**SLIKA 22.**
Sliko 20 smo raztegnili do pravega razmerja stranic slikarskega platna.


[6] A. Criminisi, R. Thomas, Getting into the picture, Plus magazine, 2003: `https://plus.maths.org/content/getting-picture`

[7] R. Zhang, Image Rectification: Remove Projective and Affine Distortions, Homework 2, Purdue university, 2008: `https://engineering.purdue.edu/kak/computervision/ECE661.08/solution/hw2_s2.pdf`

[8] S. K. Badam, ECE661 Computer Vision Homework - 3, Purdue university, 2012: `https://engineering.purdue.edu/kak/computervision/ECE661_Fall2012/solution/hw3_s2.pdf`


× × ×

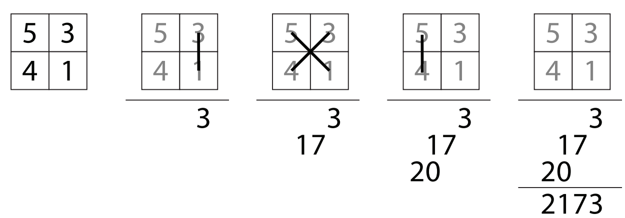


# Hitro množenje velikih števil

Boštjan Gabrovšek in Aljoša Peperko

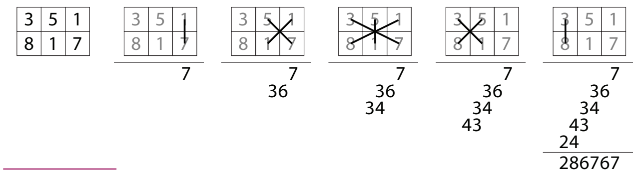
**Običajni uveljavljeni način množenja dveh števil temelji na množenju enic, desetic, stotic enega izmed števil z drugim številom in seštevanju teh vmesnih zmnožkov. Alternativni način množenja števil, ki ga bomo opisali v tem prispevku, naj bi bil [2] predstavljen že v približno tri tisoč let stari indijski knjigi. Temelji na naravni ideji, da najprej izračunamo število enic, desetic, stotic v zmnožku in jih nato seštejemo. Ta metoda je precej zanimiva tudi zato, ker si jo ni težko shematično zapomniti.**

Za začetek si poglejmo primer, kako zmnožimo števili 53 in 41. Števili podpišemo. Najprej zmnožimo enice $1 \cdot 3 = 3$. Nato izračunamo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 17$, kar nam pove, da imamo v zmnožku 17 desetic. Izračunamo še $5 \cdot 4 = 20$ (20 stotic), z zamikom v levo podpišemo in seštejemo dobljene vmesne zmnožke ter dobimo rezultat 2173. Shematično lahko to množenje predstavimo »preko diagonal«:




**SLIKA 1.**
Primer množenja dvomestnih števil $53 \cdot 41$

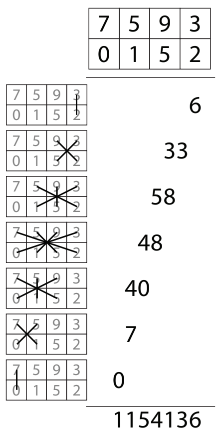
Tromestni števili 351 in 817 zmnožimo na naslednji način:




**SLIKA 2.**
Primer množenja tromestnih števil $351 \cdot 817$

Pri tem smo upoštevali, da je $1 \cdot 7 = 7$, $5 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 36$, $3 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = 34$, $3 \cdot 1 + 5 \cdot 8 = 43$ in $3 \cdot 8 = 24$.

Lahko množimo tudi števila z različnim številom decimalnih mest, tako da krajšemu številu dodamo vodilne ničle. Na sliki 3 je izračunan zgled za množenje štirimestnega števila 7593 s trimestnim številom 152. Iz spodnje vrstice lahko razberemo rezultat 1154136.




**SLIKA 3.**
Primer množenja $7593 \cdot 152$

Zgoraj opisani postopek deluje za poljubno velika števila. Zaradi nazornosti dokažimo pravilnost tega postopka le za množenje štirimestnih števil.

Naj bo $a_4a_3a_2a_1$ decimalni zapis števila $a$ in naj bo $b_4b_3b_2b_1$ decimalni zapis števila $b$. Števili $a$ in $b$ lahko tedaj zapišemo kot

- $$a = 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + 1a_1,$$ $$b = 1000b_4 + 100b_3 + 10b_2 + 1b_1.$$

Produkt $a \cdot b$ je tedaj enak

- $$a \cdot b = (1000\,a_4 + 100\,a_3 + 10\,a_2 + 1\,a_1) \cdot \cdot (1000\,b_4 + 100\,b_3 + 10\,b_2 + 1\,b_1).$$

Izraza lahko zmnožimo in preuredimo člene:

- $$\begin{aligned} a \cdot b = {} & 1\,000\,000\,(a_4b_4) + 100\,000\,(a_4b_3 + a_3b_4) \\ & + 10\,000\,(a_4b_2 + a_3b_3 + a_2b_4) \\ & + 1\,000\,(a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4) \\ & + 100\,(a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) \\ & + 10\,(a_2b_1 + a_1b_2) + 1\,(a_1b_1), \end{aligned}$$

kar potrjuje pravilnost zgoraj opisanega postopka.

Analogna ideja deluje tudi v splošnem dokazu množenja do $n$-mestnih števil. Formalno to zapišemo na naslednji način.

Naj bo $a = a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i$ in $b = b_nb_{n-1}\cdots b_2b_1 = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}b_i$. Potem je

- $$\begin{aligned} a \cdot b &= \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}b_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{2n-2} 10^i \sum_{i_a+i_b=i+2} a_{i_a}b_{i_b}. \end{aligned}$$

Kako pa je z daljšimi številkami, je postopek bolj učinkovit od klasičnega? Hitro ugotovimo, da moramo za zmnožek dveh $n$-mestnih števil v vsakem primeru opraviti $n^2$ krajših množenj, pri tem moramo pri klasičnem množenju opraviti do $n(n-1)$ prenosov cifer pri seštevanju in na koncu opraviti $n$ seštevanj do $n+1$ mestnih števil. V našem primeru moramo v vmesnih korakih sešteti do $n$ dvomestnih števil, na koncu pa opraviti še $2n-1$ seštevanj v povprečju krajših števil. Na podlagi tega lahko argumentiramo, da je tudi v primeru zelo dolgih množenj postopek učinkovit, v vsakem primeru pa je nekaj dela.

## Literatura

[1] *Fast Math Tricks – How to multiply 3 digit numbers – the fast way!*, `https://www.youtube.com/watch?v=pG3e8kQDOKw`, ogled: 27. 1. 2016.

[2] *Fast Multiplication Trick 5 – Trick to Directly Multiply the Big Numbers.wmv*, `https://www.youtube.com/watch?v=A7EOSApApw4`, ogled: 27. 1. 2016.

× × ×