PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 2
Strani 98–104

Milan Hladnik:

# HIPOKRATOVE LUNE

Ključne besede: matematika, zgodovina matematike, geometrija, kvadratura kroga, kvadratura lune, Hipokrat.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1432-Hladnik.pdf

# HIPOKRATOVE LUNE

To je zelo stara zgodba, stara toliko kot kvadratura kroga (v resnici je z njo v tesni zvezi) in izvira še iz "herojskih" časov starogrške matematike. Ker pa je kljub svoji častitljivi starosti tudi med matematiki bolj malo znana, jo kaže obnoviti.

— — —

Začetek zgodbe je povezan z grškim matematikom *Hipokratom s Kiosa*, ki je živel v 5. stoletju pred našim štetjem[1]. Hipokrat se je z rojstnega otoka Kiosa preselil v Atene, kjer je učil geometrijo nekako v letih od 450 do 430 pr.n.št. Pripisujejo mu avtorstvo (izgubljene) knjige *Elementi geometrije*, iz katere je kasneje črpal Evklid. V njej naj bi med drugim podal geometrijsko rešitev kvadratne enačbe in postavil temelje metodi izčrpavanja. Ukvarjal se je tudi s problemom podvojitve kocke, najbolj znan pa je zaradi "kvadrature lune".

Kot vemo, je bila kvadratura kroga za Grke eden od osnovnih matematičnih problemov in prav Hipokrat se je s tem vprašanjem največ ukvarjal. Odkril je presenetljivo dejstvo, da lahko nekatere krivočrtne like kvadriramo, to je, z ravnilom in šestilom (danes bi rekli z evklidskim orodjem) pretvorimo v ploščinsko enak kvadrat. Hipokratovo odkritje je grškim matematikom vzbudilo tudi upanje, da je mogoče na podoben način kvadrirati ves krog.

V tem prispevku si bomo ogledali nekaj nalog, ki jih je znal rešiti že Hipokrat. Ker niso zelo težke, vabimo bralca, da se jih loti tudi sam (rešitve bomo objavili v naslednji številki). Ob reševanju ne bo samo uril možganov, ampak bo s tem prehodil tudi nekaj začetnih korakov v razvoju tega zanimivega problema, ki ima, kot bomo videli, dolgo in pestro zgodovino.

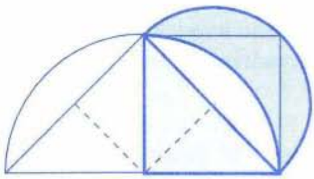
— — —

Prvi Hipokratov primer je bil *lunin krajec*, ki nastane, če nad stranico kvadrata (z zunanje strani) narišemo polkrog in od njega "odščipnemo" presek s krogom, ki je očrtan kvadratu (slika 1).

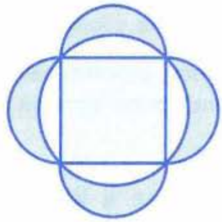
Hipokrat je rešil ta problem s pravilnim sklepanjem, da je razmerje ploščin podobnih krožnih odsekov enako razmerju ploščin kvadratov nad

[1] Ne smemo ga zamenjevati s prav tako ali pa še bolj slavnim, v istem času živečim soimenjakom, znamenitim zdravnikom, ki pa je bil doma z otoka Kosa.

tetivama. Tako je pokazal, da je ploščina luninega krajca enaka ploščini polovice kvadrata (rahlo osenčenemu trikotniku na sliki 1), od koder je lahko brez težav poiskal ploščinsko enak kvadrat. S kvadraturo lune si je Hipokrat vsekakor pridobil velik sloves.



Slika 1.



Slika 2.

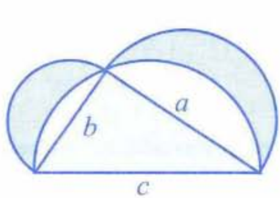
Naslednja naloga je le različica Hipokratove prve uspešne kvadrature lune in jo lahko srečamo v učbenikih in na tekmovanjih.

**Naloga 1**. *Kvadrat povečajmo za štiri polkroge nad stranicami in od dobljenega lika odrežimo kvadratu očrtan krog* (slika 2). *Pokažite, da je ploščina ostanka enaka ploščini prvotnega kvadrata.*

— — —

Rahla posplošitev Hipokratovega sklepa je naloga, ki jo je okrog leta 1000 zastavil in rešil *Hasan Ibn al Haitam* (*Ibn al-Haytham*), znan tudi kot *Alhazen*, kar je latinizirana oblika njegovega imena. Zanimivo je, da jo je približno pet stoletij kasneje, verjetno neodvisno, rešil tudi *Leonardo da Vinci*. Med njegovimi rokopisi so namreč našli številne skice na to temo.

**Naloga 2**. *Nad katetama pravokotnega trikotnika konstruirajmo polkroga in od tako povečanega trikotnika odrežimo polkrog nad hipotenuzo* (slika 3). *Pokažite, da je ploščina ostanka enaka ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika.*




Slika 3.

Tudi to sliko pogosto vidimo v knjigah in priročnikih. Hipokratova kvadratura lune je očitno poseben primer naloge 2, ko je pravokotni trikotnik enakokrak.

**Naloga 3**. *Konstruirajte kvadrat, ki ima enako ploščino kot pravokotni trikotnik s katetama $a$, $b$ in hipotenuzo $c$.*

Če torej uspešno rešimo nalogi 2 in 3, dobimo kvadrat, ki je ploščinsko enak osenčenima lunama na sliki 3. S tem kvadriramo obe luni hkrati.

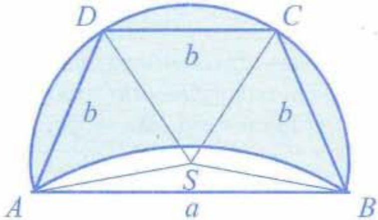
— — —

Vrnimo se h kvadraturi ene same lune. V prvem Hipokratovem primeru je bil krožni odsek, ki ga določa zunanji lunin lok, ravno polovica kroga. Toda Hipokrat je poleg tega našel še dva druga primera polmesecev, ki ju lahko kvadriramo; pri enem je krožni odsek večji, pri drugem pa manjši od polovice kroga. Na žalost so ta dva njegova rezultata spregledali, ju v 18. stoletju ponovno odkrili in šele kasneje ugotovili, da ju je poznal že Hipokrat.

— — —

Pri drugem Hipokratovem polmesecu je središčni kot zunanjega loka večji od $180^0$. Do njegove konstrukcije pridemo po naslednjem postopku:

Narišimo najprej tak enakokraki trapez $\mathcal{T}$ z osnovnico $a$, krakoma $b$ in vzporedno osnovnico $c = b$, da velja $a^2 = 3b^2$. Trapez $\mathcal{T}$ naj ima oglišča $A, B, C, D$, pri čemer naj bosta $AB$ in $CD$ osnovnici, $BC$ in $AD$ pa kraka. Temu trapezu očrtajmo krog. Tako dobimo zunanji lok $ADCB$ polmeseca, notranji lok pa naj bo podoben loku nad stranico $DC$ (slika 4).




Slika 4.

Če sledimo Hipokratovim navodilom, se nam porodi kar nekaj vprašanj. Zastavimo jih bralcu v obliki naslednjih štirih nalog:

**Naloga 4**. *Kako načrtamo $a$, če poznamo $b$ in mora biti $a^2 = 3b^2$?*

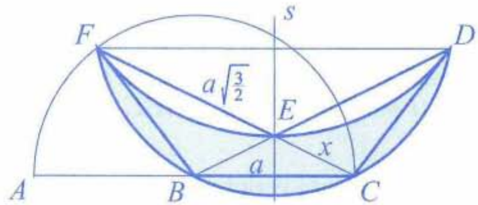
**Naloga 5**. *Pokažite, da leži središče $S$ očrtanega kroga znotraj trapeza $\mathcal{T}$, se pravi, da je krožni odsek $ADCB$ večji od polovice očrtanega kroga.*

**Naloga 6**. *Prepričajte se, da je ploščina polmeseca enaka ploščini trapeza $\mathcal{T}$.*

**Naloga 7**. *Konstruirajte kvadrat z enako ploščino, kot jo ima trapez $\mathcal{T}$.*

— — —

Tretja Hipokratova konstrukcija, pri kateri je zunanji lok manjši od $180^0$, je nekoliko bolj zapletena. Načrtajmo polkrožnico nad premerom $AC$. Točka $B$ naj bo njeno središče, $s$ pa simetrala daljice $BC$. Nato položimo skozi točko $C$ premico, ki seka simetralo $s$ v točki $E$ in polkrožnico v točki $F$, pri čemer naj velja $FE^2 = \frac{3}{2}FB^2$ (slika 5).




Slika 5.

Kako to storimo, je poseben problem, povezan z geometrijskim reševanjem kvadratne enačbe. Naj bo $BC = a$ in $CE = x$. Potem zaradi podobnosti trikotnikov $FBC$ in $BCE$ velja $CF \cdot CE = BC^2$, se pravi $(x + \sqrt{\frac{3}{2}}a)x = a^2$ oziroma $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0$. Če poznamo $x$, lahko konstruiramo točko $E$ in nato še točko $F$. Kot je bilo rečeno na začetku, je Hipokrat znal geometrijsko reševati take kvadratne enačbe.

**Naloga 8**. *Konstruirajte z ravnilom in šestilom daljico dolžine $x$, če poznate dolžino daljice $a$ in če velja $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0$.*

Točko $F$ prezrcalimo preko simetrale $s$ tako, da dobimo še točko $D$, in enakokrakemu trapezu $FBCD$ očrtajmo krog. Nato narišimo še krožni lok $DEF$ tako, da dobimo polmesec $FBCDE$ (slika 5).

**Naloga 9**. *Pokažite, da je vsak od krožnih odsekov nad $FE$ oziroma $ED$ podoben vsakemu od krožnih odsekov nad $FB$, $BC$ in $CD$.*

Od tod lahko potem brez težav uženemo tudi glavno nalogo:

**Naloga 10**. *Pokažite, da je ploščina luninega krajca $FBCDE$ enaka ploščini petkotnika $BCDEF$.*

Morda se je dobro tudi prepričati, da je v tem tretjem primeru Hipokrat kvadriral luno, katere zunanji lok je krajši od polovice krožnega oboda.

**Naloga 11**. *Pokažite, da je zunanji lok polmeseca krajši od polovice krožnice.*

— — —

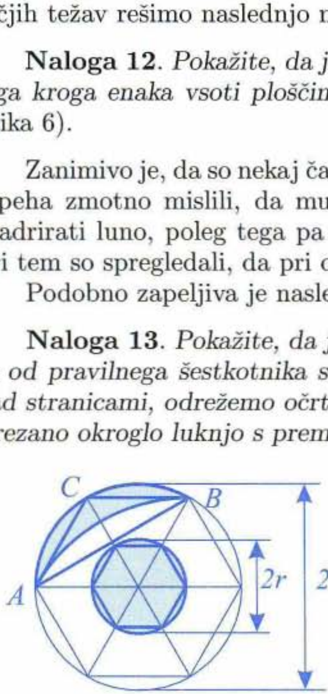
Poleg teh treh glavnih primerov kvadriranja lun je Hipokratu uspelo kvadrirati tudi eno od lun in krog (skupaj). Če načrtamo koncentrična kroga s polmeroma $r$ in $R$ tako, da je $R^2 = 6r^2$, in vsakemu od njiju včrtamo pravilni šestkotnik, poleg tega pa nad krajšo diagonalo večjega narišemo podoben lok, kot je nad vsako stranico (glej sliko 6), lahko brez večjih težav rešimo naslednjo nalogo:

**Naloga 12**. *Pokažite, da je skupna ploščina luninega krajca in manjšega kroga enaka vsoti ploščin trikotnika $ABC$ in manjšega šestkotnika* (slika 6).

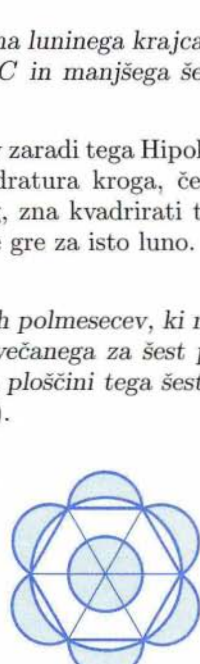
Zanimivo je, da so nekaj časa verjetno prav zaradi tega Hipokratovega uspeha zmotno mislili, da mu je uspela kvadratura kroga, češ, če zna kvadrirati luno, poleg tega pa še luno in krog, zna kvadrirati tudi krog. Pri tem so spregledali, da pri obeh rešitvah ne gre za isto luno.

Podobno zapeljiva je naslednja naloga:

**Naloga 13**. *Pokažite, da je ploščina šestih polmesecev, ki nastanejo, če od pravilnega šestkotnika s stranico 1, povečanega za šest polkrogov nad stranicami, odrežemo očrtani krog, enaka ploščini tega šestkotnika z izrezano okroglo luknjo s premerom 1* (slika 7).

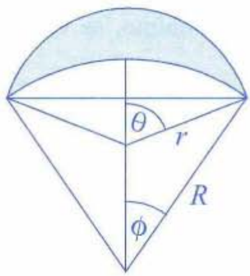



Slika 6.



Slika 7.

Zgodba o Hipokratovih lunah pa se ni zaključila v antiki, niti ne v srednjem veku ali renesansi, ampak – v 20. stoletju. Če hočemo vsaj na kratko opisati, kaj se je zgodilo, moramo dati problemu kvadrature lune drugačno, trigonometrično obliko. Oglejmo si poljuben lunin krajec, katerega zunanji lok pripada krogu s polmerom $r$ in središčnemu kotu $2\theta$, notranji lok pa krogu s polmerom $R$ in središčnemu kotu $2\phi$ (slika 8).




Slika 8.

**Naloga 14**. *Denimo, da kote merimo v radianih. Pokažite, da tedaj za ploščino p luninega krajca na sliki 8 velja formula*

$$p = r^2\theta - R^2\phi + \frac{1}{2}\left(R^2 \sin 2\phi - r^2 \sin 2\theta\right) .$$

Če se omejimo samo na primer, ko sta ploščini obeh krožnih izsekov enaki, se pravi, ko je $r^2\theta = R^2\phi$, se formula nekoliko poenostavi:

$$p = \frac{1}{2}\left(R^2 \sin 2\phi - r^2 \sin 2\theta\right) .$$

Denimo, da je v takem primeru razmerje med središčnima kotoma enako racionalnemu številu $k$, torej $\theta = k\phi$. Potem je $R = r\sqrt{k}$ in ploščina lune $p = r^2(k \sin 2\phi - \sin 2k\phi)/2$. Ker pa vedno velja $r \sin\theta = R \sin\phi$, saj tako leva kot desna stran pomenita polovico iste lunine tetive (glej sliko 8), so za kot $\phi$ možne le tiste vrednosti, pri katerih je

$$\sin k\phi = \sqrt{k} \sin\phi \, .$$

To je v splošnem kar zapletena enačba. V posebnih primerih racionalnih števil $k$ pa se na srečo precej poenostavi, tako da za $\sin\phi$ dobimo enačbo, iz katere lahko samo s kvadratnimi koreni in štirimi računskimi operacijami izrazimo $\sin\phi$. Kot je dobro znano (glej npr. Ivan Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma, DMFAS, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972, str. 91), lahko tedaj $\sin\phi$, oziroma potem tudi sam kot $\phi$, konstruiramo samo z ravnilom in šestilom. To pa pomeni, da lahko tudi lunin krajec nad dano tetivo (ali z danim zunanjim ali notranjim polmerom) konstruiramo le z evklidskim orodjem. Formula za ploščino pove, da lahko enako konstruiramo tudi vrednost za $p$ oziroma ploščinsko enak kvadrat. Torej lahko v takem primeru upravičeno govorimo, da je kvadratura lune uspela.

Tri Hipokratove primere dobimo, če vzamemo $k = 2$, $k = 3$ ali $k = 3/2$.

**Naloga 15**. *Izračunajte* $\sin\phi$ *iz enačbe* $\sin k\phi = \sqrt{k}\sin\phi$, *če je* $k$ *enak* $2, 3$ *ali* $3/2$.

— — —

Nadaljnja dva primera, ko je kvadratura lune možna, je našel *M. J. Wallenius* leta 1766, in sicer za $k = 5$ in $k = 5/3$. *T. Clausen* pa je leta 1840 ponovno rešil primere $k = 3, 3/2, 5, 5/3$ (tedaj še ni bilo znano, da je primera $k = 3$ in $k = 3/2$ poznal že Hipokrat). Postavil je tudi domnevo, da razen teh in prve Hipokratove kvadrature ($k = 2$) ni drugih primerov uspešnega kvadriranja lune pri racionalnem razmerju središčnih kotov. Raziskovanje problema se je nadaljevalo v 20. stoletju. *E. Landau* je leta 1903 raziskal problem brez predpostavke, da je razlika med ploščinama krožnih izsekov, tj. med $r^2\theta$ in $R^2\phi$, enaka 0, ampak je enaka ploščini, ki je konstruktibilno število (se pravi, da jo lahko izrazimo iz števila 1 samo z racionalnimi operacijami in kvadratnimi koreni). Pokazal je, da ta razširitev ne pripelje do novih primerov kvadriranja. Istočasno je podal tudi dokaz, da za liho praštevilo $k$ kvadratura ni možna, če $k$ ni Fermatovo praštevilo (tj. praštevilo oblike $k = 2^{2^j} + 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$). Leta 1929 je *L. Čakalov* dokazal Landauvov izrek na krajši način in prispeval še neskončno drugih primerov, ko kvadrature ni. Seveda je bilo to še daleč od dokaza, da je kvadratura možna le v omenjenih petih primerih. Prvi pozitivni rezultat je leta 1934 prispeval *N. Čebotarev*, ki je Clausenovo domnevo potrdil za primer $k = m/n$, kjer sta $m$ in $n$ tuji lihi števili: izmed takih števil, je kvadratura možna le za $k = 3/1 = 3$, $k = 5/1 = 5$ in $k = 5/3$. Pri tem je uporabljal teorijo ti. $p$-adičnih števil. Problem je dokončno rešil šele *A. V. Dorodnov* leta 1947 z detajlno proučitvijo preostalega primera, ko je eno od števil $m, n$ liho, drugo pa sodo. S tem je bila Clausenova domneva v celoti potrjena, zgodba o Hipokratovih lunah pa zaenkrat zaključena.

*Milan Hladnik*