PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 5
Strani 262–263

Marko Razpet:

# VSOTA KVADRATOV PRVIH $n$ NARAVNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, teorija števil, geometrija, vsota, kvadrat, kocka, ploššina, prostornina.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/909-Razpet.pdf

# VSOTA KVADRATOV PRVIH $n$ NARAVNIH ŠTEVIL

Zadnja številka Preseka v preteklem letniku prinaša prispevek, v katerem je prikazana metoda za izračun vsote

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \tag{1}$$

Avtor daje bralcu za nalogo, da vsoto (1) sešteje še na kakšen drug način. Žal se ne morem spomniti, kje sem spoznal pot, ki si jo bomo zdaj ogledali ★. Šli pa bomo še korak naprej in izračunali vsoto kvadratov prvih $n$ naravnih števil, to je vsoto

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \tag{2}$$

Vzemimo kvadrat s stranico $n$ in ga razrežimo na $n^2$ kvadratov s stranicami 1. Ploščina prvotnega kvadrata je $n^2$. Po drugi strani pa je njegova ploščina vsota naslednjih delov: ploščine enega vogalnega kvadrata, ploščina treh njegovih sosednjih kvadratkov, ploščine 5 nadaljnjih kvadratkov, s katerimi smo obrobili prejšne 4, in tako naprej (če je seveda možno), dokler ne upoštevamo še zadnjih $n + (n - 1) = 2n - 1$ kvadratov. Velja torej

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \tag{3}$$

kar je razvidno na sliki. Če levo stran v enakosti (3) zapišemo v obliki

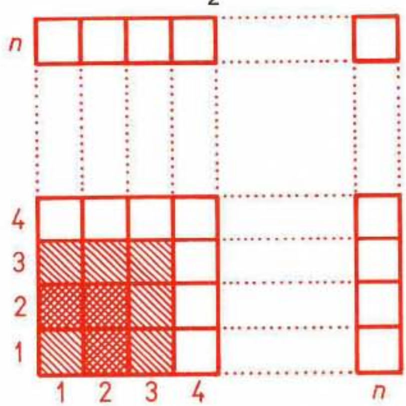
$$(2.1 - 1) + (2.2 - 1) + (2.3 - 1) + \dots + (2n - 1)$$

potem dobimo po preureditvi

$$2S_1(n) - n = n^2$$

in končno

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$



To nas navdihne z mislijo, da lahko vsoto (2) izračunamo na soroden način, le da namesto kvadrata vzamemo kocko.

Imejmo torej kocko z robom $n$ in jo razrežimo na $n^3$ kockic z robovi 1. Prostornina prvotne kocke je $n^3$. Po drugi strani lahko to prostornino še drugače izrazimo. Izberemo si eno od oglišč začetne kocke. Ustrezna vogalna kockica ima 3 sosednje kockice, ki imajo z vogalno skupen po en kvadratek, 3 sosednje kockice, ki imajo z vogalno skupno samo po en rob, in eno sosednjo kockico, ki ima z vogalno skupno samo oglišče. Vogalna kockica ima torej 7 sosed. Z enakim premislekom ugotovimo, da ima vogalna kocka z robom 2 že 19 sosednjih kockic z robom 1: od teh se jih dotika vogalne 3.4 = 12 vzdolž kvadratov, 3.2 = 6 vzdolž robov in ena v oglišču. Vogalne kocke z robom $n-1$ se dotika $3(n-1)^2$ kockic vzdolž kvadratov, $3(n-1)$ vzdolž robov in ena v oglišču. Prostornina začetne kocke je torej

$$1 + (3.1 + 3.1 + 1) + (3.2^2 + 3.2 + 1) + \dots + (3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1) = n^3$$

Če to enakost nekoliko preoblikujemo, dobimo

$$(3.1^2 - 3.1 + 1) + (3.2^2 - 3.2 + 1) + \dots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$$

in od tod enakost, ki povezuje $S_1(n)$ in $S_2(n)$:

$$3S_2(n) - 3S_1(n) + n = n^3$$

Z upoštevanjem rezultata (4) dobimo

$$3S_2(n) = n^3 - n + 3\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2}$$

in nazadnje

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Naloge

1. Izračunaj: $100^2 + 101^2 + 102^2 + \dots + 999^2$
2. Reši enačbo: $S_2(n) = (3n-2)^2$
3. Izračunaj.
   a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$
   b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2$

*Marko Razpet*

---

★ Morda v prispevku Jožeta Malešiča: *O formuli za vsoto prvih n naravnih števil*, PRESEK 2, ki omenja tudi vsoto kvadratov prvih $n$ naravnih števil (Op. urednika).