Metoda napačne predpostavke

The Method of False Position

Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V članku je predstavljena metoda napačne predpostavke, ki je lahko ena od metod reševanja problemskih nalog. Metoda napačne predpostavke je predstavljena prek različnih nalog, ki so jih učitelji preizkušali pri pouku matematike. Poleg omenjene metode pri posameznih nalogah pogledamo še preostale načine reševanja, ki so mogoči in poskušamo ozavestiti pomen poznavanja različnih strategij reševanja problemskih nalog.

Ključne besede: problemske naloge, strategije reševanja, metoda napačne predpostavke

Σ Abstract

This paper describes the method of false position, which can be one of the methods for solving problem tasks. The method of false position is presented through a variety of tasks that teachers have been testing at Mathematics lessons. Besides the aforementioned method, we also take a look at the remaining possible methods of solution in the case of individual tasks and try to raise awareness of the importance of understanding various strategies for solving problem tasks.

Keywords: *problem tasks, problem solving strategies, method of false position*

α Predstavitev metode napačne predpostavke

Metoda napačne predpostavke se omenja že na Rindovem in Moskovskem papirusu, ki izvirata približno iz 1850 let pred našim štetjem. Oba papirusa sta se zaradi suhega podnebja zelo dobro ohranila.

Po Slovarju slovenskega knjižnega jezika je predpostavka *mnenje oziroma trditev, ki se v danem primeru sprejme za izhodišče ne glede na resničnost.*

Ideja te metode je naslednja: predpostavimo, da je poljubno izbrano število rešitev danega problema. Rezultat izvedene operacije iz naloge na izbranem številu nam pove, kolikokrat je izbrano število večje oziroma manjše od rešitve naloge. Na osnovi tega odnosa popravimo začetno predpostavko in pridemo do rešitve.

Na Rindovem papirusu se omenja naslednja naloga:

Naloga 1 – Neznano število I
Če nekemu številu dodamo četrtino tega števila, dobimo 15. Izračunaj to število.
Rešitev: Neznano število je 12.

Danes bi se lotili naloge z reševanjem enačbe. V tistih časih pa so uporabili metodo napačne predpostavke. Uporabimo jo tudi mi.

Predpostavimo, da je neznano število 4. Potem je četrtina tega števila 1. Ko neznanemu številu dodamo četrtino tega števila, dobimo 5. To je kar trikrat premalo, zato bomo za neznano število vzeli trikrat več in poskusili znova.

Tokrat naj bo neznano število 12. Četrtina od 12 je 3. Če številu 12 dodamo četrtino števila 12, dobimo 15, kar smo želeli. Torej smo našli neznano število, ki je 12.

Ta metoda se pojavlja v literaturi pod različnimi imeni. Zanjo je značilno, da začnemo s konca, uganemo rezultat ali pa si ga izmislimo in preprosto preizkusimo. S postopkom poskusov in napak ali s postopkom izboljšanih poskusov pridemo do rešitve.

S tem postopkom želimo doseči več kot le rešitev naloge. Pričakujemo, da bo učenec s svojo izkušnjo problem ponotranjil, dosegel razumevanje in nalogo rešil na matematični način. Nekateri lahko to naredijo takoj, drugi pa po več izkušnjah. V devetem razredu lahko učenci v takem procesu spoznajo, kaj so znani podatki, kaj je neznanka, kako zapisati enakost oziroma enačbo, kako preveriti pravilnost rezultata.

Zgoraj omenjeno nalogo in druge smo ponudili učiteljem kot izhodišče za preizkus metode napačne predpostavke pri pouku matematike.

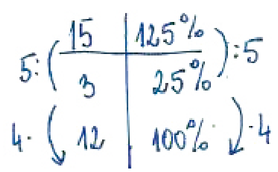
β Reševanje naloge Neznano število I

V nadaljevanju navajamo nekatere ugotovitve učiteljev ob delu z učenci in primere reševanja besedilnih nalog s pomočjo omenjene metode.

1. način reševanja
Predstavljamo primer reševanja dveh učencev (Slika 1, Slika 2), ki sta izbrala drugačni metodi.

Učiteljica, ki je učence v 8. razredu pri dodatnem pouku seznanila z metodo napačne predpostavke, je zapisala:

Ob tem jim nisem dala nobenih drugih navodil, ampak sem pustila, da se sami lotijo naloge na način, ki se ga najprej spomnijo oz. ki jim je najbližji. Večina učencev se je naloge lotila z metodo poizkušanja in po nekaj poskusih našla pravilno rešitev.



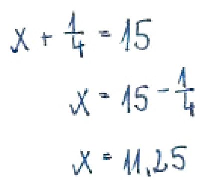
[Slika 1] Reševanje učenca, ki je prišel do pravilne rešitve s sklepanjem na podlagi odstotkov.

Učenec je nalogo rešil z znanjem odstotkov in pravilnim sklepanjem:

Število 15 je enako 125 % iskanega števila, potem je naredil sklep, da je 25 % enako številu 3 ter nadalje sklepal, da je celota 100 % enaka 12.

Vidimo, kako učenec domiselno uporablja svoje matematično znanje pri reševanju matematičnih problemov.

2. način reševanja, nepravilen



[Slika 2] Reševanje učenca, ki ni dobil pravilne rešitve, ker je naredil napako pri zapisu enačbe.

> *Z učenci smo se pogovorili o njihovem načinu razmišljanja in reševanja, nato pa sem jim na kratko predstavila metodo napačne predpostavke.*

Vidimo, da ima učenec težave pri zapisu enačbe in pri odštevanju racionalnih števil ($15 - \frac{1}{4}$) je izračunal kot $15 - 4 + 0{,}25 = 11{,}25$, kjer izkazuje zanimivo miselno zmedo.

γ Reševanje naloge – Neznano število II

Naloga 2 – Neznano število II
Sedmina vsote nekega števila in števila 3 je 5. Za katero število to velja?
Rešitev: Število 32.

Ena od učiteljic je zapisala:

> *Učencem sem najprej predstavila metodo napačnega predpostavljanja. Odločili so se, da bodo med nalogami v učbeniku sami izbrali tako, za katero so prepričani, da bi jo znali z metodo napačne predpostavke samostojno rešiti.*
>
> *Ob skupnem predpostavljanju in postopnem nakazovanju rešitve so do rezultata prišli vsi učenci. Pri samostojnem delu pa so nekateri naleteli na naslednje težave:*
>
> - *Niso vedeli, kako bi nalogo začeli reševati, ker so že od prej poznali postopek reševanja enačb in niso mogli sprejeti drugačnega načina razmišljanja.*
> - *Zanemarili so del besedila »vsota števila in števila 3«, tako da niso dobili pravilne rešitve.*
> - *Trije učenci niso razumeli naslednjega dela naloge: »sedmina vsote nekega števila in števila 3« in so potrebovali dodatne usmeritve.*
>
> *Preizkus so vsi naredili pravilno.*
>
> *Samostojno je devet učencev pravilno zapisalo enačbo in jo tudi pravilno rešilo. Ker praviloma rešimo veliko podobnih besedilnih nalog, učenci nimajo težav pri zapisu enačb in tudi ne pri samem reševanju.*

Iz opisanega sledi, da vsiljevanje postopka reševanja ni smiselno. Z drugimi metodami reševanja besedilnih nalog naj bi učence opremili z namenom, da jih bodo uporabili, kadar ne znajo primera rešiti z nastavitvijo aritmetičnih oziroma algebrskih izrazov in enačb ali sploh ne vedo, kako se naloge lotiti.

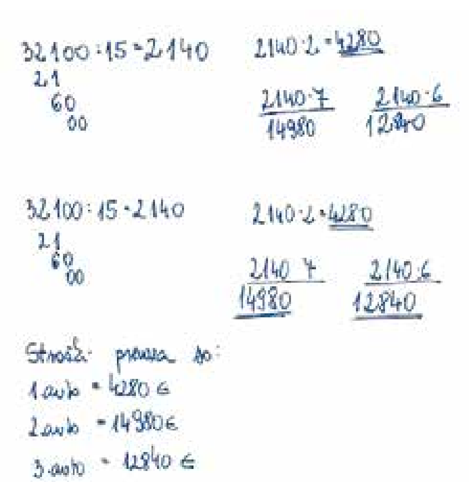
δ Reševanje naloge Stroški prevoza

Naloga 3 – Stroški prevoza
Skupni stroški prevoza treh vrst avtomobilov iz tovarne letno znašajo 32100 €. Razmerje stroškov je 2 : 7 : 6. Izračunaj stroške prevoza za vsako vrsto avtomobilov posebej.

Rešitev: 4280 €, 14980 €, 12840 €

Ena izmed učiteljic je pri dodatnem pouku v 8. razredu učencem dala omenjeno nalogo, ki jo lahko rešimo z metodo napačne predpostavke. V svojem poročilu je zapisala:

Preden sem jim to metodo razložila, so nalogo rešili sami na svoj način. Zanimalo me namreč je, ali bo kdo uporabil metodo napačne prepostavke. To se ni zgodilo. Vseh 12 učencev je nalogo rešilo na način, ki je spodaj skeniran (Slika 3).



[Slika 3] Reševanje naloge Stroški prevoza brez uporabe metode napačne predpostavke

Nato sem jim razložila, kako bi to nalogo rešili z metodo napačne predpostavke. Nad to metodo niso bili preveč navdušeni – zdelo se jim je pretežko. Zato sem jim še enkrat ta postopek razložila na lažji nalogi in mnenje o tej metodi so hitro spremenili. Pravijo, da pa je številske besedilne naloge lahko reševati po tej metodi.

Ta primer potrjuje izkušnjo predhodnega. V osmem razredu učenci take naloge že rešujejo z razmerji, zato jim je bil predstavljeni način reševanja težji. Z omenjeno metodo bi lahko pomagali učencem, ki razmerij ne razumejo oziroma jih ne znajo v danem primeru uporabiti ali pa bi uporabo te metode na tej nalogi spodbujali že prej, ko razmerij še sploh ne poznajo.

Poglejmo zapis ene izmed učiteljic, ki je pri dodatnem pouku matematike reševala naloge z metodo napačne predpostavke in zapisala:

Metodo smo uporabili in pokomentirali kar na prvem primeru, ki je naveden v forumu. Učenci so omenili, da to metodo že uporabljajo, predvsem pri tekmovanju iz znanja matematike za Vegovo priznanje – KENGURU. Ko smo reševali naloge s tekmovanj prejšnjih let, sem jih prosila, naj bodo pozorni, kdaj uporabljajo to metodo.

O metodi se lahko pogovorimo tudi brez rabe besede predpostavka. Uporabimo učencem znane besede: možna rešitev, predvidimo rezultat, uganimo rešitev in jo preizkusimo. Primerno nalogo s tekmovanja Matematični kenguru, pa lahko uporabimo za opredelitev metode, torej za uvodni mobilizacijsko-motivacijski primer.

ε Reševanje naloge Preizkus znanja

Naloga 4 – Preizkus znanja

Tine je pri preizkusu dosegel eno tretjino možnih točk, Ana pa eno četrtino možnih točk. Števili doseženih točk v njunih preizkusih se razlikujeta za 3. Koliko možnih točk je bilo pri preizkusu? Koliko točk je dosegel Tine in koliko Ana?

Rešitev: Tine 12 točk, Ana 9 točk

Svet matematičnih čudes 7, Delovni zvezek, DZS, stran 60/naloga 8

1. način reševanja

Ulomka $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ je učenec razširil na skupni imenovalec 12.

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \text{ in } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Pogledal je, kolikšna je razlika teh dveh števil, oziroma kakšen je števec razlike števil.

Ker je razlika doseženih točk v preizkusih 3, mora biti števec 3-krat večji, s tem pa tudi imenovalec (razširjanje).

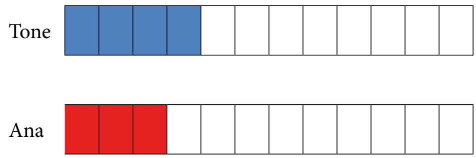
$$\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

Ugotovitev: možnih točk je 36.

Sledilo je samo še preračunavanje točk za Tineta ($\frac{1}{3}$ od 36 = 12) in za Ano ($\frac{1}{4}$ od 36 = 9).

2. način reševanja

Pri reševanju naloge z metodo napačne predpostavke bi lahko kombinirali grafično metodo. Predpostavimo, da ima pisni preizkus 12 točk, ker v tem primeru vemo, koliko je četrtina in tretjina točk. Skupno število točk predstavimo z 12 kvadratki in pobarvajmo število točk, ki sta jih dosegla Tone in Ana (Slika 4).



[Slika 4] Reševanje naloge Preizkus znanja v kombinaciji z grafično metodo

Vidimo, da se skupno število točk razlikuje za 1 kvadrat, kar so tri točke. Torej je skupno število vseh točk --12 kvadratov enako 36 točkam.

Ena od učiteljic je v forumu spletne učilnice zapisala:

> *Ta metoda je bila čisto spontano preizkušena oziroma opažena pri nivojskem pouku matematike v 7. razredu v skupini 3. nivoja. Reševali smo besedilne naloge o enačbah iz učbenika Svet matematičnih čudes 7, Delovni zvezek, DZS, stran 60/naloga 8. Reševanja naloge sem se sama lotila z enačbo. En učenec pa je svoje reševanje sošolcem predstavil, kot je predstavljeno pri 1. načinu reševanja. Tudi drugi učenci so pri nadaljnjih nalogah, ne da bi podrobno poznali tak način reševanja, uporabljali to metodo. Ko sem jih povprašala, kje še lahko uporabljajo tak način reševanja, so hitro ugotovili: Kenguru!*

Iz predstavljenega sledi, da si učenci pomagajo pri reševanju z različnimi strategijami in ne uporabljajo le reševanja z enačbo. Pri reševanju z enačbo, kjer je x skupno število točk, zapišemo

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3.$$

η Reševanje naloge Ribe

Naloga 5 - Ribe
Ribič je ujel ribo. Prijatelji so ga vprašali, koliko tehta. Rekel jim je, da ima rep 1 kg, glava tehta toliko kot rep in polovica trupa, trup pa tehta toliko kot glava in rep skupaj. Koliko tehta riba?

Rešitev: 8 kg

Poglejmo zapis ene izmed učiteljic:

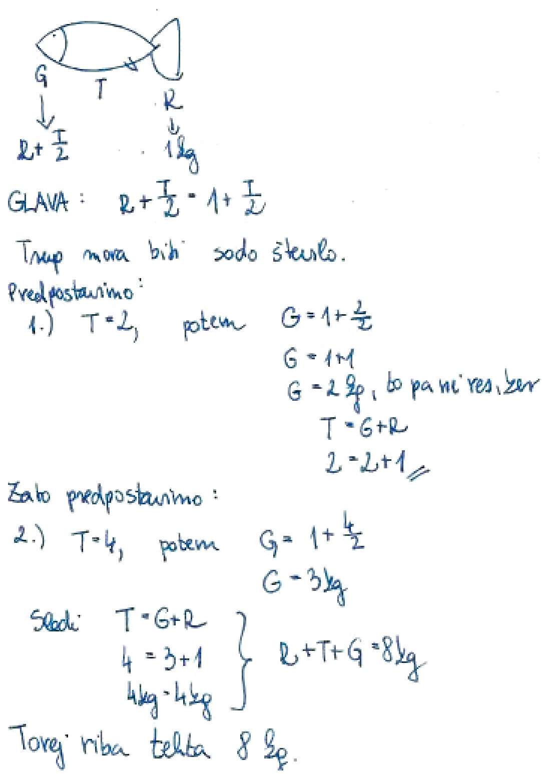
Omenjena metoda je bila predstavljena učencem pri dodatnem pouku pri matematike. Metoda se jim je zdela kar domača, kajti veliko primerov s tekmovanja na šolskem nivoju rešujejo na tak način. Reševali smo primere, navedene v vašem dokumentu, in bili so dokaj spretni pri reševanju. Se pa primeri reševanj bistveno ne razlikujejo od že predstavljenih, zato bom predstavila reševanje druge naloge.

Zastavila pa sem jim še dodatno nalogo:

Nalogo so rešili presenetljivo hitro. Večina jih je po metodi napačne predpostavke zapisala možno maso celotne ribe in potem ugotavljala, ali se izjave, zapisane v nalogi, ujemajo z njihovo predpostavko. Vseh 8 učencev je nalogo rešilo samostojno, a na različne načine. Pokazalo se je, da jim je največji problem zapis enačbe oziroma postopka, do rešitve pa so vsi zelo hitro prišli.

Podajam pa primer učenke (Slika 5), ki je nalogo rešila s premislekom, in sicer:

1. način reševanja

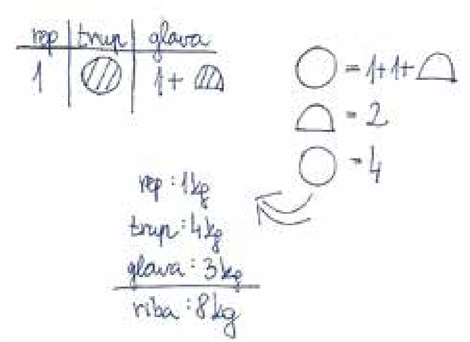


[Slika 5] *Primer reševanja s premislekom*

Učenka je sklepala, da je trup ribe sodo število. Ta sklep je najbrž naredila zato, da je posledično masa glave naravno število. Kljub tej »napačni« predpostavki je prišla do pravilnega rezultata, ker je v rešitvi naloge masa trupa res sodo število.

Poglejmo si še strategijo reševanja te naloge, kjer si pomagamo s slikovno reprezentacijo (Slika 6).

2. način reševanja



[Slika 6] Reševanje s pomočjo slikovne reprezentacije

Naloge bi se seveda lahko lotili reševati na algebrski ravni kot zapis enačbe z eno neznanko ali kot sistema enačb z dvema neznankama.

Še ena naloga o ribah:

Naloga 6 – Masa ribe

Glava ribe predstavlja $\frac{1}{3}$ mase cele ribe, rep ribe $\frac{1}{4}$ mase cele ribe, trup ribe pa ima maso 30 dag. Koliko je masa cele ribe?

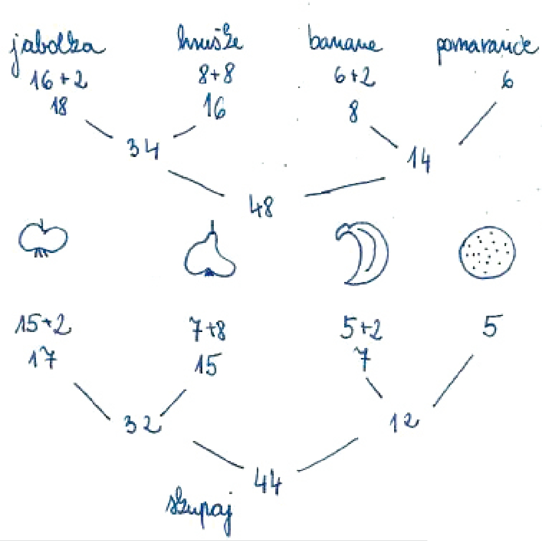
Rešitev: Masa ribe je 72 dag.

Reševanje naloge Sadje

Naloga 7 - Sadje

Oče je na trgu kupil jabolka, hruške, pomaranče in banane. V košari ima skupaj 44 sadežev. Število jabolk je za 2 večje od števila hrušk, število hrušk je za 8 večje od števila banan, število banan je za 2 večje od števila pomaranč. Koliko je hrušk v košari?

Rešitev: 15



[Slika 7] Primer rešitve z metodo napačne predpostavke

Učenec je v predstavljenem primeru (Slika 7) kombiniral metodo napačne predpostavke z grafično aritmetično metodo.

Učenec je najprej predpostavil, da je oče kupil 6 pomaranč, potem izračunal število banan (8), hrušk (16) in jabolk (18) ter število vseh sabežev (48). Ker je bilo število vseh sadežev za 4 preveliko, je sklepal, da je posamezne vrste sadja za en sadež manj. Tako je ponovil izračun pri petih pomarančah in dobil pravilen rezultat. Iz grafične ponazoritve je lepo razviden način razmišljanja učenca.

λ Reševanje naloge Ograja

Naslednjo nalogo lahko učenci rešujejo v sedmem in osmem razredu in neuspešne pri reševanju spodbudimo k uporabi metode napačne predpostavke:

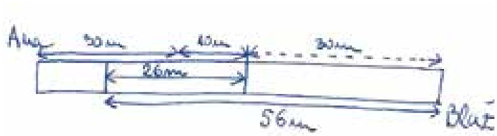
Naloga 8 - Ograja
Ana in Blaž barvata ograjo. Ana barva eno stran ograje, Blaž pa drugo stran. Začneta vsak na svojem koncu. Ana dopoldne prebarva $\frac{3}{7}$ svoje strani ograje, popoldne pa še $\frac{1}{4}$ od preostanka svoje strani, Blaž pa v celem dnevu prebarva $\frac{4}{5}$ svoje strani ograje. Na koncu dneva je 15,6 m ograje pobarvanih z obeh strani. Kako dolga je ograja?

Rešitev: 42 m

1. način reševanja
Predpostavimo, da je ograja dolga 70 m, v tem primeru bomo hitro izračunali sedmino in petino celotne dolžine.

Ana pobarva dopoldne 30 m ograje ostane ji še 40 m. Popoldne pobarva še 10 m. Na njeni strani je tako še 30 m nepobarvane ograje.

Blaž pobarva v celem dnevu 56 m ograje. Koliko ograje je pobarvane z obeh strani, vidimo na sliki (Slika 8).



[Slika 8] Količina pobarvane ograje z obeh strani

Z obeh strani je pobarvanih 26 m ograje. Sklepamo lahko, da je predpostavljena dolžina ograje prevelika.

Dolžina ograje [m]	Dolžina ograje pobarvana z obeh strani [m]
70	26
7	2,6
42	15,6

S sklepanjem, kot je prikazano v preglednici, pridemo do rešitve 42 m.

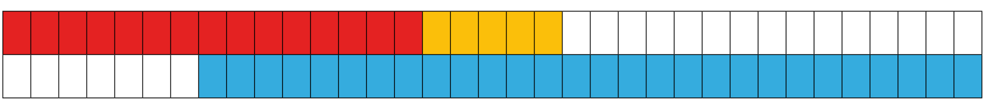
2. način reševanja
Že v začetku si pomagamo z grafično upodobitvijo. V nalogi imamo sedmino in petino, zato si ograjo razdelimo na 35 polj. In z vsake strani pobarvajmo del, ki ga je pobarvala Ana in Blaž.

Iz slike (Slika 9) vidimo, da je 13 polj pobarvanih iz obeh strani, kar je 15,6 m. Torej eno polje meri

15,6 m : 13 = 1,2 m

in celotna ograja 1,2 m · 35 = 42 m.

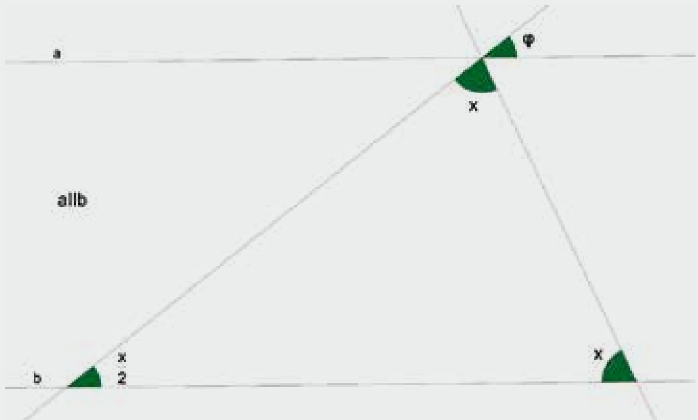
Ta način reševanja lahko dopolnimo tako, da učenci dobijo trak s 35 polji.



[Slika 9] Grafična upodobitev ograje in njeno barvanje

µ Reševanje naloge Velikost kotov

Naloga 9 – Velikost kotov
Izračunaj velikost kota na spodnji sliki.



Rešitev: 72 °, 72 °, 36 °

Opisano geometrijsko nalogo ne uvrščamo med besedilne naloge, kljub temu pa jo lahko rešimo z metodo napačne predpostavke. Za reševanje po tej metodi morajo učenci poznati:

– vsoto notranjih kotov v trikotniku,
– lastnosti kotov z vzporednimi kraki.

Torej nalogo lahko rešijo na omenjen način v sedmem razredu, medtem ko bodo v devetem razredu zaradi preprostosti naloge in zapisa enačbe najverjetneje nalogo hitreje rešili z enačbo.

π Sklep

Za spodbujanje reševanja s predpostavljeno rešitvijo je ključno, da znamo postaviti učencem ustrezno vprašanje.

Večina učiteljev je v spletni učilnici z nami delila opise svojih ugotovitev po izvedeni uri, kjer so učenci reševali ponujene naloge o skupnih stroških prevoza oz. kako izračunati neznano količino. Nekateri učitelji so preizkusili tudi nekaj drugih nalog iz različnih učbenikov in drugih virov. Učitelji so metodo preizkušali raznoliko: od 6. do 9. razreda, v homogenih oziroma heterogenih učnih skupinah, pri dodatnem pouku, pri pripravah na tekmovanje ali pri delu z nadarjenimi učenci.

Prevladovala sta dva različna pristopa:

– Učitelji so najprej razložili metodo na eni od nalog, potem so učenci samostojno reševali izbrane naloge.
– Učencem so razdelili naloge, ki so jih poskusili samostojno rešiti. Nato so skupaj z učenci pogledali načine reševanja in pri tem izpostavili metodo napačne predpostavke. Pri nadaljnjem reševanju nalog so jim svetovali, naj uporabijo opisano metodo.

Naloga	Vprašanje	Razred, za katerega je naloga dovolj zahtevna*
Naloga 1 – Neznano število I	Katero število bi lahko rešilo nalogo? Preizkusi. Zakaj si izbral število 4? Ali bi lahko izbrali tudi število 5? Ali bi bilo smiselno izbrati število 8?	5. razred, 6. razred, 7. razred
Naloga 3 – Stroški prevoza	S kolikokrat manjšim zneskom bi bilo smiselno pričeti? Ali lahko približno oceniš najnižji strošek prevoza? Znaš preizkusiti?	5. razred, 6. razred, 7. razred
Naloga 5 –Masa ribe	Oceni maso ribe. Ali lahko določiš še katero od lastnosti števila, s katerim bi bilo smiselno poskusiti, ali nalogo reši?	6. razred, 7. razred
Naloga 8 – Ograja	Katera dolžina ograje bi bila možna rešitev? Oceni dolžino ograje in preveri svojo oceno. Izberi poljubno dolžino ograje in jo preveri po besedilu naloge.	7. razred, 8. razred

**Ali za individualno delo posameznih učencev.*

Iz predstavljenih izdelkov in refleksij učiteljev vidimo, da učencem, ki znajo zastavljeni problem rešiti na svoj način, nov način reševanja lahko povzroči pojmovno zmedo. Metodo je smiselno spodbujati pri učencih, ki so pri zastavljenem problemu neuspešni in jim jezik algebre dela težave. Če želimo, da bi vsi učenci reševali nalogo z metodo napačne predpostavke, mora biti zastavljena problemska naloga za vse nerešljiva z njim znanimi metodami. V tem primeru morajo učenci najprej priti do spoznanja, da sami ne znajo s svojimi pristopi rešiti zastavljene problemske situacije.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljem Barbari Fir, Aniti Nemec, Metki Jemec, Tini Kelc, Nevenki Baskar, Darji Strah, Mojci Štor, Igorju Koser, ki so v šolskem letu 2010/11 z nami delili svoje izkušnje z metodo napačne predpostavke v spletni učilnici.

ϕ Viri

1. Sanja Varošanec: Neke metode reševanja problemskih zadataka. Poučak, letnik 4, št. 13, 2003.
2. Marjan Jerman: Zgodovina reševanja polinomskih enačb. Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 57, št. 5, 2010.