1] Preverjanje podobnosti listov papirja formatov A4, A5 in A6

Enakokraki trikotnik

Do nadaljnjega bomo uporabljali kot osnovo list papirja formata A4, ki ga bomo poimenovali kratko list. Potek zgibanja enakokrakega trikotnika kaže Slika 2.



[Slika 2] Trikotnik EBC je enakokrak

Ker smo list prepognili tako, da je rob CD poravnan z robom CD', je lik $ED'C$ enakokrak pravokotni trikotnik s krakoma $|ED'| = |D'C| = a$. Diagonala $|EC| = a\sqrt{2} = b$, to pa pomeni, da je $|EC| = |BC|$. Če papir prepognemo še po diagonali EB pravokotnika $ABD'E$, dobimo enakokrak trikotnik EBC, saj ni težko dokazati, da je $\angle AEB = \angle BEC = \angle CBE$.

Dolžini dveh stranic enakokrakega trikotnika EBC že poznamo, saj sta enaki dolžini daljše stranice lista, torej $a\sqrt{2}$. Osnovnica trikotnika pa je dolga:

$|AB| = a,$

$|EA| = |DA| - |DE| = a\sqrt{2} - a,$

$$|EB| = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2} - a\right)^2},$$

$$|EB| = a\sqrt{2}\,\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,.$$

Višina na osnovnico trikotnika je:

$$v = \sqrt{|EC|^2 - \left(\frac{|EB|}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2\,(2 - \sqrt{2})}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,.$$

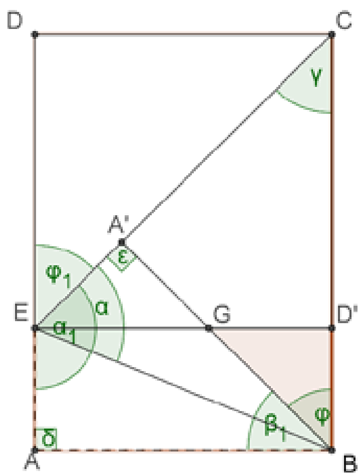
Izračunajmo še obseg trikotnika:

$$o = 2a\sqrt{2} + a\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= a\sqrt{2}\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right),$$

$$p = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

S slike pa je razvidno, da je ploščina tega trikotnika enaka polovični ploščini lista.



[Slika 3] Koti v enakokrakem trikotniku

Izračunajmo še velikosti kotov. Ker je EC diagonala kvadrata, je kot $\gamma = \varphi_1 = 45°$. Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika α in β sta enaka in merita 67,5°. Notranja kota deltoida $ABA'E$ ε in δ sta prava kota, kot $\alpha_1 = 135°$ in zato kot $\beta_1 = 45°$, torej tudi kot $\varphi = 45°$ in je potem trikotnik $BD'G$ enakokrak pravokotni trikotnik.

Pravzaprav bi lahko ploščino trikotnika EBC izračunali hitreje, če bi prej premislili, kako smo zgibali trikotnik. Štirikotnik $ABA'E$ je deltoid, stranica $A'B$ je pravokotna na stranico EC, torej je $|A'B| = v$ višina na stranico EC. Ploščino izračunamo po osnovnem obrazcu za računanje ploščine trikotnika:

$$p = \frac{|EC| \cdot |A'B|}{2} = \frac{a\sqrt{2}\ \cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

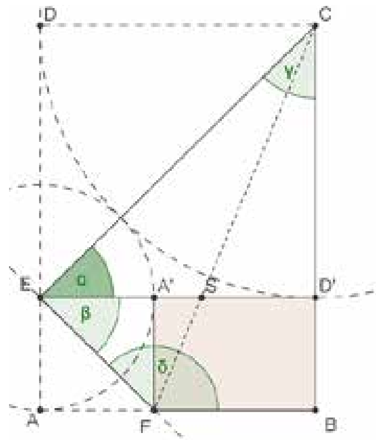
Točka G je višinska točka trikotnika. Pokažimo, da je to res. Daljica $A'B$ je pravokotna na stranico EC, torej je ena od višin trikotnika EBC. Daljica ED' je pravokotna na krak BC, torej je tudi to višina. Obe daljici se sekata v točki G. Točka G je višinska točka trikotnika EBC.

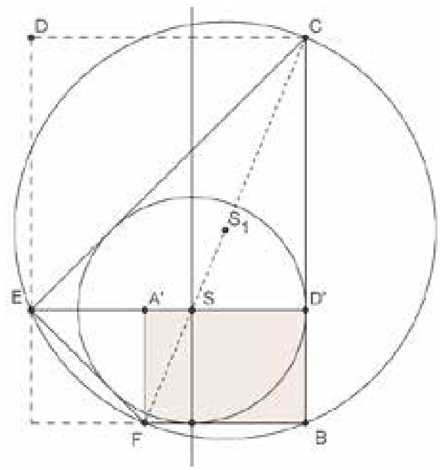
Izračunajmo razdaljo $|GD'|$.

Ker je $|D'B| = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$

in je trikotnik $BD'G$ enakokrak, je

$|GD'| = |BD'| = a(\sqrt{2} - 1)$.





[Slika 4] Nastal je deltoid EFBC. Deltoidu včrtana in očrtana krožnica

Deltoid

Deltoid zložimo podobno kot enakokrak trikotnik, različna je le zadnja faza prepogibanja, kjer ne prepognemo po diagonali EB, ampak prepognemo tako, da oglišče A pade na daljico ED', kot kaže Slika 4.

Kote deltoida že poznamo: $\alpha = \beta = \gamma = 45°$, $\delta = 135°$. Pokazati moramo, da je $|EF| = |FB|$. Štirikotnik $AFA'E$ je kvadrat, saj smo stranico EA prenesli na ED'. Potem je:

$$|EF| = |EA| \cdot \sqrt{2} = a\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2} = a\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

In stranica

$$|FB| = a - a\left(\sqrt{2} - 1\right) = a\left(2 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow |EF| = |FB|.$$

Diagonali deltoida sta

$$|EB| = \sqrt{|EA|^2 + a^2} = a\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = a\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$|FC| = \sqrt{|FB|^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Izračunajmo še obseg in ploščino deltoida:

$$o = 2(|CD'| + |D'B'| + |BF|) =$$
$$= 2(|CD'| + |D'A'| + |A'E|) = 2 \cdot 2a = 4a$$

Ali pa drugače:

$$o = 2a\sqrt{2} + 2a\left(2 - \sqrt{2}\right) = 4a,$$

$$p = \frac{|EB| \cdot |FC|}{2} = a^2\,\sqrt{2}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Temu deltoidu lahko krožnico včrtamo in očrtamo.

Središče deltoidu očrtane krožnice je v razpolovišču FC, v točki S_1 polmer pa je

$$r = \frac{|FC|}{2} = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,.$$

Polmer deltoidu včrtane krožnice s središčem v točki S je $\rho = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Enakostranični trikotnik

Kako zgibamo enakostranični trikotnik, je prikazano na Sliki 5. Najprej prepognemo list po simetrali daljice AB, nato zgibamo oglišče C preko take premice skozi D, da pade C na simetralo AB. Pri tem sta še vedno a in b stranici lista, ki ga prepogibamo.

Ker smo oglišče C položili na C', je štirikotnik $DC'GC$ deltoid s simetralo DG. Z leve slike (Slika 5) razberemo, da je trikotnik $FC'D$ pravokotni trikotnik s hipotenuzo a in eno kateto $a/2$, s kotoma $\angle FDC' = 30°$ in $\angle DC'F = 60°$. Bralec bo hitro izračunal še vse ostale kote in ugotovil, da je tudi pravokotni trikotnik $DC'G$ polovica enakostraničnega trikotnika, pri tem je $|DC'| = v$ višina enakostraničnega trikotnika, ki ga želimo zložiti.

Torej je osnovnica enakostraničnega trikotnika $|DG|$ enaka

$$v = a = \frac{|DG| \cdot \sqrt{3}}{2}, \qquad |DG| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

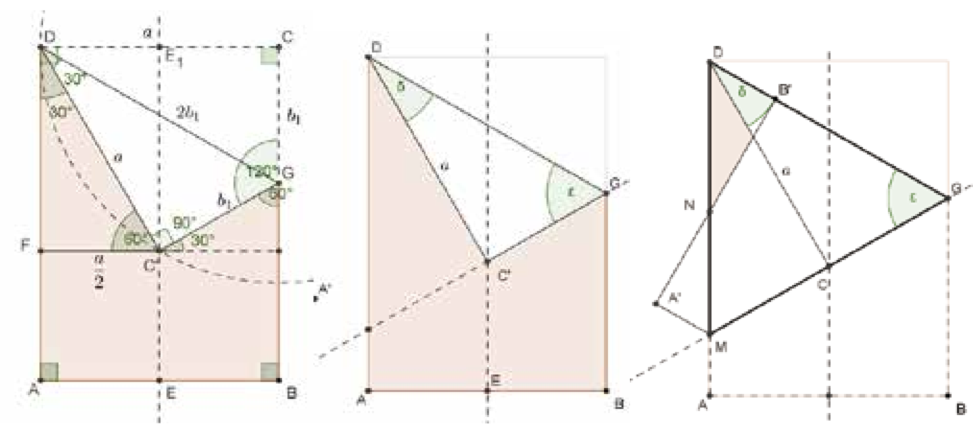
Hitro izračunajmo še obseg in ploščino trikotnika:

$$o = 2a\sqrt{3}\,, \quad p = \frac{|DG|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Tudi polmera včrtane in očrtane krožnice ni težko izračunati:

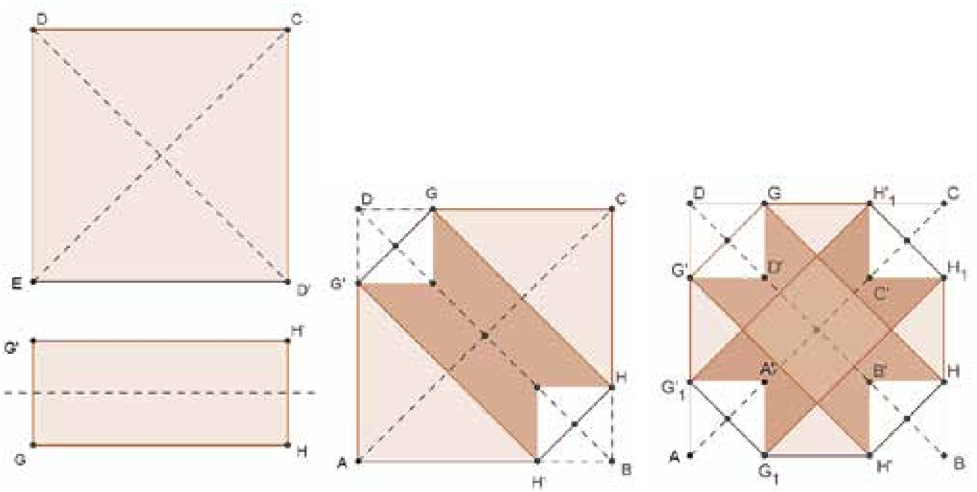
$$r = \frac{2a}{3}, \quad \rho = \frac{a}{3}.$$

Iz enakostraničnega trikotnika lahko dobimo pravilni šestkotnik tako, da poiščemo težišče T in potem oglišča enakostraničnega trikotnika postavimo na točko T. Osnovnica tega šestkotnika je tretjina osnovnice enakostraničnega trikotnika. Od tod dalje pa ni težko izraziti še obsega in ploščino šestkotnika.



[Slika 5] *Postopek za zlaganje enakostraničnega trikotnika. Na koncu še spodvihamo trikotnik A'MN*

Pravilni osemkotnik



[Slika 6] List formata A4 razdelimo na kvadrat in pravokotnik. Pravokotnik položimo na diagonali kvadrata, kot kaže slika in zavihamo trikotnike

List razdelimo na kvadrat in pravokotnik kot kaže Slika 6. Da smo zares dobili pravilni osemkotnik, moramo pokazati, da je $|G'_1G_1| = |G_1H'|$. Pravokotnik $GHH'G'$ smo simetrično položili na diagonalo DD' kvadrata $AD'CD$. Pravokotnik se točno prilega v kvadrat. To še dokažimo. Stranica pravokotnika $|G'_1G_1| = a(\sqrt{2} - 1)$ in je diagonala kvadrata $AG_1A'G'_1$. Stranica pravokotnika $G'H' = a$. Pokazati moramo, da je stranica pravokotnika $G'H'$ hipotenuza pravokotnega trikotnika GCH in da točki G in H ležita na stranicah kvadrata $ABCD$.

$$|DG| = \frac{a(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2},$$

$$|GC| = a - |DG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|GH| = |GC|\sqrt{2} = a$$

Torej se pravokotnik $GHH'G'$ natančno prilega kvadratu. Izračunajmo še stranice osemkotnika G_1H'.

$$|G_1H'| = a - 2|AG_1| =$$
$$= a - a(2 - \sqrt{2}) =$$
$$= a(\sqrt{2} - 1) = |G'G_1|.$$

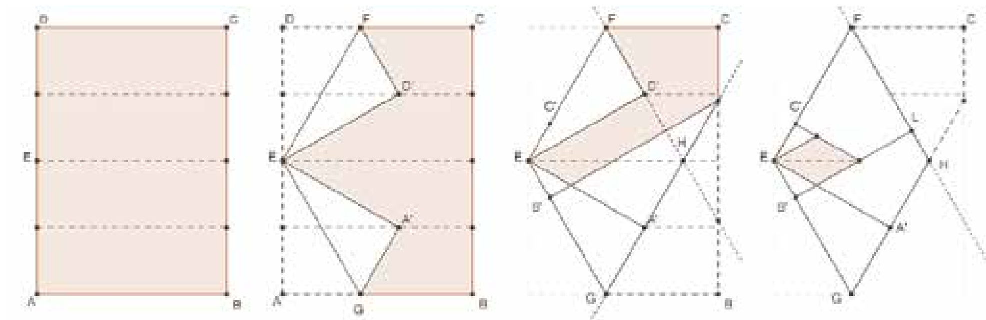
Stranica osemkotnika je torej enaka krajši stranici odrezanega pravokotnika $|GG'| = a(\sqrt{2} - 1)$ torej smo dobili pravilni osemkotnik.

Romb

Navedli bomo dva načina zgibanja romba. Prvi način kaže Slika 7.

List razdelimo na štiri skladne pasove in v vsaki polovici začnemo zgibati tako kot pri zlaganju enakostraničnega trikotnika. Postopek je na Sliki 7. Ni težko ugotoviti, da sta notranja kota tega romba velika 60° in 120°.

S primerjavo rezultatov, ki smo jih dobili pri računanju enakostraničnega trikotnika, ugotovimo, da je $|EA'| = |EA| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ in je to višina enakostraničnega trikotnika z



[Slika 7] Zložili smo romb

osnovnico $|EG|$ in hkrati višina romba. Torej je $|EG| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Obseg $o = 4 \cdot |EG|$. Ploščina romba je enaka vsoti ploščin dveh skladnih enakostraničnih trikotnikov z osnovnico $|EG|$. Torej:

$$p = 2 \cdot \frac{|EG|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3},$$

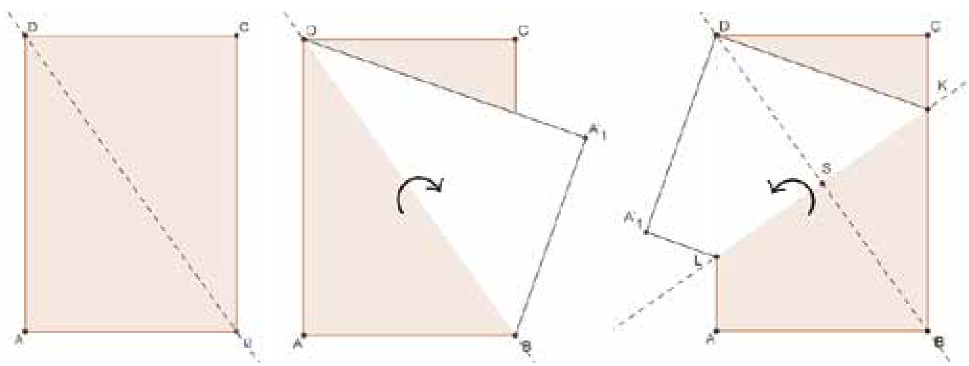
$$o = \frac{4a\sqrt{6}}{3}.$$

Ampak to ni največji romb, ki ga lahko dobimo iz lista formata A4.

Največji romb

Kako ga zložimo, kaže Slika 8.

Daljica DB je diagonala romba in hkrati diagonala pravokotnika $ABCD$. Diagonalo DB smo razpolovili (točka S), nato pa poiskali pravokotnico nanjo tako, da smo točko B postavili na točko D in dobili drugo diagonalo LK. Ker smo dela diagonale DB prekrili vemo, da je $|DS| = |SB|$. Če potegnemo skozi točko S vzporednico z AB, lahko hitro pokažemo (skladni trikotniki), da je tudi $|LS| = |SK|$ (Mimogrede: Točka S razpolavlja vsako daljico, ki ima krajišči na vzporednih stranicah pravokotnika in gre skozi S.) Trikotnika KSB in KSD sta skladna. Oba sta pravokotna imata eno skupno kateto in $|DS| = |SB|$, zato tudi velja, da je $|DK| = |KB|$ in seveda potem iz



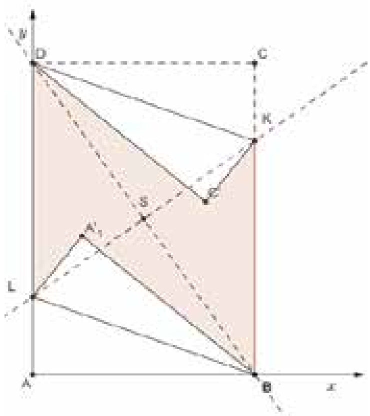
[Slika 8] Daljici DB in LK sta diagonali romba. S je središče pravokotnika ABCD

istega razloga tudi $|LB| = |LD| = |DK|$. To pa pomeni, da je štirikotnik *LBKD* romb.

Trikotnik *BSK* je podoben trikotniku *BCD*. Dobimo:

$$|BS| = \frac{|BD|}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{in}$$

$$|DK| = |KB| = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$



[Slika 9] Štirikotnik LBKD je romb

Izračunali smo dolžino osnovnice romba. Izračunajmo še dolžini diagonal:

$$|DB| = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{3},$$

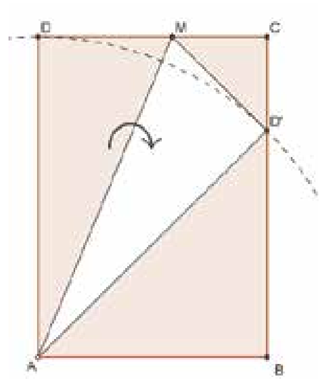
$$|LK| = \sqrt{a^2 + (b - 2x)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ker se v rombu diagonali sekata pravokotno, je ploščina romba

$$p = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{|DB| \cdot |LK|}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}.$$

Nalogo lahko rešujemo tudi z metodami analitične geometrije. Koordinatni sistem postavimo tako, da kot kaže Slika 9. Poiščemo enačbo premice p skozi točki D in B, določimo koordinate točke S, zapišemo enačbo pravokotne premice q na premico p, ki gre skozi točko S. Presečišči premice q z nasprotnima stranicama kvadrata sta potem preostali dve oglišči romba.

Še ena zanimivost:



[Slika 10] Ploščina trapeza ABCM je

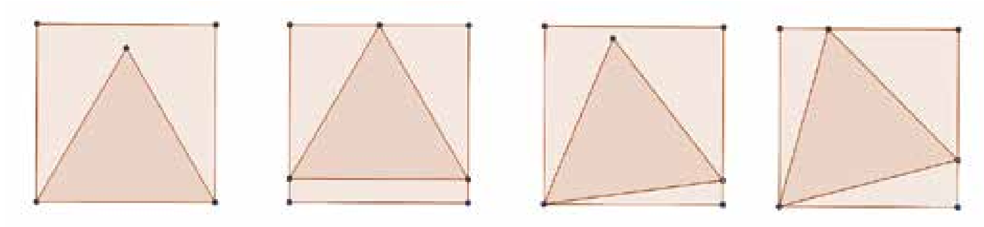
Prepognimo list A4 tako, kot kaže Slika 10. Trikotnika ABD' je enakokrak pravokotni trikotnik, saj je $|AD'| = b = a\sqrt{2}$. Ker je ena kateta tega trikotnika a, po Pitagorovem izreku dobimo, da je tudi $|BD'| = a$. Potem je tudi trikotnik $MD'C$ enakokrak pravokotni trikotnik, kar hitro ugotovimo, če izračunamo, kolikšni so koti, ki imajo vrh v D'. Štirikotnik *ABCM* je trapez. Dolžine vseh stranic poznamo že od prej. Izračunajmo ploščino tega trapeza:

$$p = \frac{(a + |MC|) \cdot |BC|}{2} = \frac{(a\sqrt{2})a\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Ploščina trapeza je torej enaka ploščini kvadrata, ki smo ga odrezali pri izdelavi pravilnega osemkotnika.

γ Prepogibanje kvadratnega lista papirja

V kvadrat lahko narišemo enakostranični trikotnik na več načinov (Hull, 1969), nekaj primerov je na Sliki 11:

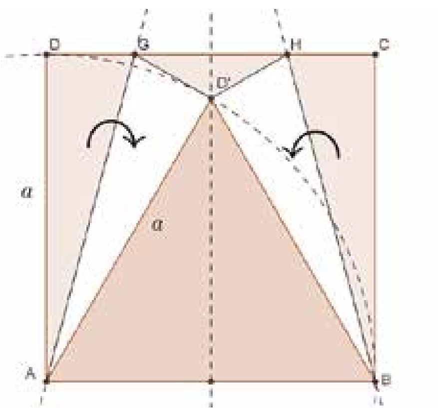


[Slika 11] V kvadrat smo na štiri načine narisali enakostranični trikotnik

a) stranica enakostraničnega trikotnika je enaka stranici kvadrata,
b) nobeno oglišče enakostraničnega trikotnika ni v oglišču kvadrata,
c) eno oglišče enakostraničnega trikotnika je v oglišču kvadrata, drugo oglišče je na eni od stranic kvadrata, tretje je znotraj kvadrata,
d) eno oglišče enakostraničnega trikotnika je v oglišču kvadrata, drugi dve pa sta na stranicah kvadrata.

Skicirajmo te možnosti:

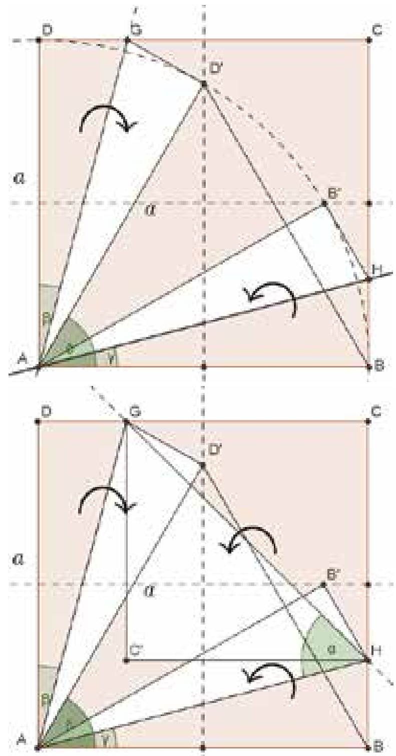
Prvi kvadrat na Sliki 11 lahko iz kvadratnega lista papirja hitro zložimo. Potek kaže Slika 12.



[Slika 12] Trikotnik ABD‘ je enakostraničen

Trikotnik ABD' je enakostraničen. Zakaj? Oglišče D smo preslikali v D', zato je $|AD| = |AD'| = a$.

Ali lahko najdemo največji trikotnik, ki je včrtan v kvadrat s stranico a? Pravzaprav je stranica takega trikotnika že na Sliki 12. Njegova stranica je daljica AG. Kako ga zložimo iz kvadrata, je prikazano na Sliki 13. Hull v svoji knjigi sicer namigne, kako bi izračunali stranice in kote, vendar pri tem največkrat uporablja kotne funkcije in pri dokazovanju tudi odvode, ki pa se jim bomo mi izognili.



[Slika 13] Kvadratu smo včrtali največji možni enakostranični trikotnik

Izračunajmo označene kote na Sliki 13. Trikotnik ABD' je enakostraničen trikotnik z osnovnico a, zato je kot $\delta = 60°$. Daljica AG je simetrala deltoida $ADGD'$, katerega kot z vrhom v oglišču A meri 30°, zato je kot $\beta = 15°$. Trikotnik ABH je skladen s trikotnikom ADG, torej je tudi kot $\gamma = 15°$. Torej meri kot HAG 60°. Ker velja $|AH| = |AG|$, sta kota ob stranici HG skladna, merita po 60°, torej je trikotnik AHG enakostraničen.

Izračunajmo osnovnico trikotnika. Najprej izračunajmo sinus kota 15°. Lahko ga izračunamo kar iz trikotnika ADC na Sliki 14. Naj bo polmer kroga $r = 1$ enota. Trikotnik SDC je polovica enakostraničnega trikotnika z osnovnico SC in višino SD.

$$|SC| = 1, \qquad |DC| = \frac{1}{2}, \qquad |SD| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

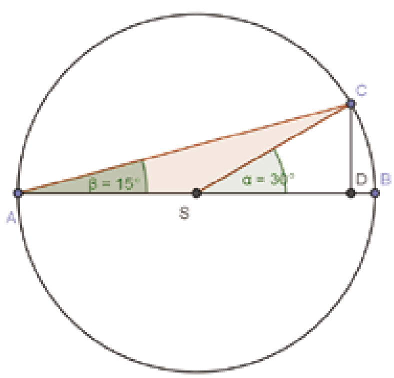
$$|AD| = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\tan 15° = \frac{|CD|}{|AD|} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\sin 15° = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$



[Slika 14] Izračunajmo sinus in tangens kota 15°

V tabelah najdemo vrednost sinusa kota $\beta = 15°$ zapisano drugače, namreč kot

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ampak

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 =$$

$$= 8 - 4\sqrt{3} = 4(2-\sqrt{3}),$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Zdaj znamo izračunati osnovnico enakostraničnega trikotnika $|AH|$.

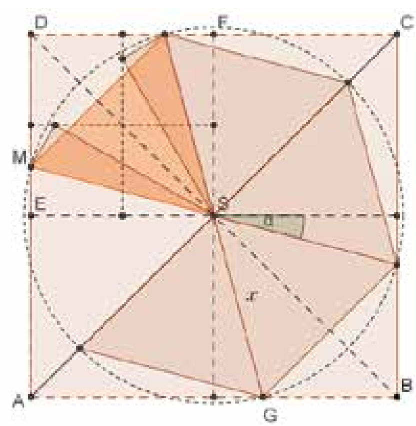
$$\cos\gamma = \frac{a}{|AH|}$$

$$|AH| = \frac{a}{\cos\gamma} = 2\,a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Nismo navedli dokaza, da je to zares največji enakostranični trikotnik, ki ga lahko včrtamo v kvadrat, ampak o tem kdaj prihodnjič.

Pravilni šestkotnik

Iz kvadratnega lista papirja zložimo še največji možni pravilni šestkotnik.



[Slika 15] V kvadrat smo včrtali največji možni šestkotnik

Postopek je podoben kot pri zlaganju enakostraničnega trikotnika, zahteva pa nekaj ročnih spretnosti. Najprej kvadrat razdelimo na štiri skladne kvadrate (Slika 15). V kvadrat *ESFD* »včrtamo« največji možni enakostranični trikotnik, kot smo to naredili pri zlaganju enakostraničnega trikotnika, prikazano na Sliki 13.

Osnovnico šestkotnika lahko hitro določimo, saj poznamo osnovnico največjega enakostraničnega trikotnika, ki ga včrtamo v kvadrat, le da smo zdaj enakostranični trikotnik včrtali v kvadrat z osnovnico $\frac{a}{2}$. Torej je osnovnica šestkotnika $|MS|$ enaka:

$$|MS| = a\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

δ Za konec

V osnovni šoli lahko vse predstavljene izračune izvedemo le s poznavanjem pravokotnega trikotnika in podobnosti. Tudi kotnih funkcij ni treba poznati, saj lahko računamo z razmerji stranic. V srednji šoli pa lahko račune skrajšamo z uporabo kotnih funkcij oziroma računamo največje vrednosti z odvodi. Tudi dolžine stranic lahko izračunamo z razdaljami točk, ki jih dobimo s presečišči premic, ki so nosilke stranic, višin in diagonal likov. Če primerno izberemo stranico osnovnega kvadrata, lahko pravilnost izračunov učenci preverijo z merjenji stranic zloženih likov. Vse slike smo narisali z GeoGebro. Zlaganje lahko torej izvedemo na dva načina: pokažemo postopek, učenci zložijo lik, nato postopek narišejo z GeoGebro, izračunajo stranice in kote in rezultate preverijo z GeoGebro. Lahko pa jim pokažemo sliko lika, narisanega z GeoGebro. Učenci morajo lik zložiti in izračunati stranice ter kote. Risanje slike, ki prikazuje, kako naj lik zložimo, je navadno za učence težavnejše.

ε Literatura

1. Monaghan J. (1993). Seminar v okviru projekta Tempus. University of Leeds. Neobjavljeno gradivo.
2. Hull T. (1969). *Project Origami*, CRC Press. Str. 1–14.