AVNOJ leta 1978 in Zoisovo nagrado za življenjsko delo leta 2008. Ambasador znanosti je postal leta 1991. Leta 2002 je prejel zlati častni znak svobode Republike Slovenije. Prejel je nagrado mednarodnega združenja magnetne resonance ISMAR leta 1977 in nagrado Mednarodnega združenja za jedrsko kvadrupolno resonanco leta 2004. Akademik prof. dr. Robert Blinc je bil član Saške akademije znanosti v Leipzigu, grške akademije znanosti v Atenah, Evropske akademije znanosti in umetnosti (Salzburg), Evropske akademije (London), Hrvaške akademije znanosti, Makedonske akademije znanosti, Poljske akademije znanosti in Mednarodne inženirske akademije s sedežem v Moskvi. Akademik prof. dr. Robert Blinc je bil od leta 2003 tudi častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Janez Seliger

OSEMNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Leta 1994 sta Univerza v Sofiji in University College London organizirala prvo mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji. Namen začetnih tekmovanj, ki jih je finančno podpiral evropski projekt Tempus, je bila primerjava kvalitete študija na evropskih univerzah. Slovenci se tekmovanja redno udeležujemo od leta 1995. Pogosto se z nostalgijo spominjam prvih tekmovanj, ko je le nekaj več kot 60 tekmovalcev reševalo izjemno estetske matematične naloge, popoldneve preživljalo ob nogometnih tekmah, večere pa ob breskvah, melonah, lubenicah in sangriji, ki jo je pripravljala španska ekipa.

Z leti je tekmovanje postalo zelo popularno in zares mednarodno. Letos je tekmovalo že več kot 300 študentov iz 44 držav. Tako tudi organizacija tekmovanja postaja čedalje bolj zahtevna. Zaradi tradicije in zelo dobrih izkušenj z Ameriško univerzo v Bolgariji je bilo tekmovanje letos že šestič v Blagoevgradu.

Tekmujejo študentje prvih štirih letnikov. Med tekmovalci se najdejo tudi fiziki in študenti tehničnih fakultet. Naloge so v grobem iz snovi, ki se na večini študijev matematike predavajo v prvih dveh letih.

Dan po prihodu je sestanek vodij ekip, kjer do poznega večera izbiramo tekmovalne naloge. Izbrati je treba deset nalog, po pet za vsak tekmovalni dan. Teža nalog narašča z zaporedno številko; prvo nalogo reši večina študentov, zadnje pa skoraj nihče. Pazimo tudi, da so različna področja

Slika 1. Slovenska ekipa: Peter Muršič, Miha Habič, Tom Primožič, Marjan Jerman, Jan Kralj in Jure Vogrinc.

matematike smiselno zastopana. Končni izbor nalog je dosežen z glasovanjem. Letos sem bil nad izborom nalog prvič razočaran. Vodje ekip, ki v tekmovanju vidijo nadaljevanje srednješolskih olimpijad, so izglasovali nesorazmerno veliko nalog, kjer se namesto občutka in talenta za matematiko preverja tekmovalne izkušnje in poznavanje trikov. Tako v končnem izboru ni bilo nobene lepe naloge iz realne ali kompleksne analize.

Naslednja dva dneva študenti tekmujejo, vodje ekip pa ocenjujemo naloge. Da bi zagotovili največjo mero poštenosti, vsako nalogo neodvisno popravita dva ocenjevalca, ki se morata kasneje strinjati z oceno. Seveda so možne tudi pritožbe, ki se upoštevajo, če se z njimi strinjata vsaj dva popravljavca ali pa neodvisna, vnaprej izbrana komisija treh vodij ekip.

Kot običajno sem se javil za ocenjevanje zelo lepe naloge iz linearne algebre, ki je bila prvi dan zastavljena kot druga naloga:

I.2. *Ali obstaja realna matrika* A *velikosti* 3×3 *s sledjo* 0, *za katero velja:*

$$A^2 + A^\top = I\ ?$$

Študenti so našli kar nekaj različnih rešitev, ena od njih gre takole:

Matrika A je normalna, ker je

$$AA^\top = A(I - A^2) = (I - A^2)A = A^\top A\,.$$

Zato imata matriki A in $A^\top$ iste lastne vektorje, ustrezne lastne vrednosti pa so konjugirane. Vsaka lastna vrednost mora tako izpolnjevati enakost

$$\lambda^2 + \bar{\lambda} = 1\,,$$

zato je $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vsota lastnih vrednosti matrike A je enaka sledi matrike A. Hitro se lahko prepričamo, da samo s števili oblike $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ne moremo dobiti vsote 0.

Iz rešitve se lepo vidi, da je privzetek o velikosti in realnosti matrike odveč. Ta dva privzetka pa sta koristna, če se reševanja naloge lotimo drugače. Hitro se recimo vidi, da je vsota kvadratov lastnih vrednosti enaka 3. S premetavanjem enačbe in Vietovimi formulami lahko dobimo še vsoto četrtih potenc lastnih vrednosti in nato pokažemo, da takemu sistemu enačb ne zadoščajo ničle karakterističnega polinoma z realnimi koeficienti.

Drugi dan je bila kot druga zastavljena zelo simpatična kombinatorična naloga z elementi znanstvenofantastične sociologije:

II.2. *V neki nezemeljski rasi so osebe treh različnih spolov. Poročeni trojček je sestavljen iz treh oseb paroma različnih spolov, ki so si med seboj všeč. Vsaka oseba je lahko v največ enem poročenem trojčku. Čustva v rasi so vedno obojestranska: če je oseba x všeč osebi y, velja tudi obratno.*

Oddaljeni nenaseljeni planet želijo kolonizirati z odpravo, v kateri je po n oseb vsakega spola. Ugotovili so, da je vsakemu članu odprave všeč vsaj k oseb vsakega od preostalih dveh spolov. Naloga odprave je tvoriti čim več poročenih trojčkov, ki bodo sčasoma z v zakonu rojenimi otroki poselili planet.

(a) *Če je n sodo število in je $k = \dfrac{n}{2}$, pokaži, da morda ni mogoče ustvariti niti enega poročenega trojčka.*

(b) *Če je $k \geq \dfrac{3n}{4}$, pokaži, da je vedno možno ustvariti n disjunktnih poročenih trojčkov in tako poročiti vse člane odprave.*

Prvi del naloge je zelo lahek, za drugi del pa se je treba pošteno potruditi. Pomaga uvedba relacije „si nista všeč“, za katero se izkaže, da ne pokriva prevelikega dela populacije.

Zelo zanimiva je bila tudi četrta naloga prvega dneva, ki kaže, kako lepo se da rešiti na videz zapleteno nalogo z malo bolj globokim vpogledom v matematiko.

I.4. *Naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ končne neprazne množice. Funkcija f je definirana s pravilom*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}|} .$$

Pokaži, da je funkcija f nepadajoča na intervalu $[0,1]$. (Pri tem $|A|$ kot običajno pomeni moč množice A.)

Naj bo $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. V podmnožico $X \subset \Omega$ izbiramo elemente iz Ω tako, da je element $x \in \Omega$ izbran v množico X z verjetnostjo t, neodvisno od izbora preostalih elementov.

Potem je
$$P(C \subset X) = t^{|C|} .$$

Po načelu vključitve in izključitve je

$$\begin{aligned} &P((A_1 \subset X) \text{ ali } (A_2 \subset X) \text{ ali } \ldots \text{ ali } (A_n \subset X)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} P(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k} \subset X) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}|} . \end{aligned}$$

Verjetnost $P((A_1 \subset X) \text{ ali } (A_2 \subset X) \text{ ali } \ldots \text{ ali } (A_n \subset X))$ pa je nepadajoča funkcija argumenta t.

Kako varljiv je lahko prvi vtis, kaže zadnja naloga prvega dneva, ki je na prvi pogled čisto obvladljiva. Na koncu se je izkazalo, da so se le trije študentje približali rešitvi:

I.5. *Naj bo n naravno število in V $(2n-1)$-razsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Pokaži, da lahko za poljubne vektorje $v_1, \ldots,$*

Slika 2. Rilski samostan.

$v_{4n-1} \in V$ najdemo zaporedje takšnih indeksov $1 \leq i_1 < \ldots < i_{2n} \leq 4n-1$, da je

$$v_{i_1} + \ldots + v_{i_{2n}} = 0\,.$$

Rešitev poteka s pomočjo zelo zvite indukcije in manj razsežnih kvocientnih prostorov.

Po končanem izboru nalog sem javno izrazil svoje pomisleke o manjkajoči lepi nalogi iz analize. Po tesnem preglasovanju so me nekateri vodje ekip skušali prepričati, da v analizo spada tretja naloga drugega tekmovalnega dneva:

II.3. *Določi vrednost vsote*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)\ln\Bigl(1+\frac{1}{2n}\Bigr)\ln\Bigl(1+\frac{1}{2n+1}\Bigr)\,.$$

Uradna rešitev (ki po mojem ni zelo analitična) gre takole:

Za $n \geq 1$ naj bo $f(n) = \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)$. Preverimo lahko, da velja

$$f(2n) + f(2n+1) = f(n).$$

Znana neenakost $\ln(1+x) \leq x$ pove tudi, da je $f(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

Definirajmo še funkcijo

$$g(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} f^3(k) < nf^3(n) \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} g(n) - g(n+1) &= f^3(n) - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= (f(2n) + f(2n+1))^3 - f^3(2n) - f^3(2n+1) \\ &= 3(f(2n) + f(2n+1))f(2n)f(2n+1) \\ &= 3f(n)f(2n)f(2n+1)\,, \end{aligned}$$

zato je

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}(g(n) - g(n+1)) = \frac{1}{3}(g(1) - g(N+1))\,.$$

Ker gre $g(N+1) \to 0$, ko gre $N \to \infty$, je iskana vsota enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1) = \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}\ln^3(2)\,.$$

Po tekmovanju smo si ogledali znameniti Rilski samostan. Komisija je nato pregledala še zadnje pritožbe in določila meje za nagrade.

Slovenijo so zastopali Miha Habič, Jan Kralj, Tom Primožič in Jure Vogrinc z Univerze v Ljubljani in Peter Muršič z Univerze na Primorskem. Miha Habič in Jan Kralj sta dobila tretjo nagrado, drugi pa pohvalo.

Več o tekmovanju in o prejšnjih tekmovanjih lahko preberete na spletni strani: `http://www.imc-math.org`

Marjan Jerman