MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#4

PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA **4**

PRESEK

→ MATEMATIKA AFRIŠKEGA PLEMENA IŠANGO

→ BIKONVEKSNA LEČA: RAZPRŠILNA ALI ZBIRALNA?

→ LEGO KEPLER – ODKRIVANJE PLANETOV

→ RAČUNALNIK IZ DOMIN

ISSN 0351-6652

Diagnosticiranje avtizma

Avtizem prizadene več kot odstotek otrok v Združenih državah Amerike. Žal mnoge družine nimajo dostopa do ustreznega zdravnika ali pa morajo na obisk specialista čakati več mesecev, čeprav je vsak zamujeni mesec bistvenega pomena za otrokov nevrološki razvoj. Skupina znanstvenikov je razvila aplikacijo, ki omogoča staršem, da sledijo otrokovim odzivom na vidne dražljaje (na primer na mehurčke s slike na strani 7), jih beleži in analizira ter priporoči obisk zdravnika, če se to zdi potrebno. Pomemben del vizualnega dela aplikacije sestavljata računalniški vid in strojno učenje, ki temeljita na uporabi linearne algebre in verjetnostnega računa. Četudi aplikacijo sestavljajo zapleteni algoritmi, je enostavna za uporabo, njeni zaključki pa so primerljivi z diagnozami strokovnjakov. Aplikacijo še vedno preizkušajo, v prihodnosti pa bo omogočila zaskrbljenim staršem bistveno izboljšan dostop do diagnoze.

Namen aplikacije ni nadomestiti zdravnika, bo pa zelo pomagala ljudem, ki nimajo dostopa do strokovnjakov, na primer tistim, ki živijo v manj razvitih državah. V Afriki je recimo petdeset specialistov za petsto milijonov prebivalcev. Razvijalci aplikacije so njeno uporabnost preverili tako, da so dva telefona poslali medicinski sestri v Afriki in ji naročili, naj aplikacijo preizkusi pri svojih obiskih v vaseh. Brez dodatnega izobraževanja ji je uspelo aplikacijo uporabiti pri petdesetih otrocih, ki sicer nikoli ne bi prišli do specialista. Začetna uspešnost aplikacije obljublja veliko, znanstveniki pa upajo, da bodo njene zmožnosti prilagodili, tako da bo z njo možno ugotavljati tudi druge nevrološke motnje, na primer posttravmatsko stresno motnjo.

Kogar tema bolj zanima, si lahko prebere članek *Automatic emotion and attention analysis of young children at home: a ResearchKit autism feasibility study*, ki ga je H. L. Egger objavila junija 2018 v reviji Digital Medicine.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 4

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Slika na naslovnici kaže lep in izrazit halo, ki je bil fotografiran na Krvavcu. Več o pojavu v tokratni Naravoslovni fotografiji. Foto: Elza Rebol

Matematika afriškega plemena Išango

Vilko Domajnko

Pred približno 20.000 leti, arheološko rečeno v obdobju mlajšega paleolitika, je ležala visoko v gorah v centralni ekvatorialni Afriki ob obali Edwardsovega jezera, kjer izvira Nil, ribiška vasica plemena Išango.

Danes je to na meji med Zairom in Ugando. S pomočjo arheoloških izkopanin, ki so jih odkrili v preteklih desetletjih na tem območju, lahko sklepamo, da so bili Išangi tudi kanibali, kar ni bilo takrat prav nič nenavadnega. Njihova kultura je prišla v razvoju toliko daleč, da so si pri delu že pomagali z različnimi orodji, ki so jih izdelali bodisi iz kamna, lesa ali kosti, o čemer pričajo arheološke izkopanine. Ukvarjali so se z ribištvom, lovom in poljedelstvom. To so bili naši intelektualni predniki, ljudje, ki so napravili prve obotavljajoče se korake v smeri logičnega razmišljanja. Kultura na tem območju je izumrla zaradi izbruha bližnjega vulkana.

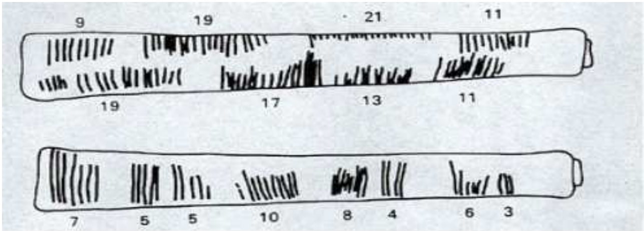
Večji del arheoloških izkopavanj na tem območju je opravil belgijski arheolog **Jean de Heinzelin** v letih 1960 in 1961. Pri tem gre večinoma za množico kosti in zob človeškega izvora.

Delovno orodje tedanjih ljudi je bilo, kot že rečeno, še precej primitivno, a vendar drugačno od orodja, ki so ga arheologi našli iz tega obdobja na drugih krajih Afrike. Posebno pozornost je že takoj pritegnilo orodje, podolgovata kost, ki je imela na enem koncu pritrjen kristal kremena (tudi kamena strela ali kvarc). Domnevali so, da je to orodje služilo za vrisovanje kakšnih znakov ali zapisov bodisi v les ali kamen, morda tudi za tetoviranje kože. Morda celo za pisanje.

SLIKA 1.

Še zanimivejše pa so oznake na kosti. Na njej so namreč kratke črtaste zareze, ki tečejo vzdolž kosti v treh vzporednih vrstah. Strokovnjaki so kaj kmalu postavili domnevo, da te črtice pomenijo vsekakor kaj več kot zgolj okrasje.

Ker je območje, kjer je de Heinzelin našel kosti Išangov, takrat pripadalo Belgijskemu Kongu, je kost Išangov danes v Naravoslovnem muzeju v Bruslju. In obiskovalcem je na ogled seveda le na posebno prošnjo.



SLIKA 2.

Na zgornji risbi so prikazane vse tri vrste (oz. stolpci) črtic na omenjeni kosti. Na desnem koncu je konica s kremenom.

Bralcu za orientacijo morebiti ne bo odveč približno nakazati, kaj pravzaprav pomeni v zgodovinskem oziru teh 20.000 let nazaj v preteklost. Vemo, da iz obdobja pred približno 45.000 leti izvira medvedova kost iz današnje jame Divje babe pri Idriji, ki je obveljala kot najstarejše znano glasbilo, ki ga je izdelal človek. V približno istem času se je v Evropi iz neandertalca (homo sapiens neanderthalensis) razvil moderni misleči človek (homo sapiens sapiens). V obdobje okoli 30.000 let nazaj datira naselitvena skupnost na območju Potočke zijalke. Iz obdobja okoli 25.000 let nazaj pa izvira znameniti kipec Willendorfske Venere, ki so ga našli v Avstriji ob obali Donave.

Kaj pomenijo oznake na kosti Išangov?

Črtice na kosti plemena Išango so nanizane vzdolž kosti v treh vrstah. Tudi v posameznih vrsticah so črtice razvrščene po skupinah, ki so med seboj nekoliko razmaknjene. Če preštejemo črtice v posameznih skupinah, zlahka pridemo do števil. V prvi vrstici dobimo tako zapovrstjo števila

- $11, 21, 19, 9$

v drugi vrstici

- $3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7$

in v tretji vrstici

- $11, 13, 17, 19.$

Odkritelj de Heinzelin je sprva menil, da so ta števila zapisana po povsem naključnem izboru. Pa to zagotovo ne bo držalo. Prav nasprotno. Zdi se, da ta tri številska zaporedja ponujajo močno sugestivne iztočnice. Seveda je težko, če ne kar nemogoče reči, kaj so Išangi v resnici označevali na tej kosti. Ugibajmo, torej.

Poglejmo najprej nekoliko pozorneje na števila oz. črtice v prvi vrstici. Zlahka se domislimo morebitnega pravila, po katerem bi lahko bila sestavljena:

- $10 + 1, \quad 20 + 1, \quad 20 - 1, \quad 10 - 1$

Ali od tod že lahko sklepamo, da so Išangi številu 10 pripisovali kak poseben pomen? Morebiti podobnega kot današnja civilizacija, ki ima to število za osnovo, s katero zapisuje sploh vsa števila? Ali pa so zgornja štiri števila zgolj slučajno povezana na tak način s številom 10?

Premislimo še o pomenu števil v drugi vrstici. Števili 3 in 6 ležita na kosti zelo blizu skupaj. Za njima je večji prostor, nato pa sta spet precej skupaj zarisani števili 4 in 8. Med njima in številom 10 je spet večji prazen prostor, prostor je tudi med 10 in številoma 5 in 5, ki sta prav tako zapisani precej blizu drug drugemu. Na koncu vrstice je spet precej odmaknjeno od drugih zapisano število 7, ki v tem nizu, kot se zdi, ostaja brez oprijemljive logične razlage.

- 3 6 4 8 10 5 5 7

Vsekakor se je težko otresti misli, da je ta niz števil na neki način povezan s podvajanjem. Pri tem je treba vsaj opozoriti, kako pomembna bi utegnila biti ta računska operacija. Denimo – algoritem za množenje števil v sicer mnogo poznejši kulturi starih Egipčanov je temeljil prav na podvajanju števil.

Tretja vrstica ponuja na videz še najprepričljivejšo razlago. Števila v njej, 11, 13, 17 in 19, so seveda praštevila. Pravzaprav edina štiri praštevila med 10 in 20. A precej znanstvenikov opozarja, da so v tej vrstici zapisana vendarle samo štiri števila in da je to, da so praštevila, morebiti zgolj naključje. Pojem praštevila v resnici presega nivo preproste računske matematike, je abstrakten in zahteva uporabo miselno zahtevnejših konceptov. Ne nazadnje tudi ni znano, da bi se pojem praštevila v zgodovini pojavil pred obdobjem starih Grkov v 7. stol. pr. n. št.

Toda domišljijo buri, da sta zadnji dve števili v drugi vrstici (5 in 7) prav tako praštevili. Ali se tretja vrstica torej začne morebiti že v drugi vrstici? Na ta način namreč dobimo že šest zaporednih praštevil.

In ne nazadnje – mar bi se števil v tretji vrstici ne dalo interpretirati podobno, kot števila v prvi vrstici:

- $12 - 1, \quad 12 + 1, \quad 18 - 1, \quad 18 + 1$

pri čemer je $12 = 2 \cdot 6$ in $18 = 3 \cdot 6$. Takšna razlaga vodi seveda do izpostavljene vloge števila 6.

Koledar?

Ponuja se še ena razlaga števil, zapisanih na kosti Išangov. Marsikomu se zdi celo oprijemljivejša od prejšnjih.

Pleme Išango so kot lovci in nabiralci plodov zagotovo živeli v tesni povezavi z naravo in s spremembami njenih letnih časov oziroma z letnim vegetacijskim ciklom. Za njihovo okolje so bile značilne celo močnejše klimatske spremembe skozi letne čase, zaradi česar je bilo to pleme najbrž polnomadsko in so se selili z nižjih na višje ležeče geografske predele in nazaj. Tudi uspeh v poljedelstvu je bil močno odvisen od časovnih predvidevanj oziroma orientacije v letu. Povsem mogoče je, da so bili s točno določenimi časovnimi obdobji povezani tudi rituali in kultni obredi.

Za lažje spremljanje vseh teh ciklično ponavljajočih se dogodkov je primitivni človek začel meriti čas. Izdelal si je prvi preprost koledar. Z njimi je lahko določil trenutni čas v časovnem oz. letnem ciklu, lahko pa je tudi predvidel oz. izračunal, koliko časa še manjka do kakšnega izbranega oz. časovno zakodiranega dogodka v tem ciklu.

Kako se lotiti sestave koledarja? Samo ugibamo lahko, v kolikšni meri so si ljudstva v tej dobi pri sestavi koledarja pomagala tudi z opazovanjem sprememb na nebu. A tako rekoč kar samo po sebi se ponuja opazovanje treh časovnih ciklov:

- menjavanje dneva in noči,
- spreminjanje Luninih men in
- menjavanje letnih časov.

Opazovanje četrtega časovnega cikla, Sončevega, je najtežje, čeprav prav to v resnici določa malo da ne vse današnje koledarje. Če se pri sestavljanju koledarja opremo na preprostejše opazovanje Lune in štetje njenih men, je cikel oz. mesec čas med dvema zaporednima mlajema.

Ali bi lahko bila tudi kost Išangov preprost koledar? Takšne domneve namreč vzbuja malo da ne osupljivo dejstvo, da so v kar dveh vrsticah vsote števil enake 60:

- $11 + 13 + 17 + 19 = 60$

in

- $11 + 21 + 19 + 9 = 60$

In 60 je število, ki je v tesni povezavi s spremembami na nebu. Je denimo dvakratnik mesečevega tedna oz. ciklusa. Ta traja sicer natančneje 29,53 dneva, a takšne natančnosti od Išangov v času nastanka zapisov na kosti gotovo ne gre pričakovati. Spremljanje letnih časov s pomočjo štetja luninih men je bilo v starih časih običajno pri marsikaterih ljudstvih. In najbrž bolj ali manj prav od tod izvira tudi številski sistem z osnovo 60, ki so ga pri računanju uporabljali Babilonci.

Ali lahko poleg zgornjih dveh vsot z rezultatom 60 navedemo še kaj v prid domneve, da kost Išangov predstavlja preprost koledar? Za zdaj med zagovorniki te hipoteze ni niti prepričljive razlage, kako bi naj tak koledar sploh uporabljali. In razen tega dodatno zadrego povzroča tudi dejstvo, da vsota števil v tretji vrstici ni 60, pač pa 48.

Sploh pa je uporabna vrednost lunarnega koledarja za časovno orientacijo v letu, ki je v resnici določeno s Sončevim ciklusom, vprašljiva. Ker traja Lunarni mesec približno 29,53 dneva, meri 12 takšnih mesecev približno 354,37 dneva. To je, če zanemarimo manjkajočih 11 dni, res da »približno« eno leto. Toda napake postanejo že po nekaj letih tako velike, da vodi lunarni koledar pri spremljanju časa oz. letnih časov v popolno zmedo.

Tako so pozneje stari Egipčani zaradi teh težav že uporabljali sončni koledar. Da je leto dolgo 365 dni, so ugotovili z opazovanjem letnega poplavnega ciklusa reke Nil, še natančneje pa z opazovanjem zvezde Sirius, najsvetlejše na nebu, ki enkrat na leto vzide na nebu tik pred sončnim vzhodom. Leto so razdelili na tri letne čase: čas poplave, čas setve in čas žetve. Vsak letni čas je trajal 4 mesece po 30 dni. Tem 360 dnem so dodali še 5 dni na koncu leta. Poleg razdelitve na mesece so poznali tudi delitev na tedne. Njihov teden je imel 10 dni.

Ne le Išangi

V resnici so arheologi našli še več podobnih kosti, kot je ta afriška z območja plemena Išango.

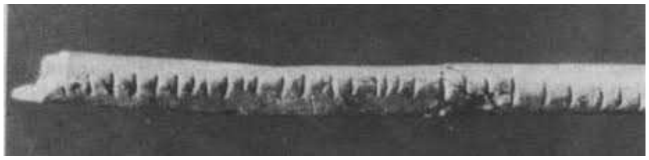
Leta 1937 je Karl Absolon našel pri Vestonicah v bližini Brna volčjo golenično kost, približno 18 cm dolgo, ki je porisana s 57 zarezami. Ta kost je še veliko starejša od kosti Išangov, domnevno datira v obdobje okoli 35.000 pr. n. št. Na njej so vidne tri ločene skupine s 25, 2 in 30 zarezami. Za prvih 25 zarez se zdi, da so zbrane v pet skupin s po 5 zarezami. V srednji skupini sta dve zarezi, ki pa sta

SLIKA 3.

bistveno daljši od vseh preostalih. V tretji skupini je zatem 30 zarez. Kost je danes v Moravskem muzeju v Brnu.

O pomenu zarez oz. števil na tej kosti oziroma rovašu je seveda težko govoriti. Vsekakor pa ni odveč domneva, da je zapis nastal morebiti na podlagi zbiranja zarez v petice. K temu bi zapisovalca najbrž navedlo dejstvo, da je tudi prstov na roki pet. Kaj je zapisovalec označil s tem, ostaja skrivnost. Morda število ulovljenih živali, morda število živali v čredi, morda kaj tretjega. O tem je težko govoriti, saj je o takratni civilizaciji na teh tleh na splošno malo znanega. Pozornost strokovnjakov pa priteguje odkritje, da so se zagotovo ukvarjali tudi z umetnostjo. Na istem območju so našli iz tega obdobja namreč tudi majhno podobo ženske glave, izrezljane iz mamutovega okla.

Kost, podobno tisti iz plemena Išango, so našli tudi v Afriki. V pogorju Lembombo v Swaziju so našli kost, ki pa je še precej starejša, saj jo strokovnjaki uvrščajo v obdobje pred približno kar 40.000 leti. Na njej je 29 zarez. Ta kost velja za najstarejšo najdbo, ki dokumentira štetje naših prednikov.



SLIKA 4.

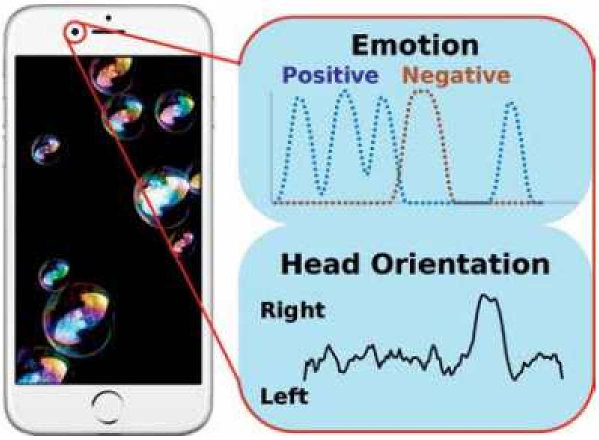
Takšne kosti z zarezami so skupaj s palicami z zarezami, po naše tudi rovašev, ki pa se iz obdobja več deset tisoč let pred našim štetjem seveda niso ohranile, najzgodnejši ohranjeni dokumenti zapisovanja števil. Pomembno je, da so v tem primeru kosti ali palice bili v vlogi nosilcev zapisa. Papirja takrat še ni bilo.

Zanimivo je, da se je takšno zapisovanje z rovaši ohranilo tako rekoč povsod po svetu še vse do pred nekaj stoletij. V Evropi so z rovaši denimo še pred dvesto leti označevali denimo število živine v čredi, višino dolga pri posojilodajalcu in podobno.

Ali so Išangi »počeli« matematiko?

Enotnega mnenja o tem, kakšen je bil prvotni namen kosti plemena Išango, danes med strokovnjaki še zmeraj ni. Tudi vprašanje, ali so Išangi na tej kosti morebiti »počeli« matematiko, se ne zdi najbolj posrečeno. Treba je imeti namreč v mislih, da matematike, kot jo razumemo danes oziroma že kar nekaj krepkih stoletij nazaj, v obdobju Išangov skoraj zagotovo ni bilo. Še danes je med matematiki precej različnih pogledov in razlag o tem, kaj bi naj bila matematika. Je matematika srčika samega vesolja ali pa je le plod človeške domišljije? Ali matematika že obstaja in jo ljudje le odkrivamo ali pa smo prav mi tisti, ki jo ustvarjamo? Od kod pravzaprav matematika?

× × ×



SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

Koliko stane zbiranje sličic?

Boštjan Kuzman

Nogometna mrzlica svetovnega prvenstva v Rusiji 2018 se je zdaj že povsem polegla, nekateri navdušenci pa morda še vedno zbirajo in menjavajo zadnje manjkajoče sličice s podobami igralcev nogometnih reprezentanc. V albumu, ki je bil naprodaj v Sloveniji, je prostora za 600 različnih sličic. Te so se prodajale v paketkih s po 3 sličicami s ceno 0,70 EUR za paket. Zlahka torej izračunamo, da je treba za poln album kupiti vsaj 200 paketkov, kar nas stane najmanj 140 EUR (oz. skoraj 7 let naročnine na Presek). Seveda pa bo končni strošek višji, ker so paketki in sličice v njih bolj ali manj naključno premešane, vendar ga lahko po drugi strani zmanjšamo z menjavanjem sličic z drugimi zbiralci.

Preden nadaljujete z branjem, poskusite podati svojo grobo oceno, koliko naključnih sličic je treba kupiti, da bi brez menjavanja zbrali vseh 600 različnih. Je to morda 1000, 2000, 3000 ali celo več sličic? Koliko denarja bi torej tako porabili za poln album?

Ocena povprečnega števila kupljenih sličic, ki jih potrebujemo za napolnitev albuma brez menjavanja, predstavlja matematični problem s področja verjetnosti, ki je v angleščini znan tudi pod imenom *Coupon collector's problem* [1]. Preden se lotimo njegovega reševanja po teoretični poti, lahko oceno poskusimo dobiti eksperimentalno. Bralke in bralci, ki poznate osnove programiranja, boste zlahka napisali ustrezno programsko simulacijo poskusa, pri kateri program naključno izbira števila med 1 in 600, dokler ne zbere vseh različnih vrednosti.

Za šolsko rabo pa je zanimiva tudi poenostavljena verzija eksperimenta zbiranja 6 različnih sličic, ki ga lahko izvedemo s pomočjo običajne igralne kocke. Igralno kocko vržemo večkrat zapored in si zapisu-

Št.	Zaporedje padlih vrednosti	Št. metov	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1.	66343143353153312	17	1	2	1	2	4	7
2.	5424113356	10	1	1	1	2	2	3
3.	4666633142664335	16	1	1	4	2	2	6
4.	6163452	7	1	1	2	1	1	1
5.	2152221535614	13	1	1	1	6	2	2
6.	124255444224663	15	1	1	1	2	8	2
7.	626662463652565332261	21	1	1	5	2	2	10
8.	662563163364	12	1	2	1	2	1	5
9.	133664442262616231133246265	27	1	1	2	2	3	18
10.	4211243624625	13	1	1	1	4	1	5
	Povprečno število metov	15,1	1,0	1,2	1,9	2,5	2,6	5,9

TABELA 1.
Rezultati desetih ponovitev poskusa s kocko. Z modro je obarvana prva pojavitev posamezne vrednosti v zaporedju.

jemo zaporedje padlih vrednosti. Ko se v zaporedju pojavi vseh 6 različnih vrednosti, preštejemo število potrebnih metov in poskus ponovimo. Pri dovolj velikem številu ponovitev bo aritmetična sredina meritev predstavljala oceno iskanega povprečja za album s 6 sličicami. Pri 10 ponovitvah poskusa, kot so zapisane v tabeli, smo denimo dobili povprečno vrednost 151/10 oz. 15,1.

Pa si oglejmo, kako bi povprečno število potrebnih metov izračunali matematično. Pri posameznem metu poštene kocke je matematična verjetnost šestice enaka $p = 1/6$, saj je ugoden le eden od šestih enako verjetnih izidov. Statistično to pomeni, da bo pri velikem številu metov delež padlih šestic enak 1/6, ali, povedano drugače, v povprečju bo šestica padla vsak šesti met. Torej bo od začetka poskusa do prve šestice potrebnih v povprečju 6 metov. **Podobno velja tudi pri neodvisnih zaporednih ponovitvah poskusa, pri katerem se ugoden dogodek zgodi z verjetnostjo $p > 0$. Povprečno število ponovitev poskusa do prvega uspeha je tedaj enako $1/p$.**

Od te ugotovitve ni več daleč do izračuna povprečnega števila potrebnih metov, s katerimi bi zbrali vse različne vrednosti. Razmišljamo namreč takole. Prvo od šestih vrednosti bomo zagotovo dobili v prvem metu. Ko eno vrednost že imamo, bo v naslednjem metu z verjetnostjo 5/6 padla ena od vrednosti, ki je še nimamo, torej bomo za drugo vrednost v povprečju potrebovali še $6/5 = 1{,}2$ meta kocke. Ob tem smo seveda upoštevali, da so zaporedni meti med seboj neodvisni, torej predhodni meti na naslednjega ne vplivajo. Zdaj imamo že dve različni vrednosti, zato bo naslednja manjkajoča padla z verjetnostjo 4/6 v posameznem metu, oz. v povprečju po $6/4 = 1{,}5$ meta, in tako dalje. Za zadnjo manjkajočo vrednost bomo potrebovali v povprečju kar 6 metov, saj je njena verjetnost v posameznem metu le 1/6. Na ta način pridemo do števila

$$1+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+\frac{6}{1}=6\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right) = 14{,}7.$$

To število predstavlja povprečno število metov oz. kupljenih sličic pri velikem številu ponovitev zbiranja šestih različnih vrednosti. Izračunana vrednost se približno ujema tudi z našo eksperimentalno meritvijo. Prav tako se vrednosti členov v vsoti približno ujemajo z izmerjenimi povprečnimi vrednostmi števil T_i iz tabele 1, ki pomenijo število metov od $(i-1)$ do i-te nove vrednosti.

SLIKA 1.
Za zadnjo manjkajočo vrednost je v povprečju potrebnih kar 6 metov od skupnega povprečja 14,7 meta.

Morda bi kdo iz tega prenagljeno sklepal, da je za album s 600 različnimi sličicami treba kupiti okoli 1470 sličic. To seveda ne velja, povprečno število kupljenih sličic je v tem primeru precej večje. S posnemanjem gornjega izračuna lahko ustrezni izraz zdaj zlahka zapišemo in s pomočjo računalnika tudi seštejemo:

$$600\left(\frac{1}{600}+\frac{1}{599}+\frac{1}{598}+\ldots+\frac{1}{1}\right) \doteq 4184{,}987.$$

Če zaokrožimo navzgor, brez menjavanja sličic bi morali torej za napolnitev albuma s 600 sličicami v povprečju kupiti 4185 sličic. To pomeni 1395 paketkov, za katere bi odšteli skupaj kar 976,50 EUR. Precej denarja, kaj ne?

Zadnji izračun velja ob predpostavkah, da so paketki in sličice v njih enakomerno in neodvisno porazdeljeni, torej, da so pri nakupu nove sličice vse številke enako verjetne ne glede na predhodno kupljene sličice ali druge sličice v istem paketku. Če so denimo paketki treh sličic oblikovani tako, da v njih ni podvajanja sličic, potem zadnja domneva ne velja. Števílni zbiralci tudi sumijo, da so nekatere sličice redkejše od drugih, torej, da porazdelitev ni enakomerna, a v to se ne bomo spuščali.

Če torej zaupamo proizvajalcu, da natisne enako število vseh različnih sličic, ki so dobro premešane in neodvisno razporejene v paketke na prodajnih mestih, potem je splošna rešitev problema zbiralca sličic pri zbiranju n različnih sličic ob zgornjih predpostavkah enaka nH_n, kjer je

- $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

t. i. *n-to harmonično število*. Kot je razvidno iz nekaj vrednosti v tabeli, naraščanje števila nH_n v odvisnosti od n ni linearno. Bralcem z nekaj več matematičnega znanja omenimo, da je število nH_n velikostnega reda $O(n \log n)$, kar je posledica znanih lastnosti harmoničnih števil.

n	6	60	600	6000
nH_n	14,70	280,80	4185,99	55660,88

TABELA 2.
Nekaj vrednosti števila nH_n

Pozorni bralec je iz dosedanje razprave verjetno razbral, da je nadražje predvsem zbiranje zadnje peščice manjkajočih sličic. Samo za pridobitev zadnje manjkajoče sličice v albumu za nogometno prvenstvo 2018 bi jih morali v povprečju kupiti še 600, kar bi stalo 140 EUR. Zato je zanimivo omeniti, da založnik albuma omogoča, da zbiralec neposredno naroči 100 izbranih sličic po ceni 0,25 EUR za sličico. Za zadnjih 100 sličic bi sicer z naključnim kupovanjem potrebovali v povprečju

- $600H_{100} = 600\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \ldots + \frac{1}{1}\right) \doteq 3112{,}43$

naključnih sličic, oz. zaokroženo navzgor, 1038 paketkov, kar znese 726,60 EUR. Z neposrednim naročilom zadnjih 100 manjkajočih sličic tako zbiralec v povprečju prihrani več kot 700 EUR in za napolnitev albuma porabi »le« 274,90 EUR (brez stroška pošiljanja sličic). Že samo z neposrednim naročilom zadnjih 20 manjkajočih sličic pa bi celotni strošek zmanjšali za približno polovico, kar lahko bralec premisli sam.

Pa si postavimo še nekoliko drugačno vprašanje. Denimo, da imate 210 EUR, ki jih boste porabili za nakup 300 paketkov s skupaj 900 sličicami. Koliko različnih sličic za vaš album lahko v tem primeru pričakujete?

Zdaj je razmislek nekoliko drugačen. Verjetnost, da naključno kupljena sličica ni sličica številka 1, je enaka $\frac{599}{600}$. Verjetnost, da nobena od 900 kupljenih sličic ni sličica številka 1, pa je enaka $\left(\frac{599}{600}\right)^{900} \doteq 0{,}22313$. Zato je verjetnost, da je med 900 kupljenimi tudi sličica številka 1, približno enaka 0,77687, kar lahko tolmačimo tudi kot povprečno število sličic številka 1 med 900 naključno kupljenimi. Da bi dobili povprečno število vseh različnih sličic med njimi, pa lahko seštejemo povprečno število sličic številka 1, številka 2, in tako dalje vse do 600. Zato izraz

- $600 \cdot 0{,}77687 \doteq 466{,}12$

predstavlja povprečno število različnih sličic med 900 naključno kupljenimi izmed skupaj 600 različnih. Za menjavo nam v tem primeru torej ostane v povprečju 434 sličic, s katerimi bomo ob dovolj velikem številu drugih zbiralcev v soseščini najbrž brez težav zbrali manjkajočih 134 za poln album.

V vsakem primeru pa je zbiranje sličic precej drag konjiček. Radovedna bralka in bralec lahko svoje razumevanje dosedanjih izračunov preizkusita z naslednjo nalogo.

Naloga. Izračunaj in primerjaj povprečni števili različnih sličic, ki jih pri prej navedenih cenah dobiš za 175 EUR, če:

- vseh 175 EUR porabiš za nakup paketkov,
- porabiš 140 EUR za nakup paketkov, od preostanka pa porabiš 25 EUR za neposredno naročilo 100 manjkajočih sličic in 10 EUR za poštnino.

Rešitev. V prvem primeru kupiš 750 sličic, med katerimi bo v povprečju približno 428 različnih. V drugem primeru pa kupiš 700 sličic, med katerimi bo v povprečju približno 479 različnih.

Literatura

[1] Coupon collector's Problem, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Coupon_collector\%27s_problem`, ogled 14. 1. 2019

[2] Harmonic number, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number`, ogled 14. 1. 2019.

× × ×

Posebno zaporedje rombov

Marko Razpet

Vzemimo pozitivni realni števili p in q, pri čemer je $p \leq q$. Njuna sredina je na splošno vsako število $S(p,q)$, ki je s p in q natančno določeno in zanj velja relacija $p \leq S(p,q) \leq q$. Najenostavnejša sredina števil p in q je njuna *aritmetična sredina* $A(p,q) = (p+q)/2$, ki je na pravi sredini med p in q. Če sta p in q krajišči intervala na številski premici, potem je $A(p,q)$ kar njegovo središče. Prav tako je pomembna *geometrična sredina* $G(p,q)$ števil p in q, ki jo definiramo z relacijo $G(p,q) = \sqrt{pq}$. Očitno sta števili $A(p,q)$ in $G(p,q)$ s p in q natančno določeni. Ker je $A(p,q) = p + (q-p)/2 = q - (q-p)/2$, velja $p \leq A(p,q) \leq q$. Iz $p^2 \leq pq \leq q^2$ pa dobimo še $p \leq G(p,q) \leq q$.

Pomembna je relacija $G(p,q) \leq A(p,q)$, v kateri velja enačaj natanko takrat, ko je $p = q$. To vidimo iz zapisa

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(\sqrt{q} - \sqrt{p}\right)^2 &= p + q - 2\sqrt{pq} \\ &= 2(A(p,q) - G(p,q)). \end{aligned}$$

Primer $p = q$ očitno ni zanimiv, zato bo v nadaljevanju $p < q$, ko velja $p < G(p,q) < A(p,q) < q$. Označimo $p_1 = G(p,q)$ in $q_1 = A(p,q)$. Ker je $p_1 < q_1$, velja $p_1 < G(p_1,q_1) < A(p_1,q_1) < q_1$ tako kot prej za p in q. Če označimo $p_2 = G(p_1,q_1)$ in $q_2 = A(p_1,q_1)$, velja $p_2 < G(p_2,q_2) < A(p_2,q_2) < q_2$. Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. Če vzamemo $p_0 = p$ in $q_0 = q$ in $p_{n+1} = G(p_n,q_n)$ in $q_{n+1} = A(p_n,q_n)$ za $n = 0,1,2,\ldots$, dobimo neskončni zaporedji

$$p_0, p_1, p_2, \ldots \quad \text{in} \quad q_0, q_1, q_2, \ldots, \tag{1}$$

pri čemer je

$$\begin{aligned} p = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots < q_n < \ldots \\ < q_2 < q_1 < q_0 = q. \end{aligned} \tag{2}$$

Brez težav vidimo, da velja

$$\begin{aligned} q_1 - p_1 &< \frac{p_0 + q_0}{2} - p_0 = \frac{q-p}{2}, \\ q_2 - p_2 &< \frac{p_1 + q_1}{2} - p_1 = \frac{q_1 - p_1}{2} < \frac{q-p}{4}, \ \ldots \end{aligned}$$

V splošnem pa

$$q_n - p_n < \frac{q-p}{2^{n+1}}.$$

Za dovolj velik indeks n se zato p_n in q_n poljubno malo razlikujeta. Prvo zaporedje v (1) je naraščajoče in omejeno navzgor, drugo pa padajoče in omejeno navzdol. Členi obeh zaporedij se približujejo z naraščajočim indeksom n natančno določenemu številu $\mu(p,q)$, vsako s svoje strani. Zaporedji konvergirata proti številu $\mu(p,q)$ (glej na primer [2]). Za vsako naravno število je

$$p < p_n < \mu(p,q) < q_n < q.$$

Število $\mu(p,q)$ je ena od sredin števil p in q, imenujemo jo *aritmetično-geometrična sredina* števil p in q. Zapišemo jo lahko kot limiti: $\mu(p,q) = \lim p_n = \lim q_n$. Število $\mu(p,q)$ se s p in q ne izraža preprosto, ampak z eliptičnim integralom (glej na primer [1]).

Za $p = q$ bi dobili v (1) konstantni zaporedji, v (2) pa povsod enačaj in s tem $G(p,p) = A(p,p) = \mu(p,p) = p$.

Posebna lastnost zaporedij (1) je njuna hitra konvergenca. Za ilustracijo vzemimo primer $p = 8$ in $q = 24$. Rezultate vpišimo v tabelo 1, ki ji dodamo še ostre notranje kote $\alpha_n = 2\arctan(p_n/q_n)$ rombov.

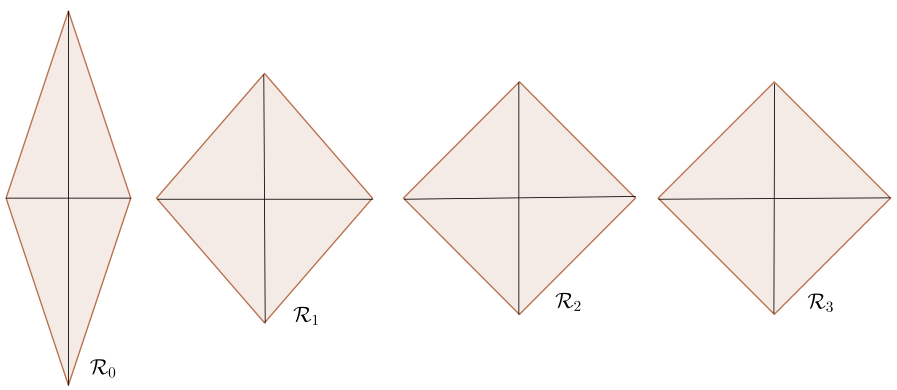
Na 11 decimalk je $\mu(8,24) = 14{,}90893426595$.

Hitro konvergenco bomo pojasnili v oceni, ki jo bomo izpeljali. Najprej je

$$\begin{aligned} q_{n+1} - p_{n+1} &= A(p_n,q_n) - G(p_n,q_n) \\ &= \frac{p_n + q_n}{2} - \sqrt{p_n q_n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{q_n} - \sqrt{p_n}\right)^2}{2}. \end{aligned}$$

n	p_n	q_n	α_n (°)
0	8,000000000000	24,000000000000	36,869897645844
1	13,856406460551	16,000000000000	81,786789298261
2	14,889677745633	14,928203230275	89,851944781240
3	14,908928043965	14,908940487954	89,999952177126
4	14,908934265958	14,908934265959	89,999999999995

TABELA 1.
Zaporedje rombov.



SLIKA 1.
Zaporedje rombov.

Zadnji kvocient razširimo:

$$\frac{(\sqrt{q_n}-\sqrt{p_n})^2}{2} = \frac{(\sqrt{q_n}-\sqrt{p_n})^2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2}{2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2} = \frac{(q_n-p_n)^2}{2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2}.$$

Za vsoto korenov v zadnjem imenovalcu velja:

$$\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n} = 2A(\sqrt{p_n},\sqrt{q_n}) > 2G(\sqrt{p_n},\sqrt{q_n}) = 2\sqrt[4]{p_n q_n} > 2\sqrt[4]{p^2} = 2\sqrt{p}.$$

Če upoštevamo vse dobljene relacije, imamo nazadnje oceno

$$q_{n+1}-p_{n+1} < \frac{(q_n-p_n)^2}{8p}.$$

To pomeni, da se v zaporedjih (1) število prvih ujemajočih se cifer števil p_n in q_n pri prehodu na p_{n+1} in q_{n+1} vsaj podvoji.

Za popestritev je smiselno načrtati zaporedje rombov $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$, kjer ima $\mathcal{R}_n$ diagonali p_n in q_n. Diagonali se v vsakem rombu sekata pravokotno, se razpolavljata in razpolavljata kote. Na sliki 1 je začetek tega zaporedja. Z rastočim n rombi prehajajo v kvadrat z diagonalo $\mu(p,q)$. V tabeli 1 in na sliki 1 lahko opazujemo tudi, kako se pri tem koti α_n približujejo pravemu kotu.

Namesto rombov lahko vzamemo pravokotnike s stranicami p_n in q_n ali pa elipse z osmi p_n in q_n. Pravokotniki konvergirajo proti kvadratu s stranico $\mu(p,q)$, elipse pa proti krogu s premerom $\mu(p,q)$.

Literatura

[1] P. Eymard, J.-P. Lafon, *The number* π, AMS, Providence, Rhode Island 2004.

[2] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana 1968.

× × ×

Bikonveksna leča: razpršilna ali zbiralna?

↓↓↓
Nada Razpet

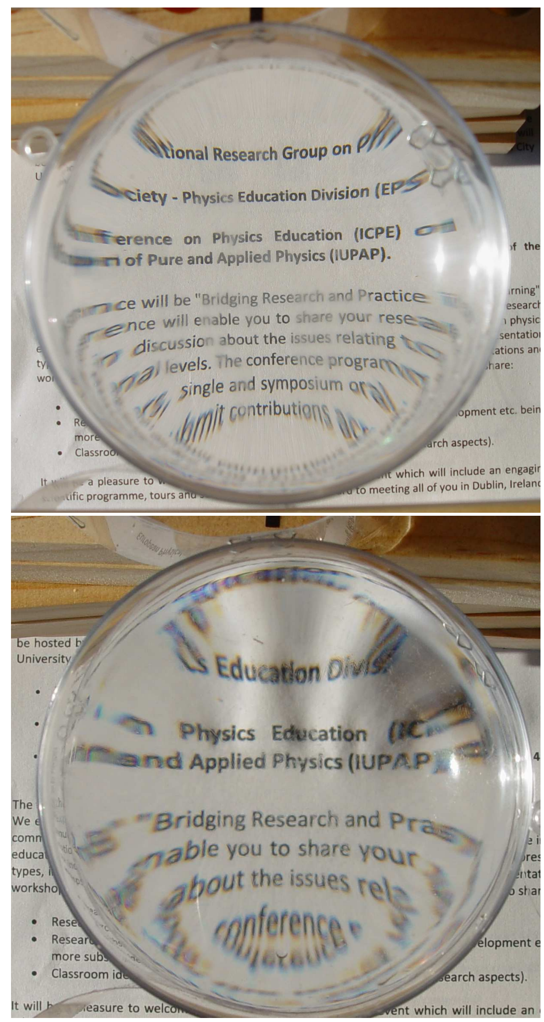
→ O poskusih s plastičnim medaljonom smo v Preseku že pisali (glej [1] in [2]). Plastični medaljon je sestavljen iz dveh polovic, kot kaže slika 1.

SLIKA 1.
Sestavljen in razstavljen plastični medaljon.

Lupa

V vsako polovico medaljona lahko nalijemo neko tekočino in dobimo lupo. Oglejmo si primera, ko nalijemo v eno polovico medaljona vodo, v drugo pa parafinsko olje (slika 2).

Opazimo, da se vidijo nekatere napake debelih leč, kot je popačena slika na robovih in barvne lise, ki so posledica disperzije svetlobe (različni lomni količniki za različne barve). Lupama lahko približno določimo goriščno razdaljo, če pogledamo, kdaj je povečava predmeta, ki ga opazujemo skozi lupo, največja. To je takrat, ko je predmet v goriščni ravnini. Izmerimo razdaljo med predmetom in sredino krožne površine tekočine, to je goriščno razdaljo lupe.



SLIKA 2.
Vodna in parafinska lupa.

→

Lomni količnik vode, parafinskega olja in rastlinskega jedilnega olja

Tekočinske leče dobimo tako, da polovici medaljona potopimo v tekočino in ju v tekočini sestavimo. Medaljon dobro tesni, zato tekočina ne izteka.

Vemo, da slika zelo oddaljenega predmeta nastane v goriščni ravnini leče. S posameznimi lečami preslikajmo zunanjost (oddaljene predmete) na steno sobe in leče premikajmo tako dolgo, da nastanejo na steni jasne slike. Izmerimo razdaljo slike od središča leče. Izmerili smo goriščno razdaljo leče (slika 3).

Iz izmerjenih goriščnih razdalj in izračunanih krivinskih polmerov medaljona (v našem primeru je $R = 9{,}3$ cm, glej [2]) lahko določimo lomni količnik leče.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R}, \qquad n = 1 + \frac{R}{2f}.$$

Tako določeni lomni količniki seveda niso tako natančni, kot jih dobimo v tabelah, vseeno pa nam dajo primerjavo.

Leče potopimo v vodo

Z medaljonom narejena leča omogoča še eno serijo poskusov. Prazen medaljon, medaljon napolnjen z vodo in medaljon napolnjen s parafinskim oziroma jedilnim oljem potopimo v kadičko z vodo in nanje usmerimo dva vzporedna laserska curka. Pri poskusih smo uporabili laserska kazalnika.

Pri vseh računih bomo privzeli, da je leča tanka in da zanjo velja enačba za tanke leče, prav tako bomo vpliv plastike zanemarili.

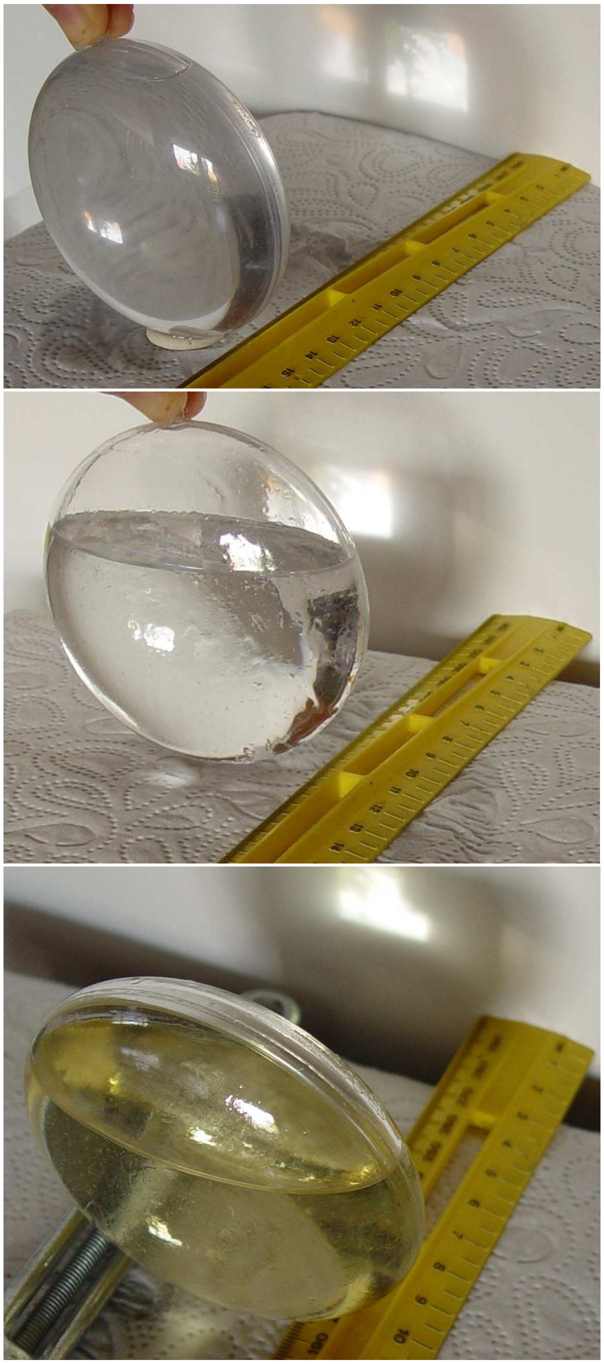
Omenili smo že, da za tanko lečo velja:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R}.$$

Za leče v zraku pomeni n v faktorju $(n-1)$ lomni količnik snovi, iz katerega je leča, enica pa je zaradi tega, ker je lomni količnik zraka enak ena. Ko leča ni v zraku, pa moramo pisati:

$$\frac{1}{f} = (n_l - n_o)\frac{2}{R}, \qquad f = \frac{R}{2(n_l - n_o)}. \tag{1}$$

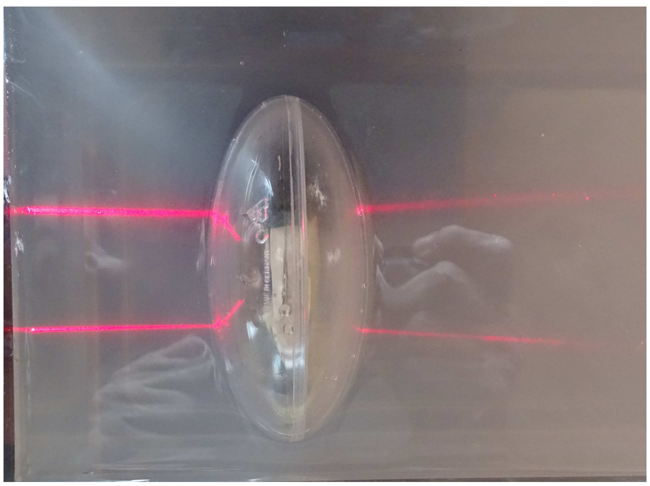
Pri tem je n_l lomni količnik snovi, iz katere je leča, n_o pa lomni količnik snovi, ki je v okolici leče.



SLIKA 3.
Merjenje goriščnih razdalj vodne leče, leče s parafinskim oljem in leče z rastlinskim jedilnim oljem.

Zračna leča v vodi

Ko je medaljon prazen, je lomni količnik leče (zraka) manjši od lomnega količnika okolice, to je vode. Opazimo, da gresta vzporedna svetlobna curka po prehodu skozi lečo narazen. Prazen medaljon je razpršilna leča (slika 4). Pri tem je treba posebej poudariti, da pri steklenih lečah govorimo, da so razpršilne, če so na sredini ožje kot na konceh, v tem primeru pa je bikonveksna leča razpršilna.



SLIKA 4.
Vzporedna svetlobna curka se po prehodu skozi leče oddaljujeta. Prazen medaljon, potopljen v vodo, je razpršilna leča. Svetloba vpada z leve strani. Pogled od zgoraj.

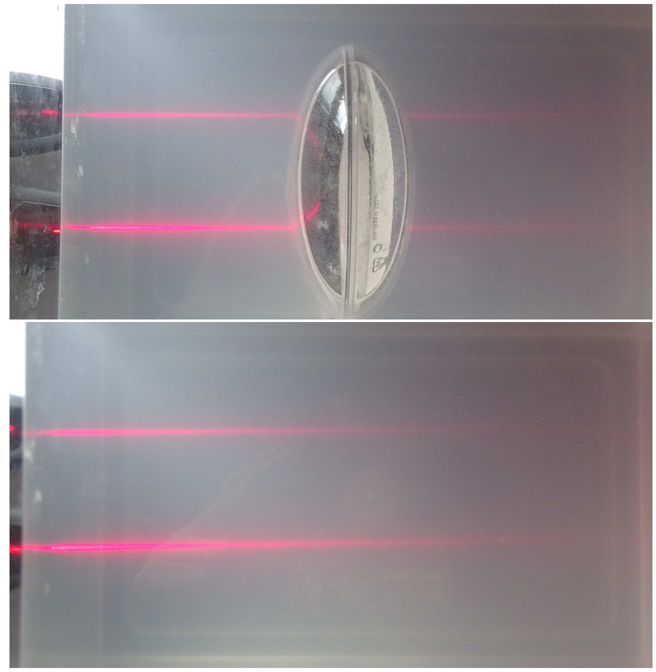
Izračunajmo goriščno razdaljo za ta primer. Lomni količnik leče je $n_l = 1$, lomni količnik okolice pa $n_0 = 1{,}33$. Torej velja:

$$f = \frac{9{,}3\ \text{cm}}{2(1 - 1{,}33)} = -14\ \text{cm} < 0\,. \qquad (2)$$

Goriščna razdalja je negativna, leča je razpršilna.

Vodna leča v vodi

Ko je v medaljonu voda, sta vzporedna svetlobna curka tudi po prehodu skozi lečo vzporedna (slika 5). Curek prehaja iz vode v vodo in se ne lomi. Pri tem prehod skozi plastiko zanemarimo. Opazimo tudi, da se intenziteta svetlobnega curka z oddaljenostjo od izvira manjša. Pravimo, da je curek oslabljen. Izračunajmo goriščno razdaljo te leče.



SLIKA 5.
Prehod svetlobnih curkov iz vode skozi vodno lečo in primerjalna slika brez leče. Leča je pritrjena na dno kadičke. Svetloba vpada z leve strani. Pogled od zgoraj.

$$f = \frac{R}{2(n_l - n_o)} \to \infty\,. \qquad (3)$$

Vrednost imenovalca je nič, saj za lomne količnike v tem primeru velja $n_l = n_o = n_v$. Goriščna razdalja je neskončno velika, ali z drugimi besedami, leča ne lomi svetlobnih curkov. Podobno bi ugotovili tudi za zračno lečo v zraku.

Parafinska leča v vodi

Ko je v medaljonu parafinsko olje, se vzporedna svetlobna curka po prehodu skozi medaljon približujeta, zdaj imamo zares zbiralno lečo (slika 6).

Poglejmo še račun:

$$f = \frac{R}{2(n_p - n_v)} = \frac{9{,}3\ \text{cm}}{2(1{,}48 - 1{,}33)} \approx 31\ \text{cm} \qquad (4)$$

Z n_p smo označili lomni količnik parafinskega olja. Leča je zbiralna.

nadaljevanje na strani 18

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ

STROKOVNJAK ZA ČLOVEŠKO DUŠEVNOST

LETOPISNI ZBORNIK

GLASBENA ZVRST

NORVEŠKI MATEMATIK (HENRIK)

PEVEC S SREDNJEVISOKIM GLASOM

PAS PRI KIMONU

MADŽAR. BOREC ZA SVOBODO KOSSUTH

3. OSEBA EDNINE

DVAJSETEREC

GLAVNO MESTO SENEGALA

PLOSKEV, NASTALA Z ROTACIJO PARABOLE

DRUŽBA ZA UPRAVLJANJE TERJATEV BANK

1

VELIKO CESARSTVO

ODBOJKARSKI KLUB

DEJANJE

HEKTAR

LITIJ

KELTSKA NEKROPOLA PRI CLUJU V ROMUNIJI

PORAŠČEN PREDEL V PUŠČAVI

SLOVAŠKA REKA

PRILOGA ČASOPISA DELO

GRAFIČNI POKLIC

NA NJEM SEKAMO DRVA

PRENOSNIK

8

TELUR

SKOK S TELOVADNEGA ORODJA

REKA, KI TEČE SKOZI MÜNCHEN

ČUDNO BITJE ODBIJAJOČEGA VIDEZA

AN…

IZRAŽANJE ČUSTEV S SOLZAMI

DOLOČA, KAKŠNI STA REŠITVI KVADRATNE ENAČBE

DMFA

STANJE PRIPRAVLJENOSTI

AVSTRIJ. TEMNOPOLTI NOGOMETAŠ (DAVID)

GRAFIK DEBENJAK

KRAJ PRI ORMOŽU IN LJUTOMERU

DREVESNI IZCEDEK

ET. CESAR SELASSIE

KRAJ V ARGOLIDI NA PELOPONEZU

PORTUGAL. POKRAJINA

NAŠ NEKD. KOLESAR (JURE)

ASTRONOM. ENOTA ZA ODDALJENOST ZVEZD

ŠVED. FIZIK (? GUSTAF) DALEN

ALPINIST ZAPLOTNIK

ODVOZ PRIDELKA S POLJA

SVETOVNI NAZOR

4

GRŠKA GORA, DOMOVANJE BOGOV

ZELIKA, KI OB DOTIKU IZSTRELI SEMENA

10

CEVAST DEL SRAJCE

SLIKARSKI REKVIZIT

UBOJ DOMAČE ŽIVALI ZA HRANO

6

NAŠ IZBOR PESMI EVROVIZIJE

NIKELJ

STANE UREK

NAŠ HARMONIKAR (JANEZ)

STEBLO VIN. TRTE

OČESNA MREŽNICA

POJAV BOLEZNI

KRHKA PROZORNA SNOV

BREZBARVNO ORGANSKO TOPILO

JUDOISTKA TRSTENJAK

KRAJ PRI KOPRU

RADIJ

PRISTANIŠČE NA SEVERU ČILA

ČASOVNA ENOTA

APPLOVA TABLICA

AFRIŠKO DREVO, AFR. TIK

T…

O…

NA… Š…

IRIDIJ

PAPIR ZA IZPLAČILO DENARJA

NIZOZEM. MESTO

ZE… S… EL…

HI… G…

ŽIVALSKI VRT

7

AZIJSKA TROPSKA DRŽAVA

PLATINA

RAZSTAVNI PREDMET

MOSTNI NOSILEC

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | REVNOST, UBOGOST | OBROČAST POVEZOVALNI ELEMENT | NANJ IGRA PIANIST | TRAVNATA POKRAJINA V TROPSKIH PREDELIH | dMFA | NEZAVZET, DOLGOČASEN ČLOVEK | VELIK PRITOK VOLGE PRI NIŽNEM NOVGORODU | NOBELIJ | NAPRAVA ZA SPREMINJANJE IZMENIČNE NAPETOSTI | VLOŽEK

BORILNI ŠPORT | NEKDANJI ITALIJAN. TEHNIČNI PREMIER (MARIO)

ZEMLJA GLEDE NA SVOJO OBLIKO | 9 | NAŠ FILM. REŽISER (MITJA) | DAN RIM. MESECA

GORA V SOSEŠČINI TRIGLAVA | AVTOBUSNA POSTAJA | ZVOK, KI SLEDI STRELI

AMERIŠKA ZVEZNA DRŽAVA | SRBSKA VALUTA | AFRIŠKA ANTILOPA | AMERIŠKI VODITELJ (DONALD)

KONKURENT KOPRA | RDEČA TELESNA TEKOČINA

ANGLEŠKA IGRA S KIJI IN TRDO ŽOGO | V SVOJI TEORIJI JO JE OBDELAL EINSTEIN | IMETJE | SPLETNA DOMENA MAROKA | MIRNO, ZADOVOLJNO ŽIVLJENJE | REDOVNICA | ŽAREČ DROBEC | MESTO V TOSKANI | OCVRTO PUSTNO PECIVO | HINKO NUČIČ | 2 | TRENTAR. GORSKI VODNIK ŠPIK (ANTON)

GR. JUNAK V TROJANSKI VOJNI, AJAS | HRUMENJE | NORDIJSKA BOGINJA MORJA

NEMŠKI PESNIŠKI PAR (ACHIM IN BETTINA VON) | SLOVANSKI VLADARSKI NASLOV | VNETJE BEDRNEGA ŽIVCA | 3 | GRŠKA ČRKA | KREPOST, VRLINA (IZ GRŠČ.)

4 | VZTRAJNOST V FIZIKI | ARKTIČNA MEJNA REKA MED NORVEŠKO IN FINSKO | OTROK, FROC | INKOVSKI SONČNI BOG

KRČEVINA | VODILNI POLOŽAJ V POLITIKI | LJUDSTVO V GANI | STAROSTA, NESTOR | 5 | HRVAŠKI OTOK | ZAMETEK ČESA NOVEGA

STRITARJEV ROMAN V PISMIH | MIKICE | ZBIRANJE MNENJ O ČEM | ARABSKI KNEZ

KOLIČINA Z ENOTO VAT | SPOPAD, BORBA | NAPADALEC NA POLITIKA | NAŠA PEVKA IN HARFISTKA

TRENING | TRETJI PROGRAM RADIA SLOVENIJA | FOND | AMERIŠKI PISATELJ (NORMAN) | MIR | 12 | dMFA

OZNAKA ZA NARAVNO ŠTEVILO | OBOROŽENE SILE DRŽAVE | GARI KASPAROV | IRACIONAL. KONSTANTA | SPICE GIRL HALLIWELL

ZELO RAZŠIRJEN ELEMENT | HIMALAJ. GOVEDO | STROJNIK EMRI | REKA V JUŽNI ETIOPIJI

HOMO SAPIENS | PRVI, SPREDNJI KEGELJ | NATRIJ

BOCCACCIEVA ZBIRKA NOVEL | RIM. 1000 | 11

BALKANSKA DRŽAVA, KI BO DOBILA NOVO IME

NAGRADNI RAZPIS

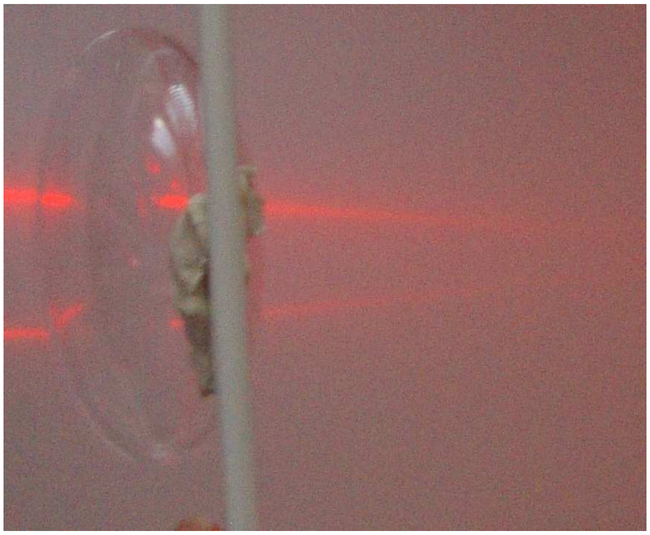
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. marca 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani



SLIKA 6.
Parafinska leča, potopljena v vodo, je zbiralna leča. Da je potek curkov po izhodu iz leče vidnejši, smo morali prostor zatemniti, sliko pa nekoliko osvetliti. Svetloba vpada z leve strani. Pogled od zgoraj.

Kaj se zgodi, če v vodo potopimo stekleno lečo, to je lupo? Še vedno je to zbiralna leča, saj je lomni količnik stekla večji od lomnega količnika vode, vendar je njena goriščna razdalja večja, kot je bila v zraku.

Skrbnim preizkuševalcem ne bo ušlo, da po prehodu skozi zračno lečo laserska curka zadeneta črtast zaslon na drugi višini, kot vstopita v lečo. Razlog je jasen. Svetlobni curek se lomi tudi v navpični smeri, kar pomeni, da zaslona ne doseže v isti višini, kot vstopi. Lega pike na zaslonu je odvisna od vrste leče (zbiralna ali razpršilna) in lege vstopnega curka (ali zadene zgornjo ali spodnjo polovico leče).

Literatura

[1] N. Razpet, *Polovica leče – polovica slike?*, Presek, **44**, (2016/2017) 1, 18–21, DMFA – založništvo, Ljubljana.

[2] A. Likar, N. Razpet, *Poskusi s svetlobo*, Presek, **44**, (2016/2017) 3, 9–15, DMFA – založništvo, Ljubljana.

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

			5			8	1
2						3	
				4			
	8	5					
	2	8		7			6
3							
5	6		1	3			2
				1			

→→→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	7	3	5	2	4	8	1
2	1	4	8	5	6	3	7
7	3	1	6	4	5	2	8
4	8	5	2	6	1	7	3
1	2	8	4	7	3	5	6
3	5	6	7	8	2	1	4
5	6	7	1	3	8	4	2
8	4	2	3	1	7	6	5

× × ×

Lego Kepler – odkrivanje planetov

↓↓↓

Jože Pernar

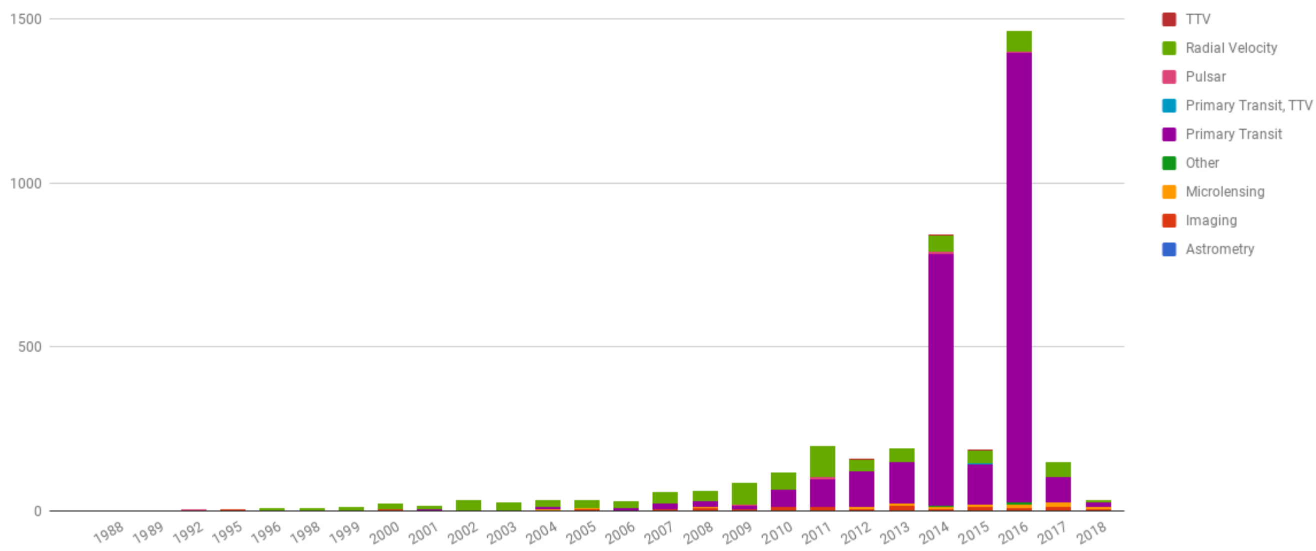
→

Uvod

Eksperimentalno delo in opazovanje naj bi bilo temeljno vodilo naravoslovnih predmetov. Astronomija, kot samostojni predmet ali del vsebin pri pouku fizike, naj bi se tako opirala predvsem na opazovanje. Pri tem nam vreme, čas in zahtevna oprema prej otežita, kot olajšata zahtevno delo. Učitelj ali mentor je tako postavljen pred dodaten izziv. Najti ali izdelati naloge, ki bodo avtentične, zanimive, aktivne in predvsem poučne. Odkrivanje eksoplanetov, Lego kocke in aktivna metoda poučevanja na prvi pogled nimajo kaj dosti skupnega z navedenimi izhodišči. Odkrivanje in raziskovanje vzbuja pri dijakih zanimanje. Lego gradniki predstavljajo znano okolje, ki ga obvladajo skoraj brez izjeme. Aktivne oblike učenja nedvomno vplivajo tudi na pridobljeno znanje [1].

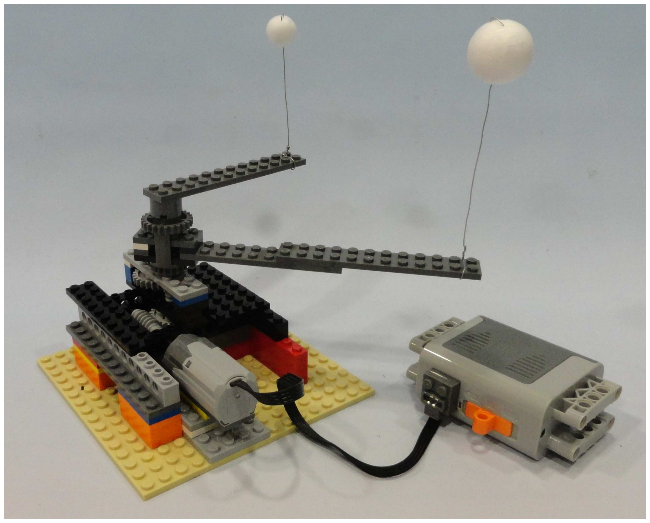
Prvi planet zunaj našega Osončja je bil najden že leta 1988. »Gamma Cephei b« je bil dokončno potrjen šele 14 let pozneje (2002). Prvi planet, ki so ga odkrili z metodo tranzitnega prehoda, pa je bil »HD 209458 b« leta 1999. S pomočjo te metode je bilo odkritih do aprila 2018 največ eksoplanetov.

Metoda prehoda planeta preko zvezdine »ploskve« je očitno dala izjemne rezultate. Kako dijakom približati to znanstveno metodo? Leta 2009 je bil na Mednarodni konferenci SirIkt predstavljen prispevek »Odkrivanje planetov« [3] z interaktivnim pristopom

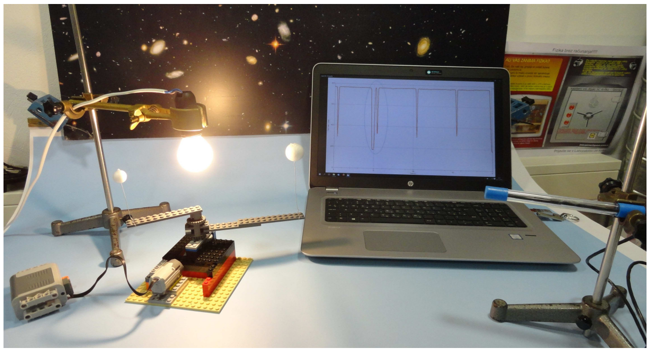


SLIKA 1.
Diagram števila odkritih eksoplanetov z različnimi metodami (Vir: `en.wikipedia.org/wiki/Discoveries_of_exoplanets`) [2].

aktivne oblike dela v razredu. S pomočjo merilnika osvetljenosti in modela sistema planetov iz Lego gradnikov je bil prikazan uporaben princip eksperimentalnih nalog pri fiziki. Uporabnik je z opazovanjem modela krožečih planetov iskal povezavo med zabeleženimi diagrami in dejanskim gibanjem teles okoli svetila.

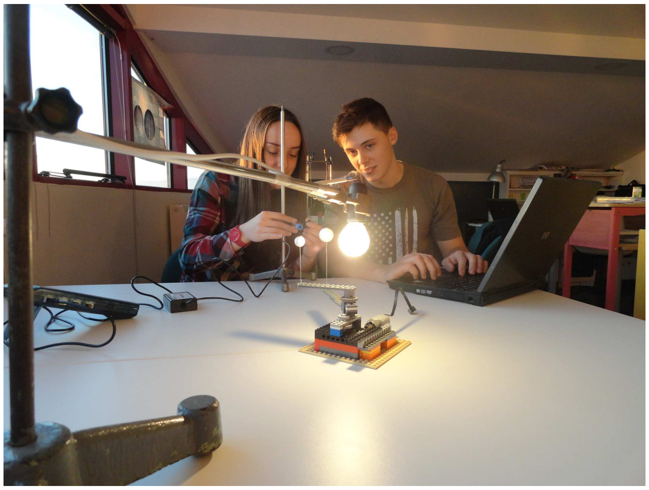


SLIKA 2.
Model



SLIKA 3.
Merjenje

Model in metoda ne zagotavljata avtentičnosti znanstvenega dela. V primeru, da model »zakrijemo« in ta ni več viden opazovalcu, se močno približamo dejanskemu načinu odkrivanja planetov z metodo tranzita. Recimo, da je model »zvezde in planeta« v enem prostoru, opazovalec pa ga zgolj zasleduje s pomočjo ustrezne opreme in računalnika. S tem simuliramo daljinsko zaznavanje, kot se odvija z zaznavanjem merilnikov in teleskopov v pravi meritvi. Če model zapremo v škatlo in ga opazujemo zgolj s pomočjo merilnika osvetljenosti Vernier [4], se približamo dejanskim metodam, kjer lahko iz diagramov odčitamo določene lastnosti nekega sistema. Kar pa je najbolj zanimivo in koristno, da lahko te sisteme spreminjamo in zamenjujemo število teles, ki ga tvorijo.

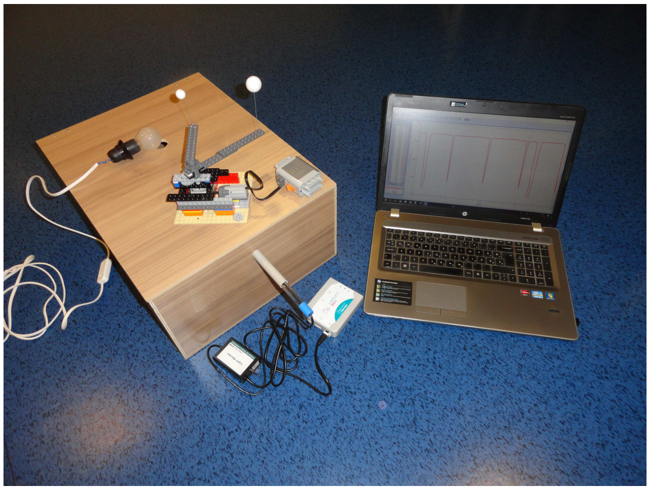


SLIKA 4.
Opazovanje odprtega sistema. Gimnazija Krško, 14. 12. 2018.

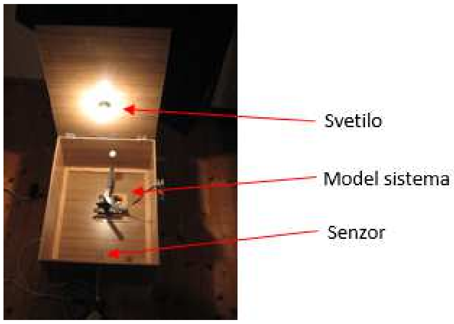
Prepoznavanje fizikalnih lastnosti objektov

Običajno nas zanima pri planetu njegova velikost, razdalja in obhodni čas. Na sliki 7 je karakteristika prehoda dveh planetov. Najnižji del svetlobe, ki se pojavi dvakrat in jo zabeleži senzor, nakazuje, da je en planet večji od štirih ponorov, ki jih povzroči v 20 sekundah drugi planet. Večkratni prehodi dokazujejo, da ima manjši večjo hitrost. To ugotovitev potrjuje tudi čas prekrivanja – tranzicije posameznih planetov.

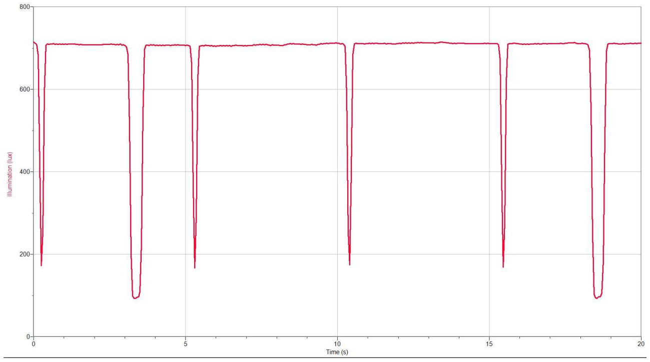
Iz strmine padanja in naraščanja svetlobe lahko dijak zaključi tudi lastnost prehoda, ki je časovno opredeljena.



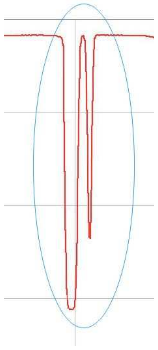
SLIKA 5.
Komplet za opazovanje gibanja »planetov okoli zvezde«



SLIKA 6.
Notranjost škatle



SLIKA 7.
Dva planeta



SLIKA 8.
Planet in njegova luna?

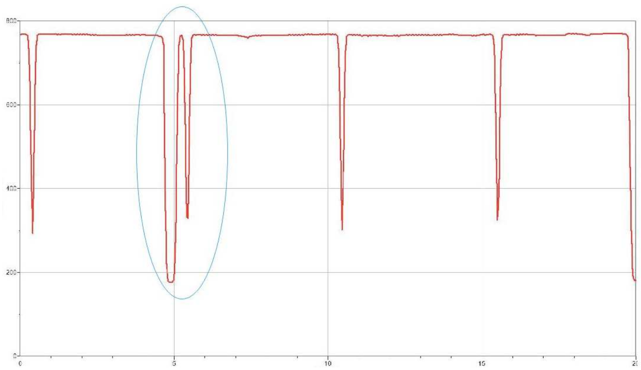
Interpretacije diagramov v prisotnosti lun, ki se gibljejo z drugačnim ciklom, kot druga telesa, lahko predstavlja dodaten izziv. Njihove motnje osvetljenosti se namreč pojavljajo zelo blizu glavnih ponorov svetlobe matičnega planeta. Tako bi detajl na sliki 8 lahko interpretirali, kot prisotnost lune v bližini planeta. Daljši časovni diagram na sliki 9 pa razkriva, da gre za manjši, hitrejši planet, ki se je v času 5 s nahajal skoraj v opoziciji večjega in počasnejšega planeta.

Diagram na sliki 10 predstavlja periodično pojavljanje lune na isti strani planeta. Takšna slika daje možnost predvidevanja hitrosti gibanja lune okoli svojega planeta. Kljub več mogočim rešitvam se iz razmerja podatkov lahko ugotovi, ali dijak razume obhodne čase planetov in lune.

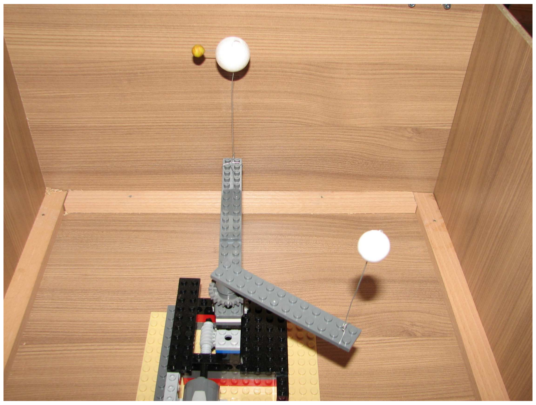
Merjenje obhodov

Obhodne čase ugotovimo in izračunamo s pomočjo tabele ali odčitka na diagramski koordinati časa Δt. Ugotavljanje obhodnih časov lahko razvijemo za medsebojne vplive planetov. Z ustreznim merilom se lahko lotimo tudi izračuna gravitacijskega vpliva.

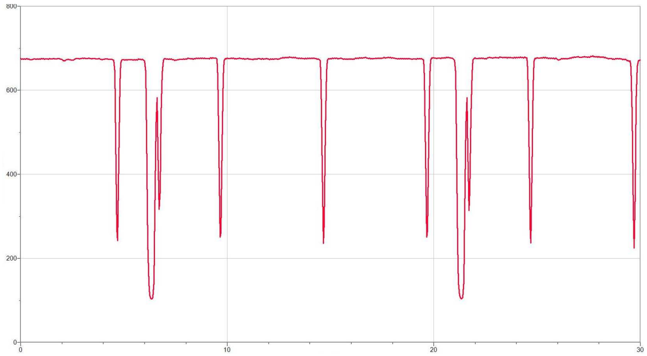
Z nastavljivim virom napajanja pogona sistema lahko vplivamo na hitrost mehanizma in obhodne čase posameznih teles. Zgolj zamenjava enega para zobnikov nam spremeni pogoje gibanja enega, več ali vseh teles v sistemu.



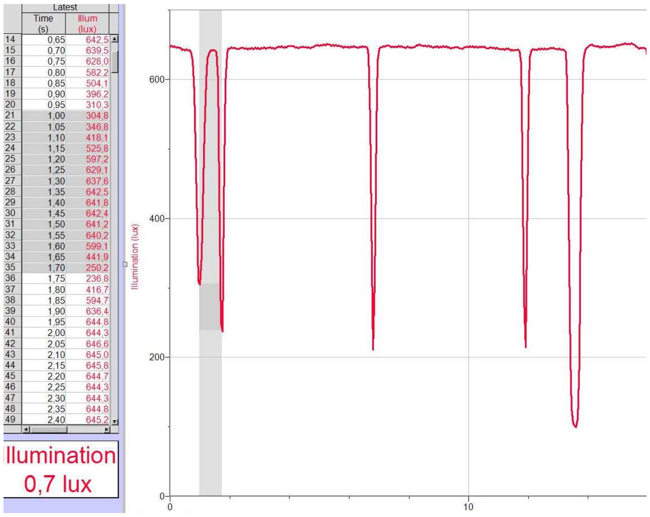
SLIKA 9.
Manjši in večji planet



SLIKA 11.
Luna



SLIKA 10.
Periodični pojav prisotnosti lune ob večjem planetu



	Latest Time (s)	Latest Illum (lux)
14	0,65	642,5
15	0,70	639,5
16	0,75	628,0
17	0,80	582,2
18	0,85	504,1
19	0,90	396,2
20	0,95	310,3
21	1,00	304,8
22	1,05	346,8
23	1,10	418,1
24	1,15	525,8
25	1,20	597,2
26	1,25	629,1
27	1,30	637,6
28	1,35	642,5
29	1,40	641,8
30	1,45	642,4
31	1,50	641,2
32	1,55	640,2
33	1,60	599,1
34	1,65	441,9
35	1,70	250,2
36	1,75	236,8
37	1,80	416,7
38	1,85	594,7
39	1,90	636,4
40	1,95	644,8
41	2,00	644,3
42	2,05	646,6
43	2,10	645,0
44	2,15	645,8
45	2,20	644,7
46	2,25	644,3
47	2,30	644,3
48	2,35	644,8
49	2,40	645,2

SLIKA 12.
Tabela omogoča zelo natančno določitev vseh časovnih podatkov.

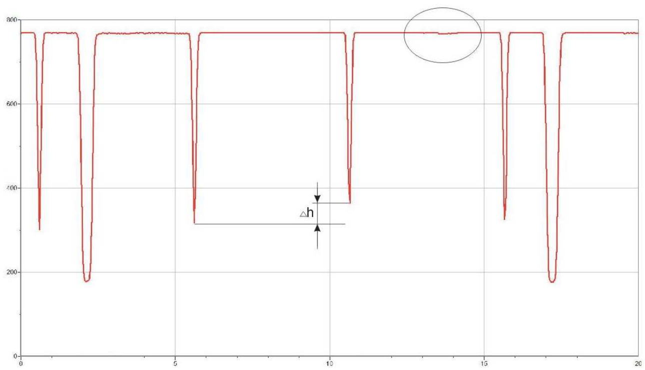
Računanje s 3. Keplerjevim zakonom

Za preračunavanje tirnic in časov pa je nujno najprej izbrati pravilna razmerja zobnikov (prestavno razmerje) in prirediti dolžine ročic mehanizma, ki zagotavljajo tudi uporabo 3. Keplerjevega zakona.

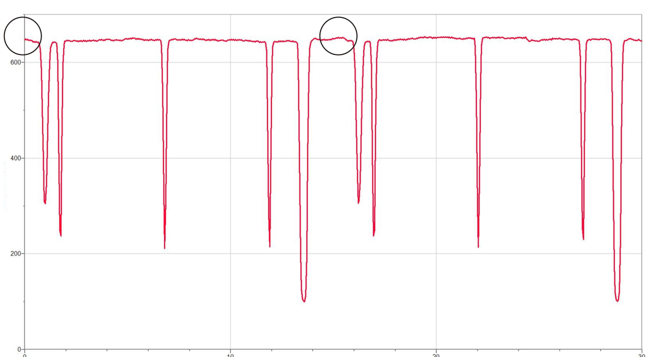
Optični pojavi

Natančno opazovanje izrisanih diagramov nam omogoča dodatno komponento spoznavanja ali utrjevanja znanja s področja geometrijske optike. Če je sistem dobro zaprt, se opazi vpliv odboja svetlobe med planeti. Anomalije na diagramih so lahko velik izziv za dodatna znanja in raziskovanja.

Na diagramski sliki 14 je viden zanimiv pojav. Pred prehodom rdečega planeta (slika 15) se pojavlja povečanje svetlobnega toka, ki ga zaznava senzor. Periodično ponovljiv vzorec kaže, da ne gre za napako pri merjenju, temveč za odboj dela svetlobe zvezde na desnem manjšem planetu. Potrditev domneve nedvomno lahko dokažemo z zamenjavo smeri vrtenja teles.



SLIKA 13.
Zakaj se pojavi razlika Δh?



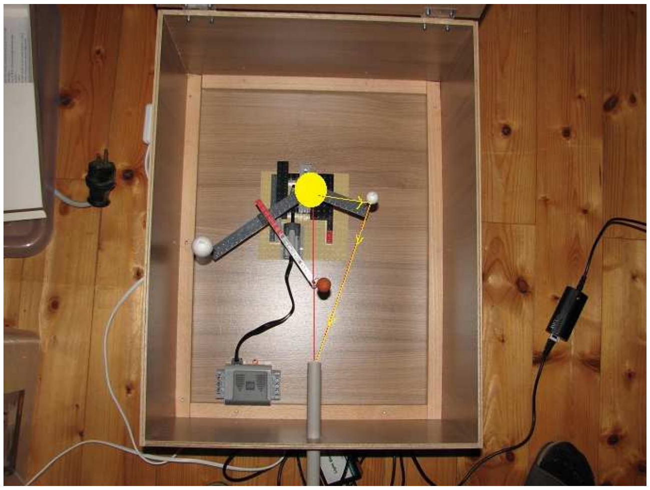
SLIKA 14.
Mesta povečanega svetlobnega toka

Orientacija – gledišče – pozicija merilnika

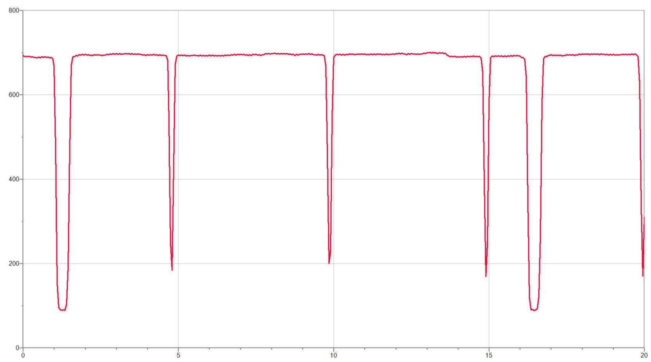
Merilnik osvetljenosti predstavlja točko opazovališča. Zaznava količino svetlobe, ki se ujame v senzorju na določeni površini. Zelo avtentično situacijo lahko zagotovimo s spremembo točke zaznavanja. To storimo z enostavnim krožnim zasukom mehanizma – sistema planetov. Dodatna prostorska projekcija omogoča razvoj boljše orientacije v prostoru.

Oblike modelov

Eksperimentalna naloga omogoča neomejeno vrsto konfiguracij, ki jih postavimo v opazovalni sistem. Oblike in število gradnikov, hitrosti gibanj (pogoni),

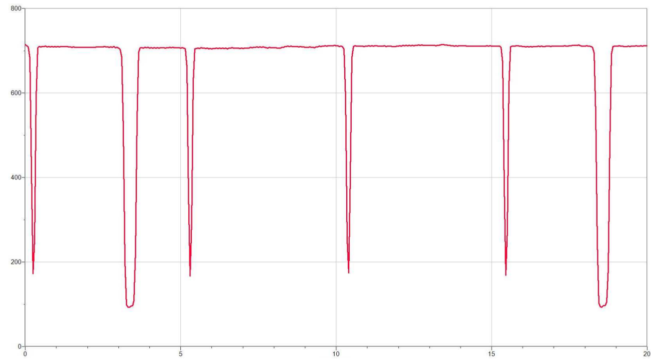


SLIKA 15.
Odboj od drugega planeta.

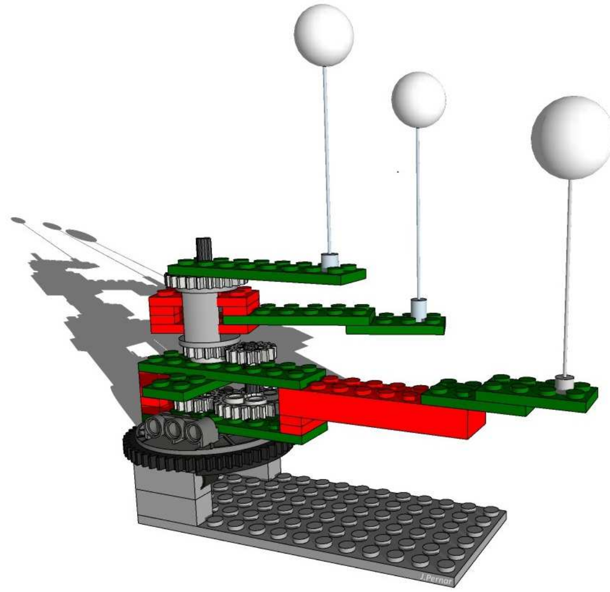


SLIKA 16.
Opazovališče 1

različne dimenzije objektov ter njihova geometrijska razporeditev nam omogočajo ogromno možnosti različnih situacij. Pri tem lahko izkoristimo kreativnost dijakov, kajti njihovo sodelovanje in medsebojne priprave modelov naredi delo še bolj zanimivo in raziskovalno.



SLIKA 17.
Opazovališče 2



SLIKA 18.
Model sistema

Zaključek

Astronomija bi morala ostati v šolskih učnih načrtih. Nudi nam poznavanje našega prostora in dogodkov v naši neposredni in daljni okolici. Klasično opazovanje s teleskopi velikokrat ni enostavno izvedljivo. Zelo veliko dejavnikov vpliva na izvedbo tovrstnega pouka. Naloga in delovni listi omogočajo delo v učilnici. Ne nadomeščajo klasične aktivnosti astronomije v naravi, a ponujajo metodo dela, ki je dokaj blizu realnemu raziskovanju. Naloga ponuja ogromno dejavnikov, s katerimi lahko delo zelo poenostavimo ali pa ga pripravimo, kot zahtevni del poučevanja.

Metoda omogoča kreativno delo v skupinah, kjer se razvija naravoslovna komunikacija. Interpretacija dogodkov in njihove napovedi pustijo dijaku veliko prostora za nova spoznanja. Poudarek je na branju diagramov in njihov smisel uporabe. Dijaki lahko pripravijo svoj model, ga zaklenejo in dajo v raziskovanje drugi skupini dijakov. Izmenjava idej, situacij in razprava po opravljenih nalogah krepijo naravoslovne kompetence tistih, ki so sistem pripravili, kot skupine, ki ga je raziskovala. Nalogo je mogoče pripraviti tudi za osnovnošolsko delo. Prvi rezultati na nivoju gimnazije so dali zelo zanimive rezultate, saj se poleg delovnih listov učitelja, pojavljajo tudi vprašanja in naloge sodelujočih dijakov.

Vsi diagrami in primeri so bili opravljeni novembra 2018 (oprema Vernier [5] in LoggerPro [6]).

Literatura

[1] G. Planinšič, *Aktivno učenje ob poskusih*, Ljubljana, DMFA – založništvo, Matematika-fizika, zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij, 2010.

[2] `en.wikipedia.org/wiki/Discoveries_of_exoplanets`, ogled 22. 1. 2018.

[3] `skupnost.sio.si/sio_arhiv/sirikt/www.sirikt.si/fileadmin/sirikt/predstavitve/2009/ZBORNIK_Sirkt2009.pdf`, J. Pernar, 599-604, ogled 22. 1. 2018.

[4] `www.vernier.com/products/sensors/light-sensors/ls-bta/`, ogled 22. 1. 2018.

[5] `www.vernier.com/`, ogled 22. 1. 2018.

[6] `www.vernier.com/products/software/lp/`, ogled 22. 1. 2018.

× × ×

Računalnik iz domin

↓↓↓
NINA SANGAWA HMELJAK, PRIMOŽ ŠKAFAR, MAJA ŠAFARIČ
MENTOR: VID KOCIJAN

→ **Moderni računalniški centri porabijo enormne količine električne energije, zato je v času globalnega segrevanja pomembno, da razmislimo o alternativnih načinih računanja, ki niso električno potratni. V tem članku nas bo zanimalo, ali lahko poljuben problem, ki ga lahko izračunamo s standardnim računalnikom, izračunamo s podiranjem domin.**

Z dominami bomo poskusili simulirati logične izraze in iz teh sestaviti teoretični model računalnika, imenovan Turingov stroj. Spoznali bomo idejo Church-Turingove hipoteze, ki pravi, da naj bi za vsak izračunljiv problem obstajal Turingov stroj, ki ga reši. Torej, če najdemo postopek za sestavo poljubnega Turingovega stroja iz domin, pokažemo, da lahko poljuben izračunljiv problem rešimo zgolj s podiranjem domin. Najprej bomo spoznali, kaj so logični izrazi in kaj je Turingov stroj. Iz domin bomo zgradili logične izraze, z logičnimi izrazi pa bomo Turingov stroj simulirali. Če se računalnik da simulirati z dominami, potem se ga da simulirati tudi z vsem, kar se obnaša podobno kot domine, npr. škatle za kosmiče, knjige, omare, ali pa kar nebotičniki (vsaj če si velikan v nizkokvalitetnem ameriškem filmu).

Logični izrazi

Neformalno povedano so logični izrazi funkcije logičnih spremenljivk, ki so povezane z logičnimi operacijami. Logična spremenljivka lahko zavzame le resnično vrednost »1« ali neresnično vrednost »0«. Logične izraze predstavimo s tako imenovano *resničnostno tabelo*. Vsak izraz lahko zapišemo v obliki resničnostne tabele, ki nam za vsako možno kombinacijo vrednosti vhodnih spremenljivk poda pripadajočo izhodno vrednost. Operacije, ki so nam relevantne, so:

- Negacija:

x	$\neg x$
0	1
1	0

- Konjunkcija:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Disjunkcija:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Strogi ali:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Disjunktivna normalna oblika

Pokazali bomo, da lahko za vsako resničnostno tabelo sestavimo logični izraz, ki se obnaša natanko tako, kot to velí resničnostna tabela.

→

Primer: Recimo, da želimo dobiti logični izraz, ki bo pri vseh kombinacijah vrednosti dveh spremenljivk pravilen. Za vsako možno kombinacijo vrednosti vhodnih spremenljivk najdemo konjunkcijo, ki je resnična natanko pri teh vhodih. Za vhod $x = 0$ in $y = 1$ je pripadajoča konjunkcija $\neg x \wedge y$, saj, če preberemo izraz, ta pravi, da je resničen natanko tedaj, ko x ni resničen, y pa je. Na levi strani spodnje sheme se nahaja resničnostna tabela, ki je vhod našemu postopku. Za vsako vrstico je na desni strani podan logični izraz, ki je resničen natanko pri kombinaciji vhodnih vrednosti podanih v isti vrstici.

x	y	rezultat logičnega izraza		
0	0	1		$(\neg x \wedge \neg y)$
0	1	1	→	$(\neg x \wedge y)$
1	0	1		$(x \wedge \neg y)$
1	1	1		$(x \wedge y)$

Nato izraze na desni povežemo z disjunkcijami, da dobimo izraz, ki je vedno pravilen:

- $(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$

Primer 2: Recimo, da želimo skonstruirati logični izraz, ki se obnaša kot naslednja logična tabela:

x	y	rezultat logičnega izraza
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

V tem primeru potrebujemo logična izraza, ki bosta pravilna zgolj za vhode v prvih dveh vrsticah tabele. Oba logična izraza povežemo z disjunkcijo, da dobimo nov logični izraz, ki je pravilen pri natanko zgornjih dveh vhodih.

x	y	rezultat logičnega izraza		
0	0	1	→	$(\neg x \wedge \neg y)$
0	1	1		$(\neg x \wedge y)$
1	0	0		↘
1	1	0		$(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$

Vidimo, da bodo izrazi, zgrajeni na tak način, vedno podobne oblike, to je, več konjunkcij, povezanih z disjunkcijami. Pravimo, da so ti izrazi v disjunktivni normalni obliki. Iz primerov zgoraj je razvidno, da lahko logični izraz v disjunktivni normalni obliki zgradimo za poljubno resničnostno tabelo. To pomeni, da lahko iz negacije, disjunkcije in konjunkcije zgradimo poljuben logični izraz. Če je vhodnih spremenljivk več, bo dolžina tega izraza naraščala eksponentno. To v praksi sicer ni optimalno, vendar, ker nas zanima zgolj »Ali se da?« in ne »Ali se da učinkovito?« se zadovoljimo tudi z zelo ogromnimi formulami, če le opravijo delo.

Poln nabor operatorjev

Če lahko iz nabora operatorjev sestavimo poljuben logični izraz, pravimo, da je tak nabor operatorjev poln. Dokažimo, da lahko sestavimo poln nabor tudi z manj operatorji. Najlažji način je, da z novim naborom izrazimo nabor, za katerega že vemo, da je poln, torej $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Negacija $(\neg)$ in disjunkcija $(\vee)$ sta poln nabor, saj lahko konjunkcijo $x \wedge y$ po De Morganovem zakonu izrazimo z $\neg(\neg x \vee \neg y)$

Logične operacije iz domin

Z dominami lahko modeliramo logične operacije. Logični izraz bomo zapisali kot zaporedje domin, tako da bo podiranje domin služilo kot proces računanja. Podrte domine predstavljajo logično vrednost 1, stoječe pa logično vrednost 0. Vrednost vhodnih spremenljivk vnesemo tako, da podremo pripadajoče vrste domin, nato pa počakamo, dokler se proces podiranja domin ne zaključi. Na drugi strani zaporedja podrte oziroma stoječe vrste predstavljajo izhodno vrednost spremenljivk.

Računanje v notranjosti zaporedja poteka preko logičnih operacij, ki jih sestavimo iz domin. Uporabljene logične operacije so predstavljene na slikah 1, 2 in 3. Na skicah se domine podirajo od spodaj navzgor.

Dokažimo, da je nabor $\{\vee, \oplus, 1\}$, ki smo ga sestavili iz domin, poln. Konstanto 1 predstavimo kot vrsto domin, ki jo na vhodu zagotovo podremo, preostali dve operaciji pa sta bili predstavljeni na slikah 1, 2 in 3.

1	y	$x \oplus 1 = \neg x$
1	0	1
1	1	0

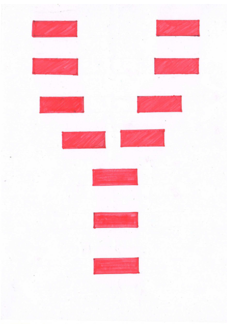
Iz tega lahko zaključimo, da iz domin lahko sestavimo tudi nabor $\{\neg, \vee\}$, za katerega smo že dokazali, da je poln. Torej lahko iz domin sestavimo poljuben logični izraz.

Turingov stroj

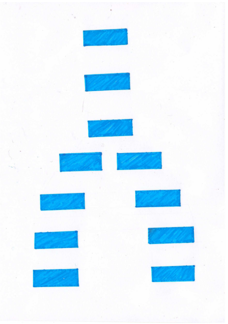
V tem razdelku vpeljemo skico definicij in nekaterih dokazov v zvezi s Turingovim strojem. Ker gre za matematično precej kompleksen model, se bomo natančnim definicijam ognili. Bralec, ki ga zanima točna izpeljava, lahko to najde v knjigi [1]. Turingov stroj je abstrakten model računanja, ki sledi strogim navodilom. Deli takšnega stroja so:

- Neskončen trak – To je spomin, na katerem so napisane 0, 1 (vhodni podatki) in prazna polja. Spomin je neomejen.
- Glava – Glava po traku bere in zapisuje podatke. V vsakem koraku se nahaja nekje na traku, kjer vsebino polja lahko prebere in prepiše, nato pa se premakne za največ eno polje levo ali desno.
- Stanja in prehodi med njimi – So stroga, natančna navodila za delovanje stroja. V vsakem koraku je stroj v enem izmed sranj. Glede na trenutno stanje stroja in znak pod glavo, prehodi natančno določajo, kaj glava zapiše na trenutno mesto, kam se premakne in v katerem stanju bo Turingov stroj v naslednjem koraku.

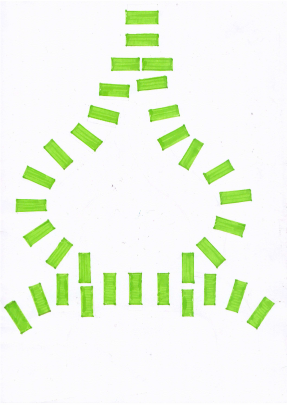
Alan Turing si je Turingov stroj zamislil leta 1936 in z njim matematično opredelil pojem računalnika in izračunljivosti. Turingovi stroji so po zmožnosti tega, kaj je z njimi mogoče izračunati, ekvivalentni računalniškim programom.



SLIKA 1.
Kopiranje: Iz enega vhoda dobimo dva izhoda (kopiranje vrednosti vhodne spremenljivke). Ta vrata uporabimo, če se neka spremenljivka v izrazu pojavi več kot enkrat.



SLIKA 2.
Disjunkcija dveh vhodnih spremenljivk



SLIKA 3.
Strogi ali dveh vhodnih spremenljivk

Turingov stroj ima končno število stanj in je v vsakem trenutku v enem izmed teh stanj, zato ga lahko predstavimo z nizom ničel in enic. Za fiksne vhodne podatke so izhodni podatki vedno enaki in ponovljivi, saj rezultat ni odvisen od zunanjih dejavnikov ali naključja.

Church-Turingova hipoteza

Church-Turingova hipoteza pravi, da za vsak izračunljiv problem obstaja Turingov stroj, ki ga reši. Torej, če Turingov stroj, ki reši problem, ne obstaja, je problem neizračunljiv tudi z najmočnejšim računalnikom. To je le hipoteza in je ne moremo dokazati, a vseeno služi kot definicija izračunljivosti. Resnična je za vse do sedaj znane praktične modele računanja.

Simulacija Turingovega stroja z logičnimi izrazi

Ker bi bil temeljit dokaz obsežen in zahteven, bomo skicirali zgolj glavne točke. Nadobudnega bralca pa vzpodbujamo, naj si več prebere v literaturi [1]. Glavne točke dokaza:

- Turingovega stroja ni mogoče predstaviti le z enim končnim logičnim izrazom. Vsak logični izraz ima fiksno velikost, vhod Turingovemu stroju pa je lahko poljubno velik. Zato popravimo naš cilj in Turingov stroj predstavimo z družino izrazov: Za vsako dolžino niza vhodnih podatkov drugačen logični izraz.
- Z logično funkcijo predstavimo i-ti korak Turingovega stroja. Vemo, da je stanj Turingovega stroja končno mnogo. Vhodnih podatkov Turingovemu stroju je bilo prav tako končno mnogo in zaradi popravljenega cilja vnaprej znano (recimo, da je bilo popisanih d elementov traku), torej je po i korakih zagotovo popisanih največ $d+i$ polj traku. Iz tega zaključimo, da je vhodnih (in izhodnih) spremenljivk naši logični funkciji končno mnogo in jo lahko sestavimo iz domin.
- Iz zgornjih dveh alinej zaključimo, da lahko rezultat enega koraka Turingovega stroja izračunamo z dominami.
- Če poznamo zgornjo mejo števila korakov Turingovega stroja, ga torej lahko predstavimo kot kompozicijo funkcij, ki izračunajo posamezne korake. Žal pa se nekateri Turingovi stroji nikoli ne ustavijo, zato bi za simulacijo takih strojev potrebovali neskončno mnogo domin.

Praktična izvedba

Nekateri Turingovi stroji se na nekaterih vhodih ne ustavijo, ampak računajo v nedogled. Da bi tak račun simulirali, bi torej potrebovali neskončno mnogo domin, ali pa tekoči trak in robota, ki bi domine postavljal hitreje, kot se podirajo. Posledično je sestava Turingovega stroja zelo težka. Vzrok za to izhaja iz narave domin, saj se vsaka domina podre samo enkrat – realizacija povratnih zank ni mogoča. Kljub temu so preproste programe, kot je seštevanje dveh števil, že sestavili iz domin, posnetki teh eksperimentov pa so dostopni na spletnemu portalu Youtube.

Vabilo na MaRS 2019

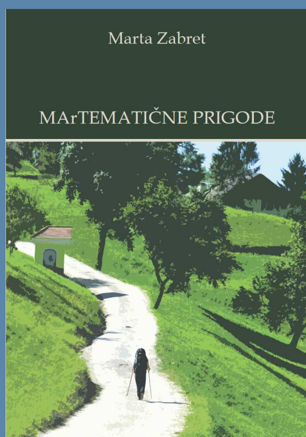
Zgornji članek je nastal kot povzetek projekta, izdelanega na matematičnem taboru MaRS 2018. Bralce vabimo, da se nam pridružijo prihodnje leto, več na `http://mars.dmfa.si/`.

Literatura

[1] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, Course Technology, second edition, 2006.

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.

↓↓↓

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 46/3

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz tretje številke Preseka je **Žvrgolej.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Daniel Šimić iz Kopra, Nena Šefman Hodnik iz Logatca in Blaž Anžič iz Ljubljane, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Dvojni hálo

↓↓↓
Elza Rebol

→ Čudovita igra svetlobe z neba, snežna dežela in ples Sonca nad nami očarajo in navdušijo. Vsi poznamo različne pojave v naravi, ki jih pričara svetloba. Opazimo jih lahko vsepovsod, ne samo na nebu, a za zdaj se posvetimo tem. Najbolj znana je zagotovo mavrica. Bolj pogost, a manj opazen pojav je halo. Opazimo ga kot svetel obroč, ki obkroža Sonce na kotni razdalji 22° stopinj, redkeje pa opazimo drugega na kotni razdalji 46°. Halo lahko opazimo povsod po svetu in skozi celo leto. V hladnem vremenu ga lahko opazimo tudi okoli Lune (največkrat ga opazimo ob polni Luni) ali uličnih svetilk, pomembno je le to, da je v zraku dovolj ledenih kristalov.

Kot številni drugi svetlobni pojavi, je tudi halo posledica loma in odboja sončne svetlobe, in sicer na mnogih ledenih kristalih v ozračju. Običajno se ti nahajajo v oblakih, cirusih, na sredini troposfere, okoli 5 do 10 km nad zemeljskim površjem. Skoraj vsi ledeni kristali v ozračju so šestkotne prizme, se pravi, da sta osnovni ploskvi v obliki šestkotnika, stranske ploske pa z njima oklepajo kot 90°. Dolžina stranskih ploskev določa višino prizme. Lahko je bolj podolgovata ali bolj sploščena, vsem pa je skupna šestkotna oblika. Toda vsi ledeni kristali ne povzročijo halojev. Pomembna je namreč njihova velikost. Za nastanek haloja morajo biti kristali veliki med 0,05 in 0,1 mm (debelina človeškega lasu). Če so manjši, se večina svetlobe ukloni in haloji so zelo šibki ali preprosto neopazni. Če so večji od desetinke milimetra, izgubljajo šestkotno obliko in urejenost. Svetloba prehaja skozi stranske ploskve, zato je za nastanek haloja pomembno, da je glavna os kristalov približno pravokotna na sončne žarke. Po dvakratnem lomu, prvič, ko svetloba vstopi v led, in drugič, ko izstopi v zrak, je izstopni kot med 22° in 50° glede na vpadni žarek. Noben žarek se ne lomi pod manjšim kotom, zato je notranji rob haloja oster. Natančnejši opis nastanka haloja lahko poiščete v starejših Presekih (24/1, 24/3 in 44/3). Večji obroč, 46° halo, nastane enako kot 22° halo, le da se v tem primeru svetloba lomi na dveh ploskvah, ki sta med seboj pravokotni, bodisi ploskvi pravokotne prizme bodisi osnovnica in ena od stranskih ploskev šestkotne prizme.

Del haloja pa niso le svetli obroči, ampak tudi parhelij, sosonca ali pasonca. Parhelij sta dve svetli lisi na levi in desni strani Sonca. Bolj verjetno je, da ga opazimo ob vzhodu ali zahodu, ko je Sonce nižje nad obzorjem. Nastane zaradi loma na močno ploščatih kristalih. Zaradi gravitacije se kristali obrnejo vzporedno s horizontom opazovalca, zato opazimo zgolj svetlobo, ki se lomi na kristalih, ki se nahajajo na enaki višini kot Sonce. Svetloba vstopa v kristal skozi stranske ploskve in se v njem dvakrat lomi. Velikokrat sosonca spremlja halo. Več o sosoncih lahko preberete tudi v Preseku 43/1. Ob sosoncih težko in redko opazimo Lowitzove loke. Loki nastanejo na podoben način kot sosonca, le da na njihov nastanek vpliva to, da med počasnim padanjem vodoravno ležeči kristali nihajo okoli ene izmed svojih vodoravnih osi. Več o lokih je v Preseku 24/1.

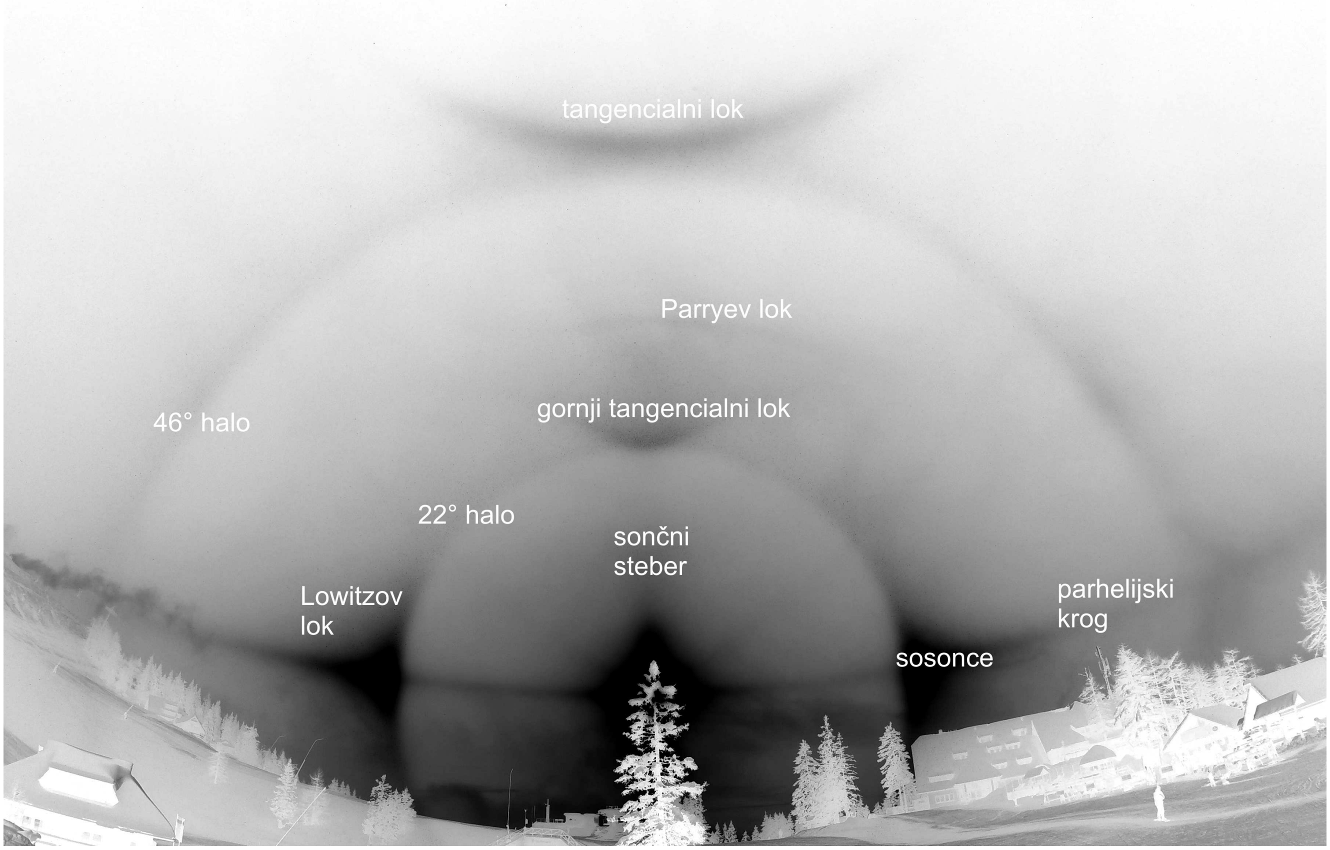
Še en spremljevalec haloja je tudi tangencialni ali sončni lok, ki se pojavi nad Soncem ali pod njim in se obroča haloja tangentno dotika. Pojavi se, kadar je Sonce med 22° in 29° nad obzorjem. Nastane zaradi paličastih kristalov, ki so z daljšo simetrijsko osjo obrnjeni horizontalno. Nad tangencialnim lokom se pne redko viden Parryjev lok. Lok nastane zaradi loma na podolgovatih kristalih, ki nimajo vodoravne le daljše simetrijske osi, temveč imajo vodoravne tudi dve od stranskih ploskev prizme.

Pri vseh pojavih lahko opazimo, da je notranji rob bolj rdeče barve. To se zgodi zaradi disperzije, ki je tudi razlog za barvno zaporedje v mavrici. Vsaka barva ima svojo valovno dolžino. Najdaljšo valovno dolžino ima rdeča svetloba, sledijo ji oranžna, rumena, zelena, modra, najkrajšo valovno dolžino pa ima vijolična svetloba. Svetloba z različno valovno dolžino se v ledu zaradi disperzije lomi pod različnimi koti, kljub istemu vstopnemu kotu. Svetloba z večjo valovno dolžino se lomi pod manjšimi koti, zato je rdeča na notranjem robu loka. Nad in pod soncem se kot del haloja lahko pojavi tudi sončni steber (več v Presek 38/6). Ti nastanejo zaradi odboja svetlobe na osnovnicah ploščatih kristalčkov, ki se uredijo tako, da je njihova simetrijska os navpična.

Tudi nad 46° halojem opazimo tangencialni (Gallejev) lok, nekaj stopinj nad njim pa je cirkumzenitalni (Bravaisov) lok, ki ima izrazite mavrične barve. Tangencialni lok nastane zaradi loma na kristalih z obliko pravokotne prizme z vodoravnimi lomnimi ploskvami. Skozi Sonce, vodoravno, vzporedno z obzorjem poteka parhelijski krog. Ta ni obarvan, kar namiguje, da nastane zaradi odboja in ne loma. Do odboja prihaja na stranskih ploskvah podolgovatih kristalov, katerih osi so usmerjene navpično.

Vsi opisani deli haloja so označeni na sliki 1.

Zima torej ne navdušuje samo zaradi vseh radosti, ki jih lahko doživimo na snegu, temveč tudi zaradi različnih fizikalnih pojavov, ki jih lahko opazujemo.



SLIKA 1.
Deli haloja, ki so vidni na sliki z naslovnice.

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR

14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!