

RAČUNSKI MODELI ZA MEHANSKO ANALIZO DALJNOVODNIH VODNIKOV

COMPUTATIONAL MODELS FOR MECHANICAL ANALYSIS OF CONDUCTORS FOR OVERHEAD LINES

Anita Treven, univ. dipl. inž. grad.

anita.treven@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

Jamova 2, 1000 Ljubljana

Metod Bonča, univ. dipl. inž. grad.

metod.bonca@knaufinsulation.com

Knauf Insulation d. o. o., Trata 32, 4220 Škofja Loka

prof. dr. Dejan Zupan, univ. dipl. inž. mat.

dejan.zupan@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

Jamova 2, 1000 Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 624.072.2:627.712.8

Povzetek | V prispevku predstavimo in primerjamo različne računske modele za mehansko analizo daljnovodnih vodnikov. Preprosti računski modeli, kot so model plitke neraztegljive vrvi, model plitke raztegljive vrvi in model po inženirski teoriji vrvi, ob upoštevanju različnih poenostavitve glede konstrukcije in obtežbe omogočajo izračun osnih sil v vodniku po zaključenih formulah. Numerični model, ki temelji na geometrijsko točnem Reissnerjevem opisu nosilca, je zahtevnejši, zato ne poznamo analitičnih rešitev. Za njihovo reševanje uporabimo numerično metodo iz družine metod končnih elementov, kjer kot osnovne neznanke interpoliramo pomike in zasuke. Osne sile v vodniku nato izračunamo z integracijo ravnotežnih enačb. Obravnavamo primere različnih razmerij med povese in razpetino vodnika, različnih višinskih razlik med podporama in primer dodatne linijske obtežbe na polovici vodnika. Rezultate predstavljenih modelov med seboj primerjamo in prikažemo omejeno veljavnost zaključenih formul.

Ključne besede: daljnovodni vodniki, osno neraztegljiva vrv, osno raztegljiva vrv, model vrvi s plitkimi povesi, Reissnerjev nosilec, zaključene formule, numerično modeliranje, statična in dinamična analiza

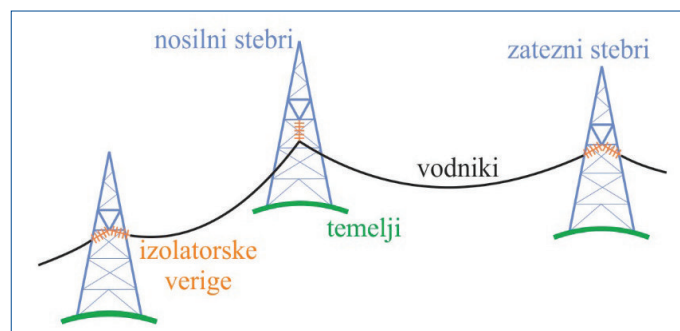
Summary | Several computational models for mechanical analysis of conductors for overhead lines are presented and compared. Simple computational models, such as inextensible shallow cable, extensible shallow cable and engineering cable theory, employ various simplifications and provide closed-form equations for computing resultant axial forces in conductors. With the use of a more general numerical model, based on Reissner beam theory, the analytical solution is usually not known. The equations are therefore solved numerically using finite element discretization with displacements and rotations being primary variables. Axial forces in conductors are later on integrated from equilibrium equations. Several configurations of a conductor are considered: different ratios of sag to span, height differences between the supports and additional load on half of the span. Results of presented models are compared and it is shown that the validity of closed-form equations is limited.

Key words: conductors for overhead lines, inextensible cable, extensible cable, shallow cable, Reissner beam, closed-form equations, numerical modelling, static and dynamic analysis

1 • UVOD

Daljnovid je zelo pomemben infrastrukturni objekt, saj zagotavlja prenos električne energije od elektrarne do porabnika. Pomembnost neprekinjenega obratovanja se je še posebej izkazala ob katastrofalnem pojavu žledu februarja 2014, ko je zaradi poškodb daljnovidne konstrukcije brez elektrike, posledično pa v več primerih tudi brez vode in ogrevanja ostalo veliko število gospodinjstev. Daljnovidno konstrukcijo sestavljajo temelji, daljnovidni stebri, izolatorske verige in daljnovidni vodniki. Za čim boljše poznavanje mehanskega odziva daljnovidne konstrukcije na različne obremenitve ter za čim bolj varno in ekonomično projektiranje potrebujemo takšen model konstrukcije, ki bo upošteval vse njene bistvene lastnosti. V praksi daljnovidne stebre običajno modeliramo in računamo po metodi končnih elementov. Modeliranje vodnikov pa je zaradi njihove nelinearne oblike in majhne upogibne togosti bolj zapleteno. Ustrezen mehanski model mora upoštevati vse bistvene značilnosti vodnikov. Tak model lahko izpeljemo iz enačb mehanike kontinuuma, vendar problem še vedno opisujejo diferencialne enačbe, odvisne od kraja in časa, ki jih običajno ne znamo rešiti analitično. Z vpeljavo različnih poenostavitvev ((Tibert, 1999), (Krenk, 2001), (Kržič, 1991), (Papič, 2007)) vodilne enačbe problema postanejo analitično rešljive, njihovim rešitvam pa v nadaljevanju rečemo zaključene formule. Zaradi vpeljanih poenostavitvev je območje veljavnosti zaključenih formul pomembno omejeno. V članku se osredotočimo na daljnovidne vodnike in podrobneje predstavimo nekatere izmed ravninskih matematičnih modelov za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov, za katere obstajajo analitične rešitve. Opišemo tudi računski model, pri katerem daljnovidni vodnik modeliramo z linijskimi končnimi elementi, ki temeljijo na geometrijsko

točnem Reissnerjevem opisu nosilca. Ta model je najbolj splošen, zato je reševanje enačb zahtevnejše. Za račun uporabimo program Nodi, ki smo ga razvili na Katedri za mehaniko Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani (Saje, 2009). Nodi je program za nelinearno dinamično analizo ravninskih okvirjev, ki deluje v programskem okolju Matlab (Matlab, 1999). Nodi temelji na aproksimaciji pomikov in zasukov nosilca z uporabo vozliščnih vrednosti in interpolacijskih funkcij. Notranje sile določimo s postprocesiranjem iz osnovnih neznank. Postopek je lahko numerično občutljiv, zato posebej predstavimo primeren pristop, ki zagotavlja natančne rezultate. Predstavljene matematične modele za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov med seboj primerjamo in določimo območje veljavnosti rezultatov, dobljenih z uporabo zaključenih formul.



Slika 1 • Shema elementov daljnovidne konstrukcije

2 • LASTNOSTI, GEOMETRIJA IN OBTEŽBA DALJNOVODNIH VODNIKOV

Osnovna naloga daljnovidnega vodnika je prevajanje električne energije. Velike dolžine vodnikov povečujejo električno upornost in s tem izgube energije, kar kompenziramo z dovolj velikimi prečnimi prerezi. Daljnovidni vodnik je tako, glede na pričakovane mehanske obremenitve, predimenzioniran. Pri projektiranju daljnovidnih konstrukcij nas zato notranje sile v vodnikih zanimajo predvsem zaradi vplivov na daljnovidne stebre. Seveda pa nas zaradi varnostnih razdalj med okolico in vodniki zanimajo tudi njihovi pomiki oziroma končni povesi. Daljnovidni vodnik je sestavljen iz več plasti žic, od katerih je vsaka plast navita v drugo smer. Sestava daljnovidnega vodnika povzroči, da je njegova upogibna togost majhna, vendar ne ničelna. Vztrajnostni moment prereza vodnika je namreč manjši od vztrajnostnega momenta prereza, pri katerem bi vse žice delovale kot celota, in večji od vztrajnostnega momenta prereza, pri katerem bi vsaka žica delovala samostojno (Tibert, 1999). Zaradi majhne upogibne togosti se daljnovidni vodnik obnaša podobno, kot to opisuje računski model vrvi. To pomeni, da vso obtežbo prevzame le z nateznimi osnimi silami. Oblika, ki jo zavzame vodnik, po dolžini obtežen z enakomerno linijsko obtežbo v smeri gravitacije, je zaradi tega podobna krivulji, imenovani verižnica. Pri majhnih razmerjih med razpetino in povesom vodnika se verižnica le malo razlikuje od kvadratne parabole (Treven, 2013). Dejanska deformirana

lega vodnika se od omenjenih krivulj razlikuje zaradi nepopolnega členkastega vpetja vodnika in zaradi njegove osne raztegljivosti. Pri opisu lege vodnika si v nadaljevanju članka pogosto pomagamo s pojmom razpetina l , s katerim označujemo vodoravno razdaljo med podporama, in poves d , ki pomeni navpično razdaljo med vodnikom in premico skozi podpori na sredini razpetine.

Stalno obtežbo daljnovidnih vodnikov predstavljajo njihova lastna teža in razni dodatki, kot so na primer letalske opozorilne krogle. Poglavitni spremenljivi obtežbi vodnikov sta žled in veter pravokotno na potek daljnovidne konstrukcije. Veter v smeri daljnovidne konstrukcije ima zaradi majhne površine vodnika le zanemarljiv vpliv. V članku kot obtežbo vodnikov upoštevamo le lastno težo in žled, saj so vsi primerjani računski modeli ravninski.

Na osne sile v vodniku vplivajo tudi temperaturne spremembe, saj lahko zaradi velikih razpetin povzročijo pomembno raztezanje oziroma krčenje vodnika in s tem spremembo povesa pri nespremenjeni mehanski obtežbi. Nobeden od obravnavanih modelov za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov v svojih enačbah ne upošteva temperaturnih sprememb. Ker je namen tega članka predstaviti razlike med računskimi modeli za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov, in ne generiranja montažnih tabel, temperaturnih sprememb nismo zajeli.

Tako je v vseh primerih, vključno s primerom dodatne obtežbe žledu, ki lahko v realnosti seveda nastopi le ob nizkih temperaturah, masa na enoto dolžine vodnika upoštevana glede na podatke iz standarda (SIST, 2002), kot da ni bilo nobenega raztezanja oziroma krčenja zaradi temperaturnih sprememb.

Mehanski odziv vodnikov lahko analiziramo ločeno po zateznih poljih. Zatezno polje omejujeta zatezna stebra, vmes pa je lahko več nosilnih stebrov. Stebre ločimo na zatezne in nosilne glede na način, na katerega je nanje preko izolatorske verige obešen vodnik, kar prikazujemo na

sliki 1. Različne tipe obesišč modeliramo z različnimi tipi podpor. Zatezni steber prevzame tako vodoravno kot navpično komponento osne sile vodnikov. V uporabljenih računskih modelih tak tip obesišča opišemo z nepomično členkasto podporo. Pri nosilnem stebru pa se izolatorska veriga lahko zavrti v smeri rezultante osnih sil obeh vodnikov. Tako obesišče lahko najpogosteje modeliramo kar s členkasto podporo, pomično v vodoravni smeri. V geometrijsko nelinearnem numeričnem modelu pa uporabimo opis z nepomično členkasto podporo, na katero je pritrjen kratek, osno in upogibno zelo tog nosilec.

3 • PREDSTAVITEV RAZLIČNIH RAČUNSKIH MODELOV ZA MEHANSKO ANALIZO DALJNOVODNIH VODNIKOV

Daljnovidni vodnik v okviru enega zateznega polja poteka znotraj ene ravnine, njegova dolžina pa je v primerjavi z dimenzijami prečnega prereza zelo velika. Ravninski linijski računski modeli tako povsem zadoščajo za modeliranje takega vodnika, seveda ob omejitvi na ustrezne obtežbe (na lastno težo in žled). V tem razdelku podajamo predpostavke in vodilne enačbe posameznih modelov za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov. Pri zaključenih formulah se omejimo na tiste, ki opisujejo vodnik z enakomerno porazdeljeno obtežbo v navpični smeri. Izpeljava enačb je podrobno opisana v (Treven, 2013).

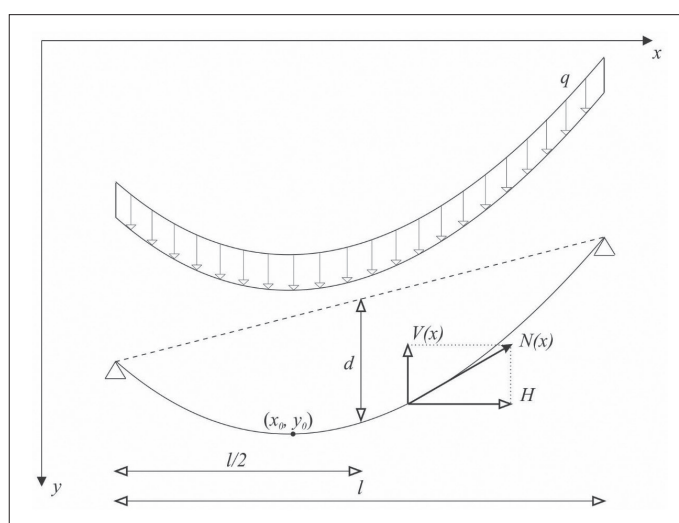
3.1 Osnovno neraztegljiva vrv

Osnovno neraztegljiva vrv, imenovana tudi idealna vrv, je najpreprostejši mehanski model daljnovidnega vodnika preko enega polja. Že iz imena modela je razvidno, da so osni raztezki vodnika zanemarljeni. Poleg tega predpostavimo, da je upogibna togost zanemarljivo majhna, sistem osnovnih enačb konstrukcije pa ustrezno reduciran. Oblika ravnotežne lege osno neraztegljive vrvi, obtežene z enakomerno porazdeljeno obtežbo, ki deluje po dolžini vodnika v smeri gravitacije, je verižnica. Prvi so jo zapisali Leibniz, Huygens in Bernoulli (Tibert, 1999). Splošna rešitev za obliko verižnice in osno silo v njej je podana v enačbah (1) in (2). Pri tem $y(x)$ predstavlja obliko vrvi, q velikost enakomerne porazdeljene obtežbe v smeri gravitacije, N osno silo ter V navpično in H vodoravno komponento osne sile v vrvi. Za slednjo se izkaže, da je po celotni dolžini vrvi konstantna. y_0 in x_0 sta koordinati temena krivulje (ki ni nujno na polovici razpetine – odvisno od višinske razlike med podporama). Opozoriti velja, da je koordinatna os y usmerjena navzdol.

$$y(x) = y_0 + \frac{H}{q} \left(1 - \cosh \left(\frac{q}{H} (x - x_0) \right) \right) \quad (1)$$

$$N(x) = H \cosh \left(\frac{q}{H} (x - x_0) \right). \quad (2)$$

Koordinati temena in vodoravna komponenta osne sile so neznane konstante, ki jih je treba določiti iz treh robnih pogojev: razpetine l , navpične razdalje med podporama h in dolžine vrvi L_0 . Z izjemo posebnih primerov to ni preprosto, zato se pri modelu osno neraztegljive vrvi dodatno omejimo na majhna razmerja povesa proti razpetini. Tak model imenujemo plitka vrv. Obliko vrvi pri teh predpostavkah opišemo s kvadratno parabolo:



Slika 2 • Veržnica

$$y(x) = \frac{lqx}{2H} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + y_2 \frac{x}{l} + y_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (3)$$

$$N(x) = H \sqrt{1 + \left(-\frac{qx}{H} + \frac{lq}{2H} + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2}. \quad (4)$$

Podrobnosti najdemo npr. v (Tibert, 1999) ali (Krenk, 2001). Z indeksoma 1 in 2 smo označili koordinate leve in desne podpore. Edina neznanka problema ostane vodoravna komponenta osne sile v vrvi. Določimo jo lahko iz znane dolžine vrvi kot pozitivno rešitev kvadratne enačbe (5) ali iz znanega povesa vrvi y pri nekem x med x_1 in x_2 po enačbi (3).

$$L_0 = l + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2l} + \frac{l^3 q^2}{24H^2}. \quad (5)$$

3.2 Osnovno raztegljiva vrv

Daljnovidni vodnik je, tako zaradi sestave prereza kot zaradi materiala, osno raztegljiv. Povečanje dolžine se odraža v povečanju povesa vodnika in obratno. Posebno veliki osni raztezki se pojavijo pri vodnikih z majhnim razmerjem med začetnim povesom in razpetino, kjer nastopajo velike natezne osne sile. Model osno neraztegljive vrvi zato ne

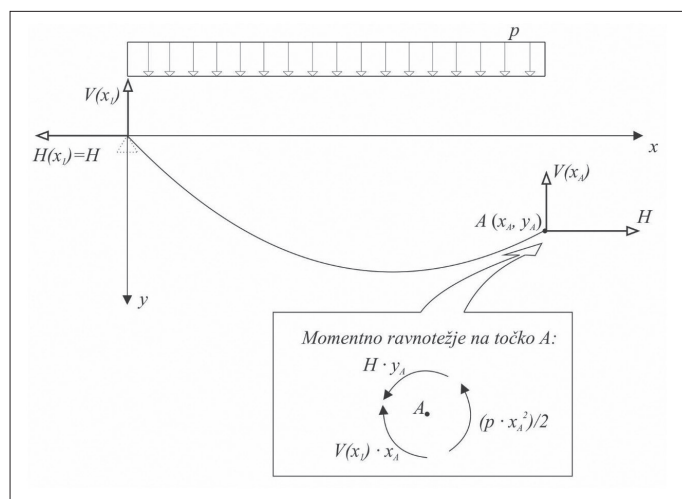
zadostja vedno. Natančnejši je model osno raztegljive vrvi, ki upošteva osne raztezke vrvi po Hookovem zakonu, upogibna togost pa je še vedno enaka nič. Izpeljava pokaže, da bo največja osna sila vedno nastopila v zgornji izmed podpor (Tibert, 1999), vendar v splošnem deformirana lega vrvi ni znana v zaključeni obliki. Z omejitvijo na plitke raztegljive vrvi lahko približno določimo novo dolžino vrvi tako, da izenačimo osno silo z njeno vodoravno komponento (Krenk, 2001). Potem velja

$$L_0 \left(1 + \frac{H}{EA} \right) = l + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2l} + \frac{l^3 q^2}{24H^2}. \quad (6)$$

Iz enačbe (6) izračunamo približno vodoravno komponento osne sile v vrvi in jo uporabimo v enačbah (3) in (4). Tako dobimo približno obliko vrvi in osne sile v njej ob upoštevanem osnem raztezk.

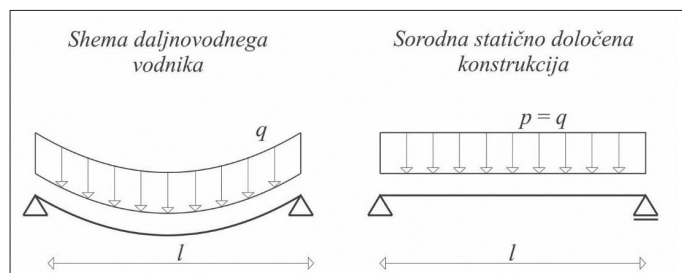
3.3 Inženirska teorija vrvi

Inženirska teorija vrvi je osnovana na predpostavki, da je oblika vrvi takšna, da je notranji moment v vsaki točki težiščne osi vrvi enak nič (Kržič, 1991). Notranji moment zaradi obtežbe in navpične reakcije v podpori mora torej uravnotežiti konstantna vodoravna komponenta osne sile.



Slika 3 • Osnovni princip inženirske teorije vrvi

Notranji moment, ki ga mora nadomestiti vrv z ustrezno osno silo in deformirano obliko, Kržič določi na sorodni, statično določeni konstrukciji. V primeru vrvi preko enega polja, ne glede na višinsko razliko med podporama, je za sorodno konstrukcijo predlagan kar vodoraven prostoležeči nosilec, obremenjen z enakomerno porazdeljeno prečno obtežbo p .



Slika 4 • Shema daljnovidnega vodnika in sorodna statično določena konstrukcija po inženirski teoriji vrvi s pripadajočo obtežbo

Notranji upogibni momenti prostoležečega nosilca, obremenjenega z enakomerno porazdeljeno obtežbo v smeri gravitacije, imajo po Euler-Bernoullijevi teoriji nosilcev obliko kvadratne parabole. V skladu z inženirsko teorijo vrvi je takšna tudi oblika vrvi, kar se ujema z že opisanim modelom plitke vrvi. Torej lahko sklepamo, da veljavnost za majhna razmerja med povosom in razpetino vodnika omejuje tudi inženirska teorija vrvi. Poleg tega predstavljeni mehanski model velja le za majhna razmerja med navpično in vodoravno razdaljo med podporama. Prednost tega modela je predvsem v preprostosti enačb. Ob poznanem začetnem povosu na sredini razpetine lahko enostavno določimo vodoravno komponento osne sile in obratno:

$$d = \frac{pl^2}{8H}. \quad (7)$$

Lahko pa vodoravno komponento osne sile zaradi enakomerne linijske obtežbe določimo tudi iz znane začetne dolžine vrvi:

$$L_0 = \sqrt{h^2 + l^2} + \frac{pl^4}{3H\sqrt{h^2 + l^2}}. \quad (8)$$

Vpliv raztegljivosti vrvi je v enačbi zanemarljen. Oso silo po vodniku potem izračunamo kot

$$N = H \sqrt{1 + \frac{p^2 l^2}{4H^2} - \frac{p^2 x l}{H^2} + \frac{p^2 x^2}{H^2} - \frac{16pxh}{8Hl} + \frac{h^2}{l^2} + \frac{8ph}{8H}}. \quad (9)$$

V (Kržič, 1991) najdemo tudi zaključene formule za nekatere primere dodatne linijske obtežbe in za račun vrvi preko več kot enega polja. V izrazu (10) povzemamo kubično enačbo za izračun nove celotne vodoravne komponente osne sile v vrvi H_v , ki nastopi ob obremenitvi vodnika z lastno težo in z dodatno enakomerno linijsko obtežbo, ki deluje le na levi polovici vodnika. H v enačbi pomeni vodoravno komponento osne sile zaradi prvotne obtežbe.

$$H_v^3 - H_c^2 \left[H - \frac{EA p^2 l^2}{24H^2} \right] - \frac{EA}{2l} \left[\frac{p^2 l^3}{12} + \frac{5p_{dod}^2 l^3}{192} + \frac{p_{dod} p l^3}{12} \right] = 0 \quad (10)$$

3.4 Geometrijsko točen Reissnerjev model nosilca

Veliko število predpostavk in poenostavitev, ki jih upoštevamo v različnih mehanskih modelih vrvi, omogoča rešljivost enačb v zaključeni obliki, vendar hkrati zmanjšuje njihovo natančnost in jim omejuje veljavnost. Druga možnost so natančnejši modeli, pri katerih pa za reševanje enačb potrebujemo numerične algoritme. Zaradi majhne upogibne togosti vodnikov in zahtevne začetne geometrije pa moramo biti pri izbiri numeričnega modela previdni. Primeren linijski računski model mora biti neobčutljiv za majhne vrednosti geometrijskih karakteristik prereza. Končni elementi za statično analizo praviloma niso takšni, zato za analizo uporabimo dinamične modele. Takšen model geometrijsko nelinearnega nosilca je implementiran v programu Nodi (Saje, 2009) za dinamično analizo ravninskih linijskih konstrukcij. Programsko okolje Nodi predstavlja numerično implementacijo enačb kinematično točnega nosilca (Reissner, 1972), kjer se ne omejimo pri velikosti pomikov in zasukov, upoštevamo pa tudi časovno odvisnost količin. Takšen pristop je precej zahtevnejši, vendar se izkaže za zelo

učinkovitega za obravnavane probleme. Poleg tega lahko v nasprotju s preprostejšimi modeli spremljamo dinamični odziv vodnikov. Ta je še posebno zanimiv in nezanemarljiv, kadar se obtežba izrazito spreminja s časom. Celoten nabor vodilnih enačb sestavljajo

i enačbe dinamičnega ravnotežja:

$$R'_x + p_x = \rho A \ddot{u} \quad (11)$$

$$R'_y + p_y = \rho A \ddot{w} \quad (12)$$

$$M' + w'R_x - (1 + u')R_y + m = \rho I \ddot{\varphi} \quad (13)$$

ii kinematične enačbe:

$$1 + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi - \gamma \sin \varphi = 0, \quad (14)$$

$$w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi = 0, \quad (15)$$

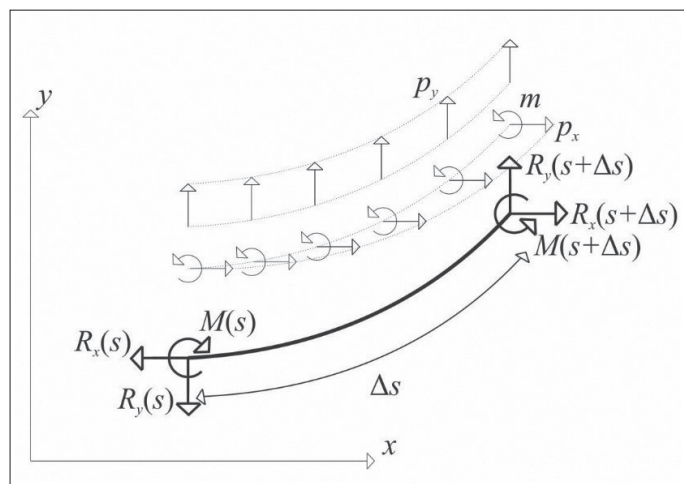
$$\kappa = \varphi'. \quad (16)$$

iii in konstitucijske enačbe:

$$N = EA\varepsilon, \quad (17)$$

$$Q = GA_s\gamma, \quad (18)$$

$$M = EI\kappa. \quad (19)$$



Slika 5 • Obtežba in notranje sile na delu Reissnerjevega nosilca dolžine Δs

V enačbah smo z R_x in R_y označili notranje sile v globalnem koordinatnem sistemu, z N in Q v lokalnem koordinatnem sistemu, M pa predstavlja notranji upogibni moment. Linijsko obtežbo smo označili s p_x oziroma p_y in linijski moment z m . Pomen teh oznak je prikazan tudi na sliki 5. Vodoravni pomik je označen z u , navpični pomik z w , zasuk pa z φ . V enačbah nastopajo še osna, strižna, in upogibna deformacija, ki smo jih označili z ε , γ in κ . Te količine so odvisne od kraja (s) in časa (t). Geometrijske lastnosti prečnega prereza so njegova površina A , strižni prerez A_s in vztrajnostni moment I , materialne lastnosti pa gostota ρ , elastični modul E in strižni modul G .

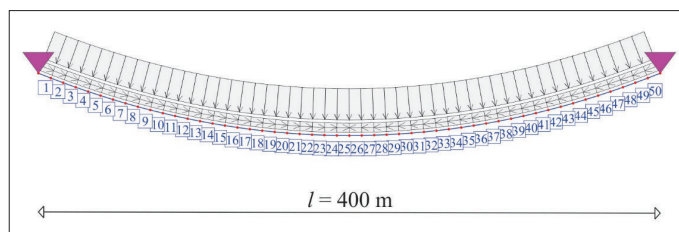
Med notranjimi silami v globalnem in lokalnem koordinatnem sistemu velja naslednja zveza:

$$R_x = N \cos \varphi - Q \sin \varphi \quad \text{in} \quad (20)$$

$$R_y = N \sin \varphi + Q \cos \varphi \quad (21)$$

V enačbah označuje ($'$) odvod po kraju, ($\cdot$) pa odvod po času. Opraviiti imamo torej s sistemom algebrskih in parcialnih diferencialnih enačb, ki zahteva precejšnjo skrbnost pri reševanju. Osnovne enačbe smo diskretizirali po kraju v skladu z Galerkinovo metodo končnih elementov. Pomike in zasuke smo izbrali za osnovne neznanke sistema enačb, jih nadomestili z neznanimi diskretnimi vrednostmi in nato interpolirali z Lagrangevimi polinomi. Pri prikazanih računskih primerih smo uporabili tretjo stopnjo interpolacije po kraju. Za diskretizacijo po času uporabimo enačbe družine Runge-Kutta, ki so vgrajene v programsko okolje Matlab. Tako dobimo algoritem za določitev pomikov in zasukov linijske konstrukcije. Ostale količine določimo iz enačb (14)–(19) s postprocesiranjem. Posebno nas zanimajo notranje sile v elementih, pri analizi vodnikov pa smo se osredotočili na natančnost določanja osnih sil. Ugotovimo lahko, da standardne metode ne omogočajo izračuna notranjih sil enako natančno, kot so določeni pomiki in zasuki. Ta pojav je lahko pri vrveh zaradi majhne upogibne togosti še izrazitejši. V nadaljevanju predlagamo določanje notranjih sil višje natančnosti. Naš postopek temelji na integraciji ravnotežnih enačb ob znanem polju pomikov in zasukov. Integracijske konstante določimo z reševanjem konstitucijskih enačb v diskretni točki. Za primerno točko smo izbrali višjeležečo Liewovo superkonvergentno točko (Liew, 2002), v kateri je natančnost odvodov pomikov in zasukov enake stopnje kot natančnost samih pomikov in zasukov. Njena relativna koordinata za končne elemente do polovice polja je $-\sqrt{2/3}$ polovice dolžine končnega elementa, gledano od sredine končnega elementa. Za preostale končne elemente je njena relativna koordinata $+\sqrt{2/3}$ polovice dolžine končnega elementa, gledano od sredine končnega elementa.

Daljnovodni vodnik, razpet med dvema podporama, smo modelirali s petdesetimi zgoraj opisanimi ravnimi končnimi elementi, katerih vozlišča smo razporedili po liniji kvadratne parabole. Obtežbo smo podali v lokalnem koordinatnem sistemu. Začetna oblika konstrukcije, podane v programu Nodi, je prikazana na sliki 6.



Slika 6 • Začetna oblika konstrukcije, podana v programu Nodi, z označenimi končnimi elementi in obtežbo

4 • PRIMERJAVA RAČUNSKIH MODELOV ZA MEHANSKO ANALIZO DALJNOVODNIH VODNIKOV

V obravnavanih računskih primerih smo privzeli lastnosti daljnovidnega vodnika 490-AL1/64-ST1A (oziroma po starih oznakah Al/Fe 490/65) (SIST, 2002). Tak vodnik je primeren za visokonapetostne daljnovode, za katere so značilne velike razpetine. Prerez vodnika znaša $553,8 \text{ mm}^2$, njegov elastični modul je 70000 N/mm^2 , gostota pa $3345,8 \text{ kg/m}^3$. Pri modeliranju vodnika v programu Nodi smo potrebovali še nekaj podatkov o vodniku, ki v standardu niso navedeni. Za strižni prerez smo privzeli vrednost $461,5 \text{ mm}^2$, za strižni modul pa polovico elastičnega modula. Vztrajnostni moment smo izbrali v vrednosti $4,701 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$, kar znaša 1 % največjega možnega vztrajnostnega momenta vodnika po (Tibert, 1999). Taka izbira nam zagotavlja majhno, vendar ne ničelno upogibno togost vodnika, poleg tega pa je izbrana vrednost večja od spodnje meje vztrajnostnega momenta vodnika po (Tibert, 1999). Vrednost linijske obtežbe zaradi lastne teže znaša $18,176949 \text{ N/m}$. Obtežbo zaradi žledu smo določili po standardu (SIST, 2009) za izbrani vodnik v 3. žledni coni, kjer se žled pojavlja v največjih količinah. Njena vrednost znaša $49,7855 \text{ N/m}$. Vso obtežbo smo, z izjemo dinamičnega primera v razdelku 4.3, v programu Nodi nanašali dovolj počasi, da so bili dinamični učinki zanemarljivi; obtežbo smo od ničelne do polne vrednosti nanesli v 360 s.

Na tem mestu omenimo še, da smo enake vrednosti obtežbe privzeli tako za obtežbo q , ki deluje po dolžini vodnika, kot tudi za obtežbo p na sorodni statično določeni konstrukciji pri inženirski teoriji vrvi.

4.1 Veljavnost zaključenih formul pri različnih razmerjih med začetnim povesom in razpetino

V prvem računskem primeru smo obravnavali veljavnost zaključenih formul pri različnih razmerjih med začetnim povesom in razpetino vodnika. Razpetina je bila v vseh primerih enaka 400 m, podpori sta bili na enakih višinah, spreminjali pa smo začetni poves vodnika. Vrednosti analiziranih začetnih povesov so bile med 20 m in 200 m oziroma med 5 % in 50 % razpetine.

Med seboj smo primerjali štiri računske modele za mehansko analizo daljnovidnih vodnikov: osno neraztegljivo plitko vrv (ONPV), osno raztegljivo plitko vrv (ORPV), inženirsko teorijo vrvi (ITV) in geometrijsko nelinearni model nosilca (Nodi). Z vsakim modelom smo izračunali osno silo v vodniku pri levi in desni podpori (ki sta, v primeru podpor na enakih višinah, enaki) ter vodoravno komponento osne sile. Rezultati so prikazani v preglednici 1.

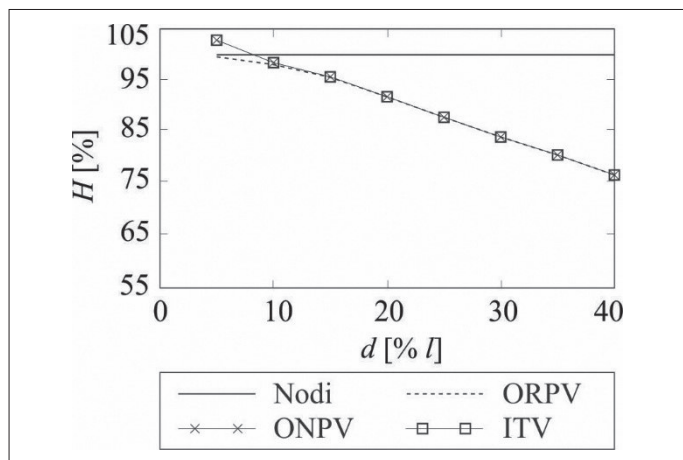
Rezultati modela osno neraztegljive plitke vrvi in inženirske teorije vrvi so popolnoma enaki, kar je posledica podobnih predpostavk in enakih vrednosti obtežb q in p . V primeru preračunavanja obtežbe p glede na dolžino vrvi bi se rezultati močno razlikovali, glej (Treven, 2013). Sile, izračunane z modelom osno raztegljive vrvi, pa so nekoliko manjše. To je pričakovano, saj osni raztezek hkrati pomeni tudi večji dejanski poves, ki je obratno sorazmeren z vodoravno komponento osne sile, kar je po kratkem premisleku med drugim razvidno iz enačb (3) in (7).

Pri manjših povesih se vrednosti sil, izračunane po zaključenih formulah, dobro ujemajo z rezultati geometrijsko nelinearnega modela. Z večanjem začetnega povesa pa se razlike hitro povečujejo in pri povesu v vrednosti 20 % razpetine so sile, izračunane z zaključenimi formulami, za 8,1 % manjše od sil, dobljenih z geometrijsko nelinearnim modelom, pri povesu v vrednosti 40 % razpetine pa že za

Osna sila v vodniku pri podpori (N)					
d (m)	d (% l)	ONPV	ORPV	ITV	Nodi
20	5	18536,92	17956,54	18536,92	18027,43
40	10	9788,587	9750,939	9788,587	9939,717
60	15	7065,928	7058,781	7065,928	7379,999
80	20	5819,463	5817,309	5819,463	6331,938
100	25	5141,218	5140,375	5141,218	5846,159
120	30	4732,217	4731,826	4732,217	5624,415
140	35	4467,544	4467,338	4467,544	5538,524
160	40	4287,025	4286,907	4287,025	5580,892
200	50	4064,489	4064,442	4064,489	5919,157
Vodoravna komponenta osne sile v vodniku (N)					
d (m)	d (% l)	ONPV	ORPV	ITV	Nodi
20	5	18176,95	17584,69	18176,95	17644,56
40	10	9088,475	9047,914	9088,475	9186,666
60	15	6058,983	6050,647	6058,983	6248,489
80	20	4544,237	4541,478	4544,237	4809,819
100	25	3635,39	3634,198	3635,39	3944,27
120	30	3029,492	3028,88	3029,492	3382,805
140	35	2596,707	2596,354	2596,707	2991,487
160	40	2272,119	2271,896	2272,119	2702,335
200	50	1817,695	1817,588	1817,695	2293,291

Preglednica 1 • Primerjava osnih sil ob podporah in njihovih vodoravnih komponent za različne računske modele in različna razmerja med povesom in razpetino vodnika

24,2 %. Z uporabo zaključenih formul smo torej pri velikih razmerjih med začetnim povesom in razpetino na nevni strani. Na sliki 7 prikazujemo relativne vrednosti osnih sil ob podporah za obravnavane modele in razmerja, pri čemer za referenčne vrednosti izberemo rezultate geometrijsko točnega modela.

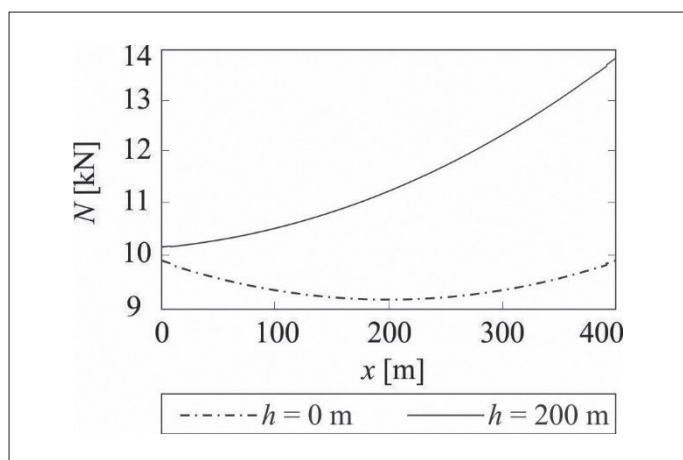


Slika 7 • Relativne vrednosti osnih sil v vodniku ob podporah, dobljene z obravnavanimi modeli, glede na referenčne vrednosti, dobljene z geometrijsko točnim modelom, za različna razmerja med povosom in razpetino

Vrednost osnih sil, dobljenih s programom Nodi, je za začetni povos 160 m večja od tistih pri začetnem povosu 140 m, kar je v nasprotju s pričakovanji, da so pri večjih povosih manjše osne sile. Opozorimo, da pri takšnih povosih ne moremo izključiti vpliva geometrijske nelinearnosti, ki ima pomemben vpliv na rezultate. Z nadaljnjim večanjem razmerja med povosom in razpetino se osne sile v vodniku ob podpori po geometrijsko točnem modelu povečujejo, kar je razvidno tudi iz rezultatov za začetni povos 200 m.

4.2 Veljavnost zaključenih formul pri različnih višinskih razlikah med podporama

Zanimala nas je tudi veljavnost zaključenih formul pri različnih višinskih razlikah med podporama h . V ta namen smo pri razpetini 400 m in začetnem povosu 40 m spreminjali višinsko razliko med podporama od 0 m do 800 m.



Slika 8 • Razpored osnih sil po dolžini vodnika pri dveh različnih višinskih razlikah med podporama

Ponovno smo primerjali štiri računske modele za mehansko analizo daljnovodnih vodnikov: osno neraztegljivo plitko vrv, osno raztegljivo plitko vrv, inženirsko teorijo vrvi in geometrijsko nelinearni model

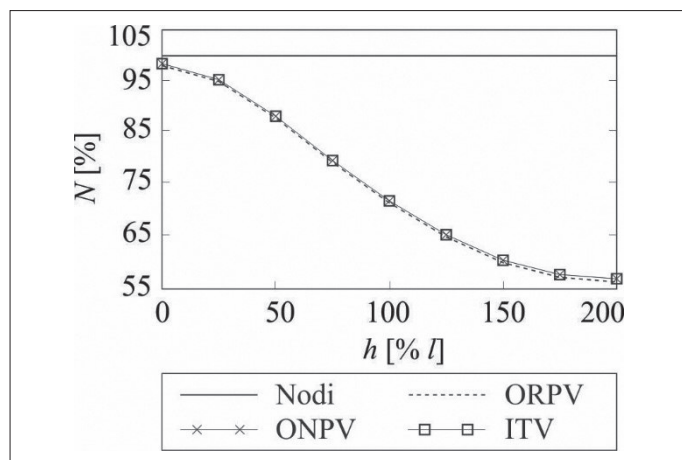
nosilca. V preglednici 2 prikazujemo vodoravno komponento osne sile in osno silo ob višjeležeči podpori, kjer je ta največja. To je med drugim razvidno tudi s slike 8, na kateri prikazujemo razpored osnih sil po dolžini vodnika za različni višinski razliki med podporama: $h = 0$ m in $h = 200$ m.

Osna sila v vodniku pri zgornji podpori (N)					
h (m)	h (%)	ONPV	ORPV	ITV	Nodi
0	0	9788,587	9750,939	9788,587	9939,717
100	25	10839,7	10798,98	10839,7	11364,11
200	50	12227,29	12178,33	12227,29	13841,12
300	75	13850,61	13787,66	13850,61	17359,73
400	100	15636,4	15552,72	15636,4	21715,78
500	125	17535,1	17422,68	17535,1	26783,23
600	150	19513,78	19363,19	19513,78	32228,35
700	175	21550,42	21350,74	21550,42	37296,9
800	200	23630,03	23368,9	23630,03	41470,31
Vodoravna komponenta osne sile v vodniku (N)					
h (m)	h (%)	ONPV	ORPV	ITV	Nodi
0	0	9088,475	9047,914	9088,475	9186,666
100	25	9088,475	9046,693	9088,475	9442,658
200	50	9088,475	9043,037	9088,475	10157,07
300	75	9088,475	9036,959	9088,475	11235,35
400	100	9088,475	9028,484	9088,475	12367,17
500	125	9088,475	9017,645	9088,475	13527,87
600	150	9088,475	9004,486	9088,475	14574,36
700	175	9088,475	8989,055	9088,475	15088,68
800	200	9088,475	8971,413	9088,475	15015,31

Preglednica 2 • Primerjava osnih sil ob zgornji podpori in njihovih vodoravnih komponent za različne računske modele in različna razmerja med višinsko razliko med podporama in razpetino vodnika

Razlike med rezultati po zaključenih formulah in geometrijsko nelinearnega modela se z večanjem višinske razlike med podporama hitro povečujejo. Pri višinski razliki 200 m so vrednosti osne sile pri zgornji podpori, dobljene po zaključenih formulah, za okoli 12 % manjše od vrednosti, dobljenih z geometrijsko točnim modelom. Pri višinski razliki 400 m je ta razlika okoli 28 %, pri 800 m pa kar okoli 43 %. Na sliki 9 prikazujemo relativne vrednosti osnih sil ob zgornji podpori za obravnavane modele in višinske razlike med podporama, pri čemer za referenčne vrednosti izberemo rezultate geometrijsko točnega modela. Vodoravna komponenta osne sile po zaključenih formulah se z večanjem višinske razlike med podporama ne povečuje, saj je po predpostavkah linijska obtežba enakomerno razporejena kar po veznici med podporama

in se torej skupna obtežba z večanjem višinske razlike ne povečuje. Pri geometrijsko točnem modelu, kjer te predpostavke ni, pa se z večanjem višinske razlike in posledično večanjem dolžine vodnika povečuje tudi skupna obtežba oziroma vodoravna komponenta osne sile.



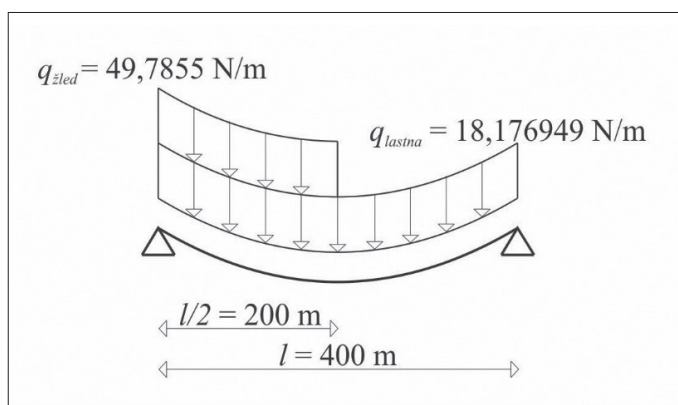
Slika 9 • Relativne vrednosti osnih sil v vodniku ob zgornji podpori, dobljene z obravnavanimi modeli, glede na referenčne vrednosti, dobljene z geometrijsko točnim modelom, za različna razmerja med višino in razpetino

Veljavnost zaključenih formul je zelo očitno omejena z višinsko razliko med podporama. Večja ko je ta razlika, bolj smo z njihovo uporabo na nevarni strani.

4.3 Veljavnost zaključenih formul pri dodatni dinamični obtežbi

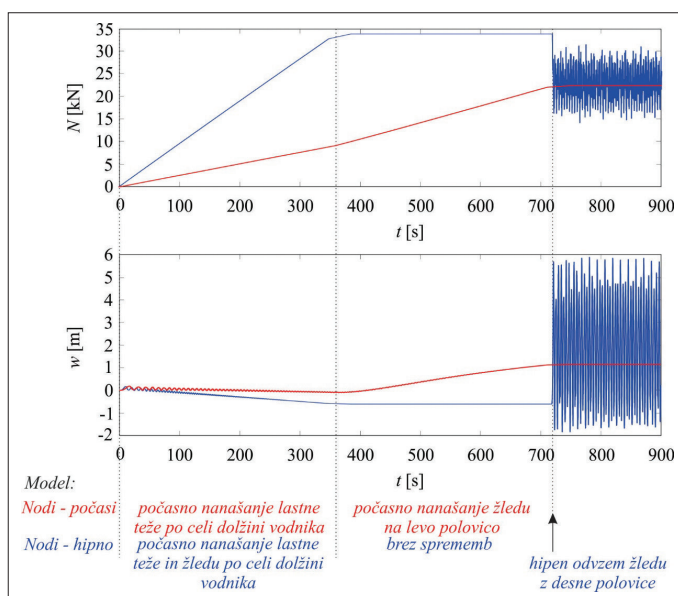
V zadnjem primeru ugotavljamo veljavnost zaključenih formul pri dodatni obtežbi, ki se s časom spreminja. Daljnovidni vodnik preko enega polja z razpetino 400 m in začetnim povosom 40 m smo pri konstantni temperaturi najprej obremenili z lastno težo, nato pa še z obtežbo žledu. Med seboj smo primerjali tri mehanske modele: statični model po inženirski teoriji vrvi, geometrijsko točen model s počasnim nanašanjem dodatne obtežbe in geometrijsko točen model, kjer je sprememba obtežbe hipna in zato povzroči izrazit dinamični odziv vodnika. Pri prvih dveh modelih smo najprej upoštevali obtežbo zaradi lastne teže in nato dodali obtežbo zaradi žledu, enakomerno porazdeljeno po levi polovici polja. Dinamične vplive smo pri tem zanemarili. V tretjem primeru pa smo najprej počasi nanesli obtežbo zaradi lastne teže in zaradi žledu po celotnem polju, nato pa smo hipno odvzeli obtežbo zaradi žledu z desne polovice polja, tako da je bilo končno obtežno stanje, ki ga prikazujemo na sliki 10, enako kot pri prvih dveh analizah. Odziv nosilca je bil po takšni analizi precej bolj realističen.

Za drugi in tretji model so na sliki 11 za točko na sredini nosilca prikazane osne sile (zgoraj) in navpični odmiki od začetne lege (spodaj) v odvisnosti od časa. Po hipnem odvzemu žledu pri 720 s začnejo tako sile kot pomiki nihati okoli ravnovesne lege, ki je blizu rezultatom drugega modela v tem časovnem območju. Za varnost konstrukcije so problematične ekstremne vrednosti amplitud nihanja. Največje osne sile po odvzemu žledu v obravnavanem primeru sicer ne presežejo največjih osnih sil pri statični obtežbi celega vodnika z lastno težo in žledom, kar pa še ne pomeni, da jih ne presežejo na primer ob drugačni geometriji konstrukcije ali razporeditvi preostale obtežbe. Povos vodnika na sredini razpona se po hipnem odvzemu žledu spreminja znotraj skoraj 8-metrskega intervala, njegove ekstremne vrednosti pa so kar



Slika 10 • Shema obravnavanega daljnovidnega vodnika, obteženega z lastno težo in žledom

za 1,2 m nižje od vrednosti povosa pri obtežbi celega vodnika z lastno težo in žledom ter za 4,7 m višje od vrednosti povosa pri počasnem nanašanju žledu na polovico vodnika. Rezultati kažejo, da lahko dinamični odziv vodnika pomembno zmanjša varnostno razdaljo med daljnovidnim vodnikom in okolico.



Slika 11 • Časovni potek pomika in osnih sil na sredini nosilca, dobljen z geometrijsko točnim modelom

Vodoravne komponente osne sile, dobljene s primerjanimi modeli, predstavljamo v preglednici 3. Ob počasnem nanašanju obtežbe smo jih dobili po koncu računskega časa, pri hipnem nanašanju obtežbe pa navajamo največjo vodoravno komponento osne sile v obravnavanem časovnem intervalu.

Vodoravna komponenta osne sile v vodniku			
	ITV	Nodi – počasi	Nodi – hipno
(N)	22274,41	22353	29131
(% Nodi – hipno)	76,463	76,733	100

Preglednica 3 • Primerjava vodoravnih komponent osne sile v vodniku za različne računske modele pri dodatni obtežbi polovice vodnika z žledom

Med tremi preizkušeni modeli dobimo po inženirski teoriji vrvi najmanjše vrednosti vodoravne komponente osne sile, ki pa so vseeno blizu vrednostim, dobljenim ob počasnem nanašanju obtežbe. Z

upoštevanjem dinamičnih vplivov je vodoravna komponenta osne sile v vodniku takoj po začetku nihanja mnogo večja. Z uporabo zaključenih formul ali statičnih analiz smo tako v tem primeru na nevarni strani.

5 • SKLEP

V članku smo opisali in med seboj primerjali naslednje računske modele za mehansko analizo daljnovodnih vodnikov: model neraztegljive plitke vrvi, model raztegljive plitke vrvi, inženirsko teorijo vrvi in dinamično analizo po geometrijsko točnem modelu daljnovodnih vodnikov. Pokazali smo, da:

- z modelom neraztegljive plitke vrvi in po inženirski teoriji vrvi dobimo enake osne sile v vodniku, kadar v obeh primerih privzamemo enako velikost obtežbe;
- z modelom raztegljive plitke vrvi zaradi večjega končnega povesa dobimo nekoliko manjše osne sile v vodniku kot s preostalima dvema preprostima računskima modeloma;
- je veljavnost zaključenih formul omejena z večanjem razmerja povesa proti razpetini – pri večjih razmerjih smo z njihovo uporabo na nevarni strani;

- je veljavnost zaključenih formul omejena z večanjem višinske razlike med podporama – pri večjih razlikah smo z njihovo uporabo na nevarni strani;
- lahko s statično analizo pomembno podcenimo dinamični odziv vodnika zaradi hipne spremembe obtežbe.

Vsekakor pa daljnovodna konstrukcija zaradi svojih številnih posebnosti ponuja še veliko možnosti za nadaljnji razvoj numeričnih modelov za mehansko analizo daljnovodnih vodnikov. Zanimivi nadgradnji bi bili na primer vpeljava ukrivljenih linijskih končnih elementov, s katerimi bi še bolje opisali začetno obliko vodnika, ter uporaba dinamičnega prostorskega modela, s katerim bi lahko zajeli tudi prečno obtežbo na konstrukcijo.

6 • ZAHVALA

Zahvaljujemo se Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je finančno podprla delo A. Treven po pogodbi št. 1000-14-0510 v skladu z odločbo 1240-1/2013-49.

7 • LITERATURA

- Krenk, S., *Mechanics and analysis of beams, columns and cables*. 2. ed.. Berlin, Springer-Verlag, str. 195–231, 2001.
- Kržič, F., *Osnovne enačbe vrvi*, Neobjavljeno študijsko gradivo, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, str. 1–34, 1991.
- Liew, K. M., Rajendran, S., *New superconvergent points of the 8-node serendipity plane element for patch recovery*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, str. 1103–1130, 2002.
- Matlab, *The language of technical computing*, The Mathworks Inc, 1991.
- Papič, I., Žunko, P., *Elektroenergetska tehnika I*, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, str. 71–92, 2007.
- Reissner, E., *On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem*, *J. Appl. Math. Phys.*, ZAMP, 23, 795–804, 1972.
- Saje, M., Zupan, D., *Nodi: program za dinamično analizo ravninskih okvirjev*, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/Nodi/>, 2009.
- SIST, *SIST EN 50182:2002, Vodniki za nadzemne vode – Pletene vrvi iz koncentrično ležeče okrogle žice*, 2002.
- SIST, *SIST EN 50341-3-21:2009, Nadzemni električni vodi za izmenične napetosti nad 45 kV - 3-21*. del: Nacionalna normativna določila (NNA) za Slovenijo (na podlagi SIST EN 50341-1:2002), 2009.
- Tibert, G., *Numerical Analyses of Cable Roof Structures*, Stockholm, KTH, TS-Högskoletryckeriet, str. 85-122, 1999.
- Treven, A., *Analiza daljnovodnih vodnikov*, Diplomsko naloga, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, samozaložba A. Treven, 110 str., 2013.