Bojan Kuzma
ZBIRKA DOMAČIH NALOG IZ ANALIZE I IN ANALIZE II

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 3)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(075.8)(076.1)

KUZMA, Bojan
Zbirka domačih nalog iz Analize I in Analize II [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 3)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_3_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-2-6

246642688

Zbirka domačih nalog iz Analize I in Analize II

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje in ki v grobem ustrezajo sedanjima Analiza I in Analiza II. Temu sedaj dodajam tudi zbirko vseh domačih nalog.

Zbirka je nastajala skozi več let. V tem času sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru in kasneje na Univerzi v Ljubljani. Žal je bil curriculum pri tedanjih predmetih malce drugačen kot je sedaj. Zato sem se odločil, da bom zbirko zgolj v grobem razdelil kronološko. Vsekakor so v kronološkem vrstnem redu urejene naloge iz tedanje Analize I — tako so najprej nanizane domače naloge iz enega šolskega leta, temu nato sledijo domače naloge iz naslednjega šolskega leta, in tako dalje. Za tem pa sem dodal še tiste naloge iz tedanjega predmeta Analiza II, ki ustrezajo vsebinam sedanje Analize II. Preostale naloge iz tega predmeta, ki osvetljujejo tematiko funkcije več spremenljivk, sem uvrstil v drugo zbirko. Tu in tam se kakšna od nalog ponovi v več letih. Primerilo se je, da se je ponovila kar celotna skupina nalog — v tem primeru sem iz zbirke odstranil vse nadaljnje repeticije. Zbirko sem začel z nekaj primeri že rešenih nalog. Vabim vas, da jih poskusite rešiti najprej sami; mogoče pa predlagana rešitev ni najbolj elegantna?

Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Ušćumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

(vi) P. Mizori-Oblak, B. Krušič (avtor dodatnega besedila): Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 1. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1997.

(vii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 2. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1991.

(viii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 3. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1986.

(ix) E. Kramar, Rešene naloge iz linearne algebre. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1989.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Čisto na konec sem dodal še nekaj nalog, ki sem jih razdelil na predavanjih v letu 2008/2009. S časoma, ko se bo tovrstnih nalog nabralo več, bo ta razdelek postal daljši. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Analiza I in II — računske naloge

1. Dano je naravno število a. Zaporedji $\big(p_n\big)_n$ in $\big(q_n\big)_n$ definiramo rekurzivno na naslednji način:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, p_1 = 1, & p_n &= ap_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 &= 1, q_1 = 0, & q_n &= aq_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

Za vsak $n \geq 2$. Dokaži naslednji trditvi:

(a) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ za vsak $n \geq 3$.

(b) $p_n q_n = p_{n-1} q_{n+1}$ za vsak $n \geq 2$.

Obe točki se dokažeta s popolno indukcijo; dokaz le za (a) (točka (b) pa za Domačo Nalogo.)

- $p_2 = ap_1 + p_0 = a$, in $p_3 = ap_2 + p_1 = a^2 + 1$. Podobno je $q_2 = aq_1 + q_0 = 1$ in $q_3 = aq_2 + q_1 = a$.
- Za $n = 3$ trditev velja, saj je $p_3 q_2 - p_2 q_3 = (a^2 + 1) \cdot 1 - a \cdot a = 1 = (-1)^2$
- $n \to (n+1)$:

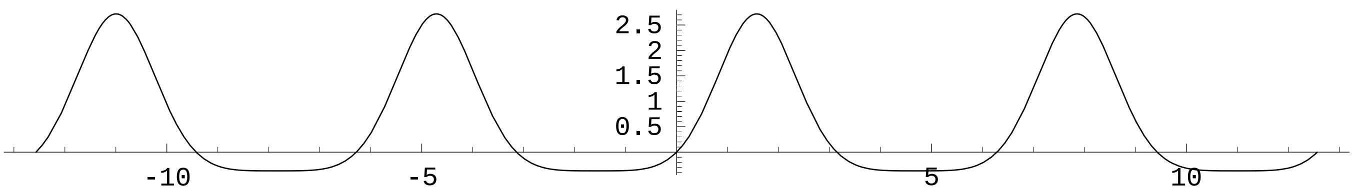
$$p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = \big(a\, p_n + p_{n-1}\big)\, q_n - p_n\, \big(a\, q_n + q_{n-1}\big) = -p_n\, q_{n-1} + p_{n-1}\, q_n = -(-1)^{n-1}$$

po indukcijski hipotezi.

2. Upoštevaj pomen prvega odvoda in čim natančnejše skiciraj graf funkcije

$$f(x) = e^{\sin x} \sin x$$

$f'(x) = e^{\sin x} \cos x + e^{\sin x} \cos x \sin x = e^{\sin x} \cos x\, (1 + \sin x)$. Zanimajo nas ničle odvoda in njegov predznak. Ker je $e^{\sin x} > 0$, o predznaku odloča $\cos x\, (1 + \sin x)$. Ker je $1 + \sin x \geq 0$, dejansko o predznaku odloča samo $\cos x$. Torej funkcija narašča na $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ter pada na $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, nato pa se vse periodično ponovi. Ekstremi pa so tam, kjer je $\cos x = 0$ ali pa je $\sin x = -1$, torej v $x = \pi/2 + k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. V okolici $x = -\pi/2$ sta $\cos x$ in $(1 + \sin x)$ približno enaka nič. Prvi odvod je tam enak produktu dveh skoraj ničelnih števil, zato je funkcija zelo položna. V okolici $x = \pi/2$ je samo $\cos x$ približno nič. Zato je v okolici te točke f bolj strma kot v okolici $x = -\pi/2$. Graf pa poteka približno takole:



3. Elipso $\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{a^2+1} = 1$ zavrtimo okoli osi x. Za katero vrednost parametra $a > 0$ ima dobljeno rotacijsko telo najmanjši možni volumen?

   Volumen:
$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2(x)\, dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{\left(1+a^2\right)\,\left(a^2-x^2\right)}{a^4}\, dx = \frac{4\,\left(1+a^2\right)\,\pi}{3\,a}$$

   Extreme ima tam, ko je odvod enak nič:
$$V' = \frac{8\,\pi}{3} - \frac{4\,\left(1+a^2\right)\,\pi}{3\,a^2} = \frac{4\,\left(-1+a^2\right)\,\pi}{3\,a^2} = 0$$

   torej: $a = 1$.

4. Določi konvergenčno območje in poišči vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^n - 1)x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(ex)^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{ex}{1-ex} - \frac{x}{1-x},$$

   enačaj velja če $|x| < 1$ in $|ex| < 1$, torej je konvergenčni polmer $R = 1/e$.

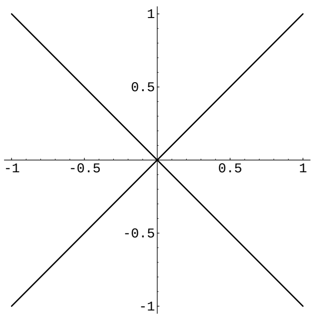
1. Dana je množica

$$M := \{z \in \mathbb{C};\ \ 0 < |z| < 1 \text{ in } |z+\bar{z}| = |z-\bar{z}|\}$$

(a) Skiciraj množico M v kompleksni ravnini.

(b) Dokaži, da je za poljuben $z \in M$ in poljubno liho naravno število n tudi $z^n \in M$.

$z+\bar{z}$ je realni del, $z-\bar{z}$ pa imaginarni del števila z. Torej je M določena z $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$, oziroma:



Če $z \in M$, je bodisi $z = |z|\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ali pa $z = |z|\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, ali pa $z = |z|\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, ali pa $z = |z|\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. Tedaj je

$$z^n = |z|^n\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^n = |z|^n\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} = \dots$$

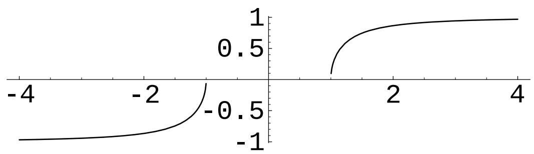
$$\dots = |z|^n\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2\dots\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= |z|^n(\pm i)\dots(\pm i)\cdot\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right) \in M$$

2. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in čim natančneje nariši graf funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{-1+x^2}}$ in $f''(x) = \frac{2-3x^2}{x^3(-1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Prvi odvod je pozitiven na definicijskem območju $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus(-1,1)$, z izjemo robnih točk $x=\pm 1$, kjer f ni odvedljiva. Torej je f strogo naraščajoča in zvezna tako na $(-\infty,-1]$ kot tudi na $[1,\infty)$. Še več, na prvem intervalu je negativna, na drugem pa pozitivna, se pravi, da je monotona in zvezna povsod na $\mathscr{D}_f$. Števec drugega odvoda spremeni predznak pri prehodu skozi $x = \pm\sqrt{2/3}$ — tu bi prevoj, ako bi ti dve točki ležali v $\mathscr{D}_f$. Ker pa ne ležita, f nima prevojev. Kljub temu je $f''(x) > 0$ za $x \in (-\infty,-1)$ (torej je tu konveksna) in je $f''(x) < 0$ za $x \in (1,\infty)$ (torej je tu konkavna). Potek f:



3. (a) Izračunaj integral $\int \frac{x^2}{e^x}\,dx$.

   (b) Ali konvergira vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{n+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{2}\right)^n$?

   $\int \frac{x^2}{e^x}\,dx = \int x^2 e^{-x}\,dx = \frac{-2-2\,x-x^2}{e^x} + C$, po (dvakratni) uporabi pravila per partes.
   (b): Korenski kriterij:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{n}}{2} \leq n^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{n^{\frac{n+1}{n}} \cdot n^{-1}}{2} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 1/2.$$

   Torej vrsta konvergira (njena približna vsota: 1.839593061267518).

4. Dana je funkcija $f(x) := xe^x$.

   (a) Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke 1.

   (b) S pomočjo točke (a) izračunaj vsoto vrste $\sum_1^\infty \frac{(n+2)e^{n+1}}{(n+1)!}$.

   Vstaviš $t := x-1$, oziroma $g(t) := f(t+1) = (t+1)e^{t+1} = (t+1)ee^t$. Torej je

$$g(t) = e(t+1)\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{et^{n+1}}{n!} + \sum_0^\infty \frac{et^n}{n!} = e + \sum_1^\infty t^n \left(\frac{e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!}\right);$$

   torej

$$f(x) = f(t+1)|_{t=x-1} = g(t)|_{t=x-1} = e + \sum_1^\infty (x-1)^n \left(\frac{e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!}\right)$$

   Vstaviš $x := e+1$, pa dobiš:

$$\begin{aligned} f(e+1) &= e + \sum_1^\infty e^{n+1}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) = e + \sum_1^\infty e^{n+1}\left(\frac{n}{n)!} + \frac{1}{n!}\right) = e + \sum_1^\infty \frac{e^{n+1}(n+1)}{n!} \\ &= e + \left(\frac{2e^2}{1!} + \frac{3e^3}{2!} + \frac{4e^4}{3!} + \dots\right) = e + \frac{2e^2}{1!} + e\left(\frac{3e^2}{2!} + \frac{4e^3}{3!} + \dots\right) \\ &= e + \frac{2e^2}{1!} + e\sum_1^\infty \frac{(n+2)e^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

   Torej: $\sum_1^\infty \frac{(n+2)e^{n+1}}{(n+1)!} = 1/e\big(f(e+1) - e - \frac{2e^2}{1!}\big) = -1 - 2\,e + e^e\ (1+e)$

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Določi sestavljeno izjavo, ki bo imela v pravilnostni tabeli nasledjne vrednosti:

$$1000\,0111\,0111\,0111$$

2. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C, D velja:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash D) \cup (D \backslash A) \cup (A \cap B \cap C \cap D)$$

3. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C velja:

$$(A \backslash B) \subseteq (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$$

   Kdaj velja celo enačaj?

4. Na množici $\mathbb{N}$ je definirana relacija R s predpisom

$$(a, b) \in R \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5 \mid (3a + 2b)$$

   Ali je R ekvivalenčna relacija?

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dokaži, da je $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ deljivo z 19 pri vsakem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Reši neenačbo
$$\left|2x - |x^2 - 1|\,\right| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \leq 2 \\ \sin x & ; |x| > 2 \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > -1 \\ 2 + x & ; x \leq -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$ in nariši njuna grafa!

4. Ali je funkcija
$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x| - 1} \end{aligned}$$
   (a) injektivna ?
   (b) surjektivna ?

   Če ni injektivna, skrči definicijsko območje, da bo postala injektivna; *če ni surjektivna*, ustrezno skrči zalogo vrednosti. Poišči tudi inverzno funkcijo od tako dobljene funkcije.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dani sta množici A in B. Poišči rešitev enačbe

$$A \backslash X = B \backslash X \quad \text{in} \quad X \backslash A = X \backslash B$$

2. Določi naravni definicijski območji funkcijama

$$f(x) := \ln \sqrt{1 + \tan x} \qquad\qquad g(x) := \tan \sqrt{1 + \ln x}$$

3. Preveri, če je funkcija

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$$

   injektivna oz. surjektivna.

4. Poišči osnovno periodo funkcije

$$f(t) := 3 + \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Reši sistem neenačb
$$|x+2| + |y-2| < 3 \quad |x| + |y| < 2$$

2. Poišči infimum, supremum, minimum in maksimum množice
$$M := \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} + \cos\frac{n\pi}{11};\ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. Poišči vse rešitve neenačbe
$$\frac{15\,(-1+x)}{x^2+2x} \le -43 + 15\,x$$

4. Število, ki ima v petiškem sistemu zapis
$$n = 123^{\cdot}40(12340)$$
zapiši v enajstiškem. (Števke, ki so znotraj oklepaja, se periodično ponavljajo. Za zapis znaka 10 v enajstiškem sistemu uporabi 'a'.)

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da ima množica
$$M := \big\{x \in \mathbb{R};\ \ x^3 \leq 3\big\}$$
supremum, ki ga označimo z s. Nato preveri, da s reši enačbo $x^3 = 3$.

2. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, in $|c| \neq |d|$. Pokaži, da velja neenakost
$$\left|\frac{|a| - |b|}{|c| + |d|}\right| \leq \left|\frac{a+b}{c+d}\right| \leq \left|\frac{|a| + |b|}{|c| - |d|}\right|$$

3. Pokaži, da je
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

4. Kateri množici je enaka
$$\bigcup_{x \in A} \big(x, 2x\big] \qquad A := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. S pomočjo matematične indukcije pokaži veljavnost formule

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. Poišči *vsa kompleksna števila*, ki zadostijo enačbi

$$\overline{z}^4 = \frac{i}{z^2}; \qquad (i^2 = -1)$$

3. Poišči množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo enačbi

$$z + 2\overline{z} = |z|$$

4. Razstavi polinom $x^4 + 1$ na produkt kvadratnih in linearnih polinomov s koeficienti v obsegu realnih števil.

VII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Poišči limito v odvisnosti od $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}}$$

2. Poišči naravno definicijsko območje funkcijama

$$f(x) := \ln\sqrt{1 + \tan x} \qquad g(x) := \tan\sqrt{1 + \ln x},$$

če veš, da je $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

3. Preveri, če za naravna števila n velja trditev

$$\frac{n}{2} \le \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} \le n$$

4. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{n} \qquad b_n := \arctan(n^2)$$

Za vsako posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

5. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\left(\frac{z - i - 1}{iz + 1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

6. Poišči $\limsup$ in $\liminf$ za zaporedje

$$a_n := 1 + \frac{\sqrt{2 + n^2} - \sqrt{n}}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

VIII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Zapiši prvih pet členov zaporedja, pokaži, da je zaporedje monotono in navzgor omejeno, ter izračunaj limito

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n}$$

R: $\left(1, \sqrt{2}, 2^{\frac{3}{4}}, 2^{\frac{7}{8}}, 2^{\frac{15}{16}}, \ldots\right)$; limita je 2.

2. Poišči limito zaporedja

$$a_n := \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

R: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; torej je $a_n = \frac{n-1}{n}$. Limita je 1.

3. Poišči limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{3^n + 5^n}$$

R: 0 in 25 (pri zadnji ulomek krajšaš s 5^{n+1}).

4. Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

5. Funkcija $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z) \in \mathbb{R}$.

6. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\frac{3|z|}{z^2 - 4} = 1$$

IX. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Preveri, če vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
konvergira.

2. Pokaži, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$
konvergira, in izračunaj koliko členov moramo sešteti, in na koliko decimalk moramo zaokroževati delne rezultate, da bi jo izračunali na pet decimalk.

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

4. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$$

5. Dana je funkcija
$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}; \quad x \to \frac{x}{1+|x|}$$
Poišči zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$, preveri, če je injektivna, in če je, poišči inverz g^{-1}, kjer je $g : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathcal{Z}_f$ funkcija z istim predpisom kot f.

6. Rekurzivno je podano zaporedje
$$x_1 := 1; \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^3 - 9x_n}{16}$$
S pomočjo indukcije pokaži, da je $-|x_n| \leq \frac{x_n^3-9x_n}{16} \leq |x_n|$; (tj. $|x_{n+1}| \leq |x_n|$) in $|x_n| \leq 5$. Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so lihi členi zaporedja pozitivni, sodi pa negativni).

X. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Ali lahko poiščeš realno število a, da bo funkcija
$$f(x) := \begin{cases} a\left(\frac{3x-4}{-2+3x}\right)^{\sqrt{ax}}; & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}; & \text{sicer} \end{cases}$$
povsod zvezna?

2. Dana je funkcija
$$f(x) := x\cos\frac{1}{x}.$$
Poišči njeno definicijsko območje; v točkah, kjer ni definirana ji dodeli take vrednosti, da bo postala zvezna na celotni realni osi, nato pa izračunaj odvod tako dobljene funkcije.

3. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} 0; & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{sicer} \end{cases}$$
zvezna v točki 0? Poišči tudi njene ničle in skiciraj njen graf.

4. Izračunaj limito
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}$$

5. Izračunaj limito
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$$
brez uporabe L'Hospitalovega pravila!

6. Izračunaj odvod funkcije
$$f(x) := x^{(x^x)}.$$

XI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Napiši enačbo tangente in normale za krivuljo
$$y = \ln(\cos x)$$
v točki $x = 0$.

2. Dokaži da gredo vse normale krivulje
$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \qquad (a > 0)$$
skozi isto točko. Katera je ta skupna točka?

3. Poišči tisti pravokotnik, ki ima pri danem obsegu največjo ploščino (tj. obseg pravokotnika je konstantno enak o).

4. Določi definicijsko območje, asimptote, ekstreme, konveksnost oz. konkavnost in čim natančneje nariši funkcijo
$$y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$$

5. Izračunaj kot, pod katerim se sekajo parabola $y = x^2$ in premica z enačbo $3x - y = a$; v posebnem, ko je $a = 2$.

6. Izračunaj ekstreme funkcije
$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$
na njenem naravnem definicijskem območju.

7. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^{i!}}$$
na pet decimalk natančno; določi tudi, na koliko decimalk je potrebno zaokroževati delne rezultate.

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dokaži, da je $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ deljivo z 19 pri vsakem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Reši neenačbo
$$\big|2x - |x^2 - 1|\,\big| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \leq 3 \\ \sin x & ; |x| > 3 \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} x^3 & ; x > -1 \\ 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$!

4. Ali je funkcija
$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x| - 1} \end{aligned}$$
   (a) injektivna ?
   (b) surjektivna ?

   Če ni injektivna, skrči definicijsko območje, da bo postala injektivna; *če ni surjektivna*, ustrezno skrči zalogo vrednosti. Poišči tudi inverzno funkcijo od tako dobljene funkcije.

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Dokaži, da je $5^n + 2^{n+1}$ deljivo s 3 pri vsakem $n \in \mathbb{N}$.

2. Reši neenačbo
$$\big|2x - |x^2 - 1|\,\big| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Naj bo $f(x) := \ln \frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x^2 - 4}$ Poišči funkcijo $(f \circ f)$! Pri katerih vrednostih x je f definirana?

4. Ali je funkcija
$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

   (a) injektivna ?

   (b) surjektivna ?

   Če je odgovor na obe vprašanji pritrdilen, poišči tudi njej inverzno funkcijo.

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Poišči limito
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}} \qquad (|a|<1).$$

2. Določi definicijski območji funkcijama
$$f(x) := \ln\sqrt{1+\tan x} \qquad\qquad g(x) := \tan\sqrt{1+\ln x}$$

3. Definirajmo zaporedji
$$a_n := \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \qquad\qquad b_n := \frac{2n-3}{5n+2}$$
   Za vsako zaporedje posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

4. Poišči osnovno periodo funkcije
$$f(t) := 3+\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t.$$

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Ali lahko poiščeš realno število a, da bo funkcija

$$f(x) := \begin{cases} a\left(\frac{3x-4}{-2+3x}\right)^{\sqrt{ax}}; & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}; & \text{sicer} \end{cases}$$

   povsod zvezna?

2. Poišči točke nezveznosti za funkcijo

$$f(x) := \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

3. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}$$

4. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$$

   brez uporabe L'Hospitalovega pravila!

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Izračunaj

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

2. Poišči točke nezveznosti za funkcijo

$$f(x) := \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

3. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}$$

4. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$$

brez uporabe L'Hospitalovega pravila!

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dokaži, da je funkcija $f(x) := \cos(x)$ enakomerno zvezna na celi realni osi.
2. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} 0; & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{sicer} \end{cases}$$
zvezna v točki 0? Poišči tudi njene ničle in skiciraj njen graf.
3. Nariši parametrično podano funkcijo
$$x(t) := e^t \quad y(t) := \log t^2.$$
4. Podana je funkcija v polarni obliki
$$r := 2 \sin 2\phi.$$
Določi njene ničle, definicijsko območje, zalogo vrednosti in jo nariši.

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Dana je funkcija
$$y(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$
Ali lahko določiš a, da bo funkcija povsod zvezna?

2. Določi osnovno periodo, poišči ničle in nariši funkcijo
$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

3. Nariši parametrično podano funkcijo
$$x(t) := e^t \quad y(t) := \log t^2.$$

4. Podana je funkcija v polarni obliki
$$r := 2\sin 2\phi.$$
Določi njene ničle, definicijsko območje, zalogo vrednosti in jo nariši.

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Izračunaj odvod funkcije
$$f(x) := x^{(x^x)}.$$

2. Dokaži, da funkcija
$$y := \frac{e^{5x} + 2}{e^x}$$
ustreza enačbi
$$y''' - 13y' - 12y \equiv 0.$$

3. Poišči $\frac{d^3y}{dx^3}$ za funkcijo, podano parametrično
$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

4. Dana je funkcija
$$f(x) := x\cos\frac{1}{x}.$$
Poišči njeno definicijsko območje; v točkah, kjer ni definirana ji dodeli take vrednosti, da bo postala zvezna na celotni realni osi, nato pa izračunaj odvod tako dobljene funkcije.

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Izračunaj odvod funkcije
$$f(x) := (x^x)^x\,.$$

2. Dokaži, da funkcija
$$y := \frac{e^{5x} + 2}{e^x}$$
ustreza enačbi
$$y''' - 13y' - 12y \equiv 0.$$

3. Poišči $\frac{dy}{dx}$ za funkcijo, podano parametrično
$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

4. V katerih točkah ima funkcija
$$y := \sqrt[3]{\sin x}$$
navpične tangente?

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Napiši enačbo tangente in normale za krivuljo
$$y = \ln(\cos x)$$
v točki $x = 0$.

2. Dokaži da gredo vse normale krivulje
$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \qquad (a > 0)$$
skozi isto točko. Katera je ta skupna točka?

3. Poišči tisti pravokotnik, ki ima pri danem obsegu največjo ploščino (tj. obseg pravokotnika je konstantno enak o).

4. Določi definicijsko območje, asimptote, ekstreme, konveksnost oz. konkavnost in čim natančneje nariši funkcijo
$$y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$$

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I za višješolce

1. Napiši enačbo tangente in normale za krivuljo
$$y = \ln(\cos x)$$
v točki $x = 0$.

2. Razstavi število 10 na vsoto dveh števil tako, da bo njun produkt maksimalen.

3. Poišči prvih pet *od nič različnih* členov Taylorjeve vrste za funkcijo
$$y = x^2 \ln^2 x.$$
(Razvijamo ga v okolici točke 1.)

4. Določi definicijsko območje, asimptote, ekstreme, konveksnost oz. konkavnost in čim natančneje nariši funkcijo
$$y = \frac{5 - x}{9 - x^2}$$

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da je za vsako naravno število izjava

$$(p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow \Bigg((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \Big(\cdots\big((p_{n-1} \Rightarrow p_n) \Rightarrow (p_0 \Rightarrow p_n)\big)\cdots\Big)\Bigg)$$

   tavtologija.

2. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C, D velja:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash D) \cup (D \backslash A) \cup (A \cap B \cap C \cap D)$$

3. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C velja:

$$(A \backslash B) \subseteq (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$$

   Kdaj velja celo enačaj?

4. Dane so množice A, B, C. Reši sistem enačb (tj. kdaj je sistem rešljiv, in če je rešljiv, koliko in katere rešitve ima?)

$$A \backslash X = X \backslash B \qquad X \backslash A = C \backslash X$$

5. Na množici $\mathbb{N}$ je definirana relacija R s predpisom

$$(a, b) \in R \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5 \,\big|\, (3a + 2b)$$

   Ali je R ekvivalenčna relacija?

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dokaži, da je $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ deljivo z 19 pri vsakem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Reši neenačbo
$$\big|2x - |x^2 - 1|\,\big| \le 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \le 2 \\ \sin x & ; |x| > 2 \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > -1 \\ 2 + x & ; x \le -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$ in nariši njuna grafa!

4. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \le 2 \\ \sin x & ; |x| > 2 \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > -1 \\ 2 + x & ; x \le -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ g)(x)$ in $(f \cdot g)(x)$ in nariši njuna grafa!

5. Ali je funkcija
$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x| - 1} \end{aligned}$$
   (a) injektivna ?
   (b) surjektivna ?

   Če ni injektivna, skrči definicijsko območje, da bo postala injektivna; *če ni surjektivna*, ustrezno skrči zalogo vrednosti. Poišči tudi inverzno funkcijo od tako dobljene funkcije.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Preveri, če sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin(x); & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \frac{4x^2}{\pi^2}; & x > \pi/2 \\ x + \pi/2 - 1; & x < -\pi/2 \end{cases} \qquad g : x \mapsto x + |x|$$

bijekciji, in če sta, jima poišči inverze.

2. Določi naravni definicijski območji funkcijama

$$f(x) := \ln \sqrt{1 + \tan x} \qquad g(x) := \tan \sqrt{1 + \ln x}$$

3. Preveri, če je funkcija

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

injektivna oz. surjektivna.

4. Poišči osnovno periodo funkcije

$$f(t) := 3 + \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

5. Poišči največjo podmnožico v $\mathbb{R}$, da bo zožitev funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirane s predpisom

$$f : x \mapsto \begin{cases} 3 - x^2; & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{|x|}; & \text{sicer} \end{cases}$$

injektivna. Skrči tudi množico $\mathbb{R}$, da bo surjektivna in poišči inverz dobljene funkcije.

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da je
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

2. Pokaži, da je
$$\arccos\left(\tfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = |2\arctan x|$$

3. Reši sistem neenačb
$$|x+2|+|y-2|<3 \quad |x|+|y|<2$$

4. Poišči vse rešitve neenačbe
$$\frac{15\,(-1+x)}{x^2+2x} \leq -43+15\,x$$

5. Število, ki ima v petiškem sistemu zapis
$$n = 123^{\cdot}40(12340)$$
zapiši v enajstiškem. (Števke, ki so znotraj oklepaja, se periodično ponavljajo. Za zapis znaka 10 v enajstiškem sistemu uporabi 'a'.)

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da ima množica
$$M := \left\{x \in \mathbb{R};\ \ x^3 \leq 3\right\}$$
supremum, ki ga označimo z s. Nato preveri, da s reši enačbo $x^3 = 3$.

2. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, in $|c| \neq |d|$. Pokaži, da velja neenakost
$$\left|\frac{|a| - |b|}{|c| + |d|}\right| \leq \left|\frac{a + b}{c + d}\right| \leq \left|\frac{|a| + |b|}{|c| - |d|}\right|$$

3. Pokaži, da je $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Nato izračunaj še $\cos(k\frac{\pi}{5})$ za $k \in \mathbb{Z}$.

4. Pokaži, da je $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2}$. Nato izračunaj še $\sin(k\frac{\pi}{5})$ za $k \in \mathbb{Z}$.

5. Pokaži, da med poljubnima dvema različnima realnima številoma leži vsaj eno iracionalno.

6. Razbij polinom $x^5 + 1$ na produkt samih linearnih in kvadratnih polinomov.

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. S pomočjo matematične indukcije pokaži veljavnost formule
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. Izračunaj
$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

3. Poišči množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo enačbi
$$z + 2\overline{z} = |z|$$

4. Denimo, da je $\zeta^{17} = 1$, in $\zeta \neq 1$. Pokaži, da je za vsako naravno število k, ki *ni deljivo s* 17 izpolnjeno:
$$1 + \zeta^k + \zeta^{2k} + \cdots + \zeta^{16k} = 0$$

5. Pokaži, da za vsako naravno število n obstaja polinom p_n z realnimi koeficienti, da je
$$\cos n\theta = p_n(\tan\theta) \cdot \cos^n \theta$$

6. Pokaži, da je polinom $z^{2n} + z^n + 1$ deljiv s polinomom $z^2 + z + 1$ natanko tedaj, ko naravno število n ni deljivo s 3.

VII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Poišči limito v odvisnosti od $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$$

2. Poišči naravno definicijsko območje funkcijama

$$f(x) := \ln\sqrt{1+\tan x} \qquad g(x) := \tan\sqrt{1+\ln x},$$

če veš, da je $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

3. Preveri, če za naravna števila n velja trditev

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} \leq n$$

4. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n} \qquad b_n := \arctan(n^2)$$

Za vsako posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

5. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\left(\frac{z-i-1}{iz+1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

6. Poišči lim sup in lim inf za zaporedje

$$a_n := 1 + \frac{\sqrt{2+n^2}-\sqrt{n}}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

VIII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Zapiši prvih pet členov zaporedja, pokaži, da je zaporedje monotono in navzgor omejeno, ter izračunaj limito

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n}$$

2. Poišči limito zaporedja

$$a_n := \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

3. Poišči limiti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{3^n + 5^n}$$

4. Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

5. Funkcija $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

   Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z) \in \mathbb{R}$.

6. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\frac{3|z|}{z^2 - 4} = 1$$

IX. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Preveri, če vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
konvergira.

2. Pokaži, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$
konvergira, in izračunaj koliko členov moramo sešteti, in na koliko decimalk moramo rezati delne rezultate, da bi jo izračunali na pet decimalk.

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

4. V ravnini so dane paralelne premice L_1, L_2, L_3, kjer je L_2 med L_1 in L_3. Razdalja med L_1 in L_2 je a, med L_2 in L_3 pa b. Pokaži da je ploščina enakostraničnega trikotnika, ki ima oglišča na teh premicah, enaka $\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+ab+b^2)$

5. Dana je funkcija
$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}; \quad x \to \frac{x}{1+|x|}$$
Poišči zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$, preveri, če je injektivna, in če je, poišči inverz g^{-1}, kjer je $g : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathcal{Z}_f$ funkcija z istim predpisom kot f.

6. Rekurzivno je podano zaporedje
$$x_1 := 1; \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^3 - 9x_n}{16}$$
S pomočjo indukcije pokaži, da je $-|x_n| \le \frac{x_n^3-9x_n}{16} \le |x_n|$; (tj. $|x_{n+1}| \le |x_n|$) in $|x_n| \le 5$. Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so lihi členi zaporedja pozitivni, sodi pa negativni).

X. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Ali lahko poiščeš realno število a, da bo funkcija
$$f(x) := \begin{cases} a\left(\frac{3x-4}{-2+3x}\right)^{\sqrt{ax}}; & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}; & \text{sicer} \end{cases}$$
povsod zvezna?

2. Dana je funkcija
$$f(x) := x\cos\frac{1}{x}.$$
Poišči njeno definicijsko območje; v točkah, kjer ni definirana ji dodeli take vrednosti, da bo postala zvezna na celotni realni osi, nato pa izračunaj odvod tako dobljene funkcije.

3. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} 0; & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{sicer} \end{cases}$$
zvezna v točki 0? Poišči tudi njene ničle in skiciraj njen graf.

4. Izračunaj limiti
$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$$
brez uporabe L'Hospitalovega pravila!

5. Izračunaj limiti
$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\cos^{1/x^2} x$$

6. Dana je funkcija
$$f : x \mapsto \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$
Poišči točke nezveznosti in točke zveznosti.

7. Izračunaj odvod funkcije
$$f(x) := x^{(x^x)}.$$

XI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Denimo, da alternirajoča vrsta $S := \sum(-1)^n a_n$; $(a_n \geq 0)$ zadošča Leibnitzevemu pogoju, torej
$$|a_{n+1}| \leq |a_n|; \qquad \lim |a_n| = 0.$$
Pokaži, da je
$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq |a_{n+1}|.$$

2. Poišči kot, pod katerim se sekata implicitno podani krivulji
$$xy = a^2; \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

3. Pokaži, da se tangenta na krivuljo $xy = a^2$ le–te dotakne v točki, ki razpolavlja odsek te tangente med koordinatnima osema.

4. Dokaži da gredo vse normale krivulje
$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \qquad (a > 0)$$
skozi isto točko. Katera je ta skupna točka?

5. Poišči tisti pravokotnik, ki ima pri danem obsegu največjo ploščino (tj. obseg pravokotnika je konstantno enak o).

6. Določi definicijsko območje, asimptote, ekstreme, konveksnost oz. konkavnost in čim natančneje nariši funkcijo
$$y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$$

7. Izračunaj kot, pod katerim se sekajo parabola $y = x^2$ in premica z enačbo $3x - y = a$; v posebnem, ko je $a = 2$.

8. Izračunaj ekstreme funkcije
$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$
na njenem naravnem definicijskem območju.

9. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^{i!}}$$
na pet decimalk natančno; določi tudi, na koliko decimalk je potrebno rezati delne rezultate (delamo v fiksni decimalni vejici z rezanjem odvečnih decimalk).

XII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da lahko funkcijo $x \mapsto e^{-1/x^2}$ definiramo v točki $x = 0$ tako, da bo postala zvezna in dvakrat zvezno odvedljiva. Izračunaj, koliko je $f'(0)$.

2. Po krožnici $K_1\big((-1,0),1\big)$ s središčem v točki $T_1(-1,0)$, polmera 1 kroži kolesar v pozitivni smeri s konstantno hitrostjo. Z isto hitrostjo in v isti smeri kroži drugi kolesar po krožnici $K_2\big((-1,0),1\big)$; ko je prvi kolesar v točki $(0,0)$, je drugi v točki $(1,-1)$. Poišči največjo in najmanjšo medsebojno razdaljo med kolesarjema.

3. Točkasto telo se giblje po koordinatni ravnini z enakomerno hitrostjo v_1, kadar je $x > 0$ in z enakomerno hitrostjo v_2, če je $x < 0$. Po kakšni poti bo najhitreje prišlo iz točke $T_1(a,0)$ do točke $T_2(b,c)$, kjer je $a > 0$ ter $b < 0$?

4. Preveri, da lahko funkcijo $\frac{\sin x}{x}$ definiramo v točki $x = 0$, da bo postala zvezna. Poišči tudi (če obstajajata) prva dva neničelna odvoda dobljene razširitve pri $x = 0$.

5. Odvajaj funkciji $y_1(x) := |x|$ ter $y_2(x) := x|x|$. Kolikokrat sta odvedljivi na celotni realni osi?

6. Koliko je $f^{(n)}$ od funkcije $f(x) := \frac{-2+9\,x-5\,x^2}{1-x-x^2+x^3}$?

7. Preveri, da je za vsako naravno število n izjava

$$(p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow \left((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \Big(\cdots\big((p_{n-1} \Rightarrow p_n) \Rightarrow (p_0 \Rightarrow p_n)\big)\cdots\Big)\right)$$

   tavtologija.

8. Izračunaj ploščino lika, omejenega s krivuljami

$$t = x^2; \quad y = \frac{x^2}{2}; \quad y = 2x.$$

9. Koliko meri ploščina asteroide z enačbo

$$y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$$

   Nasvet: v integral uvedi novo substitucijo $x^{2/3} := t$. Nato uporabi izrek Čebiševa, ki ga najdeš v Bronštejn—Semendjajevem priročniku na strani 396.

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da so za vsako naravno število izjave

$$
\begin{array}{ll}
A_1 := (p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow (p_0 \Rightarrow p_1) & \text{(i)} \\
A_2 := (p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow \big((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_0 \Rightarrow p_2)\big) & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
A_n := (p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow \Bigg((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \Big(\cdots\big((p_{n-1} \Rightarrow p_n) \Rightarrow (p_0 \Rightarrow p_n)\big)\cdots\Big)\Bigg) & \text{(n)}
\end{array}
$$

   tavtologije.

2. Preveri veljavnost naslednjega sklepa.
   „Če delam, imam denar. Če lenarim, sem zadovoljen. Če delam, nisem zadovoljen, če pa lenarim, nimam denarja. No, lahko le delam, ali pa lenarim. Torej: Zadovoljen sem če in samo če sem brez denarja."

3. Določi sestavljeno izjavo, ki bo imela v pravilnostni tabeli naslednje vrednosti:

$$1000\,0111\,0111\,0111$$

4. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C, D velja:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash D) \cup (D \backslash A) \cup (A \cap B \cap C \cap D)$$

5. Pokaži, da za poljubne množice A, B, C velja:

$$(A \backslash B) \subseteq (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$$

   Kdaj velja celo enačaj?

6. Dane so množice A, B, C. Reši sistem enačb (tj. kdaj je sistem rešljiv, in če je rešljiv, koliko in katere rešitve ima?)

$$A \backslash X = X \backslash B \qquad X \backslash A = C \backslash X$$

7. Bodi $A := \{r \in \mathbb{Q};\ \ 0 \le r \le \sqrt{2}\}$. Poišči množici

$$\bigcup_{r\in A}[-r,r] \quad \text{ter} \quad \bigcap_{r\in A}[-r,r].$$

Mogoče ni odveč pripomniti, da je potrebno utemeljiti vsak korak `;-)`

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Število S je *stekališče zaporedja* $\big(a_n\big)_n$, če za vsak pozitiven ε in za vsako naravno število N obstaja tako naravno število $n > N$, da je $|a_n - S| < \varepsilon$. Napiši to izjavo z logičnimi simboli, nato napiši negacijo te izjave, in jo spremeni v logično ekvivalentno obliko, kjer negacije stojijo le neposredno pred predikati. Končno povej z besedami, kdaj S *ni stekališče* zaporedja $\big(a_n\big)_n$.

2. Množica $\Omega \subset X \times Y$ je *pravokotnik*, če je oblike $\Omega = A \times B$ kjer je $A \subset X$ in $B \subset Y$. Denimo, da sta $\Omega_1 = A_1 \times B_1$ in $\Omega_2 = A_2 \times B_2$ dve takšni množici. Pokaži, da je pravokotnik tudi $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Preveri še, da lahko razliko $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ zapišemo kot unijo največ dveh pravokotnikov. (Precej ti bo pomagala primerna skica!)

3. Naj bo $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = -x\}$. Definirajmo družino množic
$$B_{(a,b)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1\}.$$
Poišči množico $\bigcup_{(a,b)\in A} B_{(a,b)}$.

4. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \le 2 \\ \sin x & ; |x| > 2 \end{cases} \qquad\qquad f(x) := \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > -1 \\ 2 + x & ; x \le -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ f)(x)$ in $(f \circ g)(x)$ in nariši njuna grafa!

5. Naj bosta
$$g(x) := \begin{cases} 3x - 1 & ; |x| \le 2 \\ \sin x & ; |x| > 2 \end{cases} \qquad\qquad f(x) := \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > -1 \\ 2 + x & ; x \le -1 \end{cases}$$
Poišči funkciji $(g \circ g)(x)$ in $(f \circ g)(x)$ in nariši njuna grafa!

6. Poišči $(f \circ f)(x)$, če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom
$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{|x|-1}; & |x| \ne 1 \\ 2; & x = 1 \\ 0; & x = -1 \end{cases}.$$

7. Ali je funkcija

$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x| - 1} \end{aligned}$$

(a) injektivna?

(b) surjektivna?

Če ni injektivna, skrči domeno, da bo postala injektivna; *če ni surjektivna*, ustrezno skrči kodomeno. Poišči tudi inverzno funkcijo od tako dobljene funkcije.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Preveri, če sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirani s predpisom
$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin(x); & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \frac{4x^2}{\pi^2}; & x > \pi/2 \\ x + \pi/2 - 1; & x < -\pi/2 \end{cases} \qquad g : x \mapsto x + |x|$$
bijekciji, in če sta, jima poišči inverze.

2. Določi naravni definicijski območji funkcijama
$$f(x) := \ln \sqrt{1 + \tan x} \qquad g(x) := \tan \sqrt{1 + \ln x}$$

3. Preveri, če je funkcija
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$
injektivna oz. surjektivna.

4. Poišči osnovno periodo funkcije
$$f(t) := 3 + \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

5. Poišči največjo podmnožico v $\mathbb{R}$, da bo zožitev funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirane s predpisom
$$f : x \mapsto \begin{cases} 3 - x^2; & |x| \le 1 \\ \frac{2}{|x|}; & \text{sicer} \end{cases}$$
injektivna. Skrči tudi množico $\mathbb{R}$, da bo surjektivna in poišči inverz dobljene funkcije.

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Poišči neskončno unijo in presek
$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in A} B_{(\alpha,\beta)} \qquad \bigcap_{(\alpha,\beta)\in A} B_{(\alpha,\beta)},$$
Pri čemer je indeksna množica $A := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \ \alpha^2 + \beta^2 = 9\}$, ter so
$$B_{(\alpha,\beta)} := \Bigg\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ \alpha\,(x - \alpha) = \beta\,(\beta - y) \wedge$$
$$\left(a - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le x \le a + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \wedge \left(b - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le y \le b + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\Bigg\}$$
tangente na krožnico A v točki (α, β) dolžine 2.

2. Dani sta množici A, B. Ugotovi, kdaj je sistem enačb rešljiv, in poišči vse rešitve
$$\begin{aligned} X \cap A &= A; \\ X \cap A &= X \cap B; \\ X \cup A &= A \cap B \end{aligned}$$

3. Dani sta preslikavi $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Poišči vse možne preslikave $h : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, da bo $f \circ h = g$. Poišči tudi vse take, da bo $h \circ f = g$.
(Opomba: Tabela pomeni, da se število iz gornje vrstice preslika v število iz spodnje vrstice; npr. $f(1) = 2$ in $f(6) = 1$.)

4. Dani sta preslikavi $f, g : 1, 2, 3, 4, 5, 6 \to 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Poišči vse možne preslikave $h : 1, 2, 3, 4, 5, 6 \to 1, 2, 3, 4, 5, 6$, da bo $g \circ h = f$. Poišči tudi vse take, da bo $h \circ g = f$.

5. Pokaži, da je
$$(A \backslash B) \times C \subset (A \times C) \setminus (B \times D).$$
Kdaj velja enačaj?

6. Pokaži, da je
$$(A \backslash B) \times (C \backslash D) \subset (A \times C) \setminus (B \times D).$$
Kdaj velja enačaj?

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da je $f(x) := \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \arctan x$, če je $x \geq 1$. Nato na podoben način določi še ostale vrednosti funkcije f.

2. V anketi je sodelovalo 100 dijakov. Iz njihovih odgvorov zvemo, da jih

32	zanima šport
20	zanima glasba
45	zanima tehnika
15	zanimata šport in glasba
7	zanimata šport in tehnika
9	zanimata glasba in tehnika, ter
31	ne zanima nič, kar se športa, glasbe ali tehnike tiče.

   Določi število dijakov, ki jih zanima *natanko ena* od teh dejavnosti, torej šport, glasba in tehnika.

3. Koliko je med lihimi števili od 1 do n takih, ki so hkrati popolni kvadrati (torej so oblike k^2 za nek $k \in \mathbb{N}$), in niso deljiva s 5.

4. Naj bo $I := (0, 1)$. Pokaži, da je kvadrat, tj. $I \times I$ enako močna množica z njegovo stranico, tj.

5. Naj bo $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definirana z

   $$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+x}; & x < 0 \\ \frac{x}{x-1}; & \textit{sicer} \end{cases}.$$

   Skrči kodomeno, da bo postala surjektivna, in poišči inverz, če obstaja.

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Pokaži, da ima množica
$$M := \{x \in \mathbb{R};\ \ x^3 \leq 3\}$$
supremum, ki ga označimo z s. Nato preveri, da s reši enačbo $x^3 = 3$.

2. Pokaži, da ima množica
$$M := \{x \in \mathbb{R};\ \ x^3 \geq 3\}$$
infimum, ki ga označimo z ι. Nato preveri, da ι reši enačbo $x^3 = 3$.

3. Poišči vse rešitve enačbe
$$\sin|x + y| = \cos|x - y|.$$

4. Preveri, da je za poljubni naravni števili a, n število $(a^{4n+1} - a)$ deljivo s 30.

5. Pokaži, da med poljubnima dvema različnima realnima številoma leži vsaj eno racionalno.

6. Pokaži, da med poljubnima dvema različnima realnima številoma leži vsaj eno iracionalno.

1. S pomočjo matematične indukcije pokaži veljavnost formule

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. Izračunaj

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

3. Poišči množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo enačbi

$$z + 2\overline{z} = |z|$$

4. Denimo, da je $\zeta^{17} = 1$, in $\zeta \neq 1$. Pokaži, da je za vsako naravno število k, ki *ni deljivo s* 17 izpolnjeno:

$$1 + \zeta^k + \zeta^{2k} + \cdots + \zeta^{16k} = 0$$

5. Pokaži, da za vsako naravno število n obstaja polinom p_n z realnimi koeficienti, da je

$$\cos n\theta = p_n(\tan\theta) \cdot \cos^n \theta$$

6. Pokaži, da je polinom $z^{2n} + z^n + 1$ deljiv s polinomom $z^2 + z + 1$ natanko tedaj, ko naravno število n ni deljivo s 3.

VII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Ali je $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, ki

$$(x, y) \mapsto \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

   injektivna?

2. Ali je $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, ki

$$(x, y) \mapsto \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

   surjektivna?

3. S pomočjo matematične indukcije pokaži veljavnost neenačbe

$$n! \leq \left(\tfrac{n+1}{2}\right)^n; \qquad \big(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n\big),$$

   kjer je $n \in \mathbb{N}$. (Nasvet: Mogoče ti bo koristila formula $2n^n \leq (1+n)^n$, ki jo preveriš z binomskim izrekom.)

4. S pomočjo matematične indukcije pokaži veljavnost formule

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

5. Za katere vrednosti parametra λ je funkcija

$$f(x) := (\lambda^2 - \lambda - 2)x^2 + 2\lambda x = 1$$

   vedno pozitivna?

6. Poišči vse rešitve enačb

   a) $\sqrt{x - 1 + \sqrt{x+1}} = 2$ *b)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4$ *c)* $2x + \sqrt{2x^2 + x - 1} = 1$

VIII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Izračunaj
$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$
2. Poišči množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo enačbi
$$z + 2\overline{z} = |z|$$
3. Denimo, da je $\zeta^{17} = 1$, in $\zeta \neq 1$. Pokaži, da je za vsako naravno število k, ki *ni deljivo s* 17 izpolnjeno:
$$1 + \zeta^{k} + \zeta^{2k} + \cdots + \zeta^{16k} = 0$$
4. Pokaži, da za vsako naravno število n obstaja polinom p_n z realnimi koeficienti, da je
$$\cos n\theta = p_n(\tan\theta) \cdot \cos^n\theta$$
5. Pokaži, da je polinom $z^{2n} + z^n + 1$ deljiv s polinomom $z^2 + z + 1$ natanko tedaj, ko naravno število n ni deljivo s 3.

1. Zapiši prvih pet členov zaporedja, pokaži, da je zaporedje monotono in navzgor omejeno, ter izračunaj limito

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n}$$

2. Poišči limito zaporedja

$$a_n := \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

3. Poišči limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{3^n + 5^n}$$

4. Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

5. Funkcija $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

   Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z) \in \mathbb{R}$.

6. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\frac{3|z|}{z^2 - 4} = 1$$

IX. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Dana je funkcija

$$f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}; \quad x \to \frac{x}{1 + |x|}$$

Poišči zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$, preveri, če je injektivna, in če je, poišči inverz funkcije $g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathcal{Z}_f$, ki argument slika v isto število kot f.

2. Poišči vsa različna kompleksna števila z, w, da bo istočasno

$$p(z) = p(w), \quad \text{ter} \quad q(z) = q(w),$$

kjer je $p(z) = z^5 + z$ in $q(z) = z^5 + z^2$.

3. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, in $|c| \neq |d|$. Pokaži, da velja neenakost

$$\left| \frac{|a| - |b|}{|c| + |d|} \right| \leq \left| \frac{a + b}{c + d} \right| \leq \left| \frac{|a| + |b|}{|c| - |d|} \right|$$

4. Pokaži, da je $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Nato izračunaj še $\cos(k\frac{\pi}{5})$ za $k \in \mathbb{Z}$.

5. Pokaži, da je $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2}$. Nato izračunaj še $\sin(k\frac{\pi}{5})$ za $k \in \mathbb{Z}$.

6. S pomočjo prejšnjih dveh nalog razbij polinom $x^5 + 1$ na produkt samih linearnih in kvadratnih polinomov.

1. Preveri, če vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
konvergira.

2. Pokaži, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$
konvergira, in izračunaj koliko členov moramo sešteti, in na koliko decimalk moramo rezati delne rezultate, da bi jo izračunali na pet decimalk.

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

4. V ravnini so dane paralelne premice L_1, L_2, L_3, kjer je L_2 med L_1 in L_3. Razdalja med L_1 in L_2 je a, med L_2 in L_3 pa b. Pokaži da je ploščina enakostraničnega trikotnika, ki ima oglišča na teh premicah, enaka $\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+ab+b^2)$ Poišči točki

5. Rekurzivno je podano zaporedje
$$x_1 := 1; \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^3 - 9x_n}{16}$$
S pomočjo indukcije pokaži, da je $-|x_n| \leq \frac{x_n^3-9x_n}{16} \leq |x_n|$; (tj. $|x_{n+1}| \leq |x_n|$) in $|x_n| \leq 5$. Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so lihi členi zaporedja pozitivni, sodi pa negativni).

X. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Zapiši prvih pet členov zaporedja, pokaži, da je zaporedje monotono in navzgor omejeno, ter izračunaj limito

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n}$$

2. Poišči limito zaporedja

$$a_n := \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

3. Poišči limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{3^n + 5^n}$$

4. Naj bosta z_1 in z_2 poljubni točki v kompleksni ravnini. Poišči točki z_3 in z_4, da bo z_1, z_2, z_3, z_4 kvadrat.

5. Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

6. Funkcija $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

   Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z) \in \mathbb{R}$.

7. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\frac{3|z|}{z^2 - 4} = 1$$

1. Ali lahko poiščeš realno število a, da bo funkcija

$$f(x) := \begin{cases} a\left(\frac{3x-4}{-2+3x}\right)^{\sqrt{ax}}; & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}; & \text{sicer} \end{cases}$$

povsod zvezna?

2. Dana je funkcija

$$f(x) := x\cos\frac{1}{x}.$$

Poišči njeno definicijsko območje; v točkah, kjer ni definirana ji dodeli take vrednosti, da bo postala zvezna na celotni realni osi, nato pa izračunaj odvod tako dobljene funkcije.

3. Ali je funkcija

$$f(x) := \begin{cases} 0; & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x}; & \text{sicer} \end{cases}$$

zvezna v točki 0? Poišči tudi njene ničle in skiciraj njen graf.

4. Izračunaj limiti

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$$

brez uporabe L'Hospitalovega pravila!

5. Izračunaj limiti

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \cos^{1/x^2} x$$

6. Dana je funkcija

$$f : x \mapsto \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Poišči točke nezveznosti in točke zveznosti.

7. Izračunaj odvod funkcije

$$f(x) := x^{(x^x)}.$$

XI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Rekurzivno je podano zaporedje

$$x_1 := 1; \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^3 - 9x_n}{16}$$

S pomočjo indukcije pokaži, da je $-|x_n| \leq \frac{x_n^3-9x_n}{16} \leq |x_n|$; (kar je isto kot: $|x_{n+1}| \leq |x_n|$), in $|x_n| \leq 5$. Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so lihi členi zaporedja pozitivni, sodi pa negativni).

2. Preveri, če vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

konvergira.

3. Poišči limito v odvisnosti od $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}}$$

4. Poišči naravno definicijsko območje funkcijama

$$f(x) := \ln\sqrt{1 + \tan x} \qquad g(x) := \tan\sqrt{1 + \ln x},$$

če veš, da je $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

5. Definirajmo zaporedji

$$a_n := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n} \qquad b_n := \arctan(n^2)$$

Za vsako posebej odgovori: Ali je monotono? Omejeno? Določi stekališča in limito, če obstaja!

6. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je

$$\left(\frac{z - i - 1}{iz + 1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

7. Poišči lim sup in lim inf za zaporedje

$$a_n := 1 + \frac{\sqrt{2 + n^2} - \sqrt{n}}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

1. Denimo, da alternirajoča vrsta $S := \sum(-1)^n a_n;\ (a_n \geq 0)$ zadošča Leibnitzevemu pogoju, torej

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|; \qquad \lim |a_n| = 0.$$

Pokaži, da je

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq |a_{n+1}|.$$

2. Poišči kot, pod katerim se sekata implicitno podani krivulji

$$xy = a^2; \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

3. Pokaži, da se tangenta na krivuljo $xy = a^2$ le–te dotakne v točki, ki razpolavlja odsek te tangente med koordinatnima osema.

4. Dokaži da gredo vse normale krivulje

$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \qquad (a > 0)$$

skozi isto točko. Katera je ta skupna točka?

5. Poišči tisti pravokotnik, ki ima pri danem obsegu največjo ploščino (tj. obseg pravokotnika je konstantno enak o).

6. Določi definicijsko območje, asimptote, ekstreme, konveksnost oz. konkavnost in čim natančneje nariši funkcijo

$$y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$$

7. Izračunaj kot, pod katerim se sekajo parabola $y = x^2$ in premica z enačbo $3x - y = a$; v posebnem, ko je $a = 2$.

8. Izračunaj ekstreme funkcije

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

na njenem naravnem definicijskem območju.

9. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^{i!}}$$

na pet decimalk natančno; določi tudi, na koliko decimalk je potrebno rezati delne rezultate (delamo v fiksni decimalni vejici z rezanjem odvečnih decimalk).

XII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA I

1. Preveri, da je vrsta konvergentna, in določi koliko členov moramo sešteti, da bi jo izračunali na pet decimalk natančno.
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i!}}$$

2. Ali lahko poiščeš realno število a, da bo funkcija
$$f(x) := \begin{cases} a\left(\frac{x^2+4x-5}{x^3+2x^2-x-2}\right)^{\sqrt{ax}}; & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}; & sicer \end{cases}$$
povsod zvezna?

3. Dana sta funkciji
$$f(x) := \begin{cases} x-1; & x \leq 0 \\ 1-x; & 0 < x < 1 \\ 1; & 1 \leq x \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 2+x; & x \leq 0 \\ 3-2x; & 0 < x < 1 \\ 3x; & 1 \leq x \end{cases}$$
Preveri, ali sta funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$ zvezni.

4. Ali je funkcija
$$f(x) := \begin{cases} 0; & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & sicer \end{cases}$$
zvezna v točki 0? Poišči tudi njene ničle in skiciraj njen graf.

5. Izračunaj limiti
$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$$
brez uporabe L‘Hospitalovega pravila!

6. Izračunaj limiti
$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \cos^{1/x^2} x$$

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Izračunaj integral

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

2. Izračunaj integrale

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$

3. Izpelji rekurzivno formulo za integral

$$I_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$$

4. Izračunaj

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$$

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Ali konvergira integral
$$\int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = e^{-x}$, $y = 0$ in tista tangenta krivulje $y = e^{-x}$, ki poteka skozi koordinatno izhodišče.

3. Zavrti krivuljo
$$y := \frac{1}{x^2+1},$$
omejeno z $x = \pm 1,\ y = 0$ okoli

   (a) abscisne osi

   (b) ordinatne osi.

   V obeh primerih izračunaj volumen dobljenega telesa.

4. Na prvem loku cikloide
$$x := a(t - \sin t) \quad y := a(1 - \cos t)$$
poišči točko, ki deli ga deli v razmerju 1 : 3.

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Ali konvergira integral
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

2. Izračunaj dolžino loka prvega zavoja Arhimedove spirale, podane v polarnih koordinatah z
$$r = a\varphi; \quad (a > 0).$$

3. Zavrti krivuljo
$$y := \frac{1}{x^2+1},$$
omejeno z $x = \pm 1,\ y = 0$ okoli abscisne osi in izračunaj volumen dobljenega telesa.

4. Na prvem loku cikloide
$$x := a(t - \sin t) \quad y := a(1 - \cos t)$$
poišči točko, ki deli ga deli v razmerju $1 : 3$.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Ali konvergira vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} \quad (a > 1)?$$
Odgovor utemelji!

2. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \quad (k \in \mathbb{N})!$$

3. Dokaži, da integral
$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$
divergira.

4. Koliko členov moramo sešteti, da bi dobili vsoto
$$S := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$
na 6 decimalk natančno?
(Opomba: najprej dokaži, da vrsta res konvergira!)

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Ali konvergira vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} \quad (a > 1)?$$
Odgovor utemelji!

2. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \quad (k \in \mathbb{N})!$$

3. Dokaži, da vrsta konvergira in jo tudi približno izračunaj na dve decimalki natančno
$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$
(Nasvet: najprej ugotovi, koliko členov moramo sešteti!)

4. S pomočjo Raabejevega kriterija odloči, ali vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$$
konvergira!

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Dano je zaporedje funkcij
$$u_n(x) := e^{n(\ln x - 1)}.$$
Poišči definicijsko območje funkcije $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Ali zaporedje konvergira enakomerno na $(1, e)$?

2. Upoštevaj, da je $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ in izračunaj
$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2 + n^4} \right) dx.$$
(Nasvet: Najprej dokaži, da vrsta konvergira enakomerno.)

3. V odvisnosti od parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ preuči absolutnost, pogojnost in enakomernost konvergence
$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\alpha n}.$$

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo
$$f(x) := 2\sin(x^2) + 3.$$
Koliko členov moramo sešteti, da bi izračunali $f(1)$ na tri decimalke?

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Dano je zaporedje funkcij
$$u_n(x) := e^{n(\ln x - 1)}.$$
Poišči definicijsko območje funkcije $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Ali zaporedje konvergira enakomerno na $(1, e)$?

2. Upoštevaj, da je $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ in izračunaj
$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2 + n^4} \right) dx.$$
(Nasvet: Najprej dokaži, da vrsta konvergira enakomerno.)

3. Poišči vsoto
$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \right)$$

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo
$$f(x) := 2\sqrt{1 - x^2} + 3.$$

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči ploščino lika, ki ga omejujeje krivulja z enačbo

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$$

2. Poišči volumen telesa, ki nastane z rotacijo ploskve, omejene z

$$y^2 = x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$$

okoli abscisne in okoli ordinatne osi.

3. Poišči ploščino lika, ki ga omejuje krivulja

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

na svojem naravnem definicijskem območju.

4. Poišči dolžino loka tistega dela krivulje

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

pri katerem ordinata (y–os) leži med 0 in a.

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči volumen torusa (avtomobilske zračnice)
   (Nasvet: torus dobimo z rotacijo kroga polmera r s središčem v točki $T(0, R)$; $R \geq r$.)

2. Poišči naravno definicijsko območje, ničle, pole, ekstreme ter asimptote krivulje

   $$9y^2 = x(3-x)^2$$

   in jo nato nariši. Izračunaj tudi površino telesa, ki nastane z rotacijo krivulje okoli abscisne osi.

3. S pomočjo primerne substitucije pokaži, da je

   $$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

   Nato izrazi I_n s pomočjo I_{n-1}, in izračunaj I_{10}.

4. Naj bosta $p, q \in \mathbb{N}$. S pomočjo parcialne integracije izračunaj

   $$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Razvij funkcijo $1/x^2$ v Taylorjevo vrsto reda n v okolici točke $x = 1$.

2. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj $\cos 15^\circ$ na štiri decimalke natančno. (Nasvet: Najprej s pomočjo formule za ostanek izračunaj, koliko členov moramo sešteti.)

3. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj

$$\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}$$

   na štiri decimalke natančno.

4. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

   na tri decimalke natančno.

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. V krožno križišče s središčem v točki $T(0,1)$ polmera 1 pripelji iz ceste $y=1$ gladko pot, ki bo cesto zapustila v točki $T(2,1)$ in se na križišce priključila v $T(1/2, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$

2. S pomočjo razvoja funkcije $f(x) := 1/\sqrt{1-x}$ v Taylorjevo vrsto izračunaj na eno decimalko nihajni čas matematičnega nihala pri odklonu $\theta_0 := 120°$, če je dolžina enaka $l := 1/16g\ s^2$; g je gravitacijski pospešek. Torej je treba izračunati integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}; \qquad k = \sin\tfrac{\theta_0}{2}$$

3. S pomočjo aproksimacije funkcije $f(x) := 1/\sqrt{1-x}$ v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ s polinomom stopnje n izračunaj na eno decimalko nihajni čas matematičnega nihala pri odklonu $\theta_0 := 120°$, če je dolžina enaka $l := 1/16g\ s^2$; g je gravitacijski pospešek. Torej je treba izračunati integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}; \qquad k = \sin\tfrac{\theta_0}{2}$$

VII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči kubični zlepek, ki gre skozi točke $T_1(0,0)$, $T_2(1,1), T_3(2,0), T_4(3,-1)$.

2. Z metodo najmanjših kvadratov aproksimiraj funkcijo $\sin(x)$ v točkah $x = 0,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi$ s pomočjo linearne kombinacije funkcij $\ln x, e^x, 1$.

3. Poišči $\sin(x^2)^{(n)}(0)$.

4. Interval $[-1/2, 1/2]$ razdeli na $2n$ enakih delov in poišči polinom stopnje $2n$, ki aproksimira funkcijo $f(x) := \frac{1}{1-x^2}$ na tem intervalu na 2 decimalki natančno. Zahtevamo še, da poteka skozi točke $T\big(\frac{k}{2n}, f(\frac{k}{2n})\big)$; $k = -n, -(n-1), \ldots, n-1, n$.
(Nasvet: Pomagaj si s funkcijo $g(t) := \frac{1}{1-t}$, ki jo aproksimiraš v točkah $T\big(\frac{k^2}{(2n)^2}, g\big(\frac{k^2}{(2n)^2}\big)\big)$.)

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči površino, ki jo omejuje astroida
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}; \qquad (a > 0)$$

2. Poišči površino med strofoido
$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}; \qquad (a > 0)$$
in njeno absciso.

3. Poišči površino avtomobilske zračnice, ki jo multinacionalka Michelin dela tako, da krožnico
$$x^2 + (y-b)^2 = a^2; \qquad (b > a > 0)$$
zavrti okoli abscise.

4. Poišči dolžino sklenjenega dela krivulje
$$9ay^2 = x(x-3a)^2$$

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči ploščino lika, ki ga omejujeje krivulja z enačbo

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$$

2. Poišči volumen telesa, ki nastane z rotacijo ploskve, omejene z

$$y^2 = x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$$

okoli abscisne in okoli ordinatne osi.

3. Poišči ploščino lika, ki ga omejuje krivulja

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

na svojem naravnem definicijskem območju.

4. Poišči dolžino loka tistega dela krivulje

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

pri katerem ordinata (y–os) leži med 0 in a.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{1}{x^2+3x+2}$$
v Taylorjevo vrsto po potencah $(x+4)$.

2. Razvij funkcijo
$$f(x) := (1+e^x)^3$$
V Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 0$.

3. Razvij funkcijo
$$f(x) := \sqrt{x}$$
V Taylorjevo vrsto po potencah $x - 4$.

4. S pomočjo Simpsonove metode izračunaj integral
$$\int_0^{2\pi} \cos(x^2)\, dx$$
na tri decimalke natančno.

5. S pomočjo primerne substitucije pokaži, da je
$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$
Nato izrazi I_n s pomočjo I_{n-2}, in izračunaj I_{10}.

6. Naj bosta $p, q \in \mathbb{N}$. S pomočjo parcialne integracije izračunaj
$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Koliko členov Tayloreve vrste je treba vzeti, da bi izračunali
$$\cos 18^\circ$$
na tri decimalke? Ko to ugotoviš, tudi izračunaj $\cos 18^\circ$ na tri decimalke.

2. Koliko členov Tayloreve vrste za funkcijo $f(x) := \ln(1+x)$ je treba vzeti, da bi izračunali
$$\ln 2 = f(1)$$
na tri decimalke?

3. S pomočjo razvoja $\sin x$ v Taylorevo vrsto okoli točke 0 izračunaj
$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}$$
na dve decimalki natančno.

4. S pomočjo razvoja funkcije $e^{x/2}$ v Taylorevo vrsto izračunaj integral na tri decimalke:
$$\int_0^{1/9} \sqrt{xe^x}\, dx$$

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. S pomočjo primerne substitucije izračunaj direktno določena integrala (torej brez prehoda na nedoločeni integral).

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

2. Direktno izračunaj določena integrala (torej brez prehoda na nedoločeni integral).

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}\,dx \qquad \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

3. Poišči konvergenčni polmer za vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^{2n}}{n^n}$$

4. Poišči vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

VI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Poišči vsoto vrste
$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$
in izračunaj, za katere x je konvergentna.

2. Poišči vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

3. Razvij funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$
v Taylorjev polinom reda $n = 2$ okoli točke $a = 0$, in **natančno izračunaj** pri tem storjeno napako, če $x \in [0,1]$ (hočemo torej vedeti, pri katerem $x \in [0,1]$ je napaka največja, in kolikšna je).

4. S pomočjo trapezne metode izračunaj
$$\int_0^1 e^{-1/x^2}\, dx$$
na dve decimalki natančno.

VII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Razvij $1/x^2$ v potenčno vrsto po potencah $x-1$ in poišči konvergenčni interval.
2. Razvij $\cos^2 x$ v potenčno vrsto po potencah $x-\pi/4$.
3. Razvij
$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$
po potencah $\frac{x}{1+x}$.
4. Poišči vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^{n-1}}$$

VIII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. S pomočjo interpolacijskega polinoma izračunaj integral

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

in oceni napako. Funkcijo aproksimiramo v točkah $0, 1/8, 1/4, 1/2$.

2. S pomočjo interpolacijskega polinoma izračunaj integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2 \, dx$$

in oceni napako. Funkcijo aproksimiramo v točkah $0, 0\text{'}2, 0\text{'}4, 0\text{'}6, \sqrt{\pi/2}$.

3. S pomočjo interpolacijskega polinoma izračunaj integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin x^2 \, dx$$

in oceni napako. Funkcijo aproksimiramo v točkah $0, 0\text{'}2, 0\text{'}4, 0\text{'}6, \sqrt{\pi/2}$

4. S pomočjo interpolacijskega polinoma izračunaj integral

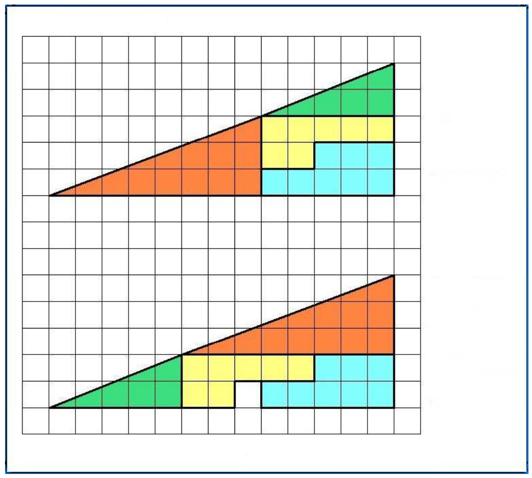
$$\int_0^1 e^{x^2} \, dx$$

in oceni napako. Funkcijo aproksimiramo v točkah $0, 0\text{'}3, 0\text{'}6, 0\text{'}9, 1$.

3 Analiza I in II – teoretične naloge

Domače naloge iz teorije pri predmetu Analiza I — temelji analize
(2008-2009)

1.



Slika 1: Zgornji trikotnik smo razdelili na 4 like, in jih premaknili, da smo dobili spodnji trikotnik. Ploščine naj bi se pri premikih ohranjale. Toda kljub vsemu ima spodnji trikotnik večjo ploščino kot zgornji (saj je v njemu en dodatni kvadratek). Zakaj ploščini nista enaki?

2. Ali za množice A, B, C in D vedno velja, da je

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)?$$

   Kdaj pa velja celo enakost?

3. Pokaži, da ima v množici realnih števil vsaka navdol omejena neprazna podmnožica $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ infimum (tj. največjo možno spodnjo mejo).
   Nasvet: Bodi

$$S := \{s \in \mathbb{R};\ \ s \text{ je spodnja meja } \Omega\}.$$

   Pokaži, da je (i) S navzgor omejena, neprazna (torej ima po Dedekindovem aksiomu supremum), in (ii) da je $\sup S = \inf \Omega$.

4. Preveri, da je n-ti člen Fibonaccijvega zaporedja

$$a_1 = 1 = a_2$$
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

podan s formulo

$$a_n = \frac{-\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n + \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}$$