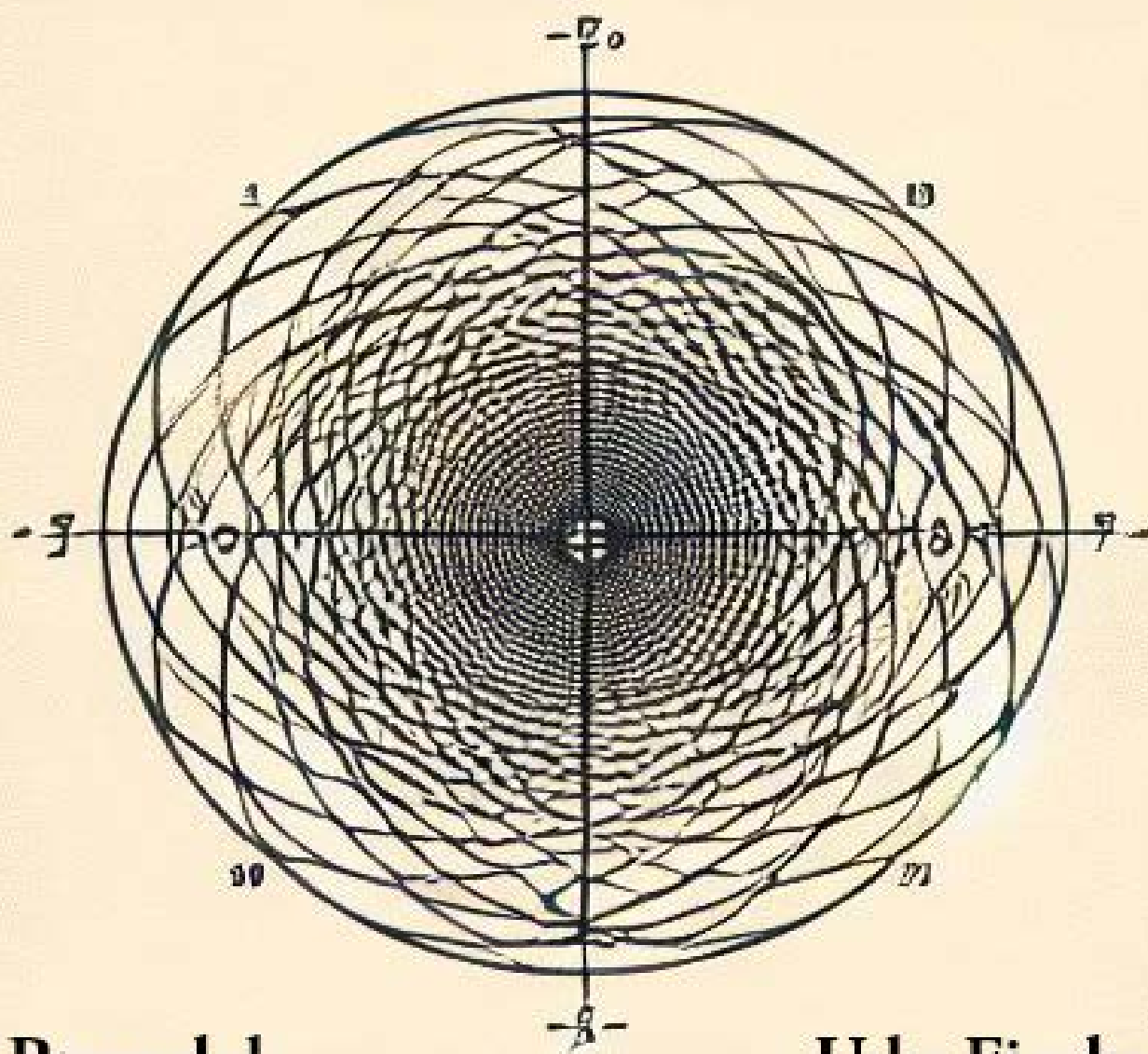


Načela in metode dinamike

Njihova uporaba za sisteme s
koničnim številom prostorskih stopenj



Prevedel:
Milan Batista

Udo Fischer
Wolfgang Stephan



UNIVERZA
V LJUBLJANI

FPP

Fakulteta za pomorstvo
in promet

Načela in metode dinamike

Njihova uporaba za sisteme
s koničnim številom prostostnih stopenj

Udo Fischer

Wolfgang Stephan

Načela in metode dinamike: njihova uporaba za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj

Avtorja: Udo Fischer, Wolfgang Stephan

Prevajalec in urednik: prof. dr. Milan Batista

Oblikovanje naslovnih strani: Microsoft Copilot

Založnik: Založba Univerze v Ljubljani (University of Ljubljana Press)

Za založnika: prof. dr. Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani

Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

Za izdajatelja: prof. dr. Peter Vidmar, dekan Fakultete za pomorstvo in promet
Univerze v Ljubljani

© Udo Fischer; Wolfgang Stephan

Portorož, Ljubljana, 2024

Publikacija je brezplačna.

Prva e-izdaja.

Publikacija je izšla s podporo Javne agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Prva e-izdaja. Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na:
<https://ebooks.uni-lj.si/>

DOI: 10.70587/9789612974503

Katalogni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 214417411
ISBN 978-961-297-450-3 (PDF)

To delo je prevod prvih štirih poglavij ter delov petega in šestega poglavja knjige *Prinzipien und Methoden der Dynamik*, ki sta jo napisala Prof. Dr. Udo Fisher in Doc. Dr. Wolfgang Stephan iz Tehnične univerze Otto von Guericke v Magdeburgu in jo je leta 1972 izdala založba Fachbuchverlag iz Leipziga.

Milan Batista

Portorož, avgust 2023

Vsebina

1. Uvod	1
2. Osnovni pojmi in opredelitve	3
2.1. Prostor in čas	3
2.2. Kinematične osnove	4
2.2.1. Kinematika materialne točke	4
2.2.2 Virtualni pomiki	10
2.3. Masa	11
2.4 Sila	17
3 Aksiomi mehanike	22
3.1 Temeljni aksiom mehanike	22
3.2 Newtonovi aksiomi mehanike	23
3.2.1 Newtonov prvi aksiom: zakon vztrajnosti	23
3.2.2 Drugi Newtonov aksiom: temeljna enačba dinamike	23
3.2.3 Newtonov tretji aksiom: zakon vzajemnega učinka	24
3.3 D'Alembertov aksiom	26
3.4 Neinercialni sistemi, Galilejevo načelo relativnosti	27
4. Izreki mehanike	30
4.1 Izreki o skupni gibalni količini, vrtilni količini in energiji mehanskega sistema	30
4.1.1 Izrek o masnem središču	30
4.1.2 Zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi vrtilne količine	31
4.1.3. Izrek o kinetični energiji (zakon o ohranitvi energije)	31
4.2 Načela	34
4.2.1 Uvodne opombe	34
4.2.2 d'Alembertovo načelo	35
4.2.3 Načelo virtualnega dela	36

4.2.4 Hamiltonovo načelo	37
4.2.5 Jourdainovo načelo in Gaussovo načelo najmanjše prisile	40
5. Sistemi s končnim številom prostostnih stopenj	42
5.1 Modeli s končnim številom prostostnih stopenj	42
5.2 Kinematika sistemov s koničnim številom prostostnih stopenj	42
5.2.1 Kinematika holonomnih in linearno neholonomnih sistemov	42
5.2.2 Splošne pogojne enačbe	46
5.2.3 Kvazi-hitrosti, kvazi-koordinate	48
5.3 Ravnotežne lege sistemov s končnim številom prostostnih stopenj	50
5.4. Enačbe gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj	56
5.4.1. Lagrangeve enačbe gibanja prve vrste	56
5.4.2 Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste	59
5.4.3. Kanonične gibalne enačbe za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami	63
5.4.4 Hamiltonova-Jacobova parcialna diferencialna enačba	66
5.4.5 Predstavitev Lagrangevih enačb gibanja s pomočjo kvazi-koordinat	70
5.4.6 Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste brez uporabe Lagrangevih parametrov	76
5.4.7 Applove gibalne enačbe	78
5.4.8. Gibalne enačbe za sisteme z nelinearnimi neholonomskimi omejitvami	80
5.5 Gibalne enačbe za togo telo	82
5.5.1 Kinetična energija in kotni moment togega telesa, vztrajnostni momenti	82
5.5.2. Eulerjevi koti	92
5.5.3. Eulerjeve enačbe	96
5.5.4 Ravninsko gibanje togega telesa	99
6. Primeri uporabe	103
6.1 Ravnotežna lega vrteče gredi	104
6.2 Dvigalo	109

6.3 Prostorsko nitno nihalo s premikajočo se visečo točko	113
6.4 Ravninsko nitno nihalo s premikajočim obesiščem	117
6.5. Bič	120
6.6. Vibracijska igla	123
6.7 Težka os na nagnjeni ravnini	129
6.8 Pogonski sistem z nenadnim nastopom stalne obremenitve	138
Literatura	141

1. Uvod

Mehanika je študija gibanja materialnih teles in fizikalnih vzrokov zanj. Pri tem gibanje pomeni mehansko gibanje, tj. spremembo lege makroskopskih teles kot celote ali njihovo deformacijo. Gibanje vključuje stanje mirovanja. V tem primeru mehanika podaja pogoje, pod katerimi so lahko materialna telesa v mirovanju. V tem splošnem pa je mehanika veja fizike.

Razvoj fizikalnega znanja v 19. in 20. stoletju je porušil predstavi o absolutnem prostoru in absolutnem času, ki sta bila del osnovnih pojmov *klasične mehanike*, ter spodbudil razvoj relativnostne mehanike in kvantne mehanike. Zakoni relativnostne mehanike se združijo z zakoni klasične mehanike, kadar se uporabljajo za telesa, katerih hitrosti so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Uporaba kvantne mehanike je potrebna le, če so mase preučevanih teles tako majhne, da se uvrščajo v velikostni red atomov.

Tehnični sistemi so praviloma sestavljeni iz teles velikostnega reda večjega od atomskega in se gibljejo s hitrostmi, ki so v primerjavi s svetlobno hitrostjo majhne. Zato za raziskovanje gibanja tehničnih sistemov zadostujejo osnovne ideje klasične mehanike.

Če predpostavimo, da je klasična mehanika popolna v svoji osnovni strukturi, potem je očitno, da jo lahko zgradimo kot deduktivni sistem. Po [2] je *deduktivni sistem* vsaka množica izjav, ki vsebuje vse njihove posledice. V skladu s tem bi morala tako zasnovana mehanika vsebovati vse izreke, ki so potrebne za izračun gibanja tehničnih enot. Vendar pa raznolikosti možnih interakcij med deli mehanskega sistema in njegovim okoljem na splošno ni mogoče razumeti. Vzajemno delovanje med deli teles, katerih učinek je pospeševanje, imenujemo *sile*. V mehaniki je pomembno le to medsebojno delovanje. Funkcijsko odvisnost sile od geometrijskih in fizikalnih parametrov ter časa imenujemo *zakon sile*. Ker je nemogoče v celoti in na splošno zajeti vse zakone sil, ki delujejo v mehanskem sistemu, se bistvene mehanske lastnosti realnega sistema prenesejo na *model sistema*. Takšno modeliranje vključuje opredelitev posebnih zakonov sil in nekatere geometrijske poenostavitve. Deduktivno izgradnjo mehanike je tako mogoče izvesti le za celoto vseh modelnih teles, za katera so podani zakoni sil. Sile ne smejo biti odvisne od fizikalnih količin, ki mehaniko povezujejo z drugimi fizikalnimi zakoni (npr. z zakoni termodinamike ali elektrodinamike).

Če upoštevamo zakone sil kot dane, lahko vse druge izreke reduciramo na nekaj nedokazljivih temeljnih zakonov, ki jih imenujemo *aksiomi*. Vse *izjave* deduktivnega sistema, ki izhajajo iz

teh aksiomov, se imenujejo izreki. Celota aksiomov tvori *sistem aksiomov*. Izbor določenega števila izjav kot aksiomov iz množice izjav deduktivnega sistema je mogoč na različne načine. V naslednjih poglavjih nas bodo pri izbiri aksiomatskih sistemov, primernih za gradnjo mehanike, vodili razlogi namenskosti.

Načela mehanike so tisti splošno veljavni izreki, ki so zaradi svoje povezave s temeljnim pojmom virtualnih pomikov še posebej primerne za izpeljavo enačb gibanja. Njihova prednost se še posebej pokaže pri modelih s togimi vezmi, ki se pogosto uporabljajo v inženirskih sistemih.

S *tehnično mehaniko* označujemo tehnično znanost, ki preučuje gibanje tehničnih sistemov, tj. gibanje mehanizmov, strojev in podpornih konstrukcij, sile, ki delujejo med njihovimi elementi, ter napetosti in deformacije, ki jih povzročajo.

Vsebina inženirske mehanike v različnih pogledih presega vsebino klasične mehanike.

Prvič, ponuja jasne in smiselne metode za analizo tehničnih sistemov in vključuje dodatne predpostavke za poenostavitve, ki jih klasična mehanika ne vsebuje.

Drugič, vsebuje navedbe glede tega, katere lastnosti realnega sistema mora ponazoriti model, tako, da je pri izračunu z zadostno natančnostjo zajeto delovanje dejanskega sistema.

Tretjič, vsebuje merila za to, ali so ugotovljene vrednosti napetosti in deformacije v takšnih mejah, da je

1. določen način delovanja je zagotovljen, da je
2. skladnost med modelom in dejanskim sistemom dovolj natančna in da je
3. zagotovljena zadostna varnost pred zlomom sestavnih delov.

V skladu z razmišljanji v predgovoru, smo poskušali klasično mehaniko zgraditi tako, da so povezave s tehnično mehaniko jasno prepoznavne. Poleg tega smo v obravnavo vključili nekatere bistvene posebnosti tehnične mehanike.

2. Osnovni pojmi in opredelitve

2.1. Prostor in čas

Klasična mehanika obravnava dogajanje v *absolutnem prostoru* in *absolutnem času*. Lastnost »absolutno« pomeni, da lastnosti prostora in časa niso odvisne od fizikalnih procesov; so nespremenljive.

Vsaka točka v prostoru je v kartezičnem koordinatnem sistemu določena s tremi koordinatami x , y , z . Prostor je torej tridimenzionalen. Je evklidska, saj ima element loka prostorske krivulje dolžino

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} .$$

Prostor je *homogen* in *izotropen*, kar pomeni, da potek mehanskih procesov v zaprtem sistemu ni odvisen od tega, v katerem delu prostora se sistem nahaja in kako je usmerjen glede na osi koordinatnega sistema. *Zaprte sistemi* so sistemi, za katere lahko domnevamo, da nanje okolje praktično ne vpliva. Pri zaprtih sistemih vplivata lokacija in lego sistema na potek mehanskih procesov le, če se zaradi spremembe medsebojne razdalje in usmerjenosti lahko spremeni interakcija s sosednjimi sistemi. Vendar to ni v nasprotju s homogenostjo in izotropijo prostora.

Prostor je *zvezen* in *neomejen*, tj. koordinate x , y , z lahko zavzamejo vse vrednosti, ki so večkratniki dolžinske enote.

Navedba časovne vrednosti služi za jasno opredelitev zaporedja dogodkov in njihovega trajanja. Potek je enosmeren – iz sedanjosti v prihodnost. Procesni so ponovljivi le, če se v različnih časovnih obdobjih in pod enakimi pogoji odvijajo na enak način. To izraža homogenost časa. Tako kot prostor je tudi čas zvezen in neomejen, kar pomeni, da lahko časovni koordinati t kot vrednosti pripišemo vse realne mnogokratnike časovne enote.

Zgoraj omenjene lastnosti prostora in časa ter vsi sklepi, ki izhajajo iz njih, se na področju klasične mehanike ujemajo z izkušnjami. Te lastnosti so tako splošne, da jih je treba postaviti pred vse druge zakone mehanike in jih obravnavati kot aksiome. Če povzamemo, jih lahko opišemo na naslednji način:

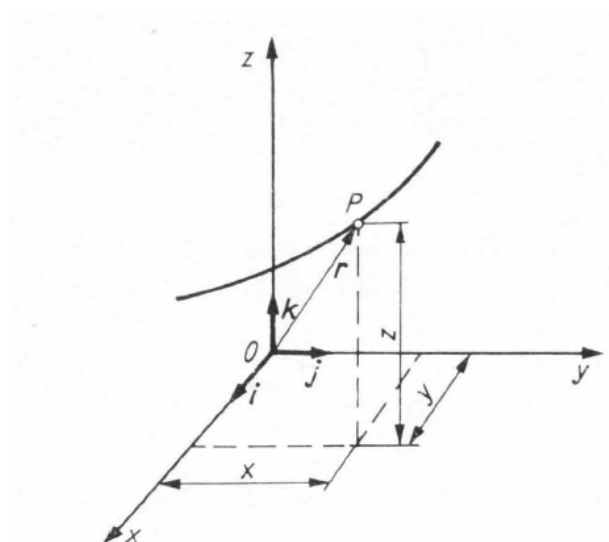
- Prostor je absoluten, tridimenzionalen, evklidski, zvezen, neomejen, homogen in izotropen.
- Čas je absoluten, enodimenzionalen, zvezen, neomejen, homogen.

Homogenost in izotropnost prostora ter homogenost časa veljata v vsej fiziki tudi zunaj klasične mehanike.

2.2. Kinematične osnove

2.2.1. Kinematika materialne točke

Za nedvoumen opis gibanja materialne točke je potreben ustrezen opazovalni sistem. Kartezični koordinatni sistem je prva izbira. Lega materialne točke P je enoznačno določena z navedbo njenih projekcij na koordinatne osi x , y in z , glej sliko 2/1.



Slika 2/ 1

Lega materialne točke P v kartezičnem koordinatnem sistemu

Glede na predstavljeni koordinatni sistem je lega točke P enolično določena s *krajevnim vektorjem* $\mathbf{r}$, ki je od projekcij x , y , z odvisen na naslednji način:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (2.1)$$

Vektorji $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ so enotski vektorji v smeri koordinatnih osi.

V nadaljevanju vedno predpostavimo, da je krajevni vektor dvakrat odvedljiv po času. Vektor *hitrosti* $\mathbf{v}$ opredelimo kot odvod krajevnega vektorja po času, *vektor pospeška* $\mathbf{a}$ pa kot odvod vektorja hitrosti po času:

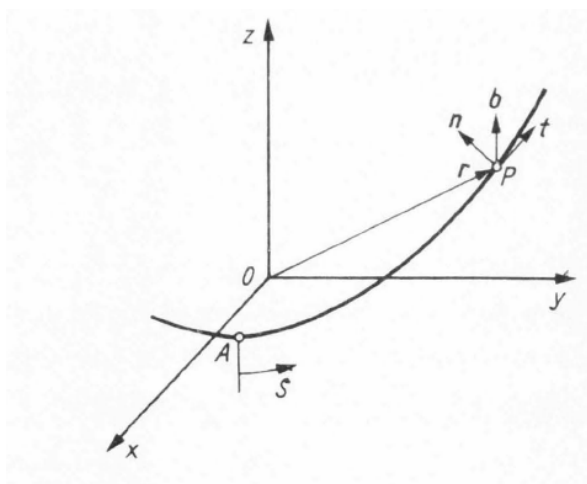
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.3)$$

V običajnem, skrajšanem zapisu mehanike je s piko označen odvod glede na čas. Komponente vektorja hitrosti in vektorja pospeška dobimo s primerjavo enačbe (2.1) z enačbama. (2.2) in (2.3):

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}, & v_y = \dot{y}, & v_z = \dot{z} \\ a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, & a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, & a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (2.4)$$

Poleg zapisa krajevnega vektorja v skladu z enačbo (2.1) tj. s konstantnimi enotskimi vektorji, je pogosto zelo uporabna tudi zapis, pri katerih se enotski vektorji spreminjajo skupaj z krajevnim vektorjem. Posebej pomemben je prikaz poteka tira s pomočjo tako imenovanega potujočega triedra (slika 2/ 2).



Slika 2/2

Tir materialne točke P s potujočim triedrom

Iz začetne točke A izmerimo dolžino loka s krivulje. Tangencialno na krivuljo skozi P v smeri naraščajoče dolžine loka leži *tangentni vektor* $\mathbf{t}$ tj. enotski vektor, katerega vrednost je

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (2.5)$$

Pravokotno nanj, v ravnini ukrivljenosti krivulje tira, leži še en enotski vektor $\mathbf{n}$, *vektor glavne normalne*. Določen je z

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|}.$$

Ker je $\left| \frac{ds}{dt} \right|$ ukrivljenost krivulje κ , dobimo

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Enotski vektor $\mathbf{n}$ je vedno usmerjen proti središču ukrivljenosti. Zveze, ki so tu navedena brez dokaza, so znane iz diferencialne geometrije prostorskih krivulj; zadnja navedena je na primer ena od FRENETOVH formul [3]. Vektor binormale $\mathbf{b}$, ki je pravokoten na $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$, izhaja iz

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (2.7)$$

Z uporabo verižnega pravila odvajanja dobimo

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \mathbf{t}. \quad (2.8)$$

Torej je

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$

velikost vektorja hitrosti, $\mathbf{t}$ pa označuje njegovo smer. Če ponovno odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \dot{s} + \mathbf{t} \frac{d\dot{s}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{s} + \mathbf{t} \ddot{s} \end{aligned}$$

Z upoštevanjem enačbe (2.6) dobimo

$$\mathbf{a} = \kappa \dot{s}^2 \mathbf{n} + \ddot{s} \mathbf{t}. \quad (2.9)$$

Pospešek lahko torej predstavimo kot vsoto normalnega pospeška

$$\mathbf{a}_n = \kappa \dot{s}^2 \mathbf{n} \quad (2.10)$$

in tangencialnega pospeška

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s} \mathbf{t}. \quad (2.11)$$

Iz enačb (2.8) in (2.9) je razvidno, da vektor hitrosti in vektor pospeška ležita v ravnini, ki jo določata $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$, tako imenovani *pritisnjeni ravnini* krivulje tira.

Kot preprosta primera uporabe zgoraj navedenih zvez si oglejmo premočrtno in krožno gibanje točke. Za premočrtno gibanje je značilno, da je

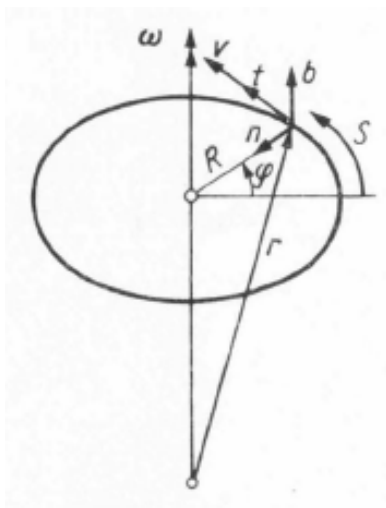
$$\mathbf{t}(s) = \text{const.} \quad (2.12)$$

Z odvajanjem enačbe (2.7) dobimo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = \dot{\mathbf{s}} \mathbf{t}. \quad (2.13)$$

Normalni pospešek je enak nič.

Pri krožnem gibanju sta ukrivljenost $\kappa = \frac{1}{R}$ in vektor binormale $\mathbf{b}$ konstantni (slika 2/3).



Slika 2/3

Premikanje materialne točke po krožni poti

Gibanje je smiselno opisati s pomočjo vektorja $\boldsymbol{\omega}$. Velikost ω , tako imenovana *kotna hitrost* ω , je posledica časovne spremembe kota φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}. \quad (2.14)$$

Če vektorju $\boldsymbol{\omega}$ pripišemo še smer in usmerjenost binormale $\mathbf{b}$, potem v skladu s sliko 2/3 velja naslednje:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Veljavnost te zveze uvidimo tako, da upoštevamo, da je skladno z definicijo vektorskega produkta in skladno z enačbo (2.14) hitrost enaka

$$\mathbf{v} = v \mathbf{t} = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| \mathbf{t} = \omega r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) \mathbf{t} = \omega R \mathbf{t}$$

Iz enačbe (2.15) dobimo pospešek

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Vektor $\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ imenujemo *kotni pospešek*. Če v (2.16) vstavimo

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{b}.$$

dobimo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \varepsilon \mathbf{b} \times \mathbf{r} + \omega^2 \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \\ = \varepsilon r \sin(\mathbf{b}, \mathbf{t}) \mathbf{t} + \omega^2 \mathbf{b} \times r \sin(\mathbf{b}, \mathbf{t}) \mathbf{t} \\ = \varepsilon R \mathbf{t} + \omega^2 R \mathbf{b} \times \mathbf{t} \\ = \varepsilon R \mathbf{t} + \omega^2 R \mathbf{n} \end{array} \right. . \quad (2.17)$$

Če označimo

$$\kappa = \frac{1}{R}, \quad \dot{s} = R\omega, \quad \ddot{s} = R\varepsilon,$$

lahko ta rezultat dobimo tudi neposredno iz enačbe (2.9). Pri krožnem gibanju

$$\mathbf{a}_t = \dot{\omega} \times \mathbf{r} = \varepsilon R \mathbf{t}$$

imenujemo *tangencialni pospešek* in

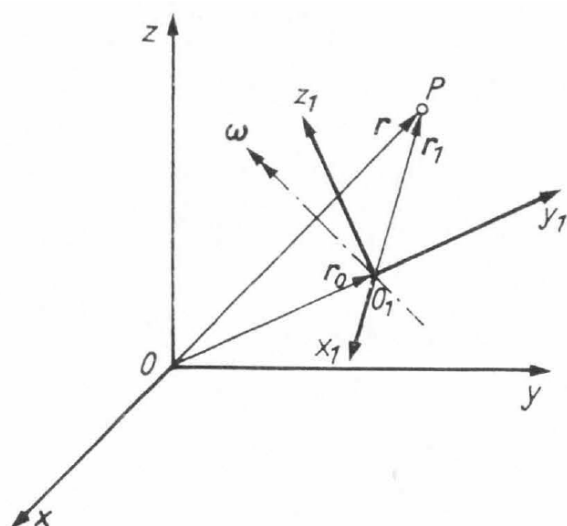
$$\mathbf{a}_n = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega^2 R \mathbf{n}$$

centripetalni pospešek.

Za opis gibanja materialne točke se pogosto izkaže kot smiselno, da iz danega koordinatnega sistema x, y, z z izhodiščem v O preidemo v drug koordinatni sistem x_1, y_1, z_1 z izhodiščem v O_1 . Pri tem je treba določiti zvezo med krajevnimi vektorji točke v obeh koordinatnih sistemih ter njihovimi prvimi in drugimi odvodi. Gibanje koordinatnega sistema O_1 glede na sistem O je običajno sestavljeno iz translacijskega gibanja izhodišča O_1 in kroženja okoli katere koli osi skozi O_1 .

Med krajevnima vektorjema, ki določata lego točke P , v skladu s sliko 2/4 obstaja zveza

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1. \quad (2.18)$$



Slika 2/4

Gibanje materialne točke P glede na premikajoč koordinatni sistem (relativno gibanje)

Če v sistemu O za označitev odvoda glede na čas uporabimo piko, potem sta

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_1 \quad (2.19)$$

in

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (2.20)$$

Vektorja $\dot{\mathbf{r}}_0$ in $\ddot{\mathbf{r}}_0$ označujeta hitrost in pospešek izhodišča O_1 glede na O . Količini $\dot{\mathbf{r}}_1$ in $\ddot{\mathbf{r}}_1$ je treba še pojasniti. Najprej je treba upoštevati poseben primer, ko je $\mathbf{r}_0$ konstanten in P v sistemu O_1 miruje. Potem se točka P giblje po krožnici glede na O okoli osi ω (slika 2/4), kjer je ω na splošno spremenljiv vektor kotne hitrosti sistema O_1 . Rezultat za ta primer je

$$\dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r}_1.$$

Če se po drugi strani točka P giblje glede na O_1 , je treba upoštevati tudi časovno odvod $\mathbf{r}_1$ glede na ta sistem, ki ga bomo označili z $\mathbf{r}_1'$. Tako dobimo

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \omega \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1'. \quad (2.21)$$

Enačbo (2.21) lahko razumemo kot pravilo odvajanja za vektor $\mathbf{r}_1$ v gibajočem sistemu. Jasno je, da to pravilo velja za kateri koli vektor $\mathbf{w}$:

$$\dot{\mathbf{w}} = \omega \times \mathbf{w} + \mathbf{w}'. \quad (2.22)$$

Iz enačb (2.19) in (2.21) je hitrost točke P glede na sistem O

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \omega \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \omega \times \mathbf{r}_1, \quad (2.23)$$

kjer je

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$$

hitrost koordinatnega izhodišča O_1 in

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1'$$

hitrost točke P glede na O_1 . Če sistem O miruje, potem $\mathbf{v}$ imenujemo *absolutna hitrost* P , $\mathbf{v}_1$ *relativna hitrost* in

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad (2.24)$$

sistemska hitrost. Torej je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_1. \quad (2.25)$$

S ponovnim odvajanjem enačbe (2.23) ob upoštevanju enačbe (2.22) dobimo:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1' \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}') \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1') \\ &\quad + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_1'' \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_1'' \\ &= \mathbf{a}_f + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_c \end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

Pri tem je

$$\mathbf{a}_f = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \quad (2.27)$$

sistemski pospešek, ki izhaja iz enačbe (2.26) za *absolutni pospešek* $\mathbf{a}$ pri $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1'' \quad (2.28)$$

je *relativni pospešek* in

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1' \quad (2.29)$$

tako imenovani *Coriolisov pospešek*.

2.2.2 Virtualni pomiki

Pojem virtualnih pomikov se je v mehaniki izkazal za izjemno pomembnega. Virtualni pomiki so poljubna, neskončno majhna odstopanja od dejanske lege sistema. Krivulja, ki jo opisuje

krajevni vektor $\mathbf{r}$ materialne točke, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, je dejanska krivulja tira ali preprosto dejanski »tir« točke. Virtualni tir, ki ustreza virtualnim pomikom, »meji« na dejanski tir, sicer pa poteka povsem poljubno. Virtualni tir na splošno ne izpolnjujejo zakonov mehanike. Virtualno spremembo krajevnega vektorja označimo z $\delta\mathbf{r}$. Če so x, y, z komponente krajevnega vektorja $\mathbf{r}$, potem so $\delta x, \delta y$ in δz komponente $\delta\mathbf{r}$. Ker je $\delta\mathbf{r}$ po definiciji neskončno majhen, si lahko δ razlagamo tudi kot poseben simbol za odvajanje glede na krajevni vektor. Virtualni pomik je le navidezna in ne nujno dejanska sprememba lege. Zato čas prehoda iz dejanske lege v sosednjo virtualno lego ni pomembno. Virtualni pomiki so torej brezčasni (potekajo z neskončno hitrostjo).

Poleg tega bomo spremembe fizikalnih količin, ki so posledica prehoda mehanskega sistema v namišljeno sosednjo lego, tudi imenovali virtualne. Novi pojmi in posledice, ki izhajajo iz njih bodo podrobneje obravnavani v nadaljevanju.

2. 3. Masa

Doslej smo obravnavali osnovne kinematične pojme, s pomočjo katerih lahko določimo lego, hitrost in pospešek poljubne točke telesa v poljubnem času t , če poznamo njen krajevni vektor kot funkcijo časa. Pri tem ni bilo pomembno, ali je točka dejansko telo ali le geometrijska točka. Ker pa mehanika raziskuje gibanje materialnih teles, pri določanju mehanskih zakonov nikakor ne moremo zanemariti materialnosti teles. Izkušnje učijo, da je bistvenega pomembna »količina snovi« v omejeni prostornini ΔV in njena porazdelitev v njej. »Količina snovi« telesa je izražena s pojmom *mase* telesa. Z ustrezno izbrano enoto mase lahko torej »količino snovi« katerega koli telesa – njegovo maso m – izmerimo s primerjavo s to enoto.

V okviru klasične mehanike veljajo za maso naslednji aksiomi (Hamel [4]):

1. Masa m telesa je vedno pozitivna: $m > 0$.
2. Masa m telesa se s časom ne spreminja:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

3. Če je telo sestavljeno iz dveh drugih teles z masama m_1 in m_2 , ima celotno telo maso $m = m_1 + m_2$ (aditivnost mase).

Iz tretjega aksioma neposredno izhaja:

Če telo z maso m zavzame prostornino V , potem lahko s poljubno delitvijo prostornine na delne prostornine ΔV_i telo razdelimo na delna telesa z masami Δm_i , tako da velja:

$$m = \sum_i \Delta m_i.$$

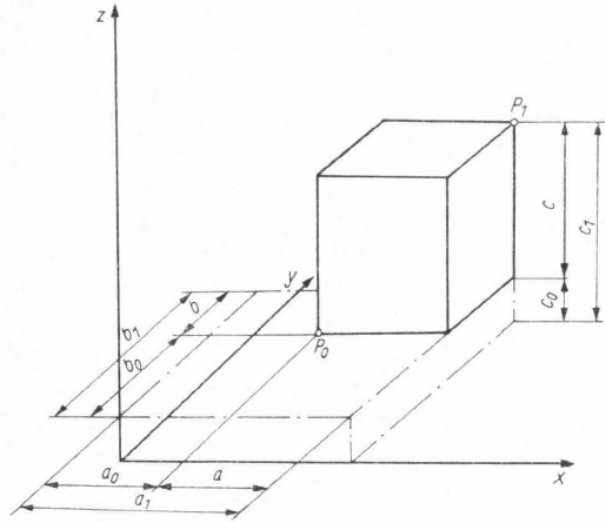
Zaradi raznolikosti fizikalnih lastnosti in geometrijskih oblik dejanskih teles smo v mehaniki vedno prisiljeni omejiti preučevanje gibanja na ustrezne modele teles. Najpreprostejši model telesa je *masna točka*. Ta model – ki je pod določenimi pogoji dopusten – nima geometrijskih razsežnosti dejanskega telesa; telo je skrčeno v točko, njej pa je pripisana celotna masa m telesa (zgoščena posamična masa). Posplošitev tega modela je sistem točk, ki je sestavljen iz končnega ali neskončnega števila masnih točk. Drugačna vrsta modela telesa je *togo telo*, pri katerem je razdalja med dvema točkama popolnoma nespremenljiva. Če telesa ne moremo obravnavati kot sistem točk ali kot togo telo, moramo uporabiti splošnejši model *deformabilnih teles*. Ti modeli so poenostavitve (idealizacija) dejanskih teles, kar se kaže v privzetih fizikalnih lastnostih. Vendar se s tem ne bomo ukvarjali. V vsakem primeru pa lahko zanemarimo dejansko strukturo snovi (atomska struktura). Našteti modeli teles imajo zato lahko maso porazdeljeno diskretno (masna točka, sistem masnih točk) in zvezno (togo telo, deformabilno telo).

Za enotno matematično predstavitev zakonov mehanike se izkaže smiselna uvedba masnega elementa dm , tako da je razlikovanje med diskretnim in zveznim sprva nepotrebno. Da bi lahko izpeljali potrebne pojme, v kartezičnem koordinatnem sistemu z osmi x , y , z , obravnavamo kvader katerega robovi z dolžinami

$$a = a_1 - a_0; \quad b = b_1 - b_0; \quad c = c_1 - c_0 \quad (2.30)$$

ležijo vzporedno s koordinatnimi osmi, tako kot kaže slika 2/5. Točka P_0 , ki je najbližje koordinatnemu izhodišču, ima koordinate a_0 , b_0 , c_0 , diagonalno nasprotno oglišče P_1 pa ima koordinate a_1 , b_1 , c_1 . Potem lahko vsako točko P znotraj kvadra (vključno s točkami na mejnih ploskvah, robovih in ogliščih) določimo s koordinatami x , y , z kjer je

$$\begin{cases} a_0 \leq x \leq a_1 \\ b_0 \leq y \leq b_1 \\ c_0 \leq z \leq c_1 \end{cases} \quad (2.31)$$



Slika 2/5

Kvader z maso v kartezičnem koordinatnem sistemu

Naj bo v prostornini $V = abc$ kvadra porazdelitev mase poljubna. Potem $m(x, y, z)$ pomeni maso, ki je v prostornini

$$V_x = (x - a_0)(y - b_0)(z - c_0). \quad (2.32)$$

Masa $m(a_0, b_0, c_0)$ je npr. enaka masi, ki je skoncentrirana v oglišču P_0 . Če te mase ni, je $m(a_0, b_0, c_0) = 0$. Skupno maso v kvadru označimo z $m(a_1, b_1, c_1)$. Upoštevamo tudi, da je funkcija $m(x, y, z)$ iz fizikalnih razlogov naraščajoča funkcija, saj se, ko se omejena prostornina poveča, masa v njej ne more zmanjšati. V točkah nezveznosti (točkah skoka) funkcije $m(x, y, z)$ predpostavimo zveznost z desne v skladu z zvezami

$$\left\{ \begin{array}{l} m(x+0, y+0, z+0) = m(x, y, z) \\ m(x+0, y+0, z) = m(x, y, z) \\ m(x+0, y, z+0) = m(x, y, z) \\ m(x, y+0, z+0) = m(x, y, z) \\ m(x+0, y, z) = m(x, y+0, z) = m(x, y, z+0) = m(x, y, z) \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Sedaj si predstavljamo kvader, ki je razdeljen na poljubno število delnih kvadrov z ravninskimi rezi, ki so vzporedni s koordinatnimi ravninami. Upoštevamo takšen delni kvader, pri katerem se dolžine robov Δx_i , Δy_j , Δz_k nahajajo v celoti znotraj kvadra. Oglišče $P_{i,j,k}$, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču, ima koordinate x_i , y_j , z_k , diagonalno nasprotno oglišče, tj. točka

$Q_{i,j,k}$ pa ima koordinate $x_i + \Delta x_i$, $y_j + \Delta y_j$, $z_k + \Delta z_k$. S $\Delta m_{i,j,k}$ označimo maso, ki se nahaja na območju

$$\begin{cases} x_i < x \leq x_i + \Delta x_i \\ y_j < y \leq y_j + \Delta y_j \\ z_k < z \leq z_k + \Delta z_k \end{cases} \quad (2.34)$$

in je

$$\begin{cases} \Delta m_{i,j,k} = m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ \quad - m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) - m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ \quad - m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) + m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k) \\ \quad + m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) + m(x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) \\ \quad - m(x_i, y_j, z_k) \end{cases} \quad (2.35)$$

Pri tem vedno velja

$$m_{i,j,k} \geq 0. \quad (2.36)$$

Iz neenačb (2.34) je razvidno, da točke na ravninah $x = x_i$, $y = y_j$ in $z = z_k$ ne spadajo v obravnavano območje. To zagotavlja nedvoumno dodelitev porazdelitve mase delnim kvadrom tudi v primeru, ko so posamezne mase zgoščene na presečnih ploskvah, robovih ali ogliščih. Zaradi enostavnosti lahko brez vpliva na splošnost predpostavimo, da na mejnih ploskvah celotnega kvadra ni nezvezne porazdelitve mase (posameznih mas). To lahko vedno dosežemo tako, da izberemo mejne ploskve kvadra tako, da je masa v celoti porazdeljena v njegovi notranjosti. Poleg tega naj bo podana funkcija $f(x, y, z)$, ki je zvezna na območju

$$\begin{cases} a_0 \leq x \leq a_1 \\ b_0 \leq y \leq b_1 \\ c_0 \leq z \leq c_1 \end{cases}$$

Tvorimo vsoto

$$\left\{ \begin{aligned} S_{i,j,k} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta m_{i,j,k} \\ &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \times \\ &\quad \times m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &\quad - m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) - m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &\quad - m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) + m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k) \\ &\quad + m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) + m(x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &\quad - m(x_i, y_j, z_k) \end{aligned} \right. \quad (2.37)$$

kjer je

$$\left\{ \begin{aligned} x_i &\leq \xi_i \leq x_i + \Delta x_i \\ y_j &\leq \eta_j \leq y_j + \Delta y_j \\ z_k &\leq \zeta_k \leq z_k + \Delta z_k \end{aligned} \right. \quad (2.38)$$

Če zdaj z ustrezno izbiro vse bolj drobne delitve kvadra na prostornine $\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ preidemo v limito (za več podrobnosti o natančni izvedbi tega limitnega prehoda glej npr. v SMIRNOV, vol. 5 [5]), potem pod zgoraj navedenimi pogoji limitna vrednost obstaja in velja

$$\left\{ \begin{aligned} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) &= f(P_{i,j,k}), \quad f(x, y, z) = f(P) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(P_{i,j,k}) \Delta m_{i,j,k} &= \int_{(V)} f(P) dm(P) \end{aligned} \right. \quad (2.39)$$

V tem primeru pravimo, da je funkcija $f(P)$ integrirana glede na funkcijo $m(P)$, sam integral pa imenujemo STIELTJES-ov integral.

Za $f(P) = 1$ je v enačbi (2.39) podana celotna masa, ki je v prostornini V :

$$\int_{(V)} dm = m. \quad (2.40)$$

Če na obravnavanem območju obstaja zvezna porazdelitev mase, obstaja tudi limita

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} = \rho,$$

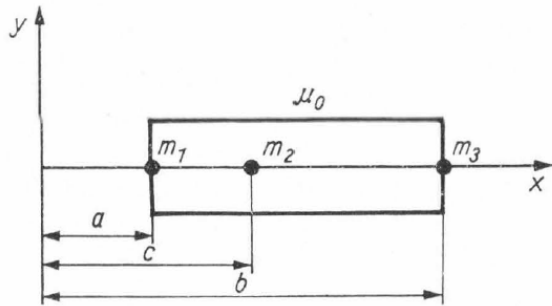
izraz $dm = \rho dV$ pa je integrabilen po Riemannu. Tu je $\rho(x, y, z)$ gostota mase ali preprosto gostota kontinuuma, ki je odsekoma zvezna funkcija lege. V tem primeru se masa masnega elementa z dV enakomerno približuje ničli.

Kot primer linearne porazdelitve mase si oglejmo nosilec s konstantno porazdelitvijo mase $\mu_0 = \rho F$ in tri posamezne mase v skladu s sliko 2/6. Funkcija $m(x)$ ima krivuljo, prikazano na sliki 2/7. Pri tem so

$m(x)$ je masa na intervalu $[a, x]$,

$m(a)$ je zgoščena enojna masa m_1 ,

$m(b)$ skupna masa.

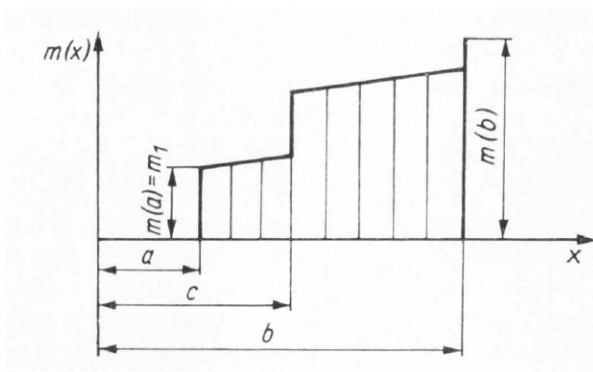


Slika 2/6

Nosilec z zvezno porazdelitvijo mase in tremi posameznimi masami

Zaradi zveznosti z desne, izražene z $m(x+0) = m(x)$, je $m(c) - m(c-0) = m_2$ (zgoščena enojna masa pri $x = c$) in $m(b) - m(b-0) = m_2$ (zgoščena enojna masa pri $x = b$). Ker je $\Delta m_i = m(x_i + \Delta x_i) - m(x_i)$ masa v intervalu $x_i < x \leq x_i + \Delta x_i$, je skupna masa m rezultat

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^b dm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [m(b) - m(a-\varepsilon)] = m(b). \quad (2.41)$$



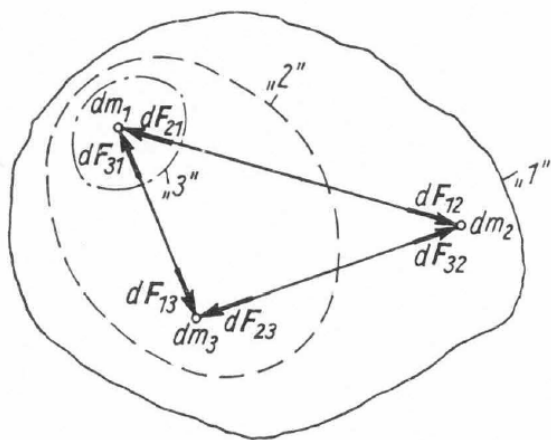
Slika 2/7

Porazdelitev mase $m(x)$ za primer na sliki 2/6

Doslej smo upoštevali kartezični koordinatni sistem. Jasno pa je, da jih je mogoče na enak način izdelati za katere koli druge, običajno krivuljne koordinate (α, β, γ) , če so takšne, da je mogoče vsak prostorninski element $\Delta V_{i,j,k}$ ali vsak masni element $\Delta m_{i,j,k}(\alpha, \beta, \gamma)$ nedvoumno opisati v skladu z enačbo (2.35). Zato določenih območij koordinat ne smete prečkati več kot enkrat.

2.4 Sila

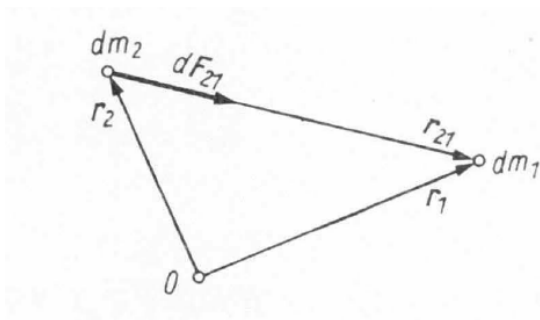
Enako temeljnega pomena za strukturo mehanike kot so kinematični pojmi in pojem mase je pojem sile, ki ga bomo obravnavali v nadaljevanju. Pri iskanju mehanskih zakonov moramo predpostaviti, da vsak mehanski sistem (sistem materialnih teles) učinkuje z drugimi materialnimi telesi, ki so v bližnji in bolj oddaljeni okolici. V sistemu posamezni elementi medsebojno vplivajo drug na drugega. Opozoriti je treba, da je razmejitev med obravnavanim mehanskim sistemom in njegovo okolico vedno povsem svobodna in namišljena ter je na splošno določena le z namembnostjo. Namreč, da bi bil mehanski sistem dostopen raziskavi, ga je treba ločiti od okolice, ga iz nje »izrezati«. Izkušnje učijo, da ni pomembno, ali je namišljeni »prerez« narejen skozi »prazen prostor«, ki obdaja materialna telesa, ali skozi sama materialna telesa. Zato lahko rez v celoti leži tudi v materialnem telesu. Na podlagi te predpostavke si lahko vsako telo predstavljamo kot telo, razdeljeno na masne elemente dm , kot je predstavljeno v razdelku 2.3, z ustreznimi »rezi«. Mehansko obnašanje podsistema, ločenega od okolice, je seveda mogoče smiselno raziskati le, če se upošteva vpliv okolice na sistem. Od vseh možnih interakcij med mehanskimi sistemi nas zanimajo le tiste, ki skušajo pospešiti masne elemente obravnavanega sistema. Za opis takšnih interakcij se uporablja izraz *sila*.



Slika 2/8

Primer razmejitve med mehanskim sistemom in okolico

Vsak vpliv masnega elementa na kateri koli drug masni element mehanskega sistema, ki skuša povzročiti pospešeno spremembo lego slednjega, lahko predstavimo s silo. Vendar pospešek masnega elementa ni nujen za obstoj sile. Možno je, da obravnavani masni element še vedno učinkuje z drugimi masnimi elementi, ki izničijo učinek prvega elementa glede na okolico in tako preprečijo njegov pospešek. Izkušnje učijo, da so sile vektorji, ki so na splošno vezani na točko delovanja. Iz tega sledi, da se sile, ki delujejo v isti točki delovanja, lahko vektorsko seštevajo (izrek paralelogramu sil). To nikakor ni geometrijski, temveč fizikalni izrek, ki izraža, da prisotnost drugih sil ne vpliva na učinek posamezne sile. Zato predpostavimo, da je mogoče učinek okoliških masnih elementov na obravnavani masni element nadomestiti z eno samo silo $d\mathbf{F}$. Sile, ki delujejo na mehanski sistem od zunaj, imenujemo zunanje sile in jih označujemo z $d\mathbf{F}_a$ ali $\mathbf{F}_a$. Sile, s katerimi podsistemi znotraj obravnavanega sistema delujejo drug na drugega, se imenujejo notranje sile $d\mathbf{F}_i$ ali $\mathbf{F}_i$. Katere sile so notranje in katere zunanje, je odvisno izključno od razmejitve med mehanskim sistemom in njegovo okolico. S spreminjanjem mej sistema lahko vsaka zunanja sila postane notranja sila in obratno. Obravnavajmo na primer sistem treh masnih elementov (glej sliko 2/8), ki drug na drugega delujejo s silami $d\mathbf{F}_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, 3$). V sistemu »1« so vse sile notranje sile, medtem ko v sistemu »2« le sili $d\mathbf{F}_{31}$ in $d\mathbf{F}_{13}$ spadata med notranje sile. Nasprotno pa sta $d\mathbf{F}_{21}$ in $d\mathbf{F}_{23}$ postali zunanji sili, ker na ta sistem delujeta z masnim elementom dm_2 , ki ne pripada sistemu »2«. V tem primeru sili $d\mathbf{F}_{12}$ in $d\mathbf{F}_{32}$ nista več zanimivi, ker ne delujeta na sistem »2«. Pomembne so le pri obravnavi mehanskega obnašanja masnega elementa dm_2 . Nazadnje, v sistemu »3« obstajata le zunanji sili $d\mathbf{F}_{21}$ in $d\mathbf{F}_{31}$, ki izhajata iz masnih elementov dm_2 in dm_3 , ki ne pripadata sistemu. Sistemi, na katere ne delujejo zunanje sile, se imenujejo zaprti. Vsi drugi sistemi niso zaprti.



Slika 2/9

Učinek sile med dvema masnima elementoma

Predpostavimo, da so sile, ki delujejo na masni element, odvisne le od njegove lege in hitrosti ter lege in hitrosti drugih masnih elementov, časa in fizikalnih konstant, ne pa tudi od pospeška ali višjih odvodov krajevnega vektorja. Ker iz homogenosti prostora izhaja, da je določitev lege in hitrosti masnega elementa smiselna le glede na drugo telo, tj. da obstajajo le relativne lege in hitrosti, so zato sile odvisne le od razlik v koordinatah in hitrostih. Če masni element dm_2 deluje s silo $d\mathbf{F}_{21}$ na masni element dm_1 , je ta sila na splošno lahko odvisna od $\mathbf{r}_{21}$, $\dot{\mathbf{r}}_{21}$ in t (slika 2/9):

$$d\mathbf{F}_{21} = d\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_{21}, \dot{\mathbf{r}}_{21}, t) = d\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2, t)$$

Poleg tega se v tem zakonu sile lahko pojavijo še druge fizikalne konstante. Če nastala sila $d\mathbf{F}$ deluje na masni element dm mehanskega sistema in se ta elementi navidezno premakne za $\delta\mathbf{r}$, potem izraz

$$\delta(dW) = d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.42)$$

imenujemo virtualno delo, ki bi ga ta sila opravila na obravnavanem masnem elementu pri pomiku $\delta\mathbf{r}$. Z integracijo tega izraza po vseh masnih elementih sistema dobimo virtualno delo vseh notranjih in zunanjih sil, ki delujejo na sistem pri virtualnih pomikih vseh masnih elementov:

$$\delta W = \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.43)$$

Dejansko delo dW , ki ga opravijo sile $d\mathbf{F}$ pri diferencialnem pomiku masnih elementov, dobimo iz enačbe (2.43), če vzamemo, da so virtualni pomiki $\delta\mathbf{r}$ enaki dejanskim pomikom $d\mathbf{r}$:

$$dW = \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.44)$$

Posebej pomemben je primer, ko so sile odvisne le od lokacije masnega elementa, ne pa tudi od njegove hitrosti in časa:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

Pri tem je $\mathbf{r}$ krajevni vektor obravnavanega masnega elementa, na katerega deluje $d\mathbf{F}$. (Morebitna odvisnost te sile od krajevnih vektorjev elementov, ki so v interakciji z njo, tu ni

navedena). V tem primeru je mogoče, da obstaja *potencialna funkcija* $dU(\mathbf{r})$, na kratko imenovana tudi *potencial*, ki je z $d\mathbf{F}$ povezana takole

$$d\mathbf{F} = -\nabla(dU) = -\text{grad}(dU). \quad (2.46)$$

Za obstoj potenciala je potrebno, da je

$$\nabla \times d\mathbf{F} = \text{rot } d\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

ker je v skladu z enačbo (2.46)

$$\nabla \times d\mathbf{F} = -\nabla \times \nabla(dU).$$

produkt $\nabla \times \nabla$ enak nič. Toda pogoj (2.47) je tudi zadosten, saj iz enačb. (2.43) in (2.46) sledi:

$$\begin{aligned} \delta(dW) &= d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = -\nabla(dU) \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= -\left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) (dU) = -\delta(dU) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Operator

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z}$$

uporabljen na dU , daje popolno spremembo te spremenljivke pri virtualnem pomiku $\delta\mathbf{r}$ masnega elementa. Pri integraciji enačbe (2.48) po virtualni poti masnega elementa vzdolž krivulje C je torej rezultat odvisen le od končnih točk integracijske poti, ne pa tudi od same integracijske poti.

Tako za silo $d\mathbf{F}$, ki izpolnjuje pogoj (2.47), obstaja potenciala dU

$$dU(\mathbf{r}) = dU(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.49)$$

Iz tega je razvidno, da je razlika potencialov $dU(\mathbf{r}) - dU(\mathbf{r}_0)$ enaka negativnemu delu sile $d\mathbf{F}$, ki ga opravi pri virtualnem pomiku točke njenega delovanja $\mathbf{r}_0$ v točko $\mathbf{r}$. Zato $dU(\mathbf{r})$ imenujemo tudi potencialna energija sile $d\mathbf{F}$ glede na začetno točko, ki jo določa $\mathbf{r}_0$. Poseben primer, ko je virtualni pomik $\delta\mathbf{r}$ enaka dejanskemu pomiku $d\mathbf{r}$, je vsebovan v enačbi (2.49) in v prejšnji izpeljavi. Sile $d\mathbf{F}$, ki jih je mogoče na tak način izpeljati iz enolične potencialne funkcije $dU(\mathbf{r})$, imenujemo konservativne sile.

Pri tem je treba še posebno poudariti razliko med splošnim znakom δ pri $\delta(dW)$ in znakom, uporabljenim v enačbi (2.48). Medtem ko lahko v izrazu $\delta(dU)$ δ razumemo kot diferencialni operator, ki se uporablja za funkcijo dU , ki je odvisna samo od krajevnega vektorja, je takšno razumevanje v izrazu $\delta(dW)$ mogoče le, če imajo obravnavane sile potencial. V splošnem primeru znaka δ ni mogoče ločiti od dW , saj $\delta(dW)$ kot celota pomeni virtualno delo sile $d\mathbf{F}$ pri pomiku $\delta\mathbf{r}$.

Pojem potenciala posplošimo, če lahko silo $d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, ki je eksplicitno odvisna od lege in časa, izpeljemo iz skalarne funkcije $dU(\mathbf{r}, t)$, tj. časovno odvisnega potenciala, in sicer z

$$d\mathbf{F} = -\nabla(dU(\mathbf{r}, t)) \quad (2.51)$$

Za obstoj takšnega potenciala je veljavnost enačbe (2.47) spet potrebna in zadostna. V nasprotju z razmislekom o povsem lokacijsko odvisnem potencialu pa je tu zveza (2.49) smiselna le za virtualne pomike. Za dejanski pomik $d\mathbf{r}$ je iz enačbe (2.48) razvidno

$$\left\{ \begin{aligned} d(dW) &= d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla(dU) \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) (dU) \\ &= -\left(d - \frac{\partial}{\partial t} dt \right) U \end{aligned} \right. \quad (2.51)$$

Iz enačbe (2.51) pa dU ne moremo več dobiti kot funkcije, ki je neodvisna od poti integracije. Količina $dU(\mathbf{r}, t)$ zato nima več zgoraj omenjenega preprostega fizikalnega pomena kot potencialna energija. Sile, ki so odvisne od časovno odvisnega potenciala, ne spadajo med konservativne sile.

3 Aksiomi mehanike

3.1 Temeljni aksiom mehanike

Na začetku tega poglavja je treba postaviti aksiom, ki v povezavi z aksiomatskimi lastnostmi prostora in časa, mase in sil, navedenimi v drugem poglavju, omogoča izpeljavo vseh splošnih zakonov klasične mehanike. Ta aksiom lahko izrazimo na naslednji način.

Obstaja vsaj en koordinatni sistem (*inercialni sistem*), v katerem za vsak mehanski sistem S veljata enačbi

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

in

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} . \quad (3.2)$$

Simbol integracije pomeni, da je treba integracijo izvesti prek vseh masnih elementov, ki pripadajo sistemu. Integrale je treba razumeti kot Stieltjesove integrale v smislu, kot je razloženo v razdelku 2.3. V teh enačbah je $\mathbf{r}$ krajevni vektor posameznega masnega elementa, dm pa njegova masa. Sila $d\mathbf{F}_a$ pomeni rezultanto vseh sil, ki delujejo na obravnavani masni element in je posledica interakcij s telesi zunaj sistema S .

Zmnožek mase dm masnega elementa in njegove hitrosti določa njegovo *gibalno količino* $d\mathbf{p} = dm \dot{\mathbf{r}}$.

Izraz $dm \ddot{\mathbf{r}}$ je torej časovna sprememba gibalne količine. Zato enačbo (3.1), ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - d\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

imenuje tudi *zakon o gibalni količini*.

Količina

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}$$

je *vrtilna količina* masnega elementa. Njen odvod po času je

$$d\dot{\mathbf{L}} = (\mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times dm \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}}$$

Prvi člen desne strani je v skladu z definicijo vektorskega produkta enak nič. Zato enačbo (3.2), zapisana v obliki

$$\int_{(S)} (\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a - d\dot{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

imenujemo *zakon o vrtilni količini*.

3.2 Newtonovi aksiomi mehanike

Iz pravkar obravnavanega aksioma je mogoče izpeljati izreke, ki vzeti kot aksiomi odražajo zgodovinski razvoj mehanike. Takšna razčlenitev zakona o gibalni količini in zakona o vrtilni količini na vrsto delnih aksiomov je prav tako zelo koristna za razumevanje zakonov mehanike in za njihovo uporabo. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali te delne aksiome.

3.2.1 Newtonov prvi aksiom: zakon vztrajnosti

Če za masni element, na katerega ne delujejo sile, uporabimo zakon o gibalni količini (3.1), dobimo naslednje

$$dm \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

tj.

$$d\mathbf{p} = dm \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (3.6)$$

To pomeni, da je v inercialnem sistemu gibalna količina masnega elementa konstantna, če nanj ne delujejo sile. Ker je masa nespremenjena, sledi, da tudi hitrost ostane nespremenjena. NEWTON je to dejstvo izrazil takole:

Vsako telo vztraja v stanju mirovanja ali enakomernega premočrtnega gibanja, če ga sile ne prisilijo v spremembo tega stanja.

Kot vidimo, Newtonovo »telo« postane identično z našim masnim elementom, če za določitev njegove lege zadostuje krajevni vektor $\mathbf{r}$.

3.2.2 Drugi Newtonov aksiom: temeljna enačba dinamike

Če za masni element uporabimo izrek o gibalni količine brez izrecne zahteve po izničenju sil, dobimo iz enačbe (3.1)

$$d\mathbf{F}_a - dm\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Pri posameznem masnem elementu lahko opustimo označevanje sile in mase kot diferencialnih količin ter indeks a za silo, saj notranjih sil masnega elementa ne upoštevamo. Tako dobimo enačbo

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \equiv m\dot{\mathbf{v}} \equiv m\mathbf{a} \quad (3.7)$$

ali

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (3.8)$$

To je tako imenovana *temeljna enačba dinamike* (masne točke). Drugi Newtonov aksiom, ki ni dobesedni prevod Newtonovega originala, lahko (3.7) izrazimo v obliki:

Sila, ki deluje na masni element, je enaka produktu njegove mase in pospeška.

Ta izjava se nanaša na izraz (3.8):

Sila, ki deluje na masni element, je enaka spremembi njegove gibalne količine v času.

3.2.3 Newtonov tretji aksiom: zakon vzajemnega učinka

Obravnavamo mehanski sistem S , ki ga navidezni presek deli na dva podsistema S_1 in S_2 , glej sliko 3/ 1. Iz vsakega podsistema izberemo masni element. Naj bosta $d\mathbf{F}_{a1}$ in $d\mathbf{F}_{a2}$ rezultanti zunanjih sil, ki delujejo na ta masna elementa glede na S . Nasprotno pa je $d\mathbf{F}_2$ rezultanta vseh sil, ki delujejo iz sistema 2 na obravnavani element v S_1 . Skladno s tem $d\mathbf{F}_1$ predstavlja rezultanto vseh sil, ki delujejo iz sistema 1 na obravnavani element v S_2 . Če za podsistema S_1 in S_2 uporabimo izrek o gibalni količini v obliki (3.1), dobimo

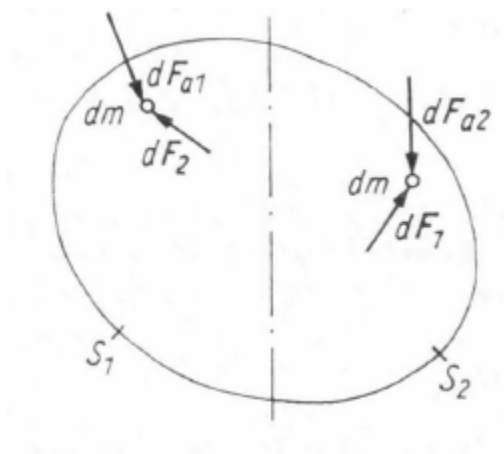
$$\int_{(S_1)} (d\mathbf{F}_{a1} + d\mathbf{F}_2 - dm\ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}; \quad \int_{(S_2)} (d\mathbf{F}_{a2} + d\mathbf{F}_1 - dm\ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}.$$

Če obe enačbi seštejemo ter upoštevamo, da veljata zvezi

$$\int_{(S_1)} d\mathbf{F}_{a1} + \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_{a2} = \int_{(S)} d\mathbf{F}_a; \quad \int_{(S_1)} dm\ddot{\mathbf{r}} + \int_{(S_2)} dm\ddot{\mathbf{r}} = \int_{(S)} dm\ddot{\mathbf{r}},$$

dobimo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm\ddot{\mathbf{r}}) + \int_{(S_1)} d\mathbf{F}_{a1} + \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_{a2} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$



Slika 3/1

Mehanska interakcija med dva podsistema

Prvi integral je enak nič zaradi veljavnosti izreka o gibalni količini za celoten sistem. Če skupno silo, s katero S_2 deluje na S_1 , označimo z

$$\mathbf{F}_{21} = \int_{(S_1)} d\mathbf{F}_2,$$

skupna sila, s katero S_1 deluje na S_2 , pa z

$$\mathbf{F}_{12} = \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_1$$

potem iz enačbe (3.9) dobimo

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (3.10)$$

Če za podsisteme uporabimo izrek o vrtilni količini, dobimo:

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm\ddot{\mathbf{r}}) + \int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 + \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Prvi integral odpade zaradi veljavnosti izreka o vrtilni količini (3.2) za celotni sistem. Iz tega sledi

$$\int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 + \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{0},$$

tj. moment

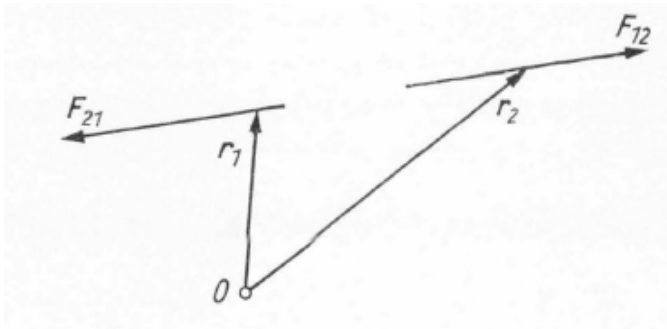
$$\mathbf{M}_{21} = \int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21}. \quad (3.12)$$

sil, s katerimi deluje sistem 2 na sistem 1, je obratno enak momentu

$$\mathbf{M}_{12} = \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}. \quad (3.13)$$

sil, s katerimi sistem 1 deluje na sistem 2:

$$\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{M}_{12}. \quad (3.14)$$



Slika 3/2

Skupna linija delovanja sil vzajemnega delovanja

Zvezi (3.12) in (3.13) določata dve premici, ki ju opisujeta krajevna vektorja $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$; glej. sliko 3/2. Iz enačb (3.10) in (3.14) sledi

$$\mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

tj. sili $\mathbf{F}_{21}$ in $\mathbf{F}_{12}$ ležita na isti premici. Izjavi (3.10) in (3.15) vsebujeta tako imenovani zakon vzajemnega učinka, imenovano tudi načelo nasprotnega delovanja:

Sila, s katero telo 2 deluje na telo 1, in sila, s katero telo 1 deluje na telo 2, sta enaki, nasprotno usmerjeni in ležita na skupni premici delovanja.

3.3 D'Alembertov aksiom

Če za sisteme, katerih elementi mirujejo ali se enakomerno gibljejo v inercialnem opazovalnem sistemu, uporabimo izreka o gibalni količini in vrtilni količini, dobimo naslednji temeljni enačbi statike za te sisteme:

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}_a = \mathbf{0}; \quad \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

To pomeni, da sistem ohranja stanje mirovanja ali enakomernega gibanja, če in samo če so zunanje sile in njihovi momenti za ta sistem in vse njegove podsisteme enaki nič. To stanje se na splošno imenuje statično ravnotežno stanje, in sicer zato, ker je raziskovanje ravnotežnih stanj v mehanskih sistemih naloga statike.

Če sistem ni v statičnem ravnotežju, tj. če vsi $d\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}}$ niso enake nič, potem lahko $-d\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}}$ razumemo kot sile, imenovane *vztrajnostne sile* ali *masne sile*, in postavimo

$$d\mathbf{F}_a^* = d\mathbf{F}_a - d\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} \quad (3.17)$$

S tem lahko enačbi (3.1) in (3.2) zapišemo v obliki

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}; \quad \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

ki formalno ustrežata enačbama (3.16). Če torej uvedemo pojem dinamičnega ravnotežja, potem enačbi (3.17) in (3.18) izražata naslednje:

Če silam, ki se pojavljajo v sistemu, dodamo vztrajnostne sile $-dm\ddot{\mathbf{r}}$, potem lahko vsak mehanski problem obravnavamo kot problem ravnotežja.

To je *d'Alembertov aksiom*, imenovan tudi *d'Alembertovo načelo*.

D'Alembert-ov aksiom je enakovreden temeljnemu aksiomu, ki je obravnavan v razdelku 3.1. Vendar pa lahko vidimo, da sta pri obravnavi mehanskih sistemov možna dva temeljno različna pogleda. Prvi, imenovan dinamični pogled (Budó [6]), temelji na načelu, da sile povzročajo pospeške. To je najbolj jasno izraženo v Newtonovim temeljnem zakonu. Drugi, ti. statični pogled, pa obravnava $-dm\ddot{\mathbf{r}}$ kot sile, imenovali smo jih vztrajnostne sile, ki so v ravnotežju skupaj z drugimi silami. To je osnovna ideja d'Alembert-ovega aksioma. Naš temeljni aksiom mehanike dopušča oba pogleda. V primerjavi z Newtonovimi aksiomi, obravnavanimi v razdelku 3.2, je širši, saj vsebuje »načelo rezov«, ki je postulirano v razdelku 2.4. Da pa bi lahko vse mehanske sisteme obravnavali z Newtonovimi aksiomi, je ta nujno potreben.

3.4 Neinercialni sistemi, Galilejevo načelo relativnosti

Raziščimo sedaj, kakšno obliko imata izrek o gibalni količini in izrek o vrtilni količini, v koordinatnem sistemu, ki se gibljejo glede na inercialni sistem. Naj bo $\mathbf{r}$ krajevni vektor masnega elementa v inercialnem sistemu z izhodiščem v O , $\mathbf{r}_1$ krajevni vektor istega masnega elementa, v sistemu, ki se giblje glede na inercialni sistem z izhodiščem v O_1 in $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ krajevni vektor izhodišča O_1 , glede na inercialni sistem. Vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ označuje vrtenje premikajočega se sistema, glej sliko 2/4. V skladu z enačbo (2.26) dobimo za $\ddot{\mathbf{r}}$ izraz

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1 \quad (3.19)$$

Izrek o gibalni količini (3.1) ima tako obliko:

$$\int_{(S)} \left\{ d\mathbf{F}_a - dm \left[\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1 \right] \right\} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Ta zveza se za poljubne sisteme skrči na enačbo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}_1'') = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

le v primeru če sta $\ddot{\mathbf{r}}_0$ in $\boldsymbol{\omega}$ identično enaka nič. V tem primeru je iz izreka o vrtilni količini razvidno, da je

$$\int_{(S)} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) \times (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}_1'') = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Če od tega odštejemo enačbo (3.21), ki je vektorsko pomnoženo z $\mathbf{r}_0$, dobimo

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}_1'') = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Razen simbola časovnega odvoda krajevnega vektorja in indeksa 1, se enačbi (3.21) in (3.23) ne razlikujeta od enačb (3.1) in (3.2).

Za $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ in $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ sta torej oba koordinatna sistema enaka; oba sta inercialna sistema. Z drugimi besedami:

Vsak opazovalni sistem, ki se giblje enakomerno translacijsko ($\dot{\mathbf{r}}_0 = \text{konst}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) glede na inercialni sistem, je prav tako inercialni sistem.

To je bistvo *Galilejevega načela relativnosti*. Iz pogojev enakomernega gibanja

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \text{konst}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

dobimo z dvakratno integracijo enačbe (3.19)

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0(0) + \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

ali v koordinatnem zapisu

$$\begin{cases} x = v_{x0}t + x_0(0) + x_1 \\ y = v_{y0}t + y_0(0) + y_1 \\ z = v_{z0}t + z_0(0) + z_1 \end{cases} \quad (3.25)$$

Pri tem je

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0 = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]$$

konstantna translacijska hitrost sistema O_1 glede na sistem O in

$$\mathbf{r}_0(0) = [x_0(0), y_0(0), z_0(0)]$$

začetni krajevni vektor koordinatnega izhodišča O_1 v času $t=0$. Enačbe (3.24) oz. (3.25) predstavljata tako imenovano *Galilejevo transformacijo*.

Kadar pogoja $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ in $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ nista izpolnjena hkrati, tj. ne velja Galilejeva transformacija, se v izreku o gibalni količini in izreku o vrtilni količini pojavijo dodatni členi pospeška, ki jih je treba upoštevati za sistem, ki je pospešen glede na inercialni sistem.. Toda tudi v tem primeru lahko izreka o gibalni količini in vrtilni količini formalno izrazimo v obliki (3.1) in (3.2), če dodatne člene pospeška v enačbe (3.19), pomnožene z $-dm$, obravnavamo kot sile, tako imenovane *vztrajnostne sile*, in jih dodamo k $d\mathbf{F}_a$. Izraz

$$-dm[\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)]$$

imenujemo *sistemska sila*. Če je $\boldsymbol{\omega}$ konstanten in izhodišče gibajočega se sistema miruje, jo imenujemo *centrifugalna sila*. Coriolisov pospešek, pomnožen z $-dm$

$$-dm(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1)$$

se imenuje *Coriolisova sila*.

4. Izreki mehanike

4.1 Izreki o skupni gibalni količini, vrtilni količini in energiji mehanskega sistema

Iz aksiomov, navedenih v poglavju 3, je mogoče neposredno izpeljati sklepe, ki omogočajo splošne izjave o obnašanju sistema kot celote. Ti izreki se nanašajo na gibalno količino, vrtilno količino in energijo sistema, pri čemer se v teh izrekih jasno pokaže njihov velik pomen.

4.1.1 Izrek o masnem središču

Masno središče mehanskega sistema, je opredeljeno s svojim krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_m$:

$$\mathbf{r}_m = \frac{\int_{(S)} d\mathbf{m} \mathbf{r}}{\int_{(S)} d\mathbf{m}} = \frac{1}{m} \int_{(S)} d\mathbf{m} \mathbf{r} \quad (4.1)$$

kjer m pomeni skupno maso sistema. Zaradi nespremenljivosti mase iz enačbe (4.1) po odvajanju glede na čas sledi

$$\dot{\mathbf{p}} = \int_{(S)} d\mathbf{m} \dot{\mathbf{r}} = m \dot{\mathbf{r}}_m \quad (4.2)$$

Skupna gibalna količina sistema je torej zmnožek skupne mase in hitrosti težišča. Nadaljnji odvod da

$$\dot{\mathbf{p}} = \int_{(S)} d\mathbf{m} \ddot{\mathbf{r}} = m \ddot{\mathbf{r}}_m \quad (4.3)$$

Če s $d\mathbf{F}_a$ označimo rezultanto vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem, potem je v skladu z enačbo (3.1)

$$\mathbf{F}_a = \int_{(S)} d\mathbf{F}_a = \int_{(S)} d\mathbf{m} \ddot{\mathbf{r}} = m \ddot{\mathbf{r}}_m$$

in s tem

$$\mathbf{F}_a = m \ddot{\mathbf{r}}_m . \quad (4.4)$$

Če primerjamo enačbo (4.4) z Newtonovim temeljnim zakonom (3.7), dobimo izrek o masnem središču (izrek o težišču):

Masno središče mehanskega sistema se giblje tako, kot da bi bila v njem združena celotna masa in bi nanj delovale vse zunanje sile.

Ta izrek pod določenimi pogoji omogoča obravnavo teles končnih razsežnosti kot masne točke.

4.1.2 Zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi vrtilne količine

Iz enačb. (4.3) in (4.4) sledi za $\mathbf{F}_a = \mathbf{0}$ tako imenovani zakon o ohranitvi gibalne količine

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}_m = \text{const.} \quad (4.5)$$

za celoten mehanski sistem. To pomeni, da če zunanjih sil ni ali če njihova rezultanta nična potem skupna gibalna količina ostaja konstanta, masno središče pa se giblje enakomerno premočrtno. Ta izrek ne pove ničesar o gibanju posameznih masnih elementov sistema. Zato se lahko ti gibljejo poljubno.

Podoben izrek za skupno vrtilno količino mehanskega sistema lahko izpeljemo iz enačbe (3.4).

Če z

$$\mathbf{M}_a = \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a. \quad (4.6)$$

označimo rezultanto moment vseh zunanjih sil in z

$$\mathbf{L} = \int_{(S)} d\mathbf{L} = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.7)$$

vrtilno količino sistema ter upoštevamo

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_{(S)} d\dot{\mathbf{L}} = \int_{(S)} (\mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}})' = \int_{(S)} (\dot{\mathbf{r}} \times dm \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}}) = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}}.$$

dobimo iz enačbe (3.4):

$$\mathbf{M}_a = \dot{\mathbf{L}} \quad (4.8)$$

Ko ni zunanjih sil ali pa njihov moment ničen, iz enačbe (4.8) sledi zakon o *ohranitvi vrtilne količine*

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (4.9)$$

4.1.3. Izrek o kinetični energiji (zakon o ohranitvi energije)

Izhajamo iz zakona o gibalni količini (3.1), ki ga za masni element zapišemo v obliki

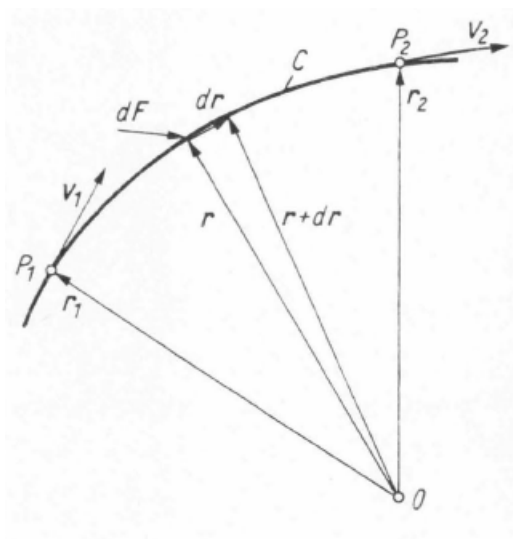
$$d\mathbf{F} = dm \ddot{\mathbf{r}}. \quad (4.10)$$

Indeks a pri sili je tukaj izpuščen iz istih razlogov kot pri razlagi Newtonovega aksioma v razdelku 3.2. Če enačbo (4.10) pomnožimo z diferencialno majhnim pomikom $d\mathbf{r}$ masnega elementa, dobimo na levi strani delo sile $d\mathbf{F}$ pri pomiku $d\mathbf{r}$:

$$d(dW) = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.11)$$

Ko se masni element pomika pod vplivom sile $d\mathbf{F}$ po krivulji C (slika 4/1), je delo, ki ga opravi sila $d\mathbf{F}$ na masnem elementu na poti od P_1 do P_2 , v skladu z enačbo (4.11).

$$dW = \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dm \int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.12)$$



Slika 4/1

Delo sile $d\mathbf{F}$ med gibanjem masnega elementa po krivulji C

Desno stran lahko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned} dm \int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} &= dm \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = dm \int_{r_1}^{r_2} d\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = dm \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} dm \int_{v_1}^{v_2} d(v^2) \\ &= \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2) = dm \int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Količino

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 \quad (4.14)$$

imenujemo *kinetična energija* masnega elementa. Iz enačb. (4.12), (4.13) in (4.14) izhaja iz izreka o kinetični energiji:

$$dW = dT_2 - dT_1. \quad (4.15)$$

Z besedami:

Delo, ki ga opravi sila $d\mathbf{F}$ na masni element, je enako spremembi kinetične energije masnega elementa.

Z integracijo enačbe (4.15) za vse masne elemente sistema dobimo izrek o kinetični energiji celotnega sistema:

$$W = \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} dm (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \quad (4.16)$$

tj.

$$W = T_2 - T_1 \quad (4.17)$$

Enačba. (4.16) definira delo in kinetične energije celotnega sistema. Pri oblikovanju celotnega dela je treba upoštevati, da se pri integraciji upoštevajo vse sile $d\mathbf{F}$, ki delujejo na masne elemente, tj. vse notranje in zunanje sile celotnega sistema.

Zdaj obravnavamo primer, ko so vse sile, ki opravljajo delo v sistemu, odvisne od potencialne funkcije v skladu z enačbo (2.50). V tem primeru za delo v skladu z enačbo (4.16) sledi:

$$\begin{aligned} W &= \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} \nabla dU(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) dU \\ &= - \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} \left(d - \frac{\partial}{\partial t} dt \right) dU = - \int_{(S)} \int_{r_1}^{r_2} \left[d(dU) - \frac{\partial dU}{\partial t} dt \right] \\ &= - \int_{(S)} \left[dU_2 - dU_1 - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial dU}{\partial t} dt \right] = -(U_2 - U_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

Po vstavitvi enačbe (4.18) v enačbo (4.17) dobimo

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (4.19)$$

V primeru konservativnih sistemov, za katere velja

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

je torej

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

ali

$$T + U = E = \text{const.} \quad (4.20)$$

To je zakon o ohranitvi mehanske energije, ki ga imenujemo tudi *zakon o ohranitvi energije* ali na kratko *energijski zakon*.

4.2 Načela

4.2.1 Uvodne opombe

Kot je bilo že pojasnjeno v poglavju 3, izreka o gibalni količini in vrtilni količini vzeta kot temeljna aksioma v povezavi z osnovnimi pojmi prostora, časa, mase in sile (poglavje 2) zadostujeta za raziskovanje vseh problemov klasične mehanike, če poznamo posebne zakone sile $d\mathbf{F} = d\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$.

Vendar pa je treba nalogo, da bi neposredno raziskali mehanski sistem brez kakršnihkoli idealizacij, obravnavati kot praktično nerešljivo. Če že ne upoštevamo dejstva, da sama klasična mehanika temelji na idealiziranem modelu fizikalne realnosti, potem predvsem ni mogoče na splošno razumeti raznolikosti učinkov notranjih in zunanjih sil. Obravnava posebnega problema s pomočjo splošno veljavnih aksiomov je torej mogoča šele po nadaljnji idealizaciji sistema.

Eden od osnovnih pojmov pri modelih mehanskih sistemov je *toga vez*. Ta temelji na predpostavki, da med posameznimi ali neskončnim številom masnih elementov in njihovim okoljem obstajajo lege, ki so popolnoma nespremenljive. Utemeljitev te predpostavke temelji na dejstvu, da obstajajo mehanski sistemi, v katerih lahko med določenimi masnimi elementi pride le do majhnih sprememb lege, saj med njimi delujejo sile, ki preprečujejo večje medsebojne premike. Idealizacija je v tem, da se takšne spremembe lege, ki so majhne glede na druge možnosti gibanja sistema, enake nič. Sile, ki v tem smislu ustvarjajo toge vezi med masnimi elementi, imenujemo *vezne sile* [ali *reakcije*]. Teh ne moremo določiti iz zakonov sil, ki veljajo za dejanski sistem, kar pomeni, da se njihova odvisnost od fizikalnih lastnosti izgubi. Da jih razlikujemo vse sile, ki niso vezne sil, imenujemo *vtisnjene sile* [ali *aktivne sile*].

Uvedba veznih sil ima posledice za virtualno delo v celotnem sistemu, ki jih bomo podrobneje obravnavali v nadaljevanju. Če virtualni pomiki zadoščajo predpisanim togim vezem, potem za virtualno delo veznih sil velja naslednje

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta \mathbf{r} \geq 0 \quad (4.21)$$

Če oblikujemo virtualno delo za tiste vtisnjene sile, ki v limitnem prehodu v togo vez postanejo vezne sile, lahko s poznavanjem posebnih zakonov sil dokažemo pravilnost te predpostavke. Vendar pa splošni dokaz ni mogoč. Veljavnost neenakosti (4.21) je torej treba obravnavati kot aksiom za sisteme s togimi vezmi.

Pri togih vezeh je treba razlikovati med tako imenovanimi *enostranskimi* in *dvostranskimi* vezmi.

Naj obstaja poljubna kombinacija virtualnih pomikov $\delta \mathbf{r}$, ki pripadajo masnim elementom in so združljivi z vezmi. Če je ista kombinacija virtualnih pomikov možna v nasprotni smeri, torej $-\delta \mathbf{r}$, potem govorimo o dvostranskih vezeh. Če po drugi strani za vsako možno kombinacijo $\delta \mathbf{r}$ pomik $-\delta \mathbf{r}$ ni združljiv z vezmi, potem govorimo o enostranskih vezeh.

V primeru dvostranskih vezi velja v izrazu (4.21) znak enakosti. Pravilnost tega izreka je razvidna, če na primer predpostavimo, da je leva stran neenakosti (4.21) pozitivna za nek $\delta \mathbf{r}$. Če zamenjamo $\delta \mathbf{r}$ z $-\delta \mathbf{r}$, dobimo negativno vrednost integrala, kar je protislovje. V primeru enostranskih vezi izreka (4.21) ni mogoče podrobneje določiti.

Izkaže se, da je neposredna uporaba temeljnega aksioma, tj. enačb (3.1) in (3.2), ni vedno primerna, zlasti ne v primeru togih vezi. Vendar pa je iz njega mogoče izpeljati izreke, ki so primernejši za določene naloge, predvsem zaradi njihove obsežne matematične dodelanosti. Na splošno se imenujejo *načela mehanike*. V nadaljevanju jih bomo, tako kot njihovo uporabo, podrobno obravnavali.

4.2.2 d'Alembertovo načelo

Eno od temeljnih načel mehanike je d'Alembertovo načelo. Za njegovo izpeljavo izhajamo iz temeljnega aksioma (3.1) za en sam masni element dm :

$$d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} .$$

Če ta izraz pomnožimo z virtualnim pomikom $\delta \mathbf{r}$, potem seveda velja

$$(d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 .$$

Ko to enačbo integriramo po Stieltjesu prek vseh masnih elementov sistema, dobimo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 . \quad (4.22)$$

Pri tem so $d\mathbf{F}$ vse notranje in zunanje sile, ki delujejo na posamezni masni element sistema. Če te sile nadalje razdelimo na vtisnjene sile $d\mathbf{F}^{(e)}$ in vezne sile $d\mathbf{F}^{(z)}$, potem iz (4.22) ob upoštevanju aksioma (4.21) dobimo:

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta \mathbf{r} \leq 0$$

oz.

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} \leq 0. \quad (4.23)$$

Enačba (4.23) je d'Alambertovo načelo v Lagrangevi obliki (Hamel [4]). Virtualni pomiki, ki se v njem pojavljajo, niso več povsem poljubni; izpolnjevati morajo pogoje togih vezi v sistemu. Če so prisotne le dvostranske vezi, potem tudi tu velja, tako kot v izrazu (4.21), znak enakosti. Če ni rečeno drugače bomo v nadaljevanju vedno predpostaviti dvostranske vezi. Ko ni enostranskih vezi, potem velja d'Alambertovo načelo v obliki

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (4.24)$$

Za izpeljavo tega načela smo uporabili le temeljni aksiom (3.1). Zato je enačba (4.24) ni enakovreden celotnemu temeljnemu aksiomu (3.1) in (3.2). To se kaže v dejstvu, da je treba pri raziskovanju sistemov na splošno uporabljati tudi zakon vzajemnega učinka za notranje sile (glej 3.2., str. 32). Zveza (4.24) zadostuje le, če so vse notranje sile vezne sile, saj aksiom (4.21) vsebuje zakon vzajemnega učinka le za vezne sile.

Iz povedanega sledi, da d'Alambertovo načelo v obliki (4.24) skupaj z zakonom vzajemnega učinka za notranje sile popolnoma enakovreden temeljnemu aksiomu tj. enačbam (3.1) in (3.2). Če ta dva izreka razumemo kot aksioma, potem omogočata izgradnjo mehanike na enak način kot zakona o gibalni in vrtilni količini.

4.2.3 Načelo virtualnega dela

Za sisteme, katerih masni elementi niso pospešeni, načelo virtualnega dela izhaja iz d'Alambertovo načela v Lagrangevi obliki:

$$\delta W^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (4.25)$$

V statiki preučujemo sisteme, ki glede na inercialni sistem mirujejo ali pa so v stanju enakomerno premočrtnega gibanja. Načelo virtualnega dela lahko torej razumemo kot splošno načelo statike.

Posebej pomembni so sistemi, katerih sile, ki nanj delujejo, je mogoče izpeljati iz potenciala.

Namreč, za njih, z upoštevanjem $d\mathbf{F}^{(e)} = -\text{grad}(dU)$ velja [prim. enačbo (2.46)]:

$$\begin{aligned}\delta W^{(e)} &= \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \text{grad}(dU) \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \delta(dU) \\ &= - \int_{(S)} d(\delta U) = -\delta U = 0\end{aligned}$$

tj.

$$\delta U = 0. \quad (4.26)$$

Pri tem je treba simbol δ razumeti kot znak variacije v smislu variacijskega računa. δU torej pomeni prvo variacijo potencialne energije U .

4.2.4 Hamiltonovo načelo

Iz d'Alambertovega načela (4.24) lahko izpeljemo še eno načelo, ki je pomembno za uporabo in temelji na pojmi delo in energija. Pri njegovi izpeljavi izhajamo iz enačbe (4.24), ki jo zapišemo v obliki

$$\int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (4.27)$$

Desna stran enačbe (4.27) predstavlja virtualno delo, ki ga vtisnjene sile opravijo na celotnem sistemu med virtualnim pomikom posameznih masnih elementov v sistemu. Označimo ga z $\delta W^{(e)}$:

$$\delta W^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (4.28)$$

Levo stran enačbe (4.27) lahko preoblikujemo na naslednji način:

$$\int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 + \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\delta d\mathbf{r} - d\delta \mathbf{r}}{dt}. \quad (4.29)$$

Veljavnost te zveze zlahka preverimo z odvajanjem prvega integrala na desni strani. Ker pa je v skladu z (4.14) integral

$$\int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

kinetična energija celotnega sistema, je

$$\delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 = \delta T \quad (4.30)$$

sprememba kinetične energije sistema.

Z uporabo enačb (4.28), (4.29) in (4.30), dobimo iz (4.27) tako imenovano posplošeno *osrednjo Lagrangeovo enačbo*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} &= \delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 + \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} - \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot [\delta \dot{\mathbf{r}} - (\delta \mathbf{r})^\cdot] \\ &= \delta T + \delta W^{(e)} - \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot [\delta \dot{\mathbf{r}} - (\delta \mathbf{r})^\cdot] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Integracija Lagrangeove osrednje enačbe po času med dvema poljubno izbranim trenutkoma t_1 in t_2 da naslednji rezultat:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot [\delta \dot{\mathbf{r}} - (\delta \mathbf{r})^\cdot] dt. \quad (4.32)$$

To je najsplošnejša oblika *Hamiltonovega načela*.

Virtualni pomiki pomenijo poljubno diferencialno spremembo lege sistema, ki je popolnoma poljubna v katerem koli času znotraj intervala $t_1 \leq t \leq t_2$. Tako v vsakem trenutku t pripada drugačen $\delta \mathbf{r}$. Dogovorimo se, da v času t_1 in t_2 ni virtualnih pomikov, tj. določimo

$$\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

v prvem člen desne strani enačbe (4.32). Poleg tega predpostavimo, da sta za krajevni vektor zamenljivi operaciji δ in d :

$$\delta d\mathbf{r} - d\delta \mathbf{r} = [\dot{\mathbf{r}} - (\delta \mathbf{r})^\cdot] dt = \mathbf{0}. \quad (4.34)$$

Pri uporabi prikazani v nadaljevanju, bomo videli, da ima nezamenljivost obeh operatorjev pomembno vlogo pri določenih sistemih s končnim številom prostostnih stopenj. Pogoji za zamenljivost so podrobno opisani v poglavju 5.2. Z upoštevanjem (4.33) in (4.34) dobimo iz enačbe (4.32) Hamiltonovo načelo v obliki

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = 0 . \quad (4.35)$$

Kot je razvidno iz izpeljave, se tu razlikuje pomen simbola δ v izrazih δT in $\delta W^{(e)}$. V prvem primeru ima δ natanko tak pomen kot znak variacije v variacijskem računu. Tako je δT prva variacija kinetične energije T sistema. Nasprotno pa $\delta W^{(e)}$ označuje virtualno delo vtisnjenih sil in ga je treba razumeti kot enoten simbol. Na splošno ni mogoče obravnavati $\delta W^{(e)}$ kot variacijo dela $W^{(e)}$ vtisnjenih sil. Da bi poudarili te razlike, nekateri avtorji, na primer Hamel [4] in Budó [6], v izrazu za virtualno delo vtisnjenih sil namesto δ uporabljajo znak δ' , za samo virtualno delo pa $\delta'W^{(e)}$.

Še posebej pomembno je, da imajo vtisnjene sile potencial. Z upoštevanjem enačbe (2.26) izhaja iz enačbe (4.28)

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \text{grad}(dU) \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \delta(dU) \\ &= - \int_{(S)} d(\delta U) = -\delta U \end{aligned} \quad (4.36)$$

Poudarjamo, da ta predstavitev velja tako za konservativne sisteme kot tudi za sisteme, v katerih imajo vtisnjene sile časovno odvisen potencial (za več podrobnosti glej poglavje 2.4.). V enačbi (4.36) predstavlja δU prvo variacijo potencialne energije U sistema. Iz enačbe (4.35) sledi z enačbo (4.36) Hamilton-ovo načelo za sisteme, v katerih imajo vtisnjene sile potencial:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 . \quad (4.37)$$

Če uvedemo tako imenovano *Lagrangeovo funkcijo* (imenovano tudi kinetični potencial)

$$L = T - U \quad (4.38)$$

in uporabimo zamenljivost integracije in variacije, dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (4.39)$$

oZ.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{stac.} \quad (4.40)$$

V obliki (4.39) oziroma (4.40), Hamiltonovo načelo postane problem ekstremnih vrednosti v smislu variacijskega računa, tj. variacijsko načelo.

4.2.5 Jourdainovo načelo in Gaussovo načelo najmanjše prisile

Za sisteme z zapletenimi vezmi d'Alambertovo načelo ni primerno (za več podrobnosti glej 5.2.2.). Bolj primerna sta *Jourdainovo načelo* in *Gaussovo načelo najmanjše prisile*.

Namesto aksioma (4.21), ki v primeru dvostranskih vezi zahteva ničnost skupnega virtualnega dela veznih sil, Jourdainovo načelo predpostavlja

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta' \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4.41)$$

Gaussovo načelo pa

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta'' \mathbf{r} = 0. \quad (4.42)$$

Za oznako *Jourdainove variacije* uporabljamo simbol δ' za katero velja

$$\delta' \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \delta' \dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}, \quad \delta' t = 0. \quad (4.43)$$

Simbol δ'' je oznaka *Gaussove variacije* za katero je

$$\delta'' \mathbf{r} = \delta'' \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \delta'' \ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}, \quad \delta'' t = 0. \quad (4.44)$$

To pomeni, da Jourdainova variacija primerja sisteme, ki imajo enako lego, vendar različne hitrosti, medtem ko Gaussova variacija primerja sisteme, ki imajo enak lego in hitrost, vendar različne pospeške.

Če ravnamo podobno kot pri izpeljavi d'Alambertovega načela v razdelku 4.2.2. in v enačbi (4.22) zamenjamo $\delta \mathbf{r}$ z $\delta' \dot{\mathbf{r}}$ oziroma $\delta'' \ddot{\mathbf{r}}$, dobimo za dvostranske vezi ob upoštevanju enačb (4.41) in (4.42) Jourdainovo načelo

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta' \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4.45)$$

oziroma Gaussovo načelo

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.46)$$

Ker sta $\delta'\dot{\mathbf{r}}$ oziroma $\delta''\ddot{\mathbf{r}}$ poljubna sta obe načeli za proste sisteme identični z d'Alamberovim načelom. Kot bomo videli v razdelku 5.2.2., se dodatne možnosti uporabe za vezane sisteme pojavijo le, če so prisotne tako imenovane nelinearne neholonomske vezi.

Neodvisnost sil od pospeškov, ki je bila postavljena v razdelku 2.4, omogoča formulacijo Gaussovega načela (4.46), kot ekstremalnega načela. Če simbol δ'' razumemo kot variacijski simbol in ga uporabimo na vtisnjene sile, potem na podlagi Gaussova variacije (4.44) dobimo

$$\delta'' d\mathbf{F}^{(e)} = \delta'' d\mathbf{F}^{(e)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial d\mathbf{F}^{(e)}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta'' \mathbf{r} + \frac{\partial d\mathbf{F}^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta'' \dot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.47)$$

Zato v enačbi (4.46) lahko pred integralom zapišemo znak variacije in sicer če zapišemo:

$$\begin{aligned} \delta'' \int_{(s)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right)^2 &= - \int_{(s)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} \\ &= -2 \int_{(s)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ta ugotovitev je enakovredna zahtevi, da mora imeti integral na levi strani enačbe (4.48) ekstrem. Ker ta izraz predstavlja pozitivno definitno kvadratno formo, je to minimum. Načelo je torej mogoče zapisati v obliki

$$Z = \int_{(s)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right)^2 = \min, \quad (4.49)$$

oz.

$$\delta'' Z = 0. \quad (4.50)$$

Količina Z se imenuje *prisila*, načelo v obliki (4.49) ali (4.50) pa se imenuje Gaussovo načelo najmanjše prisile. Ponovno je treba poudariti, da je treba pri oblikovanju Z upoštevati pravila variiranja podana z enačbami (4.44).

5. Sistemi s končnim številom prostostnih stopenj

5.1 Modeli s končnim številom prostostnih stopenj

V razdelku 2.3. smo že pojasnili, da se raziskovanje gibanja mehanskih sistemov vedno nanaša na modele teles. Med drugim smo omenili masno točko in togo telo. Zdaj se bomo s temi modeli ukvarjali podrobneje.

Realno telo je mogoče idealizirati kot masno točko, če so njegove dimenzije dovolj majhne glede na sistem kot celoto ali če ne izvaja rotacijskega gibanja glede na svoje masno središče in medsebojno gibanje njegovih elementov ni pomembno. V teh primerih je zasuk, povezan z masnim središčem, zanemarljivo majhen ali enak nič. V skladu z enačbo (4.4) je to enakovredno redukciji telesa v njegovo masno središče. Več takih teles, ki medsebojno delujejo, lahko obravnavamo kot sisteme masnih točk.

Telesa, katerih dimenzije niso majhne glede na celoten sistem in katerih rotacije okoli osi skozi masno središče ni mogoče zanemariti, lahko reduciramo na model togega telesa, in sicer če je sprememba razdalje med poljubnima elementoma tako majhna, da jo je mogoče za potrebe obravnave problema enačiti z ničlo.

Če je sistem sestavljen iz več teles, za katera so izpolnjeni omenjeni pogoji, je možna redukcija na sistem togih teles. V tem primeru lahko med togimi telesi sistema obstajajo brezmasne vezi, ki niso nujno toge, kot na primer elastične vzmeti. Pogosto se uporabljajo tudi sistemi, zgrajeni iz togih teles in masnih točk.

5.2 Kinematika sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

5.2.1 Kinematika holonomnih in linearno neholonomnih sistemov

Naj bo dan mehanski sistem, sestavljen iz končnega števila masnih elementov ali iz neskončnega števila masnih elementov, med katerimi obstajajo takšne vezi, ki omogočajo, da je lega sistema v vsakem trenutku enolično določen s končnim številom parametrov q_i . Potem je mogoče krajevni vektor vsakega masnega elementa predstaviti kot funkcijo teh parametrov, tako imenovanih *posplošenih* [oz. *generaliziranih*] *koordinat*, v oblik

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_f, t) . \quad (5.1)$$

Posplošene koordinate q_i so sprva neznane funkcije časa. Gibanje vsakega masnega elementa in s tem gibanje celotnega sistema je popolnoma opisano, če je mogoče določiti posplošene koordinate q_i kot funkcije časa, saj so krajevni vektorji lege $\mathbf{r}$ podani z enačbo (5.1).

Če je za popoln opis gibanja sistema potrebnih natanko f posplošenih koordinat $q_1, q_2, \dots, q_f$, potem je f število prostostnih stopenj sistema. Včasih je smiselno uvesti več koordinat, kot jih ima sistem:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) . \quad (5.2)$$

V tem primeru med posplošenimi koordinatami obstajajo pogojne enačbe – imenovane tudi vezi – ki imajo obliko

$$f_p(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r = n - f . \quad (5.3)$$

Z izračunom popolnih diferencialov f_p dobimo linearne zveze med diferenciali posplošenih koordinat:

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} dt = a_{pi} dq_i + a_{p0} dt = 0 \quad (5.4)$$

$$p = 1, 2, \dots, r \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kjer so

$$\frac{\partial f_p}{\partial q_i} = a_{pi}(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad \frac{\partial f_p}{\partial t} = a_{p0}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) .$$

Za poenostavitev zapisa smo uporabili Einsteinov dogovor o seštevanju. Ta določa, da je treba v primerih, ko se indeks v zmnožku pojavi večkrat, indekse sešteti v predpisanih mejah. V nadaljevanju bomo ta dogovor o seštevanju vedno uporabljali. V izjemnih primerih bomo indekse, ki se ne seštevajo, navedli v oklepaju. Koeficienta a_{pi} in a_{p0} izpolnjujeta pogoje integrabilnosti, tj. velja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial a_{pi}}{\partial t} - \frac{\partial a_{p0}}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

To izhaja iz veljavnosti Schwarzovega pravila o zamenjavi za druge odvode funkcij f_p .

Pogojne enačbe v obliki (5.3), v katerih se poleg časa t pojavljajo le posplošene koordinate q_i , ne pa tudi njihovi odvodi po času, imenujemo *holonomne pogoje enačbe*. Poleg tega jih imenujemo *skleronomne*, če v njih čas ne nastopa eksplicitno, sicer jih imenujemo *reonomne*. Sam mehanski sistem pa lahko imenujemo skleronomen le, če ni reonomskih pogojnih enačb in če krajevni vektorji masnih elementov niso eksplicitno odvisni od časa.

V splošnem primeru se v pogojnih enačbah poleg posplošenih koordinat lahko pojavijo tudi njihove prvi časovni odvodi $\dot{q}_i$, tako imenovane *posplošene hitrosti* ali *koordinate hitrosti*. Takrat imajo obliko

$$\varphi_p(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0; \quad p = 1, 2, \dots, s. \quad (5.6)$$

in se imenujejo *neholonomne pogoje enačbe*. Razlikujemo tudi med skleronomskimi in reonomskimi neholonomskimi pogojnimi enačbami. Med neholonomskimi pogojnimi enačbami so posebej zanimive tiste, ki so linearne v koordinatah hitrosti. Ko je

$$dq_i = \dot{q}_i dt$$

lahko pogoje (5.6) po množenju z dt prevedemo v obliko

$$d\varphi_p = a_{pi} dq_i + a_{p0} dt = 0. \quad (5.7)$$

Tako kot pri enačbi (5.4) sta koeficienta a_{pi} in a_{p0} prav tako odvisna od posplošenih koordinat q_i in časa t . V nasprotju z enačbo (5.4) koeficienti v enačbi (5.7) ne izpolnjujejo vseh pogojev integrabilnosti (5.5). V nasprotnem primeru bi bilo mogoče reducirati enačbo (5.6) na obliko (5.3). Zato tudi ni mogoče zmanjšati števila potrebnih posplošenih koordinat s pomočjo neholonomskih pogojnih enačb.

Pogojne enačbe (5.4) ali (5.7) omejujejo dejanske možnosti gibanja sistema. IZahtevamo pa lahko, da virtualni premiki prav tako izpolnjujejo te pogoje. Ustrezne pogoje enačbe za virtualne pomike imajo zaradi $\delta t = 0$ obliko

$$a_{pi} \delta q_i = 0. \quad (5.8)$$

Tovrstne pogoje enačbe ustrezajo dvostranskim vezem, ki so opredeljeni v točki 4.2.1. Še vedno pa predpostavljamo, da v množici vrednosti posplošenih koordinat q_i ne obstaja

kombinacija, za katero bi vsi koeficienti $a_{pi}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ v eni od teh enačb odpadli. Pogoje, ki tega ne izpolnjujejo, bomo imenovali degenerirane. Za holonomne sisteme a_{pi} izpolnjujejo pogoje integrabilnosti

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} = 0$$

Če virtualne premike podredimo pogojem (5.8), potem sledi, da operatorja d in δ za neholonomne sisteme nista zamenljiva, medtem ko sta za holonomne sisteme ta operatorja vedno zamenljiva. To lahko dokažemo na naslednji način. Če uporabimo operacijo δ na enačbo (5.7), dobimo:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} \delta q_j dq_i + a_{pi} \delta (dq_i) + \frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} \delta q_j dt = 0. \quad (5.9)$$

Z uporaba operatorja d na enačbo (5.8) pa dobimo:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} \delta q_i dq_j + a_{pi} d(\delta q_i) + \frac{\partial a_{pi}}{\partial t} \delta q_i dt = 0. \quad (5.10)$$

Če oblikujemo razliko enačb. (5.9) in (5.10) ter zamenjamo indeksa seštevanja i in j v prvih dveh členih zadnje enačbe, dobimo :

$$\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} \right) \delta q_j dq_i + \left(\frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{p0}}{\partial t} \right) \delta q_j dt + a_{pi} (\delta d - d\delta) q_i = 0. \quad (5.11)$$

Izrazi v oklepaju prvih dveh členov v enačbi (5.11) v skladu z enačbo (5.5) odpadejo le, če so izpolnjeni pogoji integrabilnosti, kar pa za vse te izraze v neholonomnih sistemih ne velja. Poleg tega, ker lahko δq_i izberemo poljubno, je enačba (5.11) izpolnjena le, če je

$$\left. \begin{aligned} a_{pi} (\delta d - d\delta) q_i = - \left[\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} \right) \delta q_j dq_i + \left(\frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{p0}}{\partial t} \right) \delta q_j dt \right] \neq 0 \\ p = 1, 2, \dots, s; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\}. \quad (5.12)$$

To je s nehomogenih linearnih enačbe za n izrazov $(\delta d - d\delta) q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zato lahko $n - s$ teh izrazov izberemo poljubno, tj. lahko jih izenačimo z ničlo. Izraza je potem mogoče določiti nedvoumno in praviloma nista enaka nič. Iz tega sledi, da za s posplošenih koordinat q_i ne velja zamenljivosti operatorjev δ in d .

To pomeni, da prav tako velja

$$\delta d\mathbf{r} \neq d\delta\mathbf{r}.$$

Da bi to trditev dokazali, pokažemo, da iz enačbe (5.1) sledi

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$$

in

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Nadalje sledi

$$\delta d\mathbf{r} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_j dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta dq_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} dt \delta q_i$$

in

$$d\delta \mathbf{r} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta dq_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial t} \delta q_i dt$$

Če uporabimo Schwarzovega pravilo o zamenjavi delnega odvajanja, in zadnji dve enačbi medsebojno odštejemo dobimo

$$(\delta d - d\delta) \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} (\delta d - d\delta) q_i \quad (5.13)$$

Ker vsi členi na desni strani enačbe (5.13) ne odpadejo, je trditev dokazana.

Druga možnost je, da za izpolnitev pogojne enačbe (5.7) zahtevamo le dejanske pomike. Potem na splošno virtualni pomiki izpolnjujejo ustrezne pogoje v obliki enačbe (5.8). V tem primeru sta tudi za neholonomske sisteme operatorja d in δ zamenljiva za vse posplošene koordinate. Vendar potem v primeru virtualnih pomikov sile, pogojene z enačbami (5.7), opravijo virtualno delo, kar je treba upoštevati pri uporabi raznih načel.

5.2.2 Splošne pogojne enačbe

Zdaj pa si oglejmo primer poljubnih pogojnih enačb (5.6), ki so nelinearne, predvsem v koordinatah hitrosti. Te pogojne enačbe določajo omejitve za dejanska gibanja. V tem primeru ni mogoče podati pogojnih enačb med virtualnimi premiki v obliki (5.8). Z uporabo pojma

Jourdainove variacije skladne s pogoji (4.43) pa lahko navedemo zveze za virtualne hitrosti $\delta' \dot{q}_i$, ki so podobne enačbam (5.8).

Najprej ugotovimo, da so spremenljivke $\delta' q_i$ lahko enaki nič, saj iz enačb (5.2) in (4.43) sledi

$$\delta' \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta' q_i = 0 \quad (5.14)$$

Zato z uporabo operatorja δ' na enačbo (5.6) dobimo zvezo

$$\delta' \varphi_p = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \dot{q}_i} \delta' \dot{q}_i = 0 \quad (5.15)$$

Če poleg pogojnih enačb (5.6) dodamo še holonomne pogoje, ki ustrezajo enačbi (5.3), jih je treba pred uporabo Jourdainove variacije popolno odvajati glede na čas. Tako dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}_p &= \frac{\partial f_p}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0 \\ \delta' \dot{f}_p &= \frac{\partial \dot{f}_p}{\partial \dot{q}_i} \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial f_p}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} \right) \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial f_p}{\partial q_i} \delta' \dot{q}_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Podobno se Jourdainova variacija vektorja hitrosti oblikuje s pomočjo enačbe (5.2):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ \delta' \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta' \dot{q}_i \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tudi variacija po Gaussu v skladu z pogoji (4.44) nam omogoča obravnavo pogojnih enačb v obliki (5.6). Pri tem sta količini $\delta'' q_i$ in $\delta'' \dot{q}_i$ enaki nič, kar sledi iz

$$\delta'' \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta'' q_i = 0 \quad (5.18)$$

$$\delta'' \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta'' \dot{q}_i + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \delta'' q_i = 0 \quad (5.19)$$

Podobno kot pri izpeljavi enačb (5.15) do (5.17) dobimo, če uporabimo Gaussovo variacijo, naslednje zveze:

$$\delta''\dot{\varphi}_p = \frac{\partial \dot{\varphi}_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \dot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = 0 \quad (5.20)$$

$$\delta''\ddot{f}_p = \frac{\partial \ddot{f}_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = \frac{\partial f_p}{\partial \dot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = 0 \quad (5.21)$$

$$\delta''\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \ddot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i \quad (5.22)$$

Vidimo lahko, da bi bila z uporabo Gaussove variacije možna tudi obravnava pogojnih enačb v obliki

$$\psi_p(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n, t) = 0. \quad (5.23)$$

Pogojne enačbe med virtualnimi pospeški bi bile potem

$$\delta''\psi_p = \frac{\partial \psi_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = 0 \quad (5.24)$$

Mehanski sistemi, za katere veljajo pogoji v skladu z enačbo (5.23), Hamel [4] imenuje neholonomske sisteme drugega reda. Vendar vezi, ki vključujejo pospeške nasprotuje aksiom, ki pravi da sile, torej tudi vezne sile, ne morejo biti eksplicitno odvisne od pospeškov (glej tudi 2.4.). Zato menimo, da se takšne pogojne enačbe pojavijo kvečjemu kot posledica postopka eliminacije in se jim zato lahko vedno izognemo. V skladu s tem so sistemi, za katere veljajo pogoji v skladu z enačbo (5.6), mogoče obravnavati že z uporabo Jourdainove variacije. Vendar ima uporaba Gaussove variacije prednost, saj lahko Gaussovo načelo formuliramo kot ekstremalno načelo.

5.2.3 Kvazi-hitrosti, kvazi-koordinate

Na tem mestu želimo predstaviti pojma *kvazi-hitrost* in *kvazi-koordinata*. Naj obstaja linearna kombinacija posplošenih koordinat hitrosti $\dot{q}_j$ v obliki

$$\omega_i = a_{ij} \dot{q}_j + a_{i0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.25)$$

Koeficienti a_{ij} in a_{i0} so v splošnem funkcije posplošenih koordinat q_j in časa t . Poleg tega predpostavimo, da so enačbe (5.25) med seboj linearno neodvisne, tj.

$$\det(a_{ij}) \neq 0. \quad (5.26).$$

Spremenljivke ω ; lahko obravnavamo kot nove hitrostne koordinate le, če je desna stran enačbe (5.25) popolni odvod po času. To velja, če koeficienti a_{ij} in a_{i0} izpolnjujejo pogoje integrabilnosti

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} &= 0 \\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial a_{i0}}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (5.27)$$

Naj bo

$$\omega_i = \dot{\pi}_i,$$

pri čemer lahko spremenljivke π_i obravnavamo kot nove posplošene koordinate. Če pa enačbe (5.27) niso izpolnjene, potem se spremenljivke ω_i imenujejo kvazi-hitrosti. Integrali

$$\pi_i(t) = \int_{t_0}^t \omega_i dt + \pi_i(t_0) \quad (5.28)$$

potemtakem niso odvisni samo od stanja sistema, označenega s $q_1, q_2, \dots, q_n$ sistema v času t , temveč tudi od integracijske poti. Ker π_i , zdaj niso več dejanske koordinate, jih imenujemo kvazi-koordinate. Če zdaj zahtevamo, da kvazi-koordinate ne opisujejo le dejanskih, temveč tudi virtualna stanja sistema, iz enačbe (5.25) ne sledi le

$$d\pi_i = a_{ij} dq_j + a_{i0} dt \quad (5.29)$$

temveč tudi

$$\delta\pi_i = a_{ij} \delta q_j \quad (5.30)$$

Če tvorimo razliko $(\delta d - d\delta)\pi_i$, dobimo

$$(\delta d - d\delta)\pi_i - a_{ij}(\delta d - d\delta)q_j = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right) \delta q_k dq_j + \left(\frac{\partial a_{i0}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} \right) \delta q_k dt \quad (5.31)$$

Ker kvazi-koordinate na desni strani enačb (5.31) ne odpadejo, sklepamo, da lahko zamenljivost operatorjev d in δ predpostavimo samo za π_i ali pa za q_i .

5.3 Ravnotežne lege sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

Preden se lotimo raziskave gibanja mehanskih sistemov, raziščimo ravnotežne lege takih sistemov. Ravnotežna lega je vsaka lega, v katerem lahko sistem ostane v mirovanju pod vplivom vtisnjenih in veznih sil. Pri tem ne zahtevamo, da je osnovni koordinatni sistem, na katerega se nanašajo krajevni vektorji $\mathbf{r}_i$ masnih elementov, inercialni sistem. Najprej izpeljemo načelo virtualnega dela za splošni koordinatni sistem. V ta namen izhajamo iz d'Alambertovega načela, tj. enačbe (4.24):

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (5.32)$$

Pri tem je $\ddot{\mathbf{r}}$ drugi odvod krajevnega vektorja po času, ki se nanaša na inercialni sistem. Zveza med tem tako imenovanim absolutnim pospeškom in relativnim pospeškom $\mathbf{a}_r$, ki se nanaša na kateri koli gibajoči se koordinatni sistem, je glede na enačbo (2.26)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_f + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r. \quad (5.33)$$

V skladu z enačbo (2.18) velja

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \quad (5.34)$$

in ker izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema, označenega z $\mathbf{r}_0$, miruje, je očitno

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_1$$

Z enačbama (5.33) in (5.34) dobimo iz enačbe (5.32)

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm (\mathbf{a}_f + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r) \right] \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0 \quad (5.35)$$

Če združimo vztrajnostni sili, tj. sistemsko silo in Coriolisovo silo, z vtisnjenimi silami $d\mathbf{F}^{(e)}$ v silo

$$d\mathbf{F}^* = d\mathbf{F}^{(e)} - dm \mathbf{a}_f - dm \mathbf{a}_c \quad (5.36)$$

dobimo d'Alambertovo načelo glede na poljubno gibajoči se sistem:

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^* - dm \mathbf{a}_r \right) \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0. \quad (5.37)$$

V skladu z našo definicijo ravnotežne lege, ki smo jo podali zgoraj, mehanski sistem ostane v mirovanju glede na gibajoči se koordinatni sistem, če sta relativni hitrosti $\mathbf{v}_r$ in relativni pospešek enaka nič. Tako je načelo virtualnega dela za poljubno gibajoči se koordinatni sistem:

$$\delta W^* = \int_{(S)} d\mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0 \quad (5.38)$$

Opozoriti je treba, da je v tem primeru

$$d\mathbf{F}^* = d\mathbf{F}^{(e)} - dm \mathbf{a}_f \quad (5.39)$$

saj $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ zaradi $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ odpade.

Pri sistemih s končnim številom prostostnih stopenj so krajevni vektorji odvisni od končno mnogo posplošenih koordinat, ki jih izbreemo tako, da $\mathbf{r}_1$ ni eksplicitno odvisen od časa:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (5.40)$$

Takšna izbira posplošenih koordinat, ki je vedno mogoča, se zdi najprimernejša pri preučevanju ravnotežnih leg. Iz enačbe (5.40) sledi

$$\delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \delta q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.41)$$

Virtualno gibanje lahko omejimo z r holonomnimi in s neholonomnimi pogoji v obliki

$$a_{pi} \delta q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r + s \quad (5.42)$$

Če enačbo (5.41) vstavimo v enačbo (5.38), dobimo

$$\delta W^* = \left(\int_{(S)} d\mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (5.43)$$

Iz integrala smo lahko izpostavili δq_i , saj jih je treba obravnavati kot konstantne glede na integracijo prek masnih elementov sistema. Količini

$$Q^* = \int_{(S)} d\mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}. \quad (5.44)$$

imenujemo *posplošene vtisnjene sile*, saj pomnožene z virtualnimi spremembami posplošenih koordinat dajo virtualno delo:

$$\delta W^* = Q_i^* \delta q_i. \quad (5.45)$$

Če je q_i dolžinska koordinata, je Q_i^* sila, če je q_i kotna koordinata, pa moment. Q_i^* so na splošno odvisne od vseh q_i in t .

Iz načela virtualnega dela v obliki

$$\delta W^* = Q_i^* \delta q_i = 0. \quad (5.46)$$

še ne sledi splošno izničenje posplošenih sil Q_i^* , saj q_i zaradi enačbe (5.42) niso neodvisne druga od druge. Če pa enačbi (5.46) dodamo pogoje (5.42), ki jim dodamo še neznane množitelje λ_p , potem sledi

$$(Q_i^* + \lambda_p a_{pi}) \delta q_i = 0. \quad (5.47)$$

Pri tem je $r+s$ virtualnih pomikov medsebojno odvisnih, preostalih $n-(r+s)$ pa je neodvisnih drug od drugega. Določimo λ_p tako, da koeficienti, ki pripadajo $r+s$ virtualnim pomikom, odpadejo. Tudi preostalih $n-(r+s)$ koeficientov mora biti enaki nič, saj so zdaj pripadajoči virtualni pomiki poljubni. Enačba (5.39) tako daje pogoje ravnotežja sil v obliki

$$Q_i^* + \lambda_p a_{pi} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r+s \quad (5.48)$$

Za fizikalno interpretacijo parametrov λ_p predpostavimo, da virtualni pomiki δq_i ne izpolnjujejo pogojnih enačb (5.42). Potem, kot je navedeno v 4.2.1, vezne sile opravljajo virtualno delo, tako da moramo namesto enačbe (5.43) zapisati

$$\delta W^* + \delta W^{(z)} = \int_{(S)} (d\mathbf{F}^* + d\mathbf{F}^{(z)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (5.49)$$

Sedaj uvedemo *posplošene vezne sile* določene z

$$Q_i^{(z)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}. \quad (5.50)$$

Z enačbama (5.44) in (5.50) se enačba (5.49) spremeni v zvezo

$$(Q_i^* + Q_i^{(z)}) \delta q_i = 0. \quad (5.51)$$

Ker so δq_i poljubni sledi, da se njihovi koeficienti izničijo:

$$Q_i^* + Q_i^{(z)} = 0. \quad (5.52)$$

Primerjava enačbe (5.48) z enačbo (5.52) da

$$Q_i^{(z)} = \lambda_p a_{pi}. \quad (5.52)$$

Vsak element iz vsote $\lambda_p a_{pi}$ je tisti del vezne sile $Q_i^{(z)}$, ki ga povzroči p -ti pogoj. Količina $Q_i^{(z)}$ je tako posplošena vezna sila, ki pripada i -ti koordinati q_i .

Posebno poenostavitev dobimo, če so vtisnjene sile konservativne in ni vztrajnostnih sil ali pa so te prav tako konservativne. Potem lahko primerno uporabimo enačbo (2.51)

$$d\mathbf{F}^* = -\text{grad}(dU^*).$$

Iz enačbe (5.44) tako dobimo

$$Q_i^* = \int_{(s)} -\text{grad}(dU^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} = - \int_{(s)} \frac{\partial(dU^*)}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} = - \int_{(s)} \frac{\partial(dU^*)}{\partial q_i} = - \frac{\partial U^*}{\partial q_i}. \quad (5.54)$$

Pogoji ravnotežja (5.48) pa dobijo obliko

$$-\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \lambda_p a_{pi} = 0. \quad (5.55)$$

Če so prisotne samo holonomne pogojne enačbe, potem lahko koeficiente a_{pi} interpretiramo kot delne odvode funkcije $f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$:

$$a_{pi} = \frac{\partial f_p}{\partial q_i}.$$

V tem primeru iz enačbe (5.55) dobimo

$$-\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i} = 0.$$

oz

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(-U^* + \lambda_p f_p) = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r + s \quad (5.56)$$

Opozoriti je treba, da so lahko parametri λ_p funkcije q_i . Kljub temu je zapis z enačba (5.56) mogoč, saj zaradi $f_p = 0$ velja

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(\lambda_p f_p) = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \lambda_p}{\partial q_i} f_p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i}. \quad (5.57)$$

Enak rezultat dobimo, če izhajamo iz načela virtualnega dela v obliki (4.26) in ga razumemo kot ekstremalno načelo s pogoji

$$f_p = 0.$$

Upoštevati je treba, da je potencial vztrajnostnih sil vključen v U .

Za določitev ravnotežnih leg imamo na voljo n enačbe (5.48) ali, zlasti za konservativne holonome sisteme, enačbe (5.56) in r holonomnih pogojev (5.42), ki jih bomo zapisali v obliki

$$f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r \quad (5.58)$$

Spremenljivke Q_i^* , ki nastopajo v teh enačbah, so lahko odvisne od posplošenih koordinat in časa, a_{pi} pa so le funkcije posplošenih koordinat.

Če je

$$n - (r + s) = k > 0,$$

je mogoče λ_p določiti iz $(r + s)$ enačb (5.48) ali (5.56) kot funkcije q_i in časa t . Iz preostalih k enačb lahko izločimo λ_p , tako da nastane k zvez med posplošenimi koordinatami in časom:

$$h_\mu(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, k \quad (5.59)$$

Zveze (5.58) in (5.59) določajo $(n - s)$ pogojev za ravnotežne lege sistema. Glede na lastnosti teh enačb lahko ne obstaja nobena, ena, več ali neskončno mnogo ravnotežnih leg. Za ravnotežne lege veljajo le tiste rešitve, pri katerih so q_i neodvisne od časa t in realne.

V primeru

$$n - (r + s) = k = 0,$$

lahko iz enačb. (5.48) oziroma (5.58) enolično določimo vseh n -vrednosti λ_p kot funkcije posplošenih koordinat q_i , saj so te enačbe linearne v λ_p , determinanta njihovih koeficientov pa - če ne gre za degeneriran primer - ne more biti nič zaradi linearne neodvisnosti pogojev (5.42). Zato so lahko ravnotežne lege odvisne le od pogojev (5.58), ne pa tudi od vtisnjenih sil.

Če je

$$n - (r + s) = k < 0 ,$$

je za določitev $r + s > n$ parametrov na voljo samo n linearnih enačb (5.48) ali (5.56). To pomeni, da v tem primeru λ_p ni mogoče določiti, tj. veznih sil ni mogoče določiti brez spremembe modela.

V primeru $k = 0$ so ravnotežne lege običajno določene z geometrijo sistema in so zato znane že na začetku. Obstoječe enačbe tako služijo za določitev veznih sil. Ker je to za ne-degenerirane sisteme vedno nedvoumno mogoče, se taki sistemi imenujejo *statično določeni*. Nasprotno se sistemi, za katere je $k < 0$, imenujejo *statično nedoločeni*. Stopnja statične nedoločenosti je $|k|$ in izhaja iz števila pogojev, ki bi jih lahko izpustili, ne da bi spremenili ravnotežno lego za katero koli vtisnjeno silo. V primeru $k > 0$, ko vsaka sprememba vtisnjenih sil praviloma povzroči tudi spremembo ravnotežne lege ali motnjo ravnotežja, je sistem premičen. Med take sisteme spadajo tudi ti. kinematične verige.

Ker na začetku izračuna vezne sile še niso znane, je običajno treba preveriti, ali imajo te smiselne vrednosti za izbrani model. Na primer, za vezne sile se lahko omejimo glede njihove velikosti in smeri. Če je bilo na primer v modelu predpostavljeno, da se dve stični površini drži druga druge brez drsenja, to velja le do določene mejne vrednosti tangencialne sile med površinama. Če je ta mejna vrednost presežena, pride do drsenja in tangencialno silo, ki deluje med površinama, je treba obravnavati kot vtisnjeno silo drsnega trenja. To pa pomeni spremembo modela. Drugačne pogoje dobimo, če v modelu prvotno enostranske vezi obravnavamo kot dvostranske. Takrat je treba preveriti, da te ne popustijo pod vplivom določenih veznih sil. Do popuščanja vezi pride na primer pri vrveh in verigah, če se izkaže, da je vezna sila tlačna. Pri sistemih z znano ravnotežno lego, $k = 0$, je pogosto praktično opustiti uporabo načela virtualnega dela in iz osnovnega aksioma, enačb (3.1) in (3.2), dobiti potrebne enačbe za določitev veznih sil. Pri tem izhajamo iz enačb (3.16), opisanih v razdelku 3.3 kot osnovne enačbe statike, ki jih zapišemo v obliki

$$\mathbf{F}_{S_i}^* = \int_{(S_i)} d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{S_i}^* = \int_{(S_i)} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0} \quad (5.60)$$

pri čemer je treba pod sisteme S_i izbrati tako, da dobimo potrebno število linearno neodvisnih enačb. V ta namen je treba upoštevati točke delovanja in smeri veznih sil, kot izhajajo iz pogojev.

5.4. Enačbe gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

5.4.1. Lagrangeve enačbe gibanja prve vrste

Za izpeljavo tako imenovanih Lagrangevih enačb gibanja prve vrste izhajamo iz d'Alembertovega načela, tj. enačbe (4.24),

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Za sisteme s koničnim številom prostostnih stopenj lahko v skladu z enačbo (5.2) krajevni vektor $\mathbf{r}$ masnih elementov dm podamo kot funkcijo posplošenih koordinat q_i , $n = 1, 2, \dots, n$ in t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Z dvakratnim odvajanjem krajevnega vektorja po času dobimo pospešek masnih elementov:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k^2} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Poleg tega, ker je $\delta t = 0$, je:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (5.62)$$

Zaradi kratkosti označimo, tako kot v 5.3, prvo delno izpeljanko lokacijskega vektorja $\mathbf{r}$ glede na posplošeno koordinato q_k z $\mathbf{r}_k$. V skladu s tem $\mathbf{r}_k$ predstavlja delno izpeljanko lokacijskega vektorja glede na čas. Za višje izpeljanke je postopek analogen. Seveda tudi s tem skrajšanim zapisom ostane dogovor o surmanaciji.

Z uporabo enačb. (5.61) in (5.62) lahko enačbo (4.24) zapišemo na naslednji način:

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (5.63)$$

Če so posplošene koordinate med seboj neodvisne, tj. če med njimi ni povezave, potem iz enačbe (5.63) izhaja da so δq_j poljubni:

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0. \quad (5.64)$$

Kadar pa med δq_j obstajajo povezave, ki jih skladne z enačbo (5.8) zapišemo v obliki

$$a_{pj} \delta q_j = 0; \quad p = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.65)$$

ta sklep sprva ni mogoč. Ko pa enačbi (5.63) dodamo enačbe (5.65) s še neznanimi množitelji λ_p , potem lahko, kot je bilo pojasnjeno že v razdelku 5.3, izničimo koeficiente pri vseh δq_j .

Tako dobimo

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \lambda_p a_{pj} = 0. \quad (5.66)$$

Te *Lagrangeve gibalne enačbe prve vrste* zaradi velikega števila potrebnih integracij niso povsem primerne za splošno uporabo. Njihov pomen je pri uporabi za sisteme z masnimi točkami, saj se pri tem Stieltjesovi integrali pretvorijo v končne vsote. Vendar pa je mogoče število potrebnih integracij precej zmanjšati in tako enačbe (5.66) spraviti v obliko, ki je primernejša za uporabo za sisteme togih teles. Da bi to pokazali, uvedemo oznake

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \int_{(S)} dm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu}. \quad (5.67)$$

S temi količinami lahko Christoffelove simbole prve vrste zapišemo na naslednji način:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q_\sigma} \right). \quad (5.68)$$

Če enačbo (5.67) vstavimo v enačbo (5.68), dobimo:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\sigma \partial q_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \right) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\nu \partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\sigma \partial q_\mu} \right) - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\nu \partial q_\sigma} \right) \right] = \int_{(S)} dm \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} \quad (5.69)$$

Če v skladu z enačbo (5.44) uvedemo posplošene vtisnjene sile

$$Q_j^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad (5.70)$$

dobimo iz enačbe (5.66) z uporabo enačb (5.67) in (5.69)

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2\Gamma_{k0j} \dot{q}_k + \Gamma_{00j} &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ j, k, l &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\}. \quad (5.71)$$

Nadaljnje seštevanje na levi strani enačb (5.71) je mogoča, če čas t formalno nadomestimo s koordinato q_0 in razširimo vsote po k in l od 0 do n . Z $\ddot{q}_0 = 0$ in $\dot{q}_0 = 1$ dobimo

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Za določitev $g_{\nu\mu}$ v skladu z enačbo (5.67) je treba v splošnem primeru zaradi $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$

izračunati $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ integralov. Z neposredno uporabo enačbe (5.66)

pa bi bilo potrebnih $\frac{n(n+1)(n+3)}{2}$ integralov.

Če je matrika koeficientov g_{jk} nesingularna, je ločitev pospeškov v enačbah (5.72) mogoča z množenjem z recipročno matriko koeficientov. Elemente te matrike opredelimo s

$$g_{ij}^* g_{jk} = \delta_{ik}; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (5.73)$$

Če uvedemo Christoffelove simbole druge vrste

$$\Gamma_{kl}^i = g_{ij}^* \Gamma_{klj} \quad (5.74),$$

potem dobimo iz enačbe (5.72) po množenju z g_{ij}^* in seštevanju po indeksu j člene s samostojnimi pospeški

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_k + \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l &= g_{ij}^* (Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj}) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Če so vtisnjene sile konservativne in so prisotne samo holonomne pogojne enačbe v obliki $f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$, dobimo iz enačb (5.72) ali (5.75) zaradi

$$\left. \begin{aligned} Q_j^{(e)} &= -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad a_{pj} = \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \quad (\text{glej 5.3}) \\ g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \quad j, k, l = 1, 2, \dots, n; \\ &\quad p = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

oz.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_k + \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l &= g_{ij}^* \left(-\frac{\partial U}{\partial q_j} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \right) \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \\ &\quad p = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

5.4.2 Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste

V prejšnjem razdelku smo enačbo (5.72) izpeljali iz d'Alembertovega načela, ki nam omogoča, da določimo gibalne enačbe za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj, pri čemer poznamo funkcije $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ in morebitne vezi. Pomanjkljivost te metode je nejasnost koeficientov g_{jk} in Γ_{kl}^i . Poleg tega je pri uporabi veliko spremenljivk Γ_{kl}^i pogosto enakih nič, teh pa ni mogoče na splošno prepoznati pred njihovo določitvijo. Tem pomanjkljivostim se izognemo z uporabo tako imenovanih *Lagrangevih enačb gibanja druge vrste*, v katerih ima pomembno vlogo pojem kinetične energije.

V nadaljevanju bomo te gibalne enačbe izpeljali iz d'Alembertovega načela v različici (4.24). Najprej v skladu z enačbo (5.70) uvedemo posplošene sile in tako iz enačbe (5.62) dobimo

$$\int_{(s)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(s)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j^{(e)} \delta q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.78)$$

Poleg tega tvorimo

$$\int_{(s)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(s)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (5.79)$$

Izraz $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ preoblikujemo na naslednji način :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial q_j} \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

Pri tem smo uporabili zvezo

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} \quad (5.81)$$

katere veljavnost lahko dokažemo na naslednji način:

Iz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

dobimo

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

in iz tega, po parcialnem odvajanju glede na $\dot{q}_j$, enačbo (5.81), saj $\mathbf{r}$ ni odvisen od $\dot{q}_j$.

Če enačbo (5.80) vstavimo v enačbo (5.79) in upoštevamo, da je kinetična energija

$$T = \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} &= \int_{(S)} dm \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \int_{(S)} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{dm \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dm \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) \right] \delta q_j \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

Z enačbama (5.78) in (5.82) dobimo iz enačbe (4.24):

$$\left[Q_j^{(e)} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \quad (5.83)$$

Če upoštevamo splošni primer, da med δq_j obstajajo vezi v obliki

$$a_{pj} \delta q_j = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

potem iz enačbe (5.83) izhajajo Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste skladno z metodo sklepanja, uporabljeno v 5.4.1:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj}; \quad (5.84)$$

Pokažimo, da če odvajamo levo stran enačbe (5.84) potem dobimo Lagrangeve gibalne enačbe prve vrste, tj. enačbe (5.72).

Da bi to pokazali, zapišemo kinetično energijo

$$T = \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2.$$

s pomočjo enačbe (5.61) v obliki

$$T = \int_{(S)} dm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l} \dot{q}_l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

S primerjavo z enačbo (5.67) dobimo

$$T = \int_{(S)} dm g_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (5.85)$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} (g_{jl} \dot{q}_l + g_{kj} \dot{q}_k) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} (g_{jl} \ddot{q}_l + g_{kj} \ddot{q}_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \\ &= q_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l \end{aligned}$$

Če to vstavimo v enačbo (5.84) in uporabimo Christoffelove simbole prve vrste potem iz enačbe (5.68) sledi

$$g_{jk}\ddot{q}_k + \Gamma_{klj}\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj}; \quad j=1,2,\dots,n; \quad k,l=0,1,2,\dots,n$$

kar dokazuje našo trditev.

Če so vtisnjene sile konservativne, lahko ponovno (glej 5.3.) določimo

$$Q_j^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Če upoštevamo, da potencialna energija vtisnjenih sil ni odvisna od posplošenih koordinat hitrosti $\dot{q}_j$, torej da je

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0,$$

potem lahko enačbo (5.84) z uvedbo *Lagrangeve funkcije*

$$L = T - U, \tag{5.86}$$

zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda_p a_{pj}; \tag{5.87}$$

Če so poleg tega vezi holonomne, tj. če velja

$$a_{pj} = \frac{\partial f_p}{\partial q_j},$$

potem lahko enačbo (5.87) z uporabo

$$F = L - \lambda_p f_p \tag{5.85}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\lambda_p f_p) = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \lambda_p}{\partial \dot{q}_j} f_p = 0. \tag{5.89}$$

kjer sta

$$\frac{\partial f_p}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0; \quad f_p = 0$$

zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.90)$$

Če pri določanju gibalnih enačb ne potrebujemo tudi določitve posplošenih veznih sil

$$Q_j^{(z)} = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j}; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

je za holonomne sisteme priporočljivo odpraviti r koordinat. Med preostalimi koordinatami $f = (n - r)$ potem ni več pogojnih enačb, tako da lahko namesto enačbe (5.90) zapišemo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (5.91)$$

Enačbe (5.91) so *Eulerjeve enačbe* variacijskega problema, ki izhajajo iz Hamiltonovega načela za

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t),$$

[glej 4.2.4., enačba (4.40)].

5.4.3. Kanonične gibalne enačbe za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami

Iz Lagrangevih gibalne enačbe druge vrste za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami, ki nimajo presežnih koordinat¹, bomo zdaj izpeljali tako imenovane *kanonične enačbe*. Te imajo elegantno obliko in prednost, da neposredno vodijo do sistema diferencialnih enačb prvega reda. So izhodišče za obsežno integracijsko teorijo in v mnogih primerih omogočajo, da pridemo neposredno do kvalitativnih sklepov o gibanju sistema.

Najprej z zvezo

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (5.92)$$

¹ Koordinat vezanih s pogojnimi enačbami (OP)

vpeljemo tako imenovane *koordinate impulza* p_j . Z njimi lahko Lagrangeve gibalne enačbe (5.91) zapišemo v obliki

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (5.93)$$

Iz zveze (5.92) je razvidno, da so koordinate impulzov – tako kot Lagrangeova funkcija L – na splošno odvisne od posplošenih koordinat q_i , koordinat hitrosti $\dot{q}_i$ in od časa:

$$p_j = p_j(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t). \quad (5.94)$$

Ker je L kvadratna forma v $\dot{q}_i$, so p_j linearno odvisni od koordinat hitrosti. Rešitev enačbe (5.93) po $\dot{q}_i$ je mogoča, če je matrika koeficientov

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (5.95)$$

nesingularna. To predpostavimo in zapišimo:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t). \quad (5.96)$$

Če v

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t). \quad (5.97)$$

s pomočjo enačbe (5.96) nadomestimo $\dot{q}_i$ s spremenljivkami q_i , p_i in t , dobimo še eno funkcionalno odvisnost Lagrangeve funkcije, ki jo bomo označili z

$$L^* = L^*(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t). \quad (5.98)$$

Sedaj uvedemo *Hamiltonovo funkcijo*

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t). \quad (5.98)$$

ali, zapisano v poenostavljeni obliki,

$$H = H(q, p, t)$$

z zvezo

$$H = H(q, p, t) = p_k \dot{q}_k(q, p, t) - L^*(q, p, t) \quad (5.99)$$

in tvorimo

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L^*}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j}.$$

Če izraz $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k}$ v skladu z enačbo (5.92) nadomestimo s p_k , dobimo:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

Iz

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j}$$

sledi z enačbami (5.92) in (5.93)

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j.$$

Tako dobljene enačbe

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

so iskane kanonične gibalne enačbe, ki tvorijo sistem $2f$ diferencialnih enačb prvega reda. Hamiltonovo funkcijo, ki nastopa v njem, je treba v splošnem primeru določiti v skladu z enačbo (5.99). Pri skleronomnih sistemih, kjer krajevni vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

ni eksplicitno odvisen od časa, je kinetična energija

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kvadratna forma koordinat hitrosti, prim. (5.85). Tako je v skladu z enačbo (5.92) zaradi

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$p_k \dot{q}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T - T^*. \quad (5.101)$$

Zvezdica pri spremenljivki T^* spet pomeni, da smo pri tem s pomočjo enačbe (5.96) odpravili koordinate hitrosti. Tako iz enačbe (5.99) z uporabo enačbe (5.101) postane Hamiltonova funkcija za skleronomne sisteme

$$H(q, p) = T^* + U \quad (5.102)$$

enaka celotni mehanski energiji sistema. Če se v Hamiltonovi funkciji $H(q, p, t)$ nekatere koordinate q_i ne pojavijo eksplicitno, se te posplošene koordinate imenujejo *ciklične*. Glede na enačbo (5.101) sta za te koordinate

$$\dot{p}_i = 0$$

in

$$p_i = \text{const.} \quad (5.103)$$

5.4.4 Hamiltonova-Jacobova parcialna diferencialna enačba

Predpostavimo, da je znana rešitve kanonskih enačb (5.100). Potem je mogoče koordinate impulzov izraziti kot znane funkcije posplošenih koordinat in časa:

$$p_i = w_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t). \quad (5.104)$$

Zdaj je potrebno preveriti, katere pogoje morajo izpolnjevati funkcije w_i , da so izpolnjene kanonične enačbe (5.100). Za razlikovanje med njima bomo uporabljali

$$H(q, p, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t) \quad (5.105)$$

za označevanje Hamiltonove funkcije, uporabljene v kanoničnih enačbah, in

$$H(q, w, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_f, w_1, w_2, \dots, w_f, t). \quad (5.106)$$

za označevanje funkcije, dobljene iz enačbe (5.105) z zamenjavo znanih funkcij (5.104). Medtem, ko iz enačbe (5.104) izhaja

$$\dot{p}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (5.107)$$

dobimo iz enačbe (5.106) z uporabo enačbe (5.100)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} H(q, w, t) &= \frac{\partial}{\partial q_i} H(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial p_j} H(q, p, t) \frac{\partial w_j}{\partial q_i} \\ &= -\dot{p}_i + \dot{q}_j \frac{\partial w_j}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.108)$$

Z izločitvijo $\dot{p}_i$ iz enačb (5.107) in (5.108) sledi

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q, w, t) + \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_i} - \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \quad (5.109)$$

Teh f enačb je očitno neprotislovnih le, če lahko w_i predstavimo kot

$$w_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad G = G(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad (5.110)$$

Iz enačb (5.109) potem sledi

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) \right] = 0. \quad (5.111)$$

Integracijska »konstanta«, ki nastopa pri integraciji teh enačb, je lahko le funkcija časa:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) = c(t) \quad (5.112)$$

Rešitve te diferencialne enačbe se pri različni izbiri $c(t)$ razlikujejo le za aditivno funkcijo časa. Pri tem so vrednosti p_i , kot je razvidno iz enačb. (5.104) in (5.110), niso odvisne od te funkcije časa. Iz tega sledi, da funkcija $c(t)$ ni pomembna pri določanju p_i in ji zato lahko damo vrednost nič. Na ta način dobimo *Hamilton-Jacobovo parcialno diferencialno enačbo*

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) = 0 \quad (5.113)$$

Tako pridemo do rezultata, da so koordinate impulzov p_i posledica

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (5.114)$$

pri čemer mora funkcija G izpolnjevati enačbo (5.113).

Funkcija G v splošnem ni odvisna le od f koordinat q_i in časa, temveč tudi od $f+1$ poljubnih konstant $a_0, a_1, \dots, a_f$:

$$G = G(q_1, q_2, \dots, q_f, t, a_0, a_1, \dots, a_f). \quad (5.115)$$

Če oblikujemo $f+1$ parcialnih odvodov

$$\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f$$

lahko izločimo $f+1$ konstant $a_0, a_1, \dots, a_f$ in spet dobimo enačbo (5.113). Ena od konstant, npr. a_0 , je aditivna, saj sta tako G kot $G + a_0$ rešitev enačbe (5.113). Rešitev v obliki (5.115) se v matematiki imenuje popolna rešitev.

S pomočjo popolne rešitve (5.115) lahko dobimo tudi posplošene koordinate kot funkcije časa v implicitni obliki. V ta namen tvorimo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial a_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f$$

in z enačbami (5.113), (5.114), (5.115) in (5.112) dobimo

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial a_i} &= \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q, w, t)}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q, w, t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\dot{q}_j \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

Iz tega sledi, da morajo biti parcialni odvodi funkcije G po a_i konstante. Skupaj z enačbo (5.114) dobimo zveze:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ b_i &= \frac{\partial G}{\partial a_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Pri tem so b_i nove konstante, ki jih je treba tako kot a_i določiti iz začetnih pogojev. Prva enačba (5.117) podajo impulze kot funkcije splošenih koordinat in časa, druge enačbe pa implicitno določijo koordinate kot funkcije časa. Tako smo rešitev kanonskih enačb (5.100) nadomestili z rešitvijo Hamilton-Jacobjeve parcialne enačb (5.113).

Uporaba Hamilton-Jacobjeve parcialne diferencialne enačbe ima prednosti v tako imenovanih *ločljivih sistemih*, v katerih lahko funkcijo G oblikujemo kot vsoto parcialnih funkcij, od katerih je vsaka odvisna le od ene koordinate, vključno s časom:

$$G = G_0(t, a_1, a_2, \dots, a_f) + \sum_{i=1}^f G_i(q_i, a_1, a_2, \dots, a_f) + a_0. \quad (5.118)$$

Poseben primer tvorijo skleronomni sistemi, v katerih je Hamiltonova funkcija skupna energija sistema, ki ni odvisna od časa. Tako je $H(p, q)$ konstantna in enačbo (5.113) nadomestimo z

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}\right) = E \quad (5.119)$$

kjer je

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -E$$

in

$$G = a_0 - Et - \bar{G}(q_1, q_2, \dots, q_f; E, a_1, a_2, \dots, a_f). \quad (5.120)$$

Pri tem smo konstanto a_1 izrazili z a_2 do a_f in skupno energijo E . Namesto enačbe (5.117) tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \bar{G}}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f \\ b_1 &= -t + \frac{\partial \bar{G}}{\partial E} \\ b_i &= \frac{\partial \bar{G}}{\partial a_i}; \quad i = 2, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

Srednja vrednost iz enačbe. (5.121) opisuje odvisnost q_i od časa, zadnja enačba pa opisuje »pot« sistema v »konfiguracijskem prostoru« sistema, ki ga zajema q_i , povsem geometrično, brez odvisnosti od časa. Ločljivi skleronomni sistemi se imenujejo Stäckelovi sistemi. O posplošenih Stäckelovih sistemih govorimo, če so ločljivi, ne pa skleronomni.

Tehničnih sistemi z več prostostnimi stopnjami v večini primerov niso ločljivi. Zato je pomen Hamilton-Jacobijeva parcialna diferencialna enačba v tehnični mehaniki majhen. Po drugi strani pa se uporablja v nebesni mehaniki in kvantni mehaniki. Več podrobnosti o Stäckelovih sistemih lahko najdete npr. v Forbat [7].

5.4.5 Predstavitev Lagrangevih enačb gibanja s pomočjo kvazi-koordinat

Sedaj obravnavamo možnost določitve Lagrangevih enačb gibanja druge vrste za linearne-neholonomske sisteme brez uporabe Lagrangevih parametrov. Izberemo splošno predstavitev v kvazikoordinatah. Prednost tega je, da so gibalne enačbe na voljo tudi za holonomne sisteme, za katere so kvazikoordinate primerne zaradi smotrnosti.

Za uvedbo kvazikoordinat uporabimo enačbo (5.29), ki jo zapišemo v naslednji obliki:

$$\dot{\pi}_i = a_{ij} \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q_0, q_1, \dots, q_n), \quad q_0 = t; \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (5.122)$$

Iz tega sledi $\dot{q}_0 = 1$, $\delta q_0 = 0$. Poleg tega določimo

$$\dot{\pi}_0 = 1, \quad \delta \pi_0 = 0$$

in

$$\dot{\pi}_i = a_{ij} \dot{q}_j; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (5.123)$$

Nadalje predpostavljamo, da je matrika koeficientov a_{ij} nesingularna. Inverzna matrika ima elemente b_{ij} , tako da obstaja zveza

$$a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}; \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \quad (5.124)$$

Iz enačb. (5.123) in (5.124) sledi

$$b_{0k} = \delta_{0k}; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.125)$$

Poleg tega sledi iz enačb (5.122) in (5.124)

$$\dot{q}_j = b_{jk} \dot{\pi}_k; \quad j, k = 0, 1, \dots, n \quad (5.126)$$

Med virtualnimi spremembami dejanskih koordinat in kvazikoordinatami obstaja v skladu z enačbama (5.122) in (5.126) zveza

$$\delta \pi_i = a_{ij} \delta q_j, \quad \delta q_j = b_{jk} \delta \pi_k; \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \quad (5.127)$$

Za izpeljavo enačb gibanja začnemo z d'Alambertovim načelom, enačba (4.24) in najprej upoštevamo izraz $\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}$.

Iz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_0, q_1, \dots, q_n) \quad (5.128)$$

sledi

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.129)$$

V tem izrazu zamenjajmo $\dot{q}_i$ v skladu z enačbo (5.126) s kvazi-veličinami, nato pa za označevanje te nove funkcionalne odvisnosti namesto $\dot{\mathbf{r}}$ uvedemo oznako $\dot{\mathbf{r}}^*$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ = \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, b_{1k} \dot{\pi}_k, \dots, b_{nk} \dot{\pi}_k) \\ = \dot{\mathbf{r}}^*(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n) \end{aligned} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.130)$$

Iz enačbe (5.129) dobimo

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \dot{\pi}_j = \mathbf{a}_j \dot{\pi}_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.131)$$

in

$$\delta \mathbf{r}^* = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \delta \pi_j = \mathbf{a}_j \delta \pi_j \quad (5.132)$$

kjer je

$$\mathbf{a}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (5.133)$$

Iz enačbe (5.131) sledi

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \dot{\pi}_j} = \mathbf{a}_j \quad (5.134)$$

Pri tem upoštevamo, da tu j teče samo od 1 do n , saj je odvod po $\dot{\pi}_0 = 1$ ni smislen.

Zdaj z enačbo (5.132) tvorimo

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}^* \cdot \delta \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j \delta \pi_j; \quad j = 1, \dots, n \quad (5.135)$$

in izraz $\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j$ pretvorimo na naslednji način:

$$\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j) - \dot{\mathbf{r}}^* \cdot \dot{\mathbf{a}}_j \quad (5.136)$$

Prvi člen desne strani lahko z enačbo (5.134) zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \dot{\pi}_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_j} (\dot{\mathbf{r}}^{*2}). \quad (5.137)$$

Za preoblikovanje drugega člena desne strani enačbe (5.136) izvedemo diferenciacijo $\mathbf{a}_j$ z uporabo enačb. (5.133) in (5.126):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \end{aligned} \right\} \quad (5.138)$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

Po drugi strani pa je

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

$$i, k, l = 0, 1, \dots, n$$

Pri tem smo uporabili zveze (5.131), (5.126) in (5.129). Enačb (5.139) rešimo po $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}$ in tako dobljeni izraz vstavimo v enačbo (5.138):

$$\dot{\mathbf{a}}_j = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \right) b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \quad (5.140)$$

$$i, k, l = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

Če iz enačb odstranimo (5.133) in (5.134) $\mathbf{a}_j$ za $j \neq 0$, potem z uporabo enačbe (5.124) dobimo naslednja odvisnost:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \pi_s} a_{sk} \quad \text{in} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \dot{\pi}_s} a_{si} \quad (5.141)$$

$$s, k, i = 1, 2, \dots, n$$

Zaradi posebne določitve (5.123) ostanejo razmerja (5.141) za $k, i \neq 0$ pravilna, tudi če člene z indeksom $s = 0$ izpustimo iz seštevanja po s . Čeprav po enčbi (5.141) izrazi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \quad \text{in} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

za $k, i = 0$ niso definirani, jih lahko vstavimo v enačbo (5.140) in seštejemo po k oz. i od 0 do n , saj členi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} \frac{\partial b_{0l}}{\partial q_i} \quad \text{oz.} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} \frac{\partial b_{0j}}{\partial q_k}$$

zaradi enačbe (5.125) odpadejo.

Poleg tega iz enačbe (5.124) izhajajo:

$$\text{oz.} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} (a_{sk} b_{kl}) &= \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} b_{kl} + a_{sk} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_k} (a_{si} b_{ij}) &= \frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} b_{ij} + a_{si} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.142)$$

$$i, k = 0, 1, \dots, n$$

Z uporabo enačb (5.141) in (5.142) dobimo za $\dot{\mathbf{a}}_j$ naslednje izraz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_j &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} b_{ij} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \pi_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.143)$$

Z enačbami (5.135) do (5.137) in (5.143) dobimo z enačbo (5.128) d'Alambertovega načela,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_j} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^{*2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^{*2} \right) b_{ij} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_s} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^{*2} \right) b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \right] \delta \pi_j = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{a}_j \delta \pi_j \end{aligned} \quad (5.144)$$

Naj

$$T^* = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^{*2} = T^*(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{\pi}_j, \dots, \dot{\pi}_n) \quad (5.144)$$

označuje kinetično energijo, izraženo z realnimi koordinatami in kvazivelocitetami. Naj

$$\Pi_j^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{a}_j = Q_j^{(e)} b_{ij} \quad (5.146)$$

označuje posplošeno silo, povezano z j -to kvazikoordinato. Tako dobimo iz enačbe (5.144)

$$\left. \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \right] \delta \pi_j = \Pi_j^{(e)} \delta \pi_j \right\} \quad (5.147)$$

$$i, k, l = 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, \dots, n$$

Če je zdaj prisotnih r vezi

$$a_{jk} \delta q_k = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n \quad (5.148)$$

z $m = n - r$, potem lahko izberemo kvazikoordinate tako, da zadnje r velikosti $\delta \pi_j$ izginejo identično:

$$\delta \pi_j = a_{jk} \delta q_k = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.149)$$

Prvih m velikosti $\delta \pi_j$ je potem poljubnih, tako da enačba (5.147) lahko obstaja le, če velja

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l &= \Pi_j^{(e)} \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

To so Lagrangeve enačbe druge vrste v kvazi-koordinatah.

Seveda je mogoče r vezi izraziti tudi kot pogojne enačbe med $\delta\pi_j$ v obliki

$$c_{pj}\delta\pi_j = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.151)$$

Potem so vezi po množenju s parametri λ_p prav tako »povezane« z enačbami (5.147), kot je razloženo v prejšnjih razdelkih. Tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l &= \Pi_j^{(e)} + \lambda_p c_{pj} \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, \dots, n; \quad p = 1, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

Oblikovanje dvojne vsote v enačbah (5.150) in (5.152)

$$\gamma_{jst} = b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \quad (5.153)$$

za vse kombinacije indeksov j, s, l postane zlahka zapleteno. Zato v nadaljevanju prikažemo možnost, da te količine izračunamo na enostavnejši način. Izhajamo iz enačbe (5.31) in predpostavljamo zamenljivost operatorjev δ in d za naravne koordinate q_j :

$$(\delta d - d\delta)q_j = 0 \quad (5.154)$$

Z dogovorom

$$q_0 = t,$$

ki smo ga uvedli v tem razdelku, dobimo

$$(\delta d - d\delta)\pi_s = \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \delta q_k dq_i \quad (5.155)$$

Z uporabo enačb (5.126) in (5.127) dobimo

$$(\delta d - d\delta)\pi_s = \gamma_{jst} \delta\pi_l d\pi_j \quad (5.156)$$

Upoštevamo, da so izrazi γ_{jst} asimetrični glede na zunanje indekse, to pomeni, da velja

$$\gamma_{jst} = -\gamma_{lsj} \quad (5.157)$$

velja, ker je

$$\gamma_{jst} = b_{il}b_{kj} \left(\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l} \right) = b_{kl}b_{ij} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} \right) = -\gamma_{lsj}$$

Iz tega sledi tudi, da te količine izginejo, če sta oba zunanja indeksa enaka.

5.4.6 Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste brez uporabe Lagrangevih parametrov

Seveda je mogoče določiti tudi Lagrangeve gibalne enačbe, ki ustrezajo enačbam. (5.150) z uporabo realnih posplošenih koordinat namesto kvazi-koordinat. V nadaljevanju bomo pokazali, kako jih lahko iz enačb. (5.150) izpeljemo.

Pri tem predpostavljamo, da jo prisotno r vezi

$$\ddot{a}_{ij}\dot{q}_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad q_0 = t \quad (5.158)$$

Te razrešimo glede na zadnje r koordinat hitrosti $\dot{q}_j$. To je vedno mogoče, če so vezi med seboj linearno neodvisne in če so posplošene koordinate ustrezno oštevilčene. Enačba (5.158), rešena glede na »presežne« koordinate hitrosti, ima lahko obliko

$$\dot{q}_i = c_{ij}\dot{q}_j; \quad i = m+1, m+2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad m = n-r \quad (5.159)$$

Med kvazi-veličinami in dejanskimi koordinatami hitrosti obstajajo naslednje zveze:

$$\left. \begin{array}{ll} \dot{\pi}_i = \dot{q}_i & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ \dot{\pi}_i = q_i - c_{ij}\dot{q}_j & \text{za } i = m+1, m+2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m \end{array} \right\}; \quad (5.160)$$

Potem enačbe

$$\dot{\pi}_i = 0 \quad \text{za } i = m+1, m+2, \dots, n; \quad (5.161)$$

izpolnjujejo vezi (5.158). Inverzija enačbe (5.160) da

$$\left. \begin{array}{ll} \dot{q}_i = \dot{\pi}_i & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ \dot{q}_i = \dot{\pi}_i + c_{ij}\dot{\pi}_j & \text{za } i = m+1, m+2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m \end{array} \right\} \quad (5.162)$$

Primerjava relacij (5.160) in (5.161) z enačbama (5.122) in (5.126) vodi do

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_{ij} = \delta_{ij} & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ \alpha_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij} & \text{za } i = m+1, m+2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (5.163)$$

in

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= \delta_{ij} & \text{za } i &= 0, 1, \dots, m \\ b_{ij} &= \delta_{ij} + c_{ij} & \text{za } i &= m+1, m+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.164)$$

Opozoriti je treba, da je v skladu z enačbo (5.159) c_{ij} za $j > m$ enaki 0. Kinetično energijo T^* , ki jo določa enačba (5.145), lahko na podlagi enačbe (5.160) zapišemo kot

$$\begin{aligned} T^*(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_n) \\ = T^*(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m; \dot{\pi}_{m+1}, \dots, \dot{\pi}_n) \\ = T(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{aligned} \quad (5.165)$$

Iz tega sledi za izraze v enačbi (5.160)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} &= \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_s} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad \text{za } s = m+1, m+2, \dots, n \end{aligned}$$

Za vrednosti $s \leq m$ izraz m iz okroglega oklepaja v enačbi (5.150) izgine, kar je razvidno iz primerjave z enačbo (5.163). S temi transformacijami iz enačbe (5.150) končno dobimo Lagrangeve gibalne enačbe za sisteme z linearnimi neholonomskimi vezmi, izražene z realnimi koordinatami, brez Lagrangevih parametrov

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} b_{ij} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l} \right) &= Q_i b_{ij} \\ i, k &= 0, 1, \dots, n; \quad j, l = 1, 2, \dots, m; \quad s = m+1, m+2, \dots, n \end{aligned} \right\}; \quad (5.166)$$

Ker po π_s z $s > m$ te enačbe niso več diferencirane, lahko te količine v T^* v skladu z enačbo (5.165) postavimo enake nič, tj.

$$T^* = T^*(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m).$$

je preprosto izraz za kinetično energijo sistema po izločitvi »odvečnih« koordinat hitrosti.

Vendar je treba opozoriti, da po drugi strani v izrazu $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ v kinetični energiji ni mogoče izločiti nobenega hitrostnega parametra, kar pomeni, da je

$$T = T(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n).$$

m enačb (5.166) skupaj z r pogojnimi enačbami (5.158) ali (5.159) daje $m+r=n$ diferencialnih enačb za n posplošenih koordinat. Nasprotno pa enačbe (5.84) s Lagrangevimi parametri skupaj z r pogojnimi enačbami dajo $n+r$ diferencialnih enačb za določitev n posplošenih koordinat in r parametrov. Vendar pa s pomočjo enačbe (5.166) ni mogoče določiti veznih sil.

5.4.7 Appellove gibalne enačbe

Z Lagrangevimi enačbami gibanja, obravnavanimi v prejšnjih dveh poglavjih, je bilo mogoče upoštevati tudi neholonomске vezi brez »spajanja« z Lagrangevimi parametri. Drugo možnost za obravnavo neholonomskih vezi, ki so linearne v koordinatah hitrosti, brez uvajanja Lagrangevih parametrov, dajejo *Appellove gibalne enačbe*.

Ponovno obravnavamo sistem s koničnim številom prostostnih stopenj, ki ga določa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_0, q_1, \dots, q_n), \quad q_0 = t. \quad (5.167)$$

in vsebuje pogojne enačbe v obliki

$$a_{pi} dq_i = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad p = 1, \dots, r \quad (5.168)$$

od katerih naj bi bila vsaj ena neholonomna. Iz enačbe (5.167) najprej sledi

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.169)$$

Enačbo (5.168), za katero predpostavljamo, da je linearno neodvisna, rešimo r diferencialov dq_i :

$$dq_i = b_{ij} dq_j; \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad m = n-r. \quad (5.170)$$

Predpostavili smo, da je rešitev glede na zadnjih r diferencialov dq_i mogoča. To lahko vedno dosežemo s preureditvijo indeksov. S pomočjo enačbe (5.170) ote dq_i odpravimo iz enačbe (5.169) in dobimo

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \right) dq_j = \mathbf{c}_j dq_j \\ \mathbf{c}_j &= \mathbf{c}_j(q_0, q_1, \dots, q_n) \\ i &= m+1, m+2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.171)$$

Iz enačbe (5.171) dobimo naslednje izraze za hitrost in pospešek masnih elementov:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_j \dot{q}_j; \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5.172)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{c}_j}{dt} \dot{q}_j + \mathbf{c}_j \ddot{q}_j = \frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_j + \mathbf{c}_j \ddot{q}_j; \quad j, l = 0, 1, \dots, m \quad (5.173)$$

Gaussova variacija $\mathbf{r}$ je torej

$$\delta'' \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_j \delta'' \ddot{q}_j; \quad j = 1, \dots, m \quad (5.174)$$

Če zdaj iz Gaussovega načela, enačba (4.46), izhajamo iz

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

dobimo z enačbo (5.147)

$$\delta'' \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{c}_j \delta'' \ddot{q}_j = 0. \quad (5.175)$$

Podobno kot v 5.3. v skladu z enačbo (5.44) uvedemo posplošene sile

$$\Pi_i^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{c}_j. \quad (5.176)$$

Tu uvedene količine se od posplošenih sil po enačbi (5.44) razlikujejo po tem, da $\mathbf{c}_j$ na splošno niso parcialni odvodi krajevnega vektorja glede na koordinate. Poleg tega s pomočjo enačbe (5.173) uvedemo *Applovo funkcijo*

$$S = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} = S(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m). \quad (5.177)$$

Zaradi

$$\delta'' S = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \delta'' \ddot{q}_j; \quad j = 1, \dots, m$$

dobimo iz enačb (5.175) in (5.176)

$$\left(\Pi_i^{(e)} - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \right) \delta'' \ddot{q}_j = 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (5.178)$$

Pri tem je m spremenljivk $\delta''\ddot{q}_j$ med seboj neodvisnih in so poljubno izbirne. Zato je enačba (5.178) možna le, če je

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \Pi_i^{(e)}; \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.179)$$

To so Appelove gibalne enačbe. Njihova struktura je posebno preprosta. Vendar je lahko izračun funkcije S računsko precej zamuden, zlasti kadar ne gre za točkovne sisteme in je prisotno večje število prostostnih stopenj.

5.4.8. Gibalne enačbe za sisteme z nelinearnimi neholonomskimi vezmi

V prejšnjih razdelkih smo izpeljali gibalne enačbe za takšne sisteme, za katere v najbolj splošnem primeru veljajo holonomске in linearne neholonomске pogojne enačbe v skladu z enačbo (5.8)

$$a_{pi}\delta q_i = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad i = 1, \dots, n$$

Zdaj želimo dopustiti tudi nelinearne pogojne enačbe v obliki (5.6)

$$\varphi_h(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0; \quad h = 1, 2, \dots, s.$$

v koordinatah hitrosti.

Kot je bilo že navedeno v razdelku 5.2.2, ni mogoče določiti pogojnih enačb med virtualnimi pomiki, tako kot v enačbi (5.8). Zato uporaba d'Alembertovega načela za izpeljavo enačb gibanja ni mogoča. Po drugi strani pa obstajajo linearne zveze med Jourdainovimi ali Gaussovimi variacijami v skladu z enačbo (5.15)

$$\delta'\varphi_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_i} \delta'\dot{q}_i = 0 \quad (5.180)$$

ali v skladu z enačbo (5.20).

$$\delta''\dot{\varphi}_h = \frac{\partial \dot{\varphi}_h}{\partial \ddot{q}_i} \delta''\ddot{q}_i = 0 \quad (5.181)$$

Jourdainovo in Gaussovo načelo (glej 4.2.5.) sta zato primerna za izpeljavo enačb gibanja za sisteme z nelinearnimi neholonomskimi vezmi. V nadaljevanju bomo uporabili Jourdainovo načelo, omenimo pa, da Gaussovo načelo daje enake rezultate.

Iz enačbe (4.45) sledi zaradi enačbe (5.17):

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta' \dot{q}_j = 0, \quad (5.182)$$

Če torej namesto enačbe (5.63) uporabimo enačbo (5.61):

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta' \dot{q}_j = 0. \quad (5.183)$$

Iz tega dobimo iskane gibalne enačbe, če premisleke iz razdelka 5.4.1., ki so se nanašali na zveze med δq_j , povsem analogno prenesemo na zvezo (5.180) med $\delta' \dot{q}_j$. Te se glasijo

$$\left. \int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \lambda_p a_{pj} + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right\} \quad (5.183)$$

$k, l, j = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s$

in v skladu z enačbo (5.72)

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n; \\ p &= 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.185)$$

Zlahka vidimo, da lahko iz Jourdainovega načela izpeljemo tudi Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste ob prisotnosti nelinearnih neholonomskih pogojskih enačb. Pogojske enačbe je mogoče izpeljati na podoben način kot v 5.4.2. Namesto enačb (5.84) so to

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.186)$$

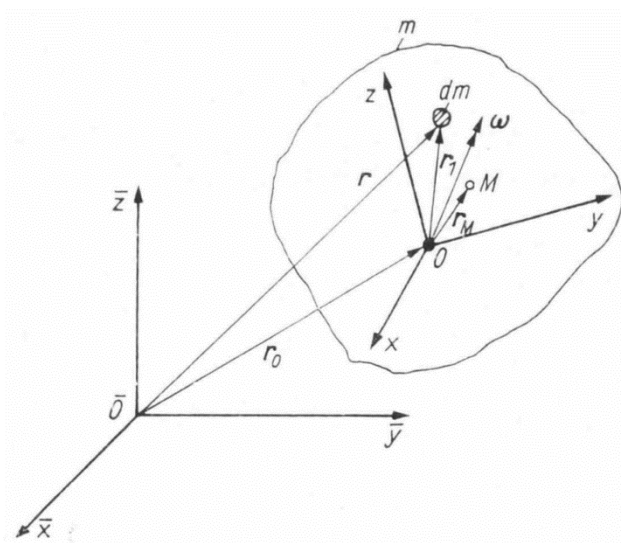
Seveda lahko bolj specifične oblike enačb gibanja za konservativne impresijske sile iz točk 5.4.1. in 5.4.2. uporabimo tudi ob prisotnosti nehomogenih nelinearnih pogojev, če jim dodamo člene

$$\Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j}.$$

5.5 Gibalne enačbe za togo telo

5.5.1 Kinetična energija in kotni moment togega telesa, vztrajnostni momenti

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali različne metode za določitev diferencialnih enačb gibanja za poljuben mehanski sistem s končnim številom prostostnih stopenj. Primerno pa je, da gibalne enačbe za pogosto uporabljen model togega telesa podrobneje preučimo in jim s pomočjo ustreznih izrazov damo obliko, ki je bolj uporabna za neposredno uporabo.



Slika 5/ 1

Opis gibanja togega telesa

Najprej obravnavamo izraz za kinetično energijo, ki ga v znani obliki dobimo iz enačbe (4.14) z integracijo po masnih elementih togega telesa

$$T = \frac{1}{2} \int_{(s)} dm \dot{\mathbf{r}}^2.$$

Za opis gibanja togega telesa uvedemo koordinatni sistem x, y, z z izhodiščem O . Gibanje tega koordinatnega sistema in s tem gibanje telesa je povezano s nepremičnim koordinatnim sistemom $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ z izhodiščem $\bar{O}$, glej sliko 5/1. Vektor $\mathbf{r}_M$ označuje lego masnega središča telesa glede na koordinatni sistem x, y, z . Kot je znano, lahko vsako diferencialno majhno spremembo lege togega telesa opišemo s premikom točke O in zasukom okoli trenutne osi, ki poteka skozi točko O .

Ker so na sliki 5/1 poleg oznak enaka zveze kot na sliki 2/4, lahko uporabimo enačbo (2.23). Vektorju $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{v}_1$ damo vrednost nič, saj pri togem telesu razdalja vseh masnih elementov med seboj in do točke O ostane nespremenjena:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad (5.187)$$

ali, po množenju z dt

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} dt \times \mathbf{r}_1. \quad (5.188)$$

Z uporabo enačbe (5.187) dobimo iz enačbe (5.186):

$$T = \frac{1}{2} \int_{(s)} (\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(s)} \left[\dot{\mathbf{r}}_0^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2 \right] dm. \quad (5.189)$$

Z uporabo pravila o zamenjavi za mešani produkt dobimo:

$$2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = 2\dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_1. \quad (5.190)$$

Vektorja $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathbf{r}_1$ lahko v koordinatnem sistemu telesa zapišemo s pomočjo enotskih vektorjev $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ v obliki

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}. \quad (5.191)$$

in

$$\mathbf{r}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (5.192)$$

S pomočjo enačb (5.191) in (5.192) dobimo

$$\left. \begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2 &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (x^2 + z^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\omega_x \omega_y x y - 2\omega_x \omega_z y z - 2\omega_z \omega_x z x \end{aligned} \right\}. \quad (5.193)$$

Z enačbama (5.190) in (5.193) dobimo iz enačbe (5.189) za kinetično energijo

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_0^2 \int_{(s)} dm + \dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{(s)} \mathbf{r}_1 dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega_x^2 \int_{(s)} (y^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \omega_y^2 \int_{(s)} (x^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - \omega_x \omega_y \int_{(s)} x y dm - \omega_x \omega_z \int_{(s)} y z dm - \omega_z \omega_x \int_{(s)} z x dm \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

Pri tem smo količine $\dot{\mathbf{r}}_0$, $\boldsymbol{\omega}$, ω_x , ω_y in ω_z zapisali pred integrali, ker jih je treba pri integraciji prek masnimh elementov obravnavati kot konstante. Ugotovimo, da drugi integral v enačbi (5.194) izgine, če točka O

miruje glede na prostorsko nepremičen sistem $\bar{O}$

ali pa

sovpada z masnim središčem telesa.

V prvem primeru se faktor pred integralom izniči, ker je $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$, v drugem primeru pa odpade sam integral v skladu z definicijo masnega središča po enačbi (4.1), ker je $\mathbf{r}_M = \mathbf{0}$.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da je eden od teh dveh pogojev izpolnjen. Poleg tega uvedemo naslednje *masne vztrajnostne momente*

$$J_{xx} = \int_{(S)} dm (y^2 + z^2), \quad J_{yy} = \int_{(S)} dm (x^2 + z^2), \quad J_{zz} = \int_{(S)} dm (x^2 + y^2) \quad (5.194)$$

in naslednje *odklonske ali centrifugalne momente*

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_{(S)} dm x y, \quad J_{yz} = J_{zy} = - \int_{(S)} dm y z, \quad J_{zx} = J_{xz} = - \int_{(S)} dm z x \quad (5.194)$$

Če upoštevamo še, da je

$$m = \int_{(S)} dm$$

skupna masa togega telesa, dobimo iz enačbe (5.194) za kinetično energijo izraz

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} (J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2 + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{yz} \omega_y \omega_z + 2J_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (5.197)$$

Zlahka vidimo, da

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 \quad (5.198)$$

predstavlja energijo togega telesa, ki jo ima zaradi translacijskega gibanja svojega težišča in jo zato imenujemo *translacijska energija*. *Rotacijsko energijo* zapišemo kot

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2 + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{yz} \omega_y \omega_z + 2J_{zx} \omega_z \omega_x). \quad (5.199)$$

To je energija, ki jo ima telo, ko izvaja čisto rotacijsko gibanje okoli osi skozi točko O . Tako lahko celotno energijo togega telesa zapišemo kot vsoto translacijske in rotacijske energije:

$$T = T_{trans} + T_{rot}. \quad (5.200)$$

Treba pa je opozoriti, da je ta razčlenitev celotne energije mogoča le, če so izpolnjeni zgoraj navedeni pogoji glede točke O . V nasprotnem primeru se pojavi dodatni energijski člen, ki je odvisen od translacijskega in rotacijskega gibanja telesa.

Masna momenta vztrajnosti in odklona, ki ju določajo enačbe (5.195) in (5.196), lahko razumemo kot elemente tenzorja drugega reda, vztrajnostni *tenzor*

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Kot je razvidno iz enačbe (5.196), je ta tenzor simetričen. Elementi vztrajnostnega tenzorja so odvisni od izbranega koordinatnega sistema. Obnašanje elementov vztrajnostnega tenzorja pri rotaciji koordinatnega sistema lahko jasno ponazorimo, če s pomočjo tenzorja vztrajnosti preučimo zvezo med vrtilno količino $\mathbf{L}$ in vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$.

V skladu z enačbo (4.7) lahko gibalno količino predstavimo kot

$$\mathbf{L} = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}$$

Z uporabo enačbe (5.187) in

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$$

dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_{(S)} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \\ &= \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 \int_{(S)} dm + \mathbf{r}_0 \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_{(S)} \mathbf{r}_1 dm \right) + \int_{(S)} \mathbf{r}_1 dm \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \int_{(S)} \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \end{aligned} \quad (5.201)$$

Pri tem predpostavimo, da je točka O bodisi miruje glede na prostorsko določen sistem $\bar{O}$ (v tem primeru zaradi enostavnosti določimo tudi $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$) bodisi da je identična z masnim središčem telesa. V prvem primeru ostane v enačbi (5.201) samo zadnji integral

$$\mathbf{L}_1 = \int_{(S)} \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \quad (5.202)$$

v drugem primeru pa

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{L}_1 \quad (5.203)$$

Količina L_1 je v obeh primerih vrtilna količina telesa glede na točko, fiksirano na telesu, ki je hkrati točka, fiksirana v prostoru, ali masno središče. Delež $m\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0$ je zasuk masnega središča glede na izhodišče v prostoru fiksiranega koordinatnega sistema, če vzamemo, da je celotna masa skoncentrirana v masnem središču.

Sedaj obravnavo omejimo na L_1 in vzamemo razvoj vektorjev $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathbf{r}_1$ v skladu z enačbami (5.191 in (5.192) v enačbo (5.202). Sledi

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{(S)} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times \left[(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \right] dm \\ &= \int_{(S)} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times \left[(\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k} \right] dm \\ &= \int_{(S)} \left\{ \left[(y^2 + z^2)\omega_x - yx\omega_y - xz\omega_z \right] \mathbf{i} + \left[-xy\omega_x + (x^2 + y^2)\omega_y - yz\omega_z \right] \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + \left[-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z \right] \mathbf{k} \right\} dm \end{aligned}$$

Z uporabo enačb (5.195) in (5.196) postane

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \right) \mathbf{i} + \left(J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.204)$$

Desno stran enačbe (5.204) lahko razumemo kot skalarni produkt tenzorja vztrajnosti z vektorjem kotne hitrosti. To simbolično zapišemo

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (5.205)$$

ali podrobneje v matričnem zapisu:

$$\begin{bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5.206)$$

Vidimo, da komponente vrtilne količine na splošno niso sorazmerne komponentam kotne hitrosti, tj. vektor vrtilne količine in vektor kotne hitrosti nista kolinearna. Zdaj se vprašamo, ali obstajajo vsaj nekatere smeri, za katere obstaja sorazmernost med vektorjema $\mathbf{L}_1$ in $\boldsymbol{\omega}$, tj. za katere velja

$$\mathbf{L}_1 = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (5.207)$$

Če enačbo (5.207) odštejemo od enačbe (5.206), dobimo homogen sistem enačb za komponente ω :

$$\begin{bmatrix} J_{xx} - \lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} - \lambda & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.208)$$

Ta sistem enačb ima netrivialne rešitve le, če je determinanta koeficientov nična:

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} - \lambda & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.209)$$

Po izračunu determinante dobimo z uporabo simetrijskih zvez

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz})\lambda^2 + (J_{yy}J_{zz} + J_{zz}J_{xx} + J_{xx}J_{yy} - J_{yz}^2 - J_{xz}^2 - J_{xy}^2)\lambda \\ & - (J_{xx}J_{yy}J_{zz} + J_{xy}J_{yz}J_{xz} + J_{xz}J_{xy}J_{yz} - J_{xx}J_{yz}^2 - J_{yy}J_{xz}^2 - J_{zz}J_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.210)$$

Najprej predpostavimo, da so trije koreni algebrske enačbe (5.210) med seboj različni, tj. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Potem lahko pokažemo, da so ustrezni lastni vektorji $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ki nastanejo po vstavitvi korenov $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ v enačbo (5.218), med seboj pravokotni. V ta namen določimo desni strani enačb. (5.205) in (5.207) in jih zapišemo, npr. enkrat za ω_1 in enkrat za ω_2 :

$$\begin{aligned} J\omega_1 &= \lambda_1\omega_1 \\ J\omega_2 &= \lambda_2\omega_2 \end{aligned}$$

Če zdaj prvo enačbo skalarno pomnožimo z ω_2 , druge pa z ω_1 , sledi

$$\begin{aligned} \omega_2 \cdot J\omega_1 &= \lambda_1\omega_2 \cdot \omega_1 \\ \omega_1 \cdot J\omega_2 &= \lambda_2\omega_1 \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

Na levi strani druge enačbe zamenjamo faktorja, kar je dovoljeno zaradi simetrije J . Nato obe enačbi odštejemo drugo od druge in dobimo

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1 \cdot \omega_2 \quad (5.211)$$

Če se λ_1 in λ_2 med seboj razlikujeta, potem je ničen skalarni produkt med ω_1 in ω_2 iz česar sledi naša trditev o ortogonalnosti lastnih vektorjev.

Če zdaj tri medsebojno pravokotne smeri lastnih vektorjev uporabimo kot osi novega koordinatnega sistema ξ, η, ζ z izhodiščem O , je razmerje med komponentami L_i in ω zdaj v skladu z enačbo (5.207) predstavljeno z zvezo

$$\begin{bmatrix} D_{i\xi} \\ D_{i\eta} \\ D_{i\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (5.212)$$

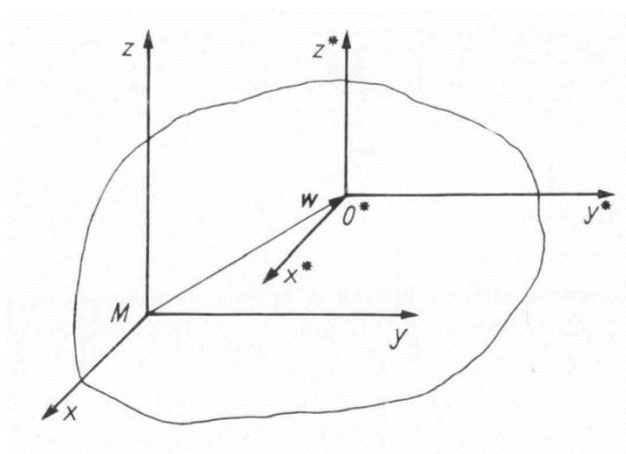
Lastne vrednosti λ_1, λ_2 , in λ_3 so zato za primerjavo z enačbo. (5.206) prikažemo kot elemente vztrajnostnega tenzorja, povezane s koordinatnim sistemom ξ, η, ζ masne momente vztrajnosti

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= J_{\xi\xi} = \int_{(S)} (\eta^2 + \zeta^2) dm \\ \lambda_2 &= J_{\eta\eta} = \int_{(S)} (\xi^2 + \zeta^2) dm \\ \lambda_3 &= J_{\zeta\zeta} = \int_{(S)} (\xi^2 + \eta^2) dm \end{aligned} \right\} \quad (5.213)$$

Koordinatni sistem ξ, η, ζ se od vseh drugih koordinatnih sistemov, povezanih z istim izhodiščem, razlikuje po tem, da pri njem odpadejo deviacijski oz. centrifugalni momenti. Zato se osi tega koordinatnega sistema imenujejo *glavne osi vztrajnosti* in masni vztrajnostni momenti dani z enačbo (5.213) pa *glavni masni vztrajnostni momenti*. Prehod iz katerega koli ortogonalnega koordinatnega sistema x, y, z v sistem glavnih osi ξ, η, ζ se imenuje *transformacija glavnih osi*. Velja tudi, da je vsaka simetrijska os telesa tudi glavna os vztrajnosti.

Vendar pa obrat tega izreka ne velja, tj. vsaka glavna os ni simetrijska os. Zdaj si oglejmo si primer, ko sta dve od lastnih vrednosti λ ali vse tri lastne vrednosti enake druga drugi. Če je na primer $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, potem obstajata dva linearno neodvisna lastna vektorja za lastno vrednost $\lambda_1 = \lambda_2$ ležita v ravnini, pravokotni na ω_3 , v kateri je vsak vektor lastni vektor. Dve medsebojno pravokotni, sicer poljubni osi v tej ravnini lahko nato izberemo kot osi ξ in η našega sistema glavnih osi in skupaj z osjo ζ tvorita enega od neskončno številnih možnih sistemov glavnih osi. Primeri teles, za katera so ti pogoji izpolnjeni, so vsa rotacijsko simetrična telesa, če koordinatno izhodišče leži na osi lika.

Če so vse lastne vrednosti med seboj enake, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, potem so vse osi skozi koordinatno izhodišče glavne vztrajnostne osi. Tako je vsaka pravokoten sistema ξ, η, ζ sistem glavnih osi. Telesa, pri katerih je vsaka os skozi masno središče glavna os vztrajnosti, so na primer krogla in kocka. Zdaj bomo raziskali, kako se spremenijo komponente tenzorja vztrajnosti pri prehodu iz enega fiksnega koordinatnega sistema telesa x, y, z v drugi fiksni sistem telesa z osmi x^*, y^*, z^* . Upoštevajmo dva posebna primera, ki sestavljata vsako splošno transformacijo.



Slika 5/2

Vzporedni premik dveh koordinatnih sistemov

V prvem primeru se lahko koordinatna sistema premakneta le vzporedno drug proti drugemu (glej sliko 5/2), pri čemer pa predpostavljamo, da mora biti izhodišče sistema x, y, z masno središče telesa. Glede na sistem x, y, z ima vektor razdalje komponente a, b in c . Potem dobimo, na primer, za

$$\begin{aligned} J_{x^*x^*} &= \int_{(S)} (y^{*2} + z^{*2}) dm = \int_{(S)} [(y+b)^2 + (z+c)^2] dm \\ &= \int_{(S)} [(y^2 + z^2) + 2by + 2zc + (b^2 + c^2)] dm \\ &= J_{xx} + m(b^2 + c^2) + 2b \int_{(S)} y dm + 2c \int_{(S)} z dm \end{aligned}$$

Zadnja dva integrala sta enaka nič kot statična momenta telesa glede na osi skozi masno središče. Tako dobimo

$$J_{x^*x^*} = J_{xx} + m(b^2 + c^2) \quad (5.214)$$

Podobno dobimo

$$J_{y^*y^*} = J_{yy} + m(a^2 + c^2)$$

$$J_{z^*z^*} = J_{zz} + m(a^2 + b^2)$$

Za centrifugalni moment $J_{x^*y^*}$ dobimo

$$\begin{aligned} J_{x^*y^*} &= - \int_{(S)} x^* y^* dm = \int_{(S)} (x+a)(y+b) dm \\ &= - \int_{(S)} (xy + ab + ay + bx) dm \\ &= J_{xy} - mab - a \int_{(S)} y dm - b \int_{(S)} x dm \end{aligned}$$

Ker so statični momenti spet enaki nič, sledi

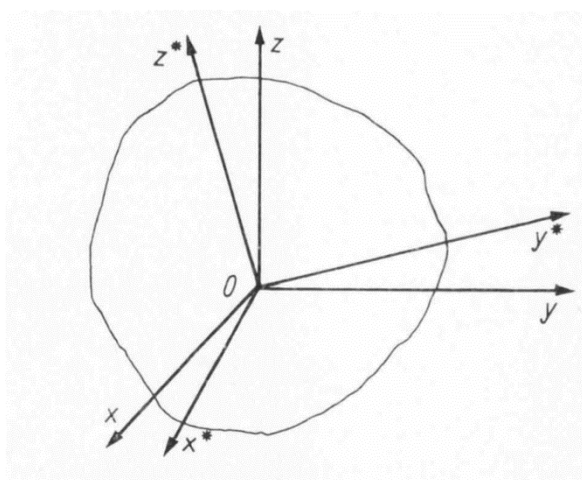
$$J_{x^*y^*} = J_{xy} - mab \quad (5.215)$$

Podobno dobimo

$$J_{y^*z^*} = J_{yz} - mbc$$

$$J_{x^*z^*} = J_{xz} - mac$$

Transformacijski pravili (5.214) in (5.215) se imenujeta Steinerjeva izreka. Omogočata prehod iz »težiščnega sistema« x, y, z v koordinatni sistem, ki je vzporeden z njim, in obratno. Z dvakratno uporabo Steinerjevega izreka je mogoč prehod med katerima koli dvema vzporednima koordinatnima sistemoma.



Slika 5/3

Zasuk dveh koordinat sistema s skupnim izhodiščem

V drugem primeru imata lahko oba koordinatna sistema isto izhodišče in sta lahko zasukana drug proti drugemu (glej sliko 5/3). Ni nujno, da je izhodišče masno središče telesa. Oba

koordinatna sistema morata biti sposobna transformacije drug v drugega s pravo rotacijo, tj. oba sta hkrati desni ali levi sistem. Med koordinatami x, y, z in x^*, y^*, z^* zato obstaja homogena zveza

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \cos(x, x^*) + y \cos(y, x^*) + z \cos(z, x^*) \\ y^* &= x \cos(x, y^*) + y \cos(y, y^*) + z \cos(z, y^*) \\ z^* &= x \cos(x, z^*) + y \cos(y, z^*) + z \cos(z, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (5.213)$$

Da bi poenostavili zapis naslednjih enačb, lahko ponovno uporabimo dogovor o seštevanju, od zdaj naprej pa želimo koordinatne osi označiti z indeksi, tj. postavimo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

in (5.217)

$$x_1^* = x^*, \quad x_2^* = y^*, \quad x_3^* = z^*$$

Prav tako želimo poenostaviti zapis smernih kosinusov. Naj

$$\alpha_{ij} = \cos(x_i^*, x_j^*); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.218)$$

Potem enačbo. (5.216) lahko povzamemo v obliki

$$x_i^* = \alpha_{ij} x_j; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.219)$$

Prav tako velja

$$x_j = \alpha_{ij} x_i^*; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.220)$$

kot je razvidno iz zamenjave koordinat x, y, z s koordinatami x^*, y^*, z^* v enačbi (5.216).

Vidimo lahko, da so α_{ij} komponente enotskih vektorjev e_j^* sistema x_j . Zaradi ortogonalnosti teh vektorjev je

$$e_i^* \cdot e_k^* = \delta_{ik}, \quad e_j e_l = \delta_{jl}. \quad (5.221)$$

Iz tega iz enačbo (5.219) sledi

$$e_i^* \cdot e_k^* = \alpha_{ij} \alpha_{kl} e_j \cdot e_l = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \delta_{jl} = \alpha_{ij} \alpha_{kj} \quad (5.222)$$

tj. veljajo zveza

$$\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik} \quad (5.222)$$

med smernimi kosinusi. Podobno iz enačbe (5.220) dobimo enačbo

$$\alpha_{ij}\alpha_{il} = \delta_{jl} \quad (5.223)$$

V zgoraj dogovorjenem načinu predstavitve zdaj ponovno zapišemo enačbo (5.206), tako za x^* - kot za x -sistem:

$$\alpha_{ij}L_{1i}^* = J_{kl}^*\omega_k^*, \quad L_{1j} = J_{jl}\omega_l \quad (5.224)$$

Za komponente vektorjev L_1 in ω velja transformacijsko pravilo (5.219), tako da lahko prvo enačbo (5.224) zapišemo tudi na naslednji način:

$$\alpha_{ij}L_{1j} = J_{ik}^*\alpha_{kl}\omega_l$$

Ko to enačbo pomnožimo z α_{im} in seštejemo po indeksu i , dobimo z enačbo (5.223)

$$L_{1j} = \alpha_{ij}J_{ik}^*\alpha_{kl}\omega_l$$

Primerjava z drugo enačbo (5.224) daje iskane enačbe transformacije za elemente vztrajnostnega tenzorja:

$$J_{jl} = \alpha_{ij}J_{ik}^*\alpha_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.225).$$

Inverzijo te zveze dobimo z uporabo enačb (5.222) in (5.223). Ta se glasi:

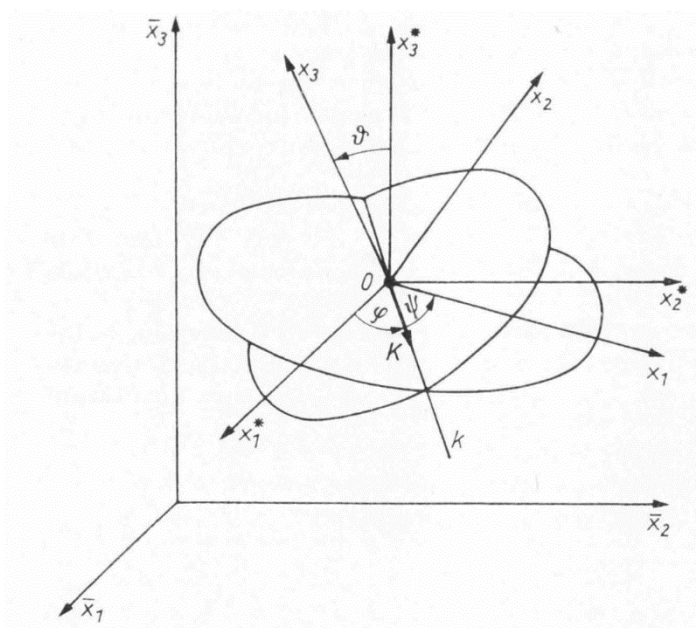
$$J_{ik}^* = \alpha_{ij}J_{jl}\alpha_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.226).$$

5.5.2. Eulerjevi koti

Da bi lahko gibanje togega telesa izrazili s posplošenimi koordinatami, tj. da bi določili zvezo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_f, t) . \quad (5.1)$$

v skladu z enačbo (5.2), uvedemo Eulerjeve kote. Ti opisujejo zasuk togega telesa okoli točke, ki je pritrjena na telo. Gibanje togega telesa lahko nato v celoti opišemo z gibanjem te točke in tremi Eulerjevimi koti, ki jih bomo v nadaljevanju uvedli.



Slika 5/4

Eulejevi koti φ , ψ , ϑ

Naj bo mirujoč koordinatni sistem $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, kot je prikazano na sliki 5/1. Osi x_1^* , x_2^* , x_3^* opisujejo koordinatni sistem, katerega izhodišče je povezano s fiksno točko telesa O , osi pa morajo biti vzporedne z osmi $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ (slika 5/4). Naj bo koordinatni sistem x_1 , x_2 , x_3 spet povezan s togim telesom kot na sliki 5/1 in naj ima prav tako izhodišče O . Zveze med komponentami vektorja r_1 , povezanimi s sistemoma x_1 , x_2 , x_3 in x_1^* , x_2^* , x_3^* spet dajo enačbo (5.216). Zdaj pa trdimo, da lahko smerne kosinuse izrazimo s tremi koti ϑ , φ , ψ tako, da ima enačba (5.216) obliko

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.227)$$

Za dokaz zadostuje, da v enačbi (5.222) in (5.223) vstavimo elemente matrike koeficientov iz enačbe (5.227). Za geometrijsko razlago kotov ϑ , φ , ψ s primerjavo enačb (5.216) in (5.227) najprej ugotovimo, da je

$$\vartheta = \angle(z, z^*) = \angle(x_3, x_3^*)$$

kot med osema x_3 in x_3^* . Oglejmo si vektor K na ravnini (x_1, x_2) , ki je podan z

$$x_1 = \cos \psi, \quad x_2 = -\sin \psi, \quad x_3 = 0$$

(slika 5/4), in mu določimo komponente v sistemu x_1^*, x_2^*, x_3^*

$$x_1^* = \cos \varphi, \quad x_2^* = \sin \varphi, \quad x_3 = 0$$

Iz tega sledi, da ravnino (x_1, x_2) oblikujemo tako, da ravnino (x_1^*, x_2^*) zavrtimo okoli tako imenovane vozliščne črte k , v kateri leži vektor $\mathbf{K}$, za kot ϑ . Os x_1^* se z zasukom okoli φ v ravnini (x_1^*, x_2^*) spremeni v vozliščno črto, ta pa se z vrtenjem okoli ψ v ravnini (x_1, x_2) spremeni v os x_1 . Za določitev predznaka ϑ upoštevamo, da iz enačb (5.216) in (5.227) izhajajo

$$\cos(z, x^*) = \cos(x_3, x_1^*) = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad x_2^* = \sin \varphi, \quad x_3 = 0$$

tj. ϑ je pozitiven, če je $0 < \varphi < \pi$ ter če osi x_3 in x_1^* tvorita med seboj ostri kot. Količine ϑ , φ , ψ se imenujejo *Eulerjevi koti*; označeni so na sliki 5/4.

Če zdaj izberemo kartezične koordinate $\bar{x}_{1O}$, $\bar{x}_{2O}$, $\bar{x}_{3O}$ za opis izhodišča O , potem je zahtevana zveza (5.2) med komponentami krajevnega vektorja masnega elementa s koordinatami x_1 , x_2 , x_3 v koordinatnem sistemu vezanim na telo in posplošenimi koordinatami

$$\begin{aligned} q_1 &= \vartheta, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= \psi, \\ q_4 &= \bar{x}_{1O}, & q_5 &= \bar{x}_{2O}, & q_6 &= \bar{x}_{3O} \end{aligned}$$

podana z

$$x_i = q_{i+3} + \alpha_{ij} x_j; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.228)$$

kjer so α_{ij} elementi transformacijske matrike iz enačbe (5.227)

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}) &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Za komponente hitrostni masnega elementa dobimo

$$\dot{x}_i = \dot{q}_{i+3} + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k x_j; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.229)$$

Sedaj upoštevamo le čiste zasuke, zato postavimo

$$\dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \dot{q}_6 = 0.$$

Poleg tega vektor hitrosti s pomočjo transformacije (5.220) izrazimo z njegovimi komponentami glede na koordinatni sistem x_1, x_2, x_3 vezan na telo:

$$\dot{x}_l = \alpha_{il} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k x_j; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.230)$$

Koeficienti x_j v enačbi (5.230) so asimetrični glede na indeksa j in l . Iz enačbe (5.223) namreč izhaja, ko jo odvajamo po času

$$\alpha_{il} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0.$$

Primerjajmo enačbo (5.230) z enačbo (5.187) za $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$. Zapisano v komponentah dobimo iz enačbe (5.187) z $\omega_1 = \omega_x, \omega_2 = \omega_y, \omega_3 = \omega_z$

$$\dot{x}_l = \beta_{ij} x_j; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.231)$$

z matriko

$$(\beta_{ij}) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.232)$$

Ker se morata enačbi (5.230) in (5.231) ujemati za vse masne elemente, sledi, da so vsi koeficienti x_j enaki. Podrobneje dobimo

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \alpha_{i3} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i2} \frac{\partial \alpha_{i3}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \alpha_{1k} \dot{q}_k \\ \omega_2 &= \alpha_{i1} \frac{\partial \alpha_{i3}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i3} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \alpha_{2k} \dot{q}_k \\ \omega_3 &= \alpha_{i2} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i1} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \alpha_{3k} \dot{q}_k \\ i, j, k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (5.233)$$

Z uvedbo količin a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} dobimo povezavo z enačbo (5.25), s katero so bile uvedene kvazi-veličine. Z računanjem dobimo za elemente matrike (a_{ij}) :

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \vartheta \sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 1 \end{bmatrix} \quad (5.235)$$

Elementi te matrike ne izpolnjujejo vseh pogojev integrabilnosti (5.27), zato količine ω_1 , ω_2 , ω_3 niso odvodi posplošenih koordinat, temveč kvazi-veličine. Tvorimo še $k(a_{ij})$ inverzno matriko

$$(b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} & \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} & 0 \\ -\cot \vartheta \sin \psi & -\cot \vartheta \cos \psi & 1 \end{bmatrix} \quad (5.235)$$

Z enačbami (5.233) do (5.235) dobimo naslednjo zvezo med kvazi-hitrostmi ω_1 , ω_2 , ω_3 ter Eulerjevimi koti in njihovimi odvodi:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (5.236)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi \\ \dot{\phi} &= \omega_1 \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} + \omega_2 \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \\ \dot{\psi} &= -\omega_1 \cot \vartheta \sin \psi - \omega_2 \cot \vartheta \cos \psi + \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.237)$$

5.5.3. Eulerjeve enačbe

Sedaj s pomočjo enačbe (5.152) izpeljemo Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste za togo telo. Kinetično energijo izračunamo po enačbi (5.197) ob predpostavki, da je izhodiščna točka O (slika 5/1) miruje ali pa je v masnem središču togega telesa. Poleg tega izberemo koordinatni sistem telesa z osmi $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ tako, da so osi glavne vztrajnostne osi. Potem je

$$T = \frac{1}{2} \left[J_{11} \omega_1^2 + J_{22} \omega_2^2 + J_{33} \omega_3^2 + m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) \right] \quad (5.238)$$

Od $6^3 = 216$ količin γ_{jst} po enačbi (5.153) so vse tiste, pri katerih je indeks večji od 3, od začetka enake nič, ker so $\dot{q}_4$, $\dot{q}_5$, in $\dot{q}_6$ odvodi posplošenih koordinat, koordinate q_4 , q_5 , in q_6

pa se ne pojavljajo v koeficientih a_{ij} in b_{ij} . Z uporabo enačbe (5.156) lahko preostalih $3^3 = 27$ vrednosti γ_{jst} izračunamo z enačbama (5.233) in (5.234):

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= \cos q_3 dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 dq_2 \\ \delta d\pi_1 &= \cos q_3 \delta dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 \delta dq_2 - \sin q_3 \delta q_3 dq_1 \\ &\quad + \cos q_1 \sin q_3 \delta q_1 dq_2 + \sin q_1 \cos q_3 \delta q_3 dq_2 \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} \delta\pi_1 &= \cos q_3 \delta q_1 + \sin q_1 \sin q_3 \delta q_2 \\ \delta d\pi_1 &= \cos q_3 d\delta q_1 + \sin q_1 \sin q_3 d\delta q_2 - \sin q_3 dq_3 \delta q_1 \\ &\quad + \cos q_1 \sin q_3 dq_1 \delta q_2 + \sin q_1 \cos q_3 dq_3 \delta q_2 \end{aligned}$$

Ker je, kot smo doslej vedno predpostavljali, za realne koordinate podana zamenljivost operatorjev d in δ (glej tudi 5.2.2.), sledi

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta)\pi_1 &= -\sin q_3 (\delta q_3 dq_1 - \delta q_1 dq_3) + \cos q_1 \sin q_3 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\ &\quad + \sin q_1 \cos q_3 (\delta q_3 dq_2 - \delta q_2 dq_3) \\ &= -\sin q_3 \left[\cot q_1 (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \right] - \cos q_3 (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \\ &\quad + \sin q_3 (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) + \frac{\cos q_3 \sin q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \\ &\quad + \sin q_1 \cos q_3 \left[-\frac{\sin q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \right] - \frac{\cos q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) \\ &= -(\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) \end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta)\pi_2 &= -\cos q_3 (\delta q_3 dq_1 - \delta q_1 dq_3) + \cos q_1 \cos q_3 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\ &\quad - \sin q_1 \sin q_3 (\delta q_3 dq_2 - \delta q_2 dq_3) \\ &= -\cos q_3 \left[\cot q_1 (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \right] - \cos q_3 (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \\ &\quad + \sin q_3 (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) + \frac{\cos q_3 \cos q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \\ &\quad - \sin q_1 \sin q_3 \left[-\frac{\sin q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \right] - \frac{\cos q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) \\ &= (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
(\delta d - d\delta)\pi_3 &= -\sin q_1 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\
&= -\frac{\sin q_1}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \\
&= -(\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1)
\end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{213} &= +1, & \gamma_{312} &= -1 \\ \gamma_{123} &= -1, & \gamma_{321} &= +1 \\ \gamma_{132} &= +1, & \gamma_{231} &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (5.239)$$

Za vse druge kombinacije indeksov so γ_{jkl} enaki nič.

Z enačbami (5.236) in (5.237) dobimo iz enačb (5.152) in (5.153) končno

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= \Pi_1^{(e)} + \lambda_p c_{p1} \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= \Pi_2^{(e)} + \lambda_p c_{p2} \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= \Pi_3^{(e)} + \lambda_p c_{p3} \end{aligned} \right\} \quad (5.240)$$

in

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{q}_4 &= \Pi_4^{(e)} + \lambda_p c_{p4} \\ m \ddot{q}_5 &= \Pi_5^{(e)} + \lambda_p c_{p5} \\ m \ddot{q}_6 &= \Pi_6^{(e)} + \lambda_p c_{p6} \end{aligned} \right\} \quad (5.241)$$

Če ni omejitev in količine $\Pi_1^{(e)}$, $\Pi_2^{(e)}$, $\Pi_3^{(e)}$ niso odvisne od koordinat q_4 , q_5 , in q_6 ali njihovih odvodov, potem enačbi (5.240) in (5.241) medsebojno nista povezani.

Ker so $\Pi_1^{(e)}$, $\Pi_2^{(e)}$, $\Pi_3^{(e)}$ momenti vtisnjenih sil glede na osi x_1 , x_2 , x_3 in so $\lambda_p c_{p1}$, $\lambda_p c_{p2}$, $\lambda_p c_{p3}$ ustrezni vezni momenti, lahko enačbe (5.240) zapišemo tudi v obliki *Eulerjevih enačb*.

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1^{(a)} \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2^{(a)} \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (5.242)$$

Količine $M_1^{(a)}$, $M_2^{(a)}$, $M_3^{(a)}$ so zunanji momenti, glede na osi x_1 , x_2 , x_3 . Če so ti momenti bodisi ničelni, konstantni bodisi funkcije kvazi-veličin ω_1 , ω_2 , ω_3 , potem, če je integracija

enačb. (5.242) uspe, lahko podamo stanje hitrosti, ki ga predstavljajo $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$. Da bi določili lego telesa v odvisnosti od časa, je treba integrirati enačbe (5.237).

Če pa so zunanji momenti odvisni od lege telesa, tj. če so funkcije Eulerjevih kotov, potem je treba iz Eulerjevih enačb s pomočjo enačbe (5.236) izločiti kvaziveličine. Tako dobljene enačbe niso enake diferencialnim enačbam, dobljenim iz Lagrangevih enačb gibanja druge vrste, če je kinetična energija od začetka predstavljena kot funkcija Eulerjevih kotov in njihovih odvodov. V slednjem primeru bi bili zunanji momenti na desni strani teh enačb povezani s poševnim sistemom osi, ki ga tvorijo vozliščna črta, os x_3^* in os x_3 .

Količine q_4 , q_5 , q_6 so kartezične koordinate masnega središča M ali katere koli druge točke, ki je fiksna v prostoru. Ker so $\Pi_4^{(e)}$, $\Pi_5^{(e)}$, $\Pi_6^{(e)}$ rezultante vtisnjenih sil v smeri koordinatnih osi, $\lambda_p c_{p4}$, $\lambda_p c_{p5}$, $\lambda_p c_{p6}$ pa ustrezne vezne sile, lahko enačbe (5.241) zapišemo tudi kot

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{q}_4 &= F_1^{(a)} \\ m\ddot{q}_5 &= F_2^{(a)} \\ m\ddot{q}_6 &= F_3^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (5.243)$$

Za primer, da je točka O masno središče, predstavlja enačba (5.243) izrek o masnem središču za to telo, ki smo ga za vsak sistem v vektorski obliki že podali z enačbo (4.4).

5.5.4 Ravninsko gibanje togega telesa

Enačbi gibanja togega telesa, enačbi (5.240) in (5.241), predstavljata nelinearni diferencialni enačbi, za kateri so rešitve v zaključeni obliki znane le za posebna gibanja. Takšna posebna gibanja so npr.

- ravninsko gibanje,
- vrtenje okoli prostorsko fiksne osi,
- gibanje z ničelnimi zunanjimi momenti,
- gibanje rotacijsko simetričnih teles okoli točke telesa, ki je fiksirana v prostoru in leži na osi simetrije pod vplivom gravitacije.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali predvsem z ravninskim gibanjem. Zanj je značilno premikanje masnega središča v ravnini in vrtenje telesa okoli glavne vztrajnostne osi, ki je vedno pravokotna na to ravnino. Ta glavna os vztrajnosti je os x_3 . Naj se masno središče giblje

v prostorsko fiksni ravnini $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Potem ostane os x_3 vedno vzporedna z osjo $\bar{x}_3$. Kotna hitrost ω_3 postane realna koordinata hitrosti, ker za $\mathcal{G}=0$ količine a_{3k} v enačbi (5.234) izpolnjujejo pogoje integrabilnosti (5.27).

Naj bo

$$\omega_3 = \dot{\varphi},$$

kjer je φ kot vrtenja telesa v ravnini $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ glede na začetno lego, ki je določen v prostoru, in

$$q_4 = \bar{x}_{1M}, \quad q_5 = \bar{x}_{2M}$$

kjer sta $\bar{x}_{1M}$ in $\bar{x}_{2M}$ koordinati masnega središča. Poleg tega naj bo

$$J_3 = J, \quad M_3^{(a)} = M^{(a)}$$

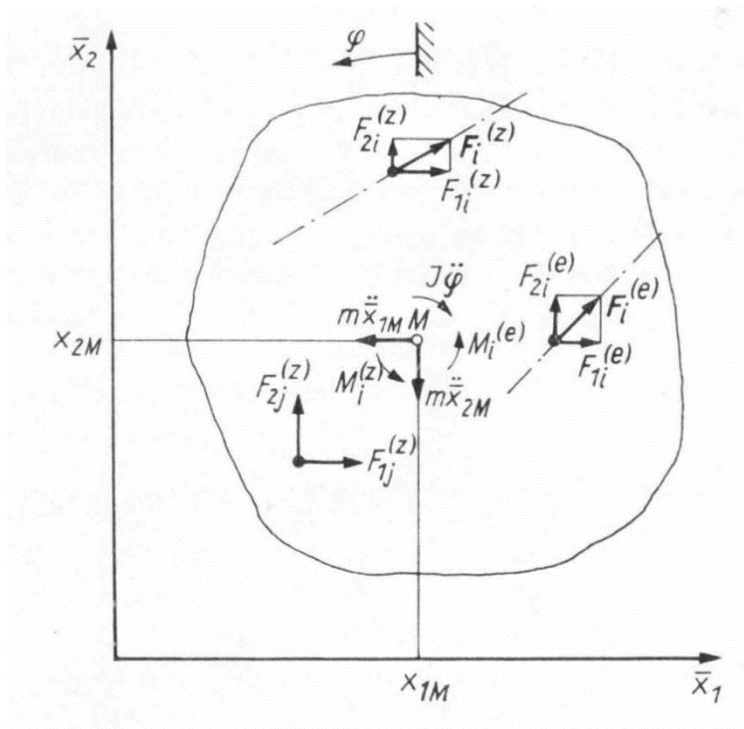
S temi izrazi dobimo iz enačbe (5.242)

$$M^{(a)} - J\ddot{\varphi} = 0 \tag{5.244}$$

in iz enačbe (5.243)

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(a)} - m\ddot{\bar{x}}_{1M} &= 0 \\ F_2^{(a)} - m\ddot{\bar{x}}_{2M} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.245}$$

Enačbi (5.244) in (5.245) predstavljata uporabo enačbe (3.18) za ravninsko gibanje togega telesa. Iz njiju je razvidno, da lahko dinamični problem spremenimo na statičnega tako, da momentu zunanjih sil $M^{(a)}$ dodamo $-J\ddot{\varphi}$, zunanji silama $F_1^{(a)}$ in $F_2^{(a)}$ pa $-m\ddot{\bar{x}}_{1M}$ oz. $-m\ddot{\bar{x}}_{2M}$. Glede na zgoraj navedeno so lahko zunanji momenti in sile sestavljeni iz vtisnjenih sil in momentov ter veznih sil in momentov. Ker se uporaba tega načela spremembe dinamičnega problema nazaj na statičnega pogosto izkaže za smotrno pri ravninskih sistemih, bomo v nadaljevanju podrobneje razložili postopek določanja enačb gibanja.



Slika 5/5

Ravninsko gibanje togega telesa

Podane vtisnjene sile $\mathbf{F}_i^{(e)}$, ki so odvisne od fizikalnih parametrov, razstavimo na komponente v smeri $\bar{x}_1$ in $\bar{x}_2$, $F_{1i}^{(e)}$ in $F_{2i}^{(e)}$, in jih vnesemo v skico modela tako, da se smernici $F_{1i}^{(e)}$ in $F_{2i}^{(e)}$ sekata v prijemališču $\mathbf{F}_i^{(e)}$ (glej sliko 5/5). Vtisnjeni posamezni momenti, ki si jih lahko predstavljamo kot enakovreden prikaz parov sil, $M_i^{(e)}$, so predstavljeni kot prosti vektorji, ki z ukrivljeno puščico okoli masnega središča označujejo njihov smisel vrtenja. Enako velja za vezne momente $M_i^{(z)}$, katerih smer se lahko na začetku domneva, da je poljubna. Razlikovati je treba med veznimi silami z znano smernico, $\mathbf{F}_i^{(z)}$, in tistimi, za katere je znano le prijemališče, $\mathbf{F}_j^{(z)}$. Velikosti komponent $F_{1i}^{(z)}$ in $F_{2i}^{(z)}$ veznih sil $\mathbf{F}_i^{(z)}$ sta odvisni druga od druge; lahko ju izrazimo s še neznano velikostjo $\mathbf{F}_i^{(z)}$ in znanim kotom. Po drugi strani pa sile $\mathbf{F}_j^{(z)}$ v prijemališčih vnašajo po dve komponenti, vsaka s še neznano velikostjo $F_{1j}^{(z)}$ in $F_{2j}^{(z)}$.

Če na koncu vnesemo še sili pospeška mase $m\ddot{x}_{1M}$ in $m\ddot{x}_{2M}$, ki sta nasprotni pozitivni smeri pospeška v masnem središču, ter moment pospeška mase $J\ddot{\varphi}$, ki je nasprotni pozitivnemu kotnemu pospešku, lahko sistem iz slike 5/5 obravnavamo kot statični sistem.

Če s F_1^* in F_2^* označimo rezultanti vseh sil v smeri $\bar{x}_1$ oziroma $\bar{x}_2$ in z M^* rezultatni moment glede na katero koli točko ravnine, potem

$$F_1^* = 0, \quad F_2^* = 0, \quad M^* = 0 \quad (5.246)$$

Če v prvih dveh enačbah (5.246) npr. komponente sil, ki kažejo v pozitivnih $\bar{x}$ smereh, vpišemo kot pozitivne, potem moramo nasprotno usmerjene sile obravnavati z negativnim znakom. V primeru momenta veljajo ustrezne specifikacije za predznak. Opozoriti je treba, da moment M^* poleg posameznih predstavljenih momentov vključuje tudi momente vseh komponent sil glede na izbrano referenčno točko ravnine. Dovoljeno je, da se odnosi $F_1^* = 0$ in/ali $F_2^* = 0$ v enačbi (5.246) nadomestijo z nadaljnjimi pogoji ravnovesja momenta $M^* = 0$, če se za momente izberejo druge referenčne točke ravnine.

Ker ima prosto togo telo v ravnini tri stopnje prostosti, telo ostane gibljivo le, če med koordinatami $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ in φ obstajata največ dva linearno neodvisna pogoja

$$a_{p1}\delta\bar{x}_1 + a_{p2}\delta\bar{x}_2 + a_{p3}\delta\varphi = 0. \quad (5.247)$$

Za vsako lego togega telesa obstajajo največ tri linearno neodvisne vezi. Te ustrezajo trem neznanim komponentam vezne sile ali veznega momenta. Če je v ravnini med seboj povezanih m toгих teles, obstaja največ $3m$ linearno neodvisnih vezi in temu ustrezno $3m$ neznanih komponent veznih sile ali veznih momentov. Vendar se lahko ta sistem giblje le, če obstaja največ $3m - 1$ vezi.

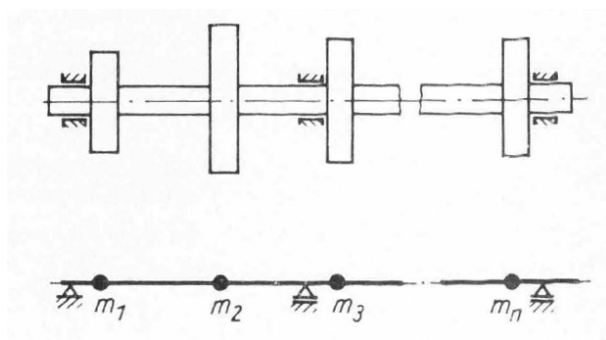
6. Primeri uporabe

V spodnji tabeli je prikazano, na katere dele besedila se nanašajo posamezni primeri.

<i>Primer</i>	<i>Poglavje</i>	<i>Primer</i>	<i>Poglavje</i>
6.1	5.3	6.9	5.4.2 5.6.1.3
6.2	5.4.2 5.5.4.	6.10	5.4.2 5.6.2.1.2
6.3	5.4.1 5.4.2	6.11	5.4.2 5.6.1.3 5.6.2.2.1.2 5.6.2.2.2 5.6.2.2.3 5.6.2.2.4
6.4	3.3 5.4.1 5.4.2 5.5.4	6.12	5.5.3 5.6.1.2.2
6.5	5.4.2	6.13	5.4.2 5.6.1.2.4
6.6	5.4.2	6.14	5.4.2 5.7.1 5.6.2.2.1 5.7.2.1.2
6.7	5.4.2 5.4.6 5.4.7		
6.8	5.4.2 5.6.1.1 5.6.1.2.2 5.6.2.1.1 5.6.2.1.2		

6.1 Ravnotežna lega vrteče gredi

Na vrteči elastični gredi je n diskov (zobniških koles, vztrajnikov in podobno). Predpostavljamo, da lahko sistem reduciramo na elastično gred, ki nima mase in na katero so pritrjene posamezne mase (slika 6/1). Elastične lastnosti gredi in ležajev so izotropne. Na os gredi, za katero predpostavljamo, da je idealno ravna, postavimo os kartezičnega koordinatnega sistema, ki se vrti s kotno hitrostjo Ω gredi (slika 6/2). V tem koordinatnem sistemu naj bo lega masnega središča i -tega diska za $\Omega = 0$ podana s koordinatami ξ_i, η_i . Odstopanja od lege $\xi_i = 0, \eta_i = 0$, so npr. lahko posledica proizvodnih netočnosti.



Slika 6/1

Elastična gred s posameznimi masami

Težnost v nadaljevanju zanemarimo. Neznanke so koordinate x_i, y_i masnih središč za gred, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo.

1. Določitev ravnotežnih pogojev

Če so koordinate $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$, posplošene koordinate, potem so komponente sil, ki delujejo na masne točke v smeri x in v smeri y , ustrezne posplošene sile. V skladu z enačbo (5.48), so te posplošene sile enake nič, če so posplošene koordinate med seboj neodvisne in zato med njimi ni pogojnih enačb. Ker vrteči koordinatni sistem ni inercialni sistem, v skladu z enačbo (5.36) vtisnjenim silam $\mathbf{F}^*$ pripadajo tudi vztrajnostne sile. Za vsako masno točko je centrifugalna sila edina vztrajnostna sila, saj je centripetalni pospešek

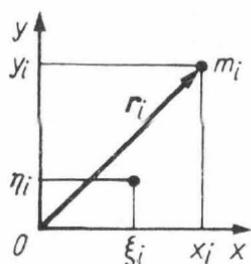
$$\mathbf{a}_{fi} = -\mathbf{r}_i \Omega^2$$

sistemskega gibanja, ki je konstanten, edini pospešek.

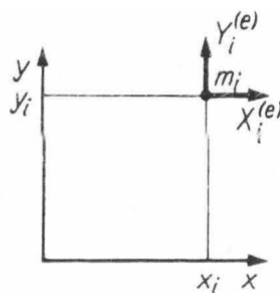
Če za i -to masno točko zapišemo enačbo (5.48) ob upoštevanju enačb (5.36) in (5.44), dobimo za posplošene vtisnjene sile

$$\left. \begin{aligned} X_i^{(e)*} &= X_i^{(e)} + m_i x_{(i)} \Omega^2 \\ Y_i^{(e)*} &= Y_i^{(e)} + m_i y_{(i)} \Omega^2 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Količini $X_i^{(e)}$ in $Y_i^{(e)}$ predstavljata tako imenovani elastični sili [Rückstellkräfte], ki ju elastična gred izvaja na točko mase m_i v smeri x oziroma v smeri y (slika 6/3).



Slika 6/2
Lega masnega
središča za mirujočo
in vrtečo gred



Slika 6/3
Vtisnjena sila v
masnem središču

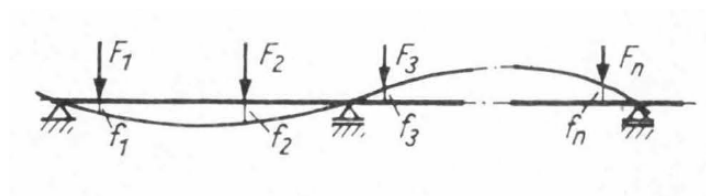
Med pomiki f_i v točkah, označenih z indeksom i , in obremenitvenimi silami F_j , ki delujejo pravokotno na os palice, v meji sorazmernosti obstajajo linearne zveze

$$f_i = \alpha_{ij} F_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

pri čemer faktorji sorazmernosti

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (3)$$

podajajo vpliv pomikov (slika 6/4).



Slika 6/4
Upogibnica elastične gredi

Če v skladu z enačbo (2) zapišemo zveze med premiki in silami za smer x oziroma y , in upoštevamo

$$f_i = x_i - \xi_i$$

oz.

$$f_i = y_i - \eta_i$$

in

$$F_j = -X_j^{(e)}$$

oz

$$F_j = -Y_j^{(e)}$$

dobimo enačbi

$$\left. \begin{aligned} (x_i - \xi_i) &= -\alpha_{ij} X_j^{(e)} \\ (y_i - \eta_i) &= -\alpha_{ij} Y_j^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Iz enačb. (1) in (4) dobimo

$$\left. \begin{aligned} (x_i - \xi_i) &= \alpha_{ij} m_j x_j \Omega^2 \\ (y_i - \eta_i) &= \alpha_{ij} m_j y_j \Omega^2 \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ali z uporabo Kroneckerjevega simbola δ_{ij}

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{ij} m_j - \delta_{ij} \Omega^2) x_j &= -\xi_i \Omega^2 \\ (\alpha_{ij} m_j - \delta_{ij} \Omega^2) y_j &= -\eta_i \Omega^2 \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Z novimi koordinatami

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sqrt{m_i} x_{(i)}, \quad \mu_i = \sqrt{m_i} \xi_{(i)} \\ v_i &= \sqrt{m_i} y_{(i)}, \quad \nu_i = \sqrt{m_i} \eta_{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

in spremenljivkami

$$\beta_{ij} = \sqrt{m_i m_j} \alpha_{(i)(j)} \quad (8)$$

dobijo enačbe (6), po množenju z $\sqrt{m_i}$, obliko

$$\left. \begin{aligned} (\beta_{ij} - \delta_{ij} \Omega^2) u_j &= -u_i \Omega^2 \\ (\beta_{ij} - \delta_{ij} \Omega^2) v_j &= -v_i \Omega^2 \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Kot je znano, ima sistem enačb (9) enolično rešitev le, če je

$$\det(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}) \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (10).$$

Če je izpolnjena neenakost (10), potem lahko deformacije x_i , y_i enolično izračunamo iz enačb (7) in (9) ali neposredno iz enačb (6).

2. Razvoj rešitev po lastnih vektorjih

Rešitev razstavimo po lastnih vektorjih problema lastnih vrednosti

$$(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2})w_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11).$$

ki izhaja iz ničelne desne strani enačbe (9). Korene karakteristične enačbe

$$\det(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}) = 0$$

označimo s Ω_k^{-2} , $k = 1, 2, \dots, n$. Če te vrednosti zaporedoma vstavimo namesto Ω^{-2} v enačbo (11), lahko lastne vektorje w_{jk} določimo iz enačb

$$(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega_k^{-2})w_{j(k)} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Ti lastni vektorji so ortogonalni, če, kar predpostavljamo, se vse lastne vrednosti Ω_k^{-2} med seboj razlikujejo. Poleg tega so normalizirani tako, da je

$$w_{ik}w_{jl} = \delta_{kl},$$

tj. matrika (w_{jk}) je ortogonalna. Potem velja tudi

$$w_{ik}w_{jk} = \delta_{ij}.$$

Če zdaj pomnožimo prvo od enačb (9) z w_{ik} , dobimo

$$w_{ik}(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2})u_j = -w_{ik}\mu_i\Omega^{-2}.$$

Zaradi simetrije β_{ij} sledi

$$(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2})w_{jk}u_i = -w_{ik}\mu_i\Omega^{-2}.$$

Iz te zveze dobimo z enačbo (12)

$$\delta_{ij} \left(\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2} \right) w_{j(k)} u_i = -w_{ik} \mu_i \Omega^{-2}$$

oz.

$$w_{ik} u_i = - \frac{\Omega^{-2}}{\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2}} w_{i(k)} \mu_i \quad (14)$$

Ko (14) pomnožimo z w_{jk} in seštejemo po k končno sledi

$$u_j = - \frac{\Omega^{-2}}{\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2}} w_{jk} w_{ik} \mu_i \quad (15)$$

oz.

$$u_j = \frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2} w_{jk} w_{ik} \mu_i. \quad (15)$$

Na podoben način dobimo

$$v_j = \frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2} w_{jk} w_{ik} v_i. \quad (16)$$

Iz enačb (15) in (16) je razvidno, da se pri $\Omega \rightarrow \Omega_k$ faktor

$$\frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2}$$

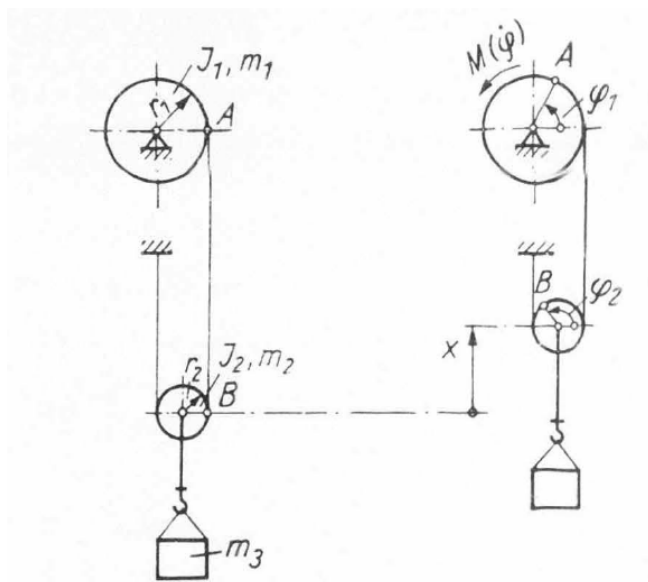
približuje neskončnosti in da so deformacije, ki pripadajo k -temu lastnemu vektorju, še posebej močno vzbujene. V mejnem primeru $\Omega = \Omega_k$ lahko deformacije ostanejo končne le, če je faktor

$$w_{ik} \mu_i \quad \text{ali} \quad w_{ik} v_i,$$

ki pripada k -temu lastnemu vektorju, enak nič, tj. če sta vektorja μ_i in v_i pravokotna na ustrezna lastna vektorja w_{ik} . Poleg tega lahko vidimo, da se pri $\Omega \rightarrow \infty$ deformacije približujejo vrednostim $u_j = 0$, $v_j = 0$. Vendar to ne pove ničesar o stabilnosti te ravnotežne lege.

6.2 Dvigalo

Dvigalo je prikazano na sliki 6/5. Skica na levi strani prikazuje začetno stanje, ko breme miruje, skica na desni strani pa stanje po začetku gibanja. Predpostavimo, da so vrvi navpične in da jih lahko obravnavamo kot toge in brez mase.



Slika 6/5
Dvigalo

Podani so:

J_1	masni vztrajnostni moment vravnega bobna in pogona, glede na os bobna
J_2	masni vztrajnostni moment jermenice, glede na os jermenice, v kateri mora ležati tudi njeno masno središče
m_1	masa vravnega bobna
m_2	masa kavlja, vključno z jermenico
m_3	masa bremena
r_1 oz. r_2	povprečni polmeri ukrivljenosti vrvi na bobnu oz. na jermenici
$M = M(\dot{\varphi}_1)$	pogonski moment podan kot funkcija kotne hitrosti

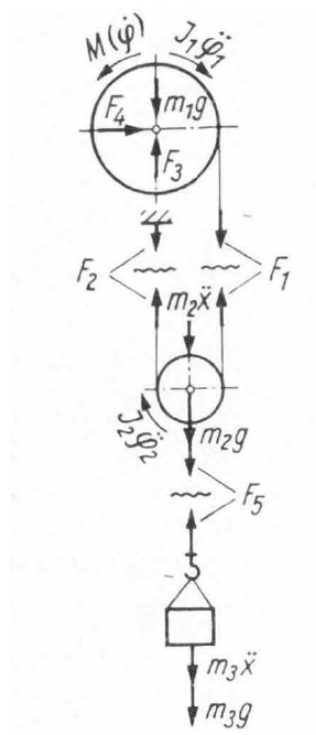
Iščemo kot zasuka φ_1 vravnega bobna v odvisnosti od časa in silo v vrvi.

Za določitev enačb gibanja bomo uporabili dve metodi:

- metodo prerezov in gibalne enačbe za togo telo (razdelek 5.5.4.),
- Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste (razdelek 5.4.2.).

1. Rešitev s pomočjo enačb za ravninsko gibanje togega telesa

Vrvi in povezavo z bremenskim kavljem prerežemo tako, da so vsa 3 telesa prosta. Odstranimo tudi osne ležaje vrvnega bobna. Pri tem vnesemo vezne sile F_1 do F_5 , ki jih povzročajo prvotne toge vezi. Nadalje na telesa vnesemo vtisnjene sile m_1g , m_2g in m_3g ter vtisnjen moment $M(\phi_1)$. Dodamo še vztrajnostne obremenitve $m_2\ddot{x}$, $m_3\ddot{x}$, $J_1\ddot{\phi}_1$, $J_2\ddot{\phi}_2$, ki so usmerjene v nasprotni smeri od smeri predpisanih pospeškov (slika 6/6).



Slika 6/6
Razrez dvigala

Zdaj za izrezana prosta toga telesa uporabimo enačbe (5.244) in (5.245), ki jih potrebujemo za določitev iskanih veznih sile F_1 in F_2 ter za določitev enačb gibanja:

$$M(\phi_1) - F_1 r_1 - J_1 \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (1)$$

$$(F_1 - F_2) r_2 - J_2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (2)$$

$$F_1 + F_2 - F_5 - m_2 g - m_3 \ddot{x} = 0 \quad (3)$$

$$F_5 - m_3 g - m_3 \ddot{x} = 0 \quad (4)$$

Po izločitvi veznih sil sledi

$$M(\phi_1) - 2J_1 r_2 \ddot{\phi}_1 + J_2 r_1 \ddot{\phi}_2 - (m_2 + m_3)(g + \ddot{x}) r_1 r_2 = 0 \quad (5)$$

Ker je vrv toga, obstajajo med koordinatami ϕ_1 , ϕ_2 in x naslednje povezave:

$$f_1 = r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 - x = 0 \quad (6)$$

(pogoj togosti desnega dela vrvi),

$$f_2 = r_2 \varphi_2 - x = 0 \quad (7)$$

(pogoj togosti levega dela vrvi).

Pri določanju vezi smo predpostavili tudi, da vrv ne drsi po bobnu in jermenici.

S pomočjo vezi (6) in (7), ki jih je treba dvakrat odvajati glede na čas, lahko v enačbi (5) odpravimo količini $\ddot{x}$ in $\ddot{\varphi}_2$:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{4M(\dot{\varphi}_1)r_2^2 - 2(m_2 + m_3)gr_1r_2^2}{4J_1r_2^2 + J_2r_1^2 + (m_2 + m_3)r_1^2r_2^2}. \quad (8)$$

Po deljenju s števcem ulomka na desni strani in integraciji ob upoštevanju začetnega pogoja

$$\dot{\varphi}_1 = 0 \quad \text{za} \quad t = 0,$$

sledi iz enačbe (8)

$$\int_0^{\dot{\varphi}_1} \frac{d\dot{\varphi}_1}{4M(\dot{\varphi}_1)r_2^2 - 2(m_2 + m_3)gr_1r_2^2} = \frac{t}{4J_1r_2^2 + J_2r_1^2 + (m_2 + m_3)r_1^2r_2^2}. \quad (9)$$

Če poznamo $M(\dot{\varphi}_1)$ lahko integral na levi strani enačbe (9) izračunamo numerično. Z razrešitvijo po $\dot{\varphi}_1$ dobimo funkcijo

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1(t), \quad (10)$$

ki po ponovni integraciji pripelje do iskane odvisnosti

$$\varphi_1 = \varphi_1(t). \quad (11)$$

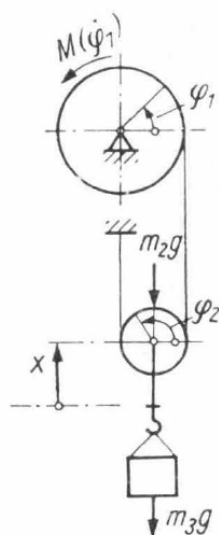
Iskani sili v vrvi F_1 in F_2 izračunamo iz enačb (1) in (2) z uporabo enačb (5) in (6) kot funkcij $\dot{\varphi}_1$ in $\ddot{\varphi}_1$:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{r_1} [M(\dot{\varphi}_1) - J_1 \ddot{\varphi}_1] \\ F_2 &= F_1 - \frac{1}{r_2} J_2 \ddot{\varphi}_2 = F_1 - \frac{r_1}{2r_2^2} J_2 \ddot{\varphi}_1 \\ &= \frac{1}{r_1} \left[M(\dot{\varphi}_1) - \left(J_1 + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_2^2} J_2 \right) \ddot{\varphi}_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Z zamenjavo $\ddot{\varphi}_i$ iz enačbe (8) v enačbah (12) lahko F_1 in F_2 predstavimo kot funkciji $\dot{\varphi}_1$; z uporabo enačbe (10) nato končno dobimo $F_1(t)$ in $F_2(t)$.

2. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja druge vrste

Pri uporabi Lagrangevih enačb gibanja druge vrste se lahko izognemo skici prerezov prikazanih sliki 6/6. Vendar je priporočljivo, da v skico vnesemo vtisnjene sile, če seveda vse te niso potencialne sile (glejte sliko 6/7).



Slika 6/7

Dvigalo z vtisnjenimi silami

Na sliki je razvidno, da je delo vtisnjenih sil

$$\delta W^{(e)} = M(\dot{\varphi}_1) \delta \varphi_1 - (m_2 + m_3) g \delta x$$

v primeru virtualnega pomika sistema. Vtisnjene posplošene sile so koeficienti virtualnih pomikov v tem izrazu:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\varphi_1}^{(e)} &= M(\dot{\varphi}_1) \\ Q_{\varphi_2}^{(e)} &= 0 \\ Q_x^{(e)} &= -(m_2 + m_3) g \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Z variacijo vezi podanih z enačbama (5) in (6) dobimo

$$\left. \begin{aligned} r_1 \delta \varphi_1 - r_2 \delta \varphi_2 - \delta x &= 0 \\ r_2 \delta \varphi_2 - \delta x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{x}^2. \quad (15)$$

S pomočjo enačb. (14) in (15) dobijo Lagrangeve enačbe (5.71) za

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad q_3 = x$$

obliko

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= M(\dot{\varphi}_1) + \lambda_1 r_1 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -(\lambda_1 - \lambda_2) r_2 \\ (m_2 + m_3) \ddot{x} &= -(m_2 + m_3) g - (\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ker pogojni enačbi (5) in (6) izhajata iz togosti desnega oziroma levega dela vrvi, sta v skladu s tem, kar je bilo povedano v 5.3 za enačbo (5.41)

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\lambda_1 = F_1 \quad (17)$$

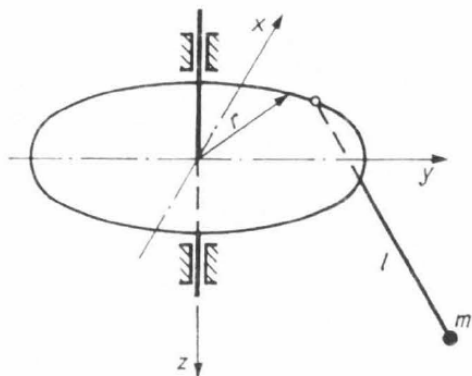
sila v vrvi na desni strani,

$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\lambda_2 = F_2 \quad (18)$$

pa sila v vrvi na levi strani. Tako so enačbe (16) enakovredne enačbam (1) do (4). V prvem primeru smo dobili dodatno enačbo, saj se z izrezom mase m_3 pojavi F_5 kot dodatna neznanka. Parameter, ki bi ustrezal tej sili, bi se pojavil v enačbah. (16), če bi uvedli posebno koordinato in dodatno omejitev za navpično gibanje mase m_3 .

6.3 Prostorsko nitno nihalo s premikajočo se visečo točko

Viseča točka nitnega nihala se premika po danem zakonu gibanja $\psi = \psi(t)$ po krožni poti, ki leži v vodoravnem ravnini (slika 6/8).



Slika 6/8

Prostorsko nihalo

Poiščemo diferencialne enačbe za gibanje nihala. Izpeljavo bomo izvedli s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja prve in druge vrste.

1. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja prve vrste

Kot posplošene koordinate uporabimo kote

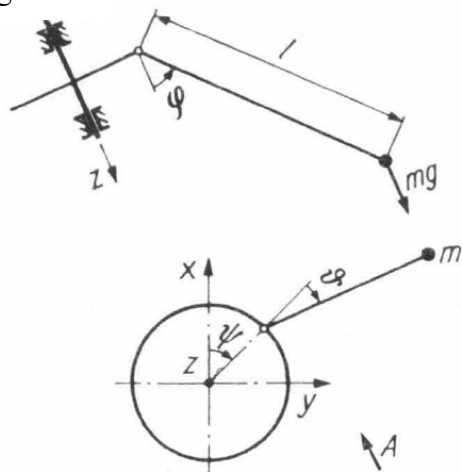
$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \vartheta$$

prikazane na sliki 6/9. Čas lahko tako kot v točki 5.4 simbolično predstavimo s q_0 . Krajevni vektor masne točke m lahko nato določimo z zvezo

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & \mathbf{i} [r \cos \psi + l \sin \varphi \cos(\psi + \vartheta)] \\ & + \mathbf{j} [r \sin \psi + l \sin \varphi \sin(\psi + \vartheta)] + \mathbf{k} l \cos \varphi \end{aligned} \quad (19)$$

kjer so $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ enotski vektorji v smeri koordinatnih osi x, y, z .

Pogled A



Slika 6/9

Prostorsko nihalo z registriranimi posplošenimi koordinatami

Zdaj določimo količine $g_{\mu\nu}$ v skladu z enačbo (5.67):

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = m\dot{\psi}^2 (r^2 + 2lr \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 \sin^2 \varphi) \\ g_{01} &= g_{10} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = mlr\dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta \\ g_{02} &= g_{20} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = mlr\dot{\psi} \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 \dot{\psi} \sin^2 \varphi \\ g_{11} &= m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = ml^2 \\ g_{12} &= g_{21} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = 0 \\ g_{22} &= g_{20} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = ml^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Od spremenljivk $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ podanih z enačbo (5.68) zapišemo le neničelne zadnje indekse, saj potrebujemo samo te:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{001} &= ml \cos \varphi (r\ddot{\psi} \sin \vartheta - r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta - 2l\dot{\psi}^2 \sin \varphi) \\ \Gamma_{002} &= ml \sin \varphi (r\ddot{\psi} \cos \vartheta + r\dot{\psi}^2 \sin \vartheta + 2l\dot{\psi}^2 \sin \varphi) \\ \Gamma_{011} &= \Gamma_{101} = 0 \\ \Gamma_{012} &= \Gamma_{102} = ml^2 \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{021} &= \Gamma_{201} = -ml^2 \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{022} &= \Gamma_{202} = 0 \\ \Gamma_{111} &= 0 \\ \Gamma_{121} &= \Gamma_{211} = 0 \\ \Gamma_{122} &= \Gamma_{221} = ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{221} &= -ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{222} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Potencialna energija, ki se nanaša na ravnino $z = 0$, je

$$U = -mgl \cos \varphi. \quad (4)$$

Z uporabo enačb (2) do (4) dobimo iz enačbe (5.76), po deljenju z ml , diferencialni enačbi gibanja:

$$\left. \begin{aligned} l\ddot{\phi} + \cos \varphi \left[r\ddot{\psi} \sin \vartheta - r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta - l \sin \varphi (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 \right] &= -g \sin \varphi \\ l \sin^2 \varphi (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) + r \sin \varphi (\ddot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\psi}^2 \sin \vartheta) \\ &+ 2l\dot{\phi} \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2. Uporaba Lagrangevih gibalne enačbe druge vrste

Krajevni vektor dan z enačbo (1) odvajamo po času:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} = & \mathbf{i} \left\{ -r\dot{\psi} \sin \varphi + l \left[\dot{\phi} \cos \varphi \cos (\psi + \vartheta) - (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \sin (\psi + \vartheta) \right] \right\} \\ & + \mathbf{j} \left\{ r\dot{\psi} \cos \varphi + l \left[\dot{\phi} \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta) + (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos (\psi + \vartheta) \right] \right\} \\ & - \mathbf{k} l \dot{\phi} \sin \varphi \end{aligned}$$

in tvorimo kinetično energijo

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[r^2 \dot{\psi}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2lr\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + 2lr\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 \sin^2 \varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

S pomočjo enačb (4) in (6) tvorimo Lagrangevo funkcijo

$$L = T - U$$

Iz Lagrangevih enačb gibanja druge vrste v skladu z enačbo (5.91) spet sledijo diferencialne enačbe gibanja (5), ker so

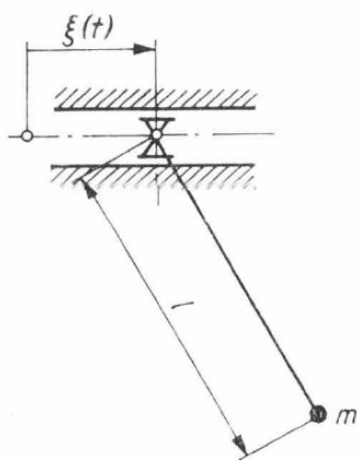
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml \left[l\ddot{\phi} + r\ddot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - r\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \varphi \sin \vartheta + r\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta \right] \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ml \left[-r\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \varphi \sin \vartheta + r\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \cos \varphi \cos \vartheta - l (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi \right] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= ml \left[l (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) \sin^2 \varphi + 2l\dot{\phi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos \varphi + r\ddot{\psi} \sin \varphi \cos \vartheta + r\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \varphi \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. - r\dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta \right] \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= ml \left[r\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \varphi \cos \vartheta - r\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \sin \vartheta \right] \end{aligned}$$

6.4 Ravninsko nitno nihalo s premikajočim obesiščem

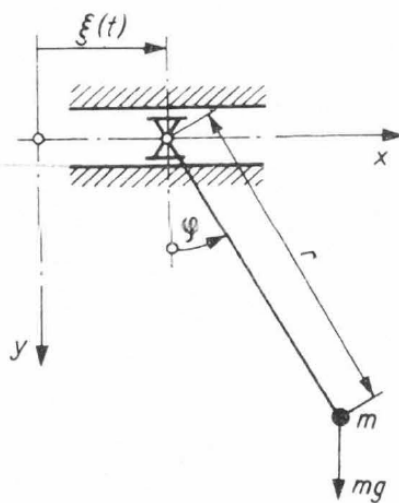
Obesišče nitnega nihala se premika vzdolž premice v skladu z danim zakonom gibanja $\xi = \xi(t)$ (slika 6/10). Poiščemo diferencialne enačbe gibanja nihala in silo v nit.

Nalogo rešimo:

1. s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja prve vrste,
2. s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja druge vrste,
3. z izrezom masne točke in uporabo d'Alembertovega aksioma.



Slika 6/10
Ravninsko nitno nihalo



Slika 6/11
Ravnina nihala z označenimi
posplošenimi koordinatami

1. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja prve vrste

Kot splošene koordinate se uvedemo v skladu s sliko 6/11

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = r.$$

Omejitev je

$$f_1(\varphi, r, t) = l - r = 0 \quad (1)$$

Poleg tega ponovno izberemo

$$q_0 = t.$$

Krajevni vektor masne točke, povezan z izhodiščem sistema x, y , lahko izrazimo s funkcijo

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} [\xi(t) + r \sin \varphi] + \mathbf{j} r \cos \varphi \quad (2)$$

Tako dobimo količine $g_{\mu\nu}$ v skladu z enačbami (5.67)

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= m\dot{\xi}^2 & g_{11} &= mr^2 \\ g_{01} &= g_{10} = mr\dot{\xi} \cos \varphi & g_{12} &= g_{21} = 0 \\ g_{02} &= g_{20} = mr\dot{\xi} \sin \varphi & g_{22} &= m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Od količin $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ podanih z enačbo (5.68) z $\sigma \neq 0$ so od nič različne naslednje:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{001} &= mr\ddot{\xi} \cos \varphi \\ \Gamma_{002} &= mr\ddot{\xi} \sin \varphi \\ \Gamma_{112} &= -mr \\ \Gamma_{121} &= \Gamma_{211} = mr \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Potencialna energija, ki se nanaša na ravnino $y = 0$, je

$$U = -mgr \cos \varphi \quad (5)$$

Po vstavitvi enačb (1), (3) do (5) v enačbo (5.76), dobimo

$$\left. \begin{aligned} mr^2\ddot{\varphi} + mr\ddot{\xi} \cos \varphi + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} &= mgr \sin \varphi \\ m\ddot{r} + m\ddot{\xi} \sin \varphi - mr\dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi - \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Temu dodamo omejitvev (1) oz

$$\dot{r} = 0 \quad (7)$$

Če vstavimo enačbe (1) in (7) v enačbe (6), potem sledi

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{\xi} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0 \quad (8)$$

kot diferencialna enačba gibanja in

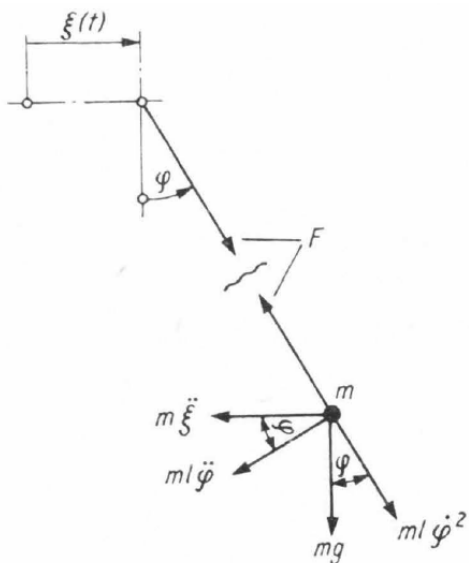
$$\lambda_1 = -m\ddot{\xi} \sin \varphi + ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \quad (8)$$

V skladu z enačbo (5.53) dobimo silo v vrvici kot posplošeno vezno silo v obliki

$$Q_2^{(z)} = \lambda_1 a_{12} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\lambda_1. \quad (10)$$

Ta vezna sila deluje na masno točko v smeri naraščajoče koordinate r . Sila navoja F , vnesena na sliki 6/12, je torej enaka

$$F = -Q_2^{(z)} = \lambda_1 \quad (11)$$



Slika 6/12

Razrez ravninskega nihala

2. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja druge vrste

Iz enačbe (2) ugotovimo, da je hitrost masne točke enaka

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{i}}(\dot{\xi} + \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) + \dot{\mathbf{j}}(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \quad (12)$$

Izraz za kinetično energijo je potem

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\xi}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\xi}(\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)] \quad (13)$$

Če upoštevamo potencialno energijo v skladu z enačbo (5), potem dobimo iz enačbe (5.87) zaradi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml [l\ddot{\varphi} + r\ddot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - r\dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta + r\dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} + \dot{\xi}\dot{\xi} \cos \varphi + r\ddot{\xi} \cos \varphi - r\dot{\xi}\dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\dot{\xi}\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\xi}\dot{\varphi} \sin \varphi - gr \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(r\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}\dot{\varphi} \cos \varphi + g \cos \varphi)$$

spet enačbo (6) ali, če upoštevamo enačbo (7) iz zvez (8) in (9).

3. Uporaba d'Alambertovega aksioma

Za določitev gibalne enačbe in sile v vrvi uporabimo zveze (3.18). Če jih uporabimo za točko z eno samo maso, so to

$$\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F}_a^* = \mathbf{0} \quad (14)$$

kjer je

$$\mathbf{F}_a^* = \mathbf{F}_a - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_a^{(e)} + \mathbf{F}_a^{(z)} - m\ddot{\mathbf{r}}.$$

V skladu z razlago v razdelku 3.3. uporaba teh enačb vodi do ravnotežnih pogojev masne točke z upoštevanjem vztrajnostnih sil. Slika 6/12 prikazuje vse sile, ki delujejo na masno točko:

- vodilna sila z velikostjo $m\ddot{\xi}$,
- sila orbitalnega pospeška, ki je posledica relativnega gibanja, z velikostjo $ml\ddot{\varphi}$ in centrifugalna sila z velikostjo $ml\dot{\varphi}^2$,
- masa z velikostjo mg (vtisnjena sila),
- sila pritiska z velikostjo F

Coriolisova sila je tu enaka nič. Vse vztrajnostne sile so narisane nasproti smerem pospeška, ki so opredeljene kot pozitivne. V skladu s prvim enačbo (14) tvorimo vsoto komponent sil v smeri vrvica in pravokotno nanjo:

$$\left. \begin{aligned} F + m\ddot{\xi} \sin \varphi - mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 &= 0 \\ m\ddot{\xi} \cos \varphi + ml\ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

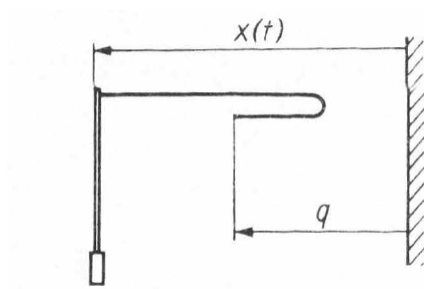
Vidimo lahko, da je enačba (15) ob upoštevanju enačbe (11) identična z enačbama (8) in (9).

6.5. Bič

Konec vrvica se giblje po ravni črti s konstantno hitrostjo $\dot{x} = v$ (slika 6/13). Vrvico obravnavamo obravnavati kot neprožno in gibko. Naj bo masa na enoto dolžine konstantna in jo označimo s μ . Poleg tega naj se vse točke vrvica gibljejo po isti premici, zanemarimo pa tudi zemeljsko težnost. V začetnem stanju mora vrvica dolžine l mirovati in zavzeti vodoravno lego:

$$\left. \begin{aligned} q(0) - x(0) &= l \\ \dot{q}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Iščemo hitrost q prostega konca vrvica.



Slika 6/13

Bič

1. Diferencialne enačbe gibanja

Oba dela vrvice z dolžino

$$\frac{1}{2}(l+x-q) \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}(l-x+q)$$

lahko obravnavamo kot toga telesa s spremenljivo maso, ki se gibljeta translatorno. Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2}\mu[(l+x-q)\dot{x}^2 + (l-x+q)\dot{q}^2]. \quad (2)$$

V skladu z enačbo (5.91) je zaradi

$$U = 0$$

in

$$\dot{x} = v = \text{const},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} [\mu(l-x+q)\dot{q}] = \mu[(l-x+q)\ddot{q} + (-\dot{x} + \dot{q})\dot{q}],$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}\mu(-\dot{x}^2 + \dot{q}^2),$$

rezultat diferencialne enačbe gibanja

$$(l-x+q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \dot{x}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = 0$$

oz.

$$(l-x+q)\ddot{q} + \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{x})^2 = 0. \quad (3)$$

2. Rešitev enačb gibanja

S pomočjo koordinatne transformacije

$$\left. \begin{aligned} y &= l - x + q \\ \dot{y} &= -\dot{x} + \dot{q} \\ \ddot{y} &= \ddot{q} \quad (\dot{x} = v = \text{const}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

enačbo (3) preoblikujemo v

$$y\ddot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = 0$$

oz.

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{y}}{y}. \quad (5)$$

To diferencialno enačbo lahko takoj enkrat integriramo:

$$\dot{y} = (cy)^{-\frac{1}{2}}.$$

Po ponovnem integriranju dobimo

$$y = A(t + B)^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

z novima konstantama A in B . Z enačbo (4) najdemo

$$q = x - l + A(t + B)^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

Če v enačbo (7) vstavimo začetne pogoje (1) dobimo dve enačbi za določitev konstant A in B :

$$\begin{aligned} -l + AB^{\frac{2}{3}} &= l \\ \dot{x} + \frac{2}{3}AB^{-\frac{1}{3}} &= 0 \end{aligned}$$

Njuna razrešitev da

$$A = \frac{1}{2} \sqrt[3]{36l\dot{x}^2}, \quad B = -\frac{4}{3} \frac{l}{\dot{x}}$$

Tako iz enačbe (7) dobimo

$$q = x + l \left[2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}\right)^2} - 1 \right] \quad (8)$$

Za hitrost $\dot{q}$ velja

$$\dot{q} = \dot{x} \left(1 - 1 / \sqrt[3]{1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}} \right) \quad (9)$$

Dolžina prostega dela vrvice je

$$z = \frac{1}{2}(l - x + q).$$

Če vstavimo enačbo (8) dobimo

$$z = l^3 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}\right)^2} \quad (10)$$

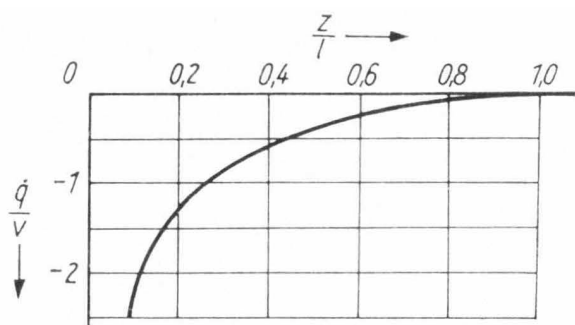
Z enačbama (9) in (10) lahko hitrost prostega konca vrvice predstavimo kot funkcijo njene dolžine:

$$\dot{q} = \dot{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z/l}}\right)$$

ali pri $\dot{x} = v$,

$$\frac{\dot{q}}{v} = 1 - \frac{1}{\sqrt{z/l}} \quad (11)$$

Kot je razvidno iz enačbe (11), hitrost prostega konca vrvice presega za $z \rightarrow 0$ vsako mejo. Dejansko ostaja hitrost končna, ker vrvica ne more biti popolnoma toga in gibka. Kljub temu lahko z ustreznim gibanjem presežemo hitrost zvoka zraka, pri čemer se pojavi dobro poznani pok biča (glej sliko 6/14).



Slika 6/14

Profil hitrosti prostega konca vrvice

6.6. Vibracijska igla

Vibracijska igla za zgoščevanje betona je prikazan v prerezu na sliki 6/15. V valjasti posodi A , se vrti igla B , ki jo poganja gibljiva gred. Predpostavljamo, da posoda izvaja enakomerno krožno gibanje s polmerom a okoli točke O , ki je fiksirana v prostoru. Na posodo deluje dušilna sila

$$a, \psi, \vartheta, r$$

Brez vpliva na splošnost za kot φ določimo

$$\varphi = \Omega t \quad (3)$$

Za dejansko gibanje velja omejitvev

$$\dot{r} \leq 0 \quad (4)$$

kot izraz za togost igle in ohišja. Neenačba (4) predstavlja enostransko vez. Kot je v navadi, najprej predpostavimo dvostransko vez, ki ustreza

$$\dot{r} = 0 \quad (5)$$

in preverimo veljavnost enakosti (5). Dodatna pogojna enačba izhaja iz pogoja kotaljenja brez podrsavanja igle po notranji steni posode. Ob upoštevanju enačbe (3) se ta glasi takole

$$r\vartheta - \rho\Omega t = \text{const.}$$

ali po odvajanju glede na čas

$$r\dot{\vartheta} - \rho\Omega = 0$$

Rešitev po $\dot{\vartheta}$ da

$$\dot{\vartheta} = \omega = \frac{\rho}{r} \Omega, \quad (6)$$

pri čemer je bila zaradi krajšega zapisa uvedena kotna hitrost ω . Pogoji

$$\dot{a} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0 \quad (7)$$

ki izhajajo iz predpostavljenega krožnega premika posode, po drugi strani niso vezi, saj jih ne povzročajo toge vezi, temveč metoda reševanja, ki jo bomo uporabili v enačbah gibanja, ki jih je treba še določiti, da bi problem poenostavili.

Kinetično energijo sistema je

$$T = \frac{1}{2} m_0 v_M^2 + \frac{1}{2} \mu v_s^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2$$

Pri tem je J masni vztrajnostni moment igle in njenega pogona, povezan z osjo vrtenja. Te vrednosti kasneje ne bomo uporabili. Izraženo s posplošenimi koordinatami je

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} \mu \left\{ \left[\dot{a} + \dot{r} \cos(\vartheta - \psi) - r \dot{\vartheta} \sin(\vartheta - \psi) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[a \dot{\psi} + \dot{r} \sin(\vartheta - \psi) + r \dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \psi) \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} J \Omega^2 \\
&= \frac{1}{2} m_0 (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} \mu \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + 2 \dot{a} \dot{r} \cos(\vartheta - \psi) - 2 \dot{a} r \dot{\vartheta} \sin(\vartheta - \psi) \right. \\
&\quad \left. + 2 a r \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) + 2 a r \dot{\psi} \cos(\vartheta - \psi) \right] + \frac{1}{2} J \Omega^2
\end{aligned} \tag{8}$$

Da bi določili posplošene sile, določimo navidezno delo. Delež dušilne sile pri virtualnem delu je ob upoštevanju enačbe (1)

$$\mathbf{F}_D \cdot \delta \mathbf{r}_M = -k (\dot{a} \delta a + a^2 \dot{\psi} \delta \psi)$$

(glej sliko 6/16). Ker pogoja (5) in (6) ne veljata za virtualne premike, vezne sile prav tako opravljajo virtualno delo. To je

$$-F_N \delta r + F_T r \delta \vartheta.$$

(glej sliko 6/17). Zato je

$$\delta W = -k (\dot{a} \delta a + a^2 \dot{\psi} \delta \psi) - F_N \delta r + F_T r \delta \vartheta.$$

Če označimo

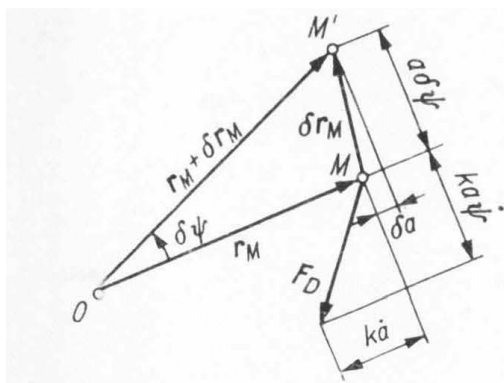
$$q_1 = a, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = r, \quad q_4 = \vartheta$$

so torej posplošene sile

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -k\dot{a}, & Q_2 &= -ka^2\dot{\psi} \\ Q_3 &= -F_N, & Q_4 &= F_T r \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

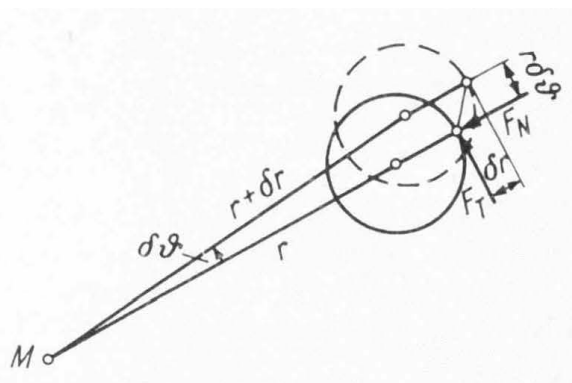
Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste, so enačbe (5.84). Pri zapisu naslednjih enačb smo uporabili enačbe (5) do (7):

$$\begin{aligned}
-\mu r \omega (\omega - \dot{\psi}) \cos(\vartheta - \psi) - m a \dot{\psi}^2 - \mu r \omega \dot{\psi} \cos(\vartheta - \psi) &= -k\dot{a} = 0 \\
-\mu q r \omega (\omega - \dot{\psi}) \sin(\vartheta - \psi) - \mu a r \omega \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) &= -ka^2 \dot{\psi} \\
-\mu a (\omega - \dot{\psi}) \cos(\vartheta - \psi) - \mu r \omega^2 - \mu a \omega \dot{\psi} \cos(\vartheta - \psi) &= -F_N \\
-\mu r \omega \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) + \mu a r \omega \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) &= F_T r
\end{aligned}$$



Slika 6/16

Določitev virtualnega dela dušilne sile



Slika 6/17

Določitev virtualnega dela vezne sile

2. Rešitev gibalnih enačb

Zgornje enačbe lahko poenostavimo. Uvedemo fazni kot $\alpha = \vartheta - \psi$:

$$-\mu r \omega^2 \cos \alpha - m a \dot{\psi}^2 = 0 \quad (10)$$

$$-\mu a r \omega^2 \sin \alpha + k a^2 \dot{\psi} = 0 \quad (11)$$

$$F_N = \mu r \omega^2 + \mu a \dot{\psi}^2 \cos \alpha \quad (12)$$

$$F_T = \mu a \dot{\psi}^2 \sin \alpha \quad (13)$$

Ker mora biti $\dot{\psi}$ v skladu s pristopom reševanja enačbe (7) konstanta, je v skladu z enačbami (10) in (11) tudi

$$\alpha = \vartheta - \psi$$

je konstanta . Zato je v povezavi z enačbo (6)

$$\dot{\psi} = \dot{\vartheta} = \omega = \frac{\rho}{r} \Omega \quad (14)$$

Vstavimo enačbo (14) v enačbe (10) do (13) in iz enačb (10) in (11) izračunamo a in α :

$$a = \frac{\mu}{m} r \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2 \omega^2}}} = -\frac{\mu}{m} r \cos \alpha \quad (15)$$

$$\alpha = \pi - \arctan \frac{k}{m \omega} \quad (16)$$

S tako dobljenimi enačbama (15) in (16) sledi iz enačb (12 in (13):

$$F_N = \mu \omega^2 r \left(1 - \frac{\mu}{m} \cos^2 \alpha \right) \quad (17)$$

$$F_T = \frac{\mu^2}{m} \omega^2 r \sin \alpha \cos \alpha \quad (19)$$

Kot je razvidno, je $F_N \geq 0$. Igla je torej v stiku z ohišjem in enačba (5) je izpolnjena. Sedaj lahko formuliramo tudi pogoj za nedrseče kotaljenje:

$$\left| \frac{F_T}{F_N} \right| = \left| \frac{\frac{\mu}{m} \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \frac{\mu}{m} \cos^2 \alpha} \right| \leq \nu \quad (19)$$

ali

$$f = \nu (2 - \zeta - \zeta \cos 2\alpha) - \zeta |\sin 2\alpha| \geq 0 \quad (21)$$

kjer je

$$\zeta = \frac{\mu}{m}$$

Če zahtevamo stabilno delovanje, tj. kotaljenje brez zdrsa za vse možne dušilne faktorje, mora biti enačba (20) izpolnjen tudi za $\alpha = \alpha_0$, pod pogojem da $f(\alpha_0)$ doseže minimum. Ker v skladu z enačbo (16) iščemo minimum le za $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_0 \leq \pi$, lahko namesto enačbe (20) izberemo

$$f = \nu (2 - \zeta - \zeta \cos 2\alpha) + \zeta \sin 2\alpha \geq 0 \quad (21)$$

$$\pi \leq 2\alpha \leq 2\pi$$

Uporabimo

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} = \zeta (\nu \sin 2\alpha_0 + \cos 2\alpha_0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_0} = 2\zeta (\nu \cos 2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0) > 0$$

Rešitev je

$$2\alpha_0 = 2\pi - \arctan \nu^{-1}$$

tj.

$$\sin 2\alpha_0 = -\frac{\nu^{-1}}{\sqrt{1+\nu^{-2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}$$

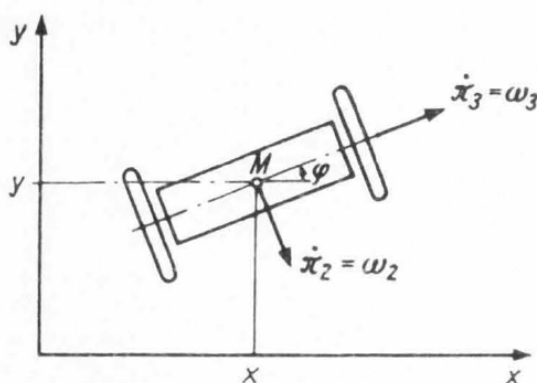
$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{-2}}} = \frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}$$

S temi vrednostmi iz enačbe (21) končno sledi iskani pogoj

$$\zeta \leq \frac{2\nu}{\nu + \sqrt{1+\nu^2}}. \quad (22)$$

6.7 Težka os na nagnjeni ravnini

Naj bo togo telo v ravnini (x, y) podprto z dvema kolesoma, ki nimata mase in sta pritrjena na popolnoma gladko os (brez trenja), glej sliko 6/18. Naj bo masa telesa m , njegov vztrajnostni moment, povezan z osjo skozi masno središče M pravokotno na ravnino x, y , naj bo J . Naj bo sinus kota nagiba osi y proti vodoravni ravnini α , pri čemer se ravnina z večanjem y zmanjšuje.



Slika 6/18

Težka os na nagnjeni ravnini

Diferencialne enačbe gibanja je treba določiti s pomočjo

1. Lagrangeve enačbe gibanja v osnovnih koordinatah z uporabo Lagrangevih parametrov (razdelek 5.4.2),
2. Lagrangeve gibalne enačbe s kvazikoordinatami (razdelek 5.4.5.),
3. Lagrangeve gibalne enačbe z osnovnimi koordinatami brez uporabe Lagrangevih parametrov (oddelek 5.4.6.),
4. Appellove gibalne enačbe (razdelek 5.4.7.).

Gibalne enačbe je treba rešiti za začetne pogoje

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \Omega \\ x(0) &= \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja v naravnih koordinatah z uporabo Lagrangevih parametrov

Omejitev gibanje osi zaradi koles izrazimo z naslednjim pogojem:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \varphi -$$

To vez lahko izrazimo v obliki

$$\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Začetni pogoji (1) izpolnjujejo to vez. Med virtualnimi pomiki torej obstaja zveza

$$\cos \varphi \delta x + \sin \varphi \delta y = 0. \quad (3)$$

Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (4)$$

potencialna energija pa

$$U = -mg\alpha y \quad (5)$$

Za

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = x, \quad q_3 = y$$

so torej Lagrangeve gibalne enačbe v skladu z enačbo (5.87), če uporabimo $L = T - U$:

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= 0 \\ m\ddot{x} &= \lambda \cos \varphi \\ m\ddot{y} &= mg\alpha + \lambda \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Iz prve enačbe (6) in začetnih pogojev takoj sledi

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \varphi = \Omega t \quad (7)$$

Ta rezultat vstavimo v drugo in tretjo enačbo (6):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \cos \Omega t \\ m\ddot{y} &= mg\alpha + \lambda \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ker je lahko parameter λ funkcija časa, ga moramo pred integracijo enačbe (8) odpraviti. To storimo tako, da prvo enačbo (8) pomnožimo $-\sin \Omega t$, drugo s $\cos \Omega t$ in ju seštejemo:

$$m(-\ddot{x} \sin \Omega t + \ddot{y} \cos \Omega t) = mg\alpha \cos \Omega t \quad (9)$$

Če upoštevamo enačbo (2) lahko izraz v oklepaju na levi strani enačbe (9) izrazimo kot

$$\frac{d}{dt}(-\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t)$$

To lahko takoj dokažemo z izračunom. Iz enačbe (9) torej sledi

$$-\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \quad (10)$$

Integracijska konstanta je bila izbrana tako, da je izpolnjen enačba (1). Iz enačb. (2) in (10) lahko izračunamo x in y in tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{g\alpha}{\Omega} \sin^2 \Omega t \\ \dot{y} &= \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Če upoštevamo začetne pogoje (1), so rešitve enačbe

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \frac{g\alpha}{\Omega^2} (-2\Omega t + \sin 2\Omega t) \\ y &= \frac{1}{4} \frac{g\alpha}{\Omega^2} (1 - \cos 2\Omega t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

To sta iskani funkciji $x(t)$ in $y(t)$. Zanimivo pri rešitvah (12) je, da kljub naklonu osi y koordinata y masnega središča ostaja omejena (razen za $\Omega = 0$), medtem ko $x(t)$ neomejeno raste.

Za poseben primer $\Omega = 0$ veljajo gibalne enačbe iz enačbe (12) z dvakratno uporabo L'Hospitalovega pravila. Iz teh enačb dobimo znane formule

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2} g\alpha t^2 \quad (13)$$

Ker je v skladu s tem, kar je bilo povedano v 5.3, enačba (3) $\lambda \cos \varphi$ komponenta vezne sile v smeri x in $\lambda \sin \varphi$ komponenta vezne sile v smeri y , predstavlja

$$\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi} = \lambda$$

velikost vezne sile. To lahko izračunamo iz prvega enačbe (8) z uporabo enačbe (12) dobimo

$$\lambda = \frac{m\ddot{x}}{\cos \Omega t} = -mg\alpha \frac{\sin 2\Omega t}{\cos \Omega t} = -mg\alpha \sin 2\Omega t.$$

2. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja s kvazi-koordinatami

Kot kvazi-hitrosti izberemo

$$\left. \begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \dot{\varphi} \\ \dot{\pi}_2 &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \\ \dot{\pi}_3 &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Količina $\dot{\pi}_3$ izberemo tako, da

$$\dot{\pi}_3 = 0$$

izpolnjuje pogoj (2). Inverzna vrednost enačb (14), izražena v matričnem zapisu, je

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dot{\pi}_2 \\ \dot{\pi}_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Elementi matrike koeficientov v enačbi (15) so količine b_{jk} , ki ustrezajo enačbi (5.126).

Kot je razvidno s primerjavo enačbe (14) z enačbami za transformacijo med zasukanima koordinatnima sistemoma sta $\dot{\pi}_2 = \omega_2$ in $\dot{\pi}_3 = \omega_3$ komponenti hitrosti masnega središča, povezani s koordinatnim sistemom, ki je vezan na telo (slika 6/18). Kinetična energija, izražena s kvazi-hitrostmi, je torej

$$T^* = \frac{1}{2} m (\dot{\pi}_2^2 + \dot{\pi}_3^2) + \frac{1}{2} J \dot{\pi}_1^2 \quad (16)$$

Količine $\Pi_j^{(e)}$ izhajajo iz enačbe (5.146) in enačbe (15) in so enake

$$\Pi_j^{(e)} = Q_i^{(e)} b_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} b_{ij}.$$

Izpisano je to:

$$Q_1^{(e)} = Q_2^{(e)} = 0, \quad Q_3^{(e)} = mg$$

$$\Pi_1^{(e)} = 0, \quad \Pi_2^{(e)} = mg\alpha \cos \varphi, \quad \Pi_3^{(e)} = mg\alpha \sin \varphi \quad (17)$$

Količino γ_{jst} v enačbi (5.150) določimo s pomočjo enačbe (14) in (15) iz enačbe (5.156):

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta)\pi_1 &= 0 \\ (\delta d - d\delta)\pi_2 &= \delta(-dx \sin \varphi + dy \cos \varphi) - d(-\delta x \sin \varphi + \delta y \cos \varphi) \\ &= \cos \varphi(dx \delta\varphi - d\varphi \delta x) - \sin \varphi(dy \delta\varphi - d\varphi \delta y) \\ &= -d\pi_3 \delta\pi_1 + d\pi_1 \delta\pi_3 \\ (\delta d - d\delta)\pi_3 &= \delta(dx \cos \varphi + dy \sin \varphi) - d(\delta x \cos \varphi + \delta y \sin \varphi) \\ &= -\sin \varphi(dx \delta\varphi - d\varphi \delta x) + \cos \varphi(dy \delta\varphi - d\varphi \delta y) \\ &= d\pi_2 \delta\pi_1 - d\pi_1 \delta\pi_2 \end{aligned}$$

Pri tem je bilo ponovno predpostavka

$$(\delta d - d\delta)q_i = 0.$$

To pomeni, da je

$$\gamma_{123} = -\gamma_{321} = -\gamma_{132} = \gamma_{231} = 1 \quad (18)$$

Vsi ostali γ_{jst} pa so enaki nič.

Z rezultati enačb (16) do (18) lahko oblikujemo gibalne enačbe v skladu z enačbo (5.150):

$$\begin{aligned} J\ddot{\pi}_1 + m(\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 - \dot{\pi}_3\dot{\pi}_2) &= 0 \\ m\ddot{\pi}_2 + m\dot{\pi}_3\dot{\pi}_1 &= mg\alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

Če v skladu z enačbo (2) in enačbo (14) upoštevamo tudi $\dot{\pi}_3 = 0$, dobimo naslednji zvezi

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\pi}_1 &= 0 \\ \ddot{\pi}_2 &= mg\alpha \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Prva enačba (19) ima rešitev

$$\pi_1 = \varphi = \Omega t,$$

pri kateri so začetni pogoji že upoštevani. Tako je druga enačba (19)

$$\ddot{\pi}_2 = mg\alpha \cos \Omega t,$$

njen integral pa ima vrednost

$$\ddot{\pi}_2 = -\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \quad (20)$$

Integracijska konstanta je bila ponovno izbrana tako, da je izpolnjen enačba (1). Enačba (20) daje enak rezultat kot enačba (10), tako da lahko nadaljnji izračun poteka kot za enačbo (11). Opozoriti je treba tudi, da

$$\int_0^t |\dot{\pi}_2| dt = \int_0^t \left| \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right| dt \quad (20)$$

predstavlja razdaljo, ki jo prepotuje masno središče M vzdolž svoje tirnice.

3. *Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja v osnovnih koordinatah brez uporabe Lagrangevih parametrov.*

Ponovno vzamemo $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$, $q_3 = y$ in rešimo enačbo (2) po $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \dot{x} \cot \varphi. \quad (21)$$

Iz kinetične energije T v skladu z enačbo (4) dobimo T^* tako, da izločimo $\dot{y}$

$$T^* = \frac{1}{2} m (1 + \cot^2 \varphi) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2. \quad (22)$$

Neničelni elementi matrike (a_{ij}) , ki jih določata enačbi (5.160) in (5.164), so v skladu z enačbo (21)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{32} = \cot \varphi \quad (23)$$

Neničelni elementi k (a_{ij}) inverzni matrike (b_{ij}) so

$$b_{11} = 1, \quad b_{22} = 1, \quad b_{32} = -\cot \varphi. \quad (24)$$

Iz enačbe (23) je razvidno, da sta od količin

$$\left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right)$$

iz enačbe (5.166) lahko le dve različni od nič, in sicer tisti s kombinacijama indeksov

$$s = 3, \quad i = 1, \quad k = 2$$

in

$$s = 3, \quad i = 2, \quad k = 1$$

z vrednostma

$$\frac{\partial \cot \varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

in

$$-\frac{\partial \cot \varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

Iz tega za količine

$$\gamma_{jkl} = b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right); \quad j, l = 1, 2$$

sledita vrednosti

$$\gamma_{132} = -\gamma_{231} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \quad (25)$$

medtem ko imajo za vse druge kombinacije indeksov γ_{jkl} vrednost nič.

Z rezultati enačb (4), (22) in (25) lahko zdaj, če so

$$Q_1^{(e)} = Q_2^{(e)} = 0, \quad Q_3^{(e)} = mg,$$

določimo gibalne enačbe, ki ustrezajo enačbi (5.166):

$$J\ddot{\varphi} - (-2) \frac{1}{2} \frac{m\dot{x}^2}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi + \frac{m\dot{y}\dot{x}}{\sin^2 \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\sin^2 \varphi} + m\dot{y} \left(-\frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \cdot \dot{\varphi} = -mg \alpha \cot \varphi \quad (26)$$

V obeh enačbah (26) nadomestimo $\dot{y}$ z $-\dot{x} \cot \varphi$ v skladu z enačbo (21) in tako dobimo

$$J\ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{\ddot{x}}{\sin^2 \varphi} - 2 \frac{m\dot{x}}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \frac{m\dot{x}}{\sin^2 \varphi} \cot \varphi \cdot \dot{\varphi} = -mg \alpha \cos \varphi$$

Prva od teh enačb ima ponovno rešitev

$$\varphi = \Omega t$$

To vstavimo v drugo enačbo in jo pomnožimo z $\frac{1}{m} \sin \Omega t$:

$$\frac{\ddot{x}}{\sin \Omega t} - \frac{\dot{x}}{\sin^2 \Omega t} \cos \Omega t \cdot \Omega = -g\alpha \cos \Omega t. \quad (27)$$

Levo stran te enačbe lahko zapišemo tudi v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sin \Omega t}$$

To omogoča ločitev spremenljivk:

$$d\left(\frac{\dot{x}}{\sin \Omega t}\right) = -g\alpha \cos \Omega t dt$$

Rezultat integracije je

$$\frac{\dot{x}}{\sin \Omega t} = -\frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t + C_1 \quad (29)$$

$$\dot{x} = -\frac{g\alpha}{\Omega} \sin^2 \Omega t + C_1 \sin \Omega t \quad (28)$$

Za določitev integracijske konstante C_1 začetni pogoj za $\dot{x}$ ne zadostuje saj desna stran enačbe (28) tako ali tako odpade za $t = 0$. Zato vzamemo (21) in določimo

$$\dot{y} = -\dot{x} \cot \Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \cos \Omega t - C_1 \cos \Omega t \quad (29)$$

Ker je $\dot{y}(0) = 0$ lahko zdaj določimo integracijsko konstanto C_1 kot

$$C_1 = 0.$$

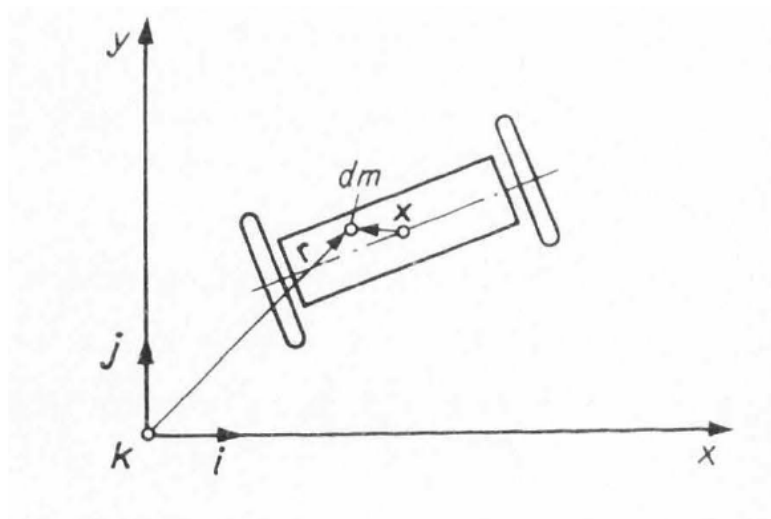
Tako sta enačbi (28) in (29) enaki enačbam (11).

4. Rešitev s pomočjo Appelovih enačb gibanja

Naj bo $\mathbf{x}$ krajevni vektor v opazovalnem sistemu, vezanim na telo, z izhodiščem v M (glej sliko 6/19). Potem za krajevni vektor $\mathbf{r}$ prostorsko fiksiranega koordinatnega sistema velja

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} + \dot{\phi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}$$



Slika 6/19

Lega masnega elementa dm v prostorsko fiksiranem sistemu x, y

Če s pomočjo enačbe (21) nadomestimo $\dot{y}$, sledi

$$\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{i} - \cot \varphi \mathbf{j}) \dot{x} + \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{x}$$

(Glede odvajanja vektorja $\mathbf{x}$ v gibljivem sistemu glej 2.2.1.). Po ponovnem odvajanju dobimo

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= (\mathbf{i} - \cot \varphi \mathbf{j}) \ddot{x} + \mathbf{j} \frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} + \mathbf{k} \ddot{\varphi} \times \mathbf{x} + \mathbf{k} \dot{\varphi} \times (\mathbf{k} \dot{\varphi} \times \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{i} \ddot{x} + \mathbf{j} \left(\frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} - \ddot{x} \cot \varphi \right) + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{x} - \dot{\varphi}^2 [\mathbf{x} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \end{aligned}$$

Izraz v oglatih oklepajih na desni strani te enačbe je projekcija vektorja $\mathbf{x}$ na ravnino x, y in ga označimo z $\mathbf{y}$. Velja.

$$\mathbf{k} \times \mathbf{x} = \mathbf{k} \times [\mathbf{y} + \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \mathbf{k} \times \mathbf{y}.$$

Za kvadrat pospeška dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^2 &= \dot{x}^2 + \left(\frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} - \ddot{x} \cot \varphi \right)^2 + \ddot{\varphi}^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) + 2 \ddot{x} \dot{\varphi} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) \\ &\quad - 2 \ddot{x} \dot{\varphi}^2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{y} + 2 \left(\frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} - \ddot{x} \cot \varphi \right) \dot{\varphi} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \\ &\quad + 2 \ddot{x} \dot{\varphi}^2 \cot \varphi \mathbf{j} \cdot \mathbf{y} - 2 \ddot{\varphi} \dot{\varphi}^2 \mathbf{y} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \\ &\quad + \text{Cleni brez komponent pospeška} \end{aligned} \tag{30}$$

Člene v enačbi (30) še nekoliko preoblikujemo:

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) = [(\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{k}] \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{y} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})] \cdot \mathbf{y} = y^2$$

Poleg tega je izraz $\mathbf{y} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{y}$, ki ga vsebuje enačba (30), enak nič, ker je $\mathbf{k} \times \mathbf{y}$ pravokoten na $\mathbf{y}$.

Pri oblikovanju Appelove funkcije v skladu z enačbo (5.177) upoštevamo, da

$$\int_{(S)} dm \mathbf{y}$$

zaradi simetrije odpade,

$$J = \int_{(S)} dm \mathbf{y}^2$$

pa predstavlja masni inercialni moment, povezan z osjo, pravokotno na ravnini x, y skozi M .

Tako iz enačbe (30) končno izhaja

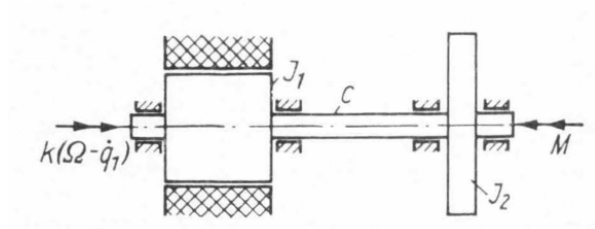
$$S = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \left(\ddot{x} \cot \varphi - \frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J \ddot{\varphi}^2 \quad (31)$$

+ Cleni brez komponent pospeška

Količine $\Pi_j^{(e)}$ so v skladu z enačbo (5.176) enake količinam $Q_j^{(e)} b_{ij}$ iz enačbe (26), ker je bila odpravljena ista komponenta hitrosti.

6.8 Pogonski sistem z nenadnim nastopom stalne obremenitve

Elektromotor poganja delovni stroj prek elastične gredi, glej sliko 6/20. Masna vztrajnostna momenta sta J_1 za rotor motorja in J_2 za delovni stroj, q_1 in q_2 sta ustrezni kotni koordinati, Ω je kotna hitrost motorja v stanju brez obremenitve in $k(\Omega - \dot{q}_1)$ pa je moment, ki se prenaša z magnetnega polja na rotor. Zaradi enostavnosti smo predpostavili, da je k konstanten. Moment obremenitve pogonskega stroja je do časa $t=0$ enak nič, nato pa mora nenadoma dobiti velikost M in delovati v nasprotni smeri od smeri vrtenja. Torzijska togost elastične gredi je c .



Slika 6/20

Pogonski sistem

Določimo začetne vrednosti

$$q_1(0) = q_2(0) = 0; \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \Omega \quad (1)$$

in izračunajmo elastično torzijo gredi $q_1(t) - q_2(t)$ za $t > 0$. V ta namen je treba določiti Lagrangeve gibalne enačbe druge vrste. Njihovo rešitev je treba določiti

- natančno s pomočjo nastavka rešitve,
- približno z metodo zaporednih približkov in
- numerično z metodo Runge-Kutta.

1. Določitev enačb gibanja

Za izpeljavo enačb gibanja potrebujemo poleg kinetične energije

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2$$

še posplošene sile. Te dobimo s pomočjo navideznega dela vtisnjenih sil, ki je sestavljeno iz navideznega dela pogonskega momenta

$$k(\Omega - \dot{q}_1) \delta q_1,$$

navideznega dela momenta

$$-c(q_1 - q_2)(\delta q_1 - \delta q_2),$$

ki izhaja iz elastičnega zasuka gredi, in navideznega dela obremenilnega momenta

$$-M \delta q_2.$$

Posplošene sile so faktorji navideznih premikov v $\delta W^{(e)}$ (glej tudi 5.3.). Tako je

$$\left. \begin{aligned} Q_1^{(e)} &= -k\dot{q}_1 - c(q_1 - q_2) + k\Omega \\ Q_2^{(e)} &= -c(q_2 - q_1) - M \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ko enačbi (1) in (2) vstavimo v enačbo (5.84), dobimo gibalne enačbe

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + k\dot{q}_1 + c(q_1 - q_2) &= k\Omega \\ J_2 \ddot{q}_2 + c(q_2 - q_1) &= -M \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. Natančna rešitev sistema diferencialnih enačb

Za homogeni sistem diferencialnih enačb, ki pripada enačbi (4), dobimo z nastavkom

$$q_i = A_i e^{\lambda t}$$

(glej tudi 5.7.1.) karakteristično enačbo:

$$\begin{vmatrix} J_1\lambda^2 + k\lambda + c & -c \\ -c & J_2\lambda^2 + c \end{vmatrix} \\
 = \lambda \left[J_1 J_2 \lambda^3 + k J_2 \lambda^2 + c (J_1 + J_2) \lambda + kc \right] = 0
 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Z uvedbo naslednjih oznak:

$$\tau = \frac{J_1}{k}, \quad \omega_0^2 = c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}, \quad \beta = \frac{J_1}{J_1 + J_2}.$$

lahko sistem enačb (4) zapišemo v obliki

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \tau^{-1} \dot{q}_1 + \omega_0^2 (1 - \beta)(q_1 - q_2) &= \tau^{-1} \Omega \\ \ddot{q}_2 + \omega_0^2 \beta (q_2 - q_1) &= -c^{-1} \omega_0^2 \beta M \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

karacteristično enačbo pa lahko predstavimo na naslednji način:

$$\lambda (\lambda^3 + \tau^{-1} \lambda^2 + \omega_0^2 \lambda + \beta \tau^{-1} \omega_0^2) = 0 \quad (8),$$

Od korenov karakteristične enačbe (8) je eden enak nič:

$$\lambda_1 = 0$$

Od preostalih korenov je eden negativen in realen, druga dva pa sta kompleksna.

Literatura

- [2] Autorenkollektiv: Die Wissenschaft von der Wissenschaft. Berlin: Dietz Verlag 1968
- [3] KREYSZIG, E.: Differentialgeometrie. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG 1957.
- [4] HAMEL, G.: Theoretische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1949.
- [5] SMIRNOW, W. J.: Lehrgang der höheren Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.
- [6] BUDÓ, A.: Theoretische Mechanik. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
- [7] FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.