

Preiskovalne naloge pri matematiki¹

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Uvod

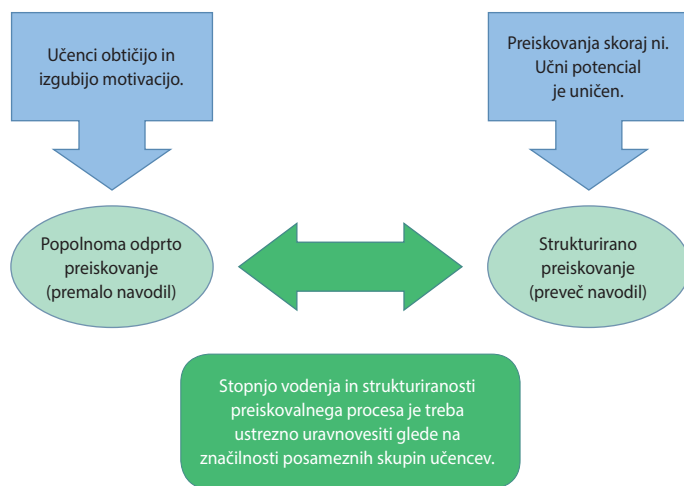
V matematiki se kot prevod termina Inquiry Based Learning (IBL) uveljavlja *učenje s preiskovanjem* (Suban M., 2017). Magajna in Žakelj (Magajna Z., Žakelj, A., 2000) v kontekstu obdelave podatkov navajata, da s **preiskovanjem označujemo osnovno-šolsko obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji**. Postopoma je učenje s preiskovanjem preseglo omejitve na določeno matematično vsebino ali nivo izobraževanja ter se uporablja kot pristop k učenju in poučevanju matematike s poudarjeno aktivno vlogo učenca.

Preiskovalni pristop je našel pot tudi v učne načrte in kataloge znanj, kjer se pojavi na ravni didaktičnih priporočil kot priporočen način obravnave posameznih matematičnih vsebin. Navajamo zapis iz učnega načrta v osnovni šoli: *branje z razumevanjem, samostojno oblikovanje vprašanj in ciljev raziskovanja, izpisovanje bistvenih trditev in podatkov, razprave o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, prevajanje besedilnih nalog v različne sheme (enačbe, diagrame, formule, algebrske izraze, geometrijske konstrukcije itd.) ter podobni preiskovalni pristopi omogočajo učencem uspešnejše reševanje besedilnih nalog*. Poleg tega, da je preiskovanje prisotno v didaktičnih priporočilih, ga v obliki dokaza o učenju najdemo tudi med operativnimi cilji, npr. v učnem načrtu je med cilji v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju navedeno, da učenci izdelajo *empirično preiskavo*.

Preiskovanje se prične z odprtim problemom ali vprašanjem, v nadaljevanju procesa pa učenec lahko oblikuje dodatna vprašanja (za razjasnitev izhodiščne situacije ali za določanje cilja),

opazuje, prepoznava vzorce, rešuje problem, modelira, matematizira, išče vire in ideje, raziskuje, analizira odnose med spremenljivkami, eksperimentira, postavlja domneve, preizkuša domene, razlaga in utemeljuje svoje ugotovitve, predstavlja svojo preiskovalno pot in sporoča dokončne ugotovitve (Slika 1).

Preiskovanje lahko pri pouku matematike poteka v različnih oblikah in v različnih časovnih obsegi: kot krajša nekajminutna dejavnost do daljše (lahko skozi daljše časovno obdobje) dejavnosti, ki se lahko zaključi z oblikovanjem izdelka v obliki matematične ali empirične preiskave. Z vidika odprtosti procesa preiskovanja oziroma količine navodil, ki jih učenci dobijo za svoje delo, ločimo več možnosti. Učitelj prilagodi stopnjo odprtosti za različne skupine učencev na način, da ohrani didaktični potencial naloge in motivacijo učencev (Slika 2).



Slika 2: Stopnja odprtosti preiskovalnega procesa



Slika 1: Dejavnosti učenca v procesu preiskovanja

V razvojni nalogi so učitelji z učenci preizkušali različne preiskovalne naloge in poročali o svojih izkušnjah. Poročali so, da so bili nekateri učenci ob prvem srečanju s preiskovalnimi nalogami precej zmedeni in negotovi. Niso vedeli, kaj se od njih pričakuje in kaj morajo izračunati. Zastavljali so vprašanja, kot npr. kaj moram narediti, kaj naj napišem, kaj naj izračunam, kaj je rezultat. Ko so pristop s preiskovanjem pri pouku večkrat uporabili, so postopoma prepoznali njegov namen in učitelji so ugotavljali, da so se nekateri učenci izkazali nad pričakovanji.

¹ Prispevek je objavljen v e-priročniku *Ugotavljanje matematičnega znanja*, str. 13–17 in 31–37.

Ob tem so učitelji opozorili na svojo spremenjeno vlogo, za katero je značilno, da učitelj:

- načrtuje in predstavi raznolike probleme, ki učence spodbudijo k razmišljanju ob usvajanju vsebine in ustvarjanju povezav,
- vzpostavi sodelovalno okolje, v katerem učenci izmenjujejo ideje,
- zastavlja vprašanja, ki sprožajo miselne procese, omogočajo komunikacijo, podpirajo učence pri preiskovanju, razkrivajo napačne predstave učencev, odpirajo prostor za raziskovanje alternativnih poti,
- ustvarja priložnosti, da učenci prevzemajo odgovornost za učenje in jih podpira pri prevzemanju dejavnejše vloge.

Pri podpiranju učencev pri preiskovanju je pomembno, da učitelj s premišljenimi vprašanji usmerja miselne procese učenca, pri tem pa mu ne razkrije strategije reševanja ali rešitve. Učitelju in učencu so lahko v pomoč nekatera vprašanja v nadaljevanju. Vprašanja so lahko na plakatu pripeta na vidno mesto v učilnici in jih učenec uporabi, ko pri preiskovanju obtiči ali zaide (Slika 3).



Slika 3: Vprašanja v podporo procesu preiskovanja

Scenariji izvedbe učne ure, pri kateri učenci izvajajo preiskovalne dejavnosti, so lahko precej različni. Razlikujejo se lahko v deležu časa, ki je znotraj učne ure namenjen preiskovanju, obliki dela (individualno, v paru, skupinsko), stopnji odprtosti problema in s tem povezane podporne vloge učitelja, namenu in ciljih preiskovalnih dejavnosti (npr. obravnavanje procesnih ciljev skozi preiskovalne dejavnosti, ugotavljanje matematičnih zakonitosti, pravil, formul, uvod v novo vsebino ...).

V primeru, ko se raziskovalnim dejavnostim posveti (vsaj) ena učna ura v celoti, proces preiskovanja lahko v razredu teče po korakih, ki jih prikazuje Slika 4. Koraki so sestavljeni iz uvodnega seznanjanja s problemom in razjasnjevanja konteksta, iz samostojnega preiskovanja v paru ali skupini, predstavitev rešitev parov ali skupin ter iz povzetka ugotovitev v formalni obliki. Slednje opravi učitelj, pri čemer obvezno izhaja iz ugotovitev, ki so jih predstavile posamezne skupine. Znanje v institucionalizirani obliki učitelj navadno zapiše na tablo, učenci pa zapišejo v svoje zapiske. Koraki so povzeti iz projekta MERA, kjer je bilo teoretično izhodišče Teorija didaktičnih situacij (Winslow, 2017).



Slika 4: Možni koraki za izvedbo preiskovanja pri pouku matematike

Ko so se učenci navadili na način dela s preiskovanjem, so lahko pričeli z vrednotenjem kakovosti svojega preiskovalnega procesa in izdelka, ki je ob tem nastal. V ta namen je v razvojni skupini nastal predlog splošnih kriterijev za vrednotenje preiskovalnih nalog z opisniki na treh ravneh (Preglednica 1). Splošni kriteriji se lahko prilagodijo ali razširijo glede na vsebinska in procesna znanja, ki jih pri preiskovanju razvijamo, in glede na obseg preiskovanja.

Preglednica 1: Splošni kriteriji za vrednotenje preiskovalnih nalog z opisniki na treh ravneh znanja

Kriterij	Opisnik za minimalni dosežek		Opisnik za optimalni dosežek
Razumevanje problema	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov (lahko s pomočjo učitelja), lahko so prisotne napake (računske, napake v zapisu ...).	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov (s pomočjo/z namigom).	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov, iz katerih razvije strategijo.
Strategija reševanja	Učenec izbere in uporabi strategijo, ki je napačna ali pravilna le za nekaj primerov. Sistematičnost je vidna le v posameznih primerih, ob oporah učitelja. Lahko so prisotne napake (računske, napake v zapisu ...).	Učenec izbere ali uporabi strategijo, ki je pravilna, vendar uporabljena napačno ali pa je strategija manj primerna za dani primer. Sistematičnost je vidna v večini primerov (lahko s pomočjo učitelja).	Učenec izbere in uporabi pravilno strategijo. Sistematično (na različne načine) razižče različne primere glede na določene kriterije.
Zapis ugotovitev	Pri reševanju učenec opazi neke zakonitosti, pravila, vzorce, posplošitve ubesedi in zapiše delne ugotovitve.	Zapisane ugotovitve so jasne in pravilne. Nekatere pričakovane ugotovitve so izpuščene.	Vse pričakovane ugotovitve so jasno zapisane in so pravilne.

V rubriki *Iz razreda* navajamo dva primera priprave na pouk dveh učiteljic, v katerih sta uporabili pristop s preiskovanjem.

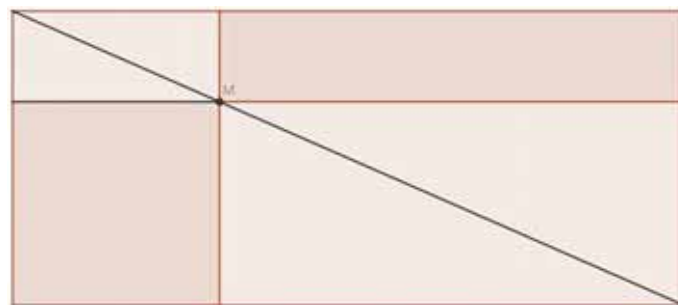
Nabor nalog za preiskovanje pri matematiki

Za preiskovalne naloge se lahko učitelj odloči v različnih fazah vzgojno-izobraževalnega procesa:

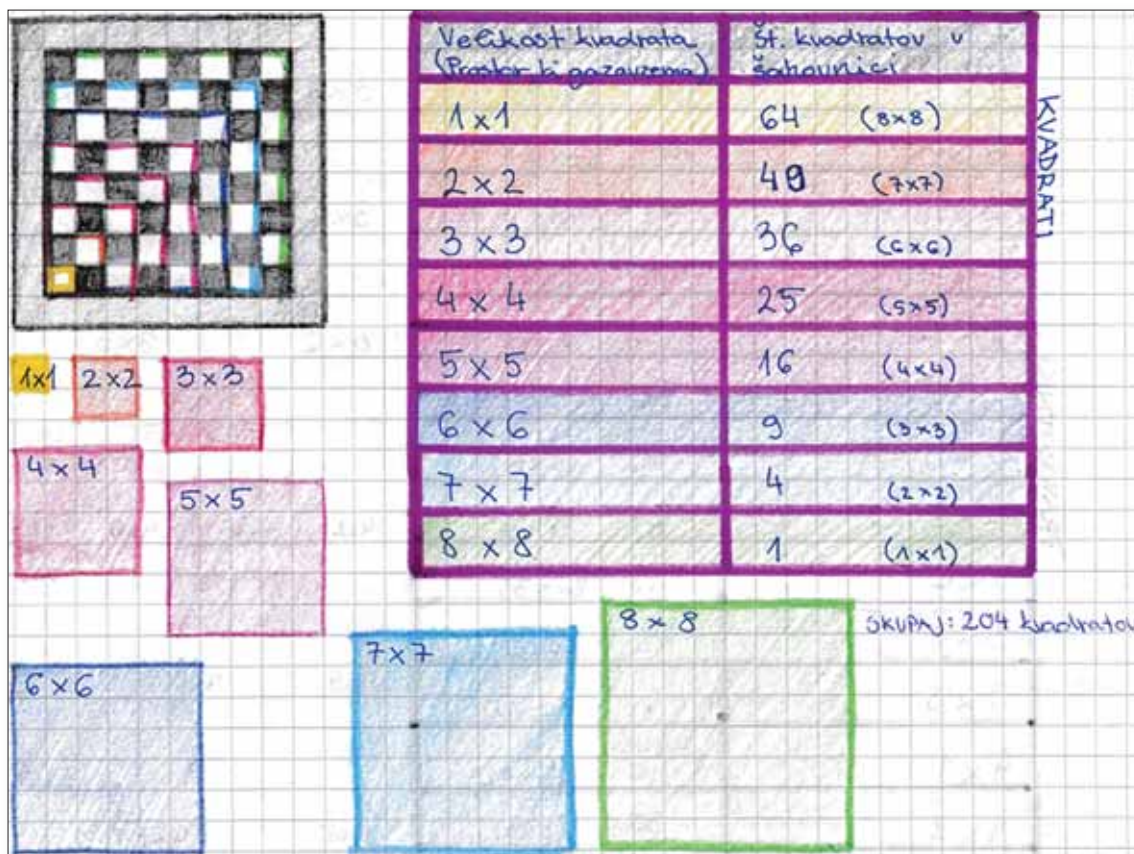
1. pri ugotavljanju in aktivaciji predznanja,
2. pri uvajanju v nov matematični pojem in vsebino,
3. pri utrjevanju in ponavljanju že naučenih vsebin,
4. pri poglobljanju in širjenju že obravnavanih vsebin,
5. pri ugotavljanju in vrednotenju znanja,
6. pri povezovanju različnih (matematičnih) vsebin.

V nadaljevanju navajamo nekatere primere preiskovalnih nalog, ki jih lahko učitelj uporabi po lastni presoji glede na razred, v katerega bo nalogo smiselno vključil, namena, ki ga želi z uporabo naloge doseči, ter ciljev in standardov, ki jih skozi nalogo dosejajo učenci. Nekatere naloge obravnavajo matematični kontekst, nekatere pa so iz konteksta vsakdanjega življenja. Razlikujejo se tudi po obsežnosti in vključujejo primere, ki jih lahko učenci rešijo v krajšem času, in primere, ki zahtevajo bolj poglobljeno obravnavo, v katero je lahko zajeto tudi pridobivanje relevantnih podatkov in jih lahko učenci na koncu oblikujejo v bolj formalni zapis kot matematično ali empirično preiskavo. Opozorili bi še, da se lahko nekatere naloge uporabijo v različnih razredih, pri čemer pri pričakovanih ugotovitvah učencev in stopnji formalnosti zapisov učitelj upošteva starost učencev in njihovo znanje matematike. Pozornost je treba nameniti tudi morebitnim pastem preiskovanja, kot so: rutinsko ugotavljanje pravil, pretirana usmerjenost na manj pomembne nematematične vidike problema in neprepoznavanje povezanosti preiskovanja z obravnavanimi matematičnimi vsebinami.

1. Razišči, koliko kvadratov se nahaja v šahovnici. (Primer reševanja učencev je prikazan na Sliki 5 in Sliki 6.)
2. Razišči, koliko pravokotnikov se nahaja v šahovnici.
3. Razišči, na koliko delov lahko razdelimo krog s premicami, ki dvakrat sekajo krožnico.
4. Razišči, koliko skupnih točk lahko ima premica s stranicami 7-kotnika.
5. Razišči, koliko skupnih točk lahko imajo stranice dveh 6-kotnikov.
6. Razišči, s katerimi števki se končujejo kvadrati števil.
7. Razišči, s katerimi števki se končujejo kubi števil.
8. Razišči, kaj se dogaja na naslednji sliki, ko točka M potuje po diagonali danega pravokotnika. Kaj bi lahko raziskoval? Zapiši nekaj svojih predlogov. Izberi si eno od možnosti in jo razišči.

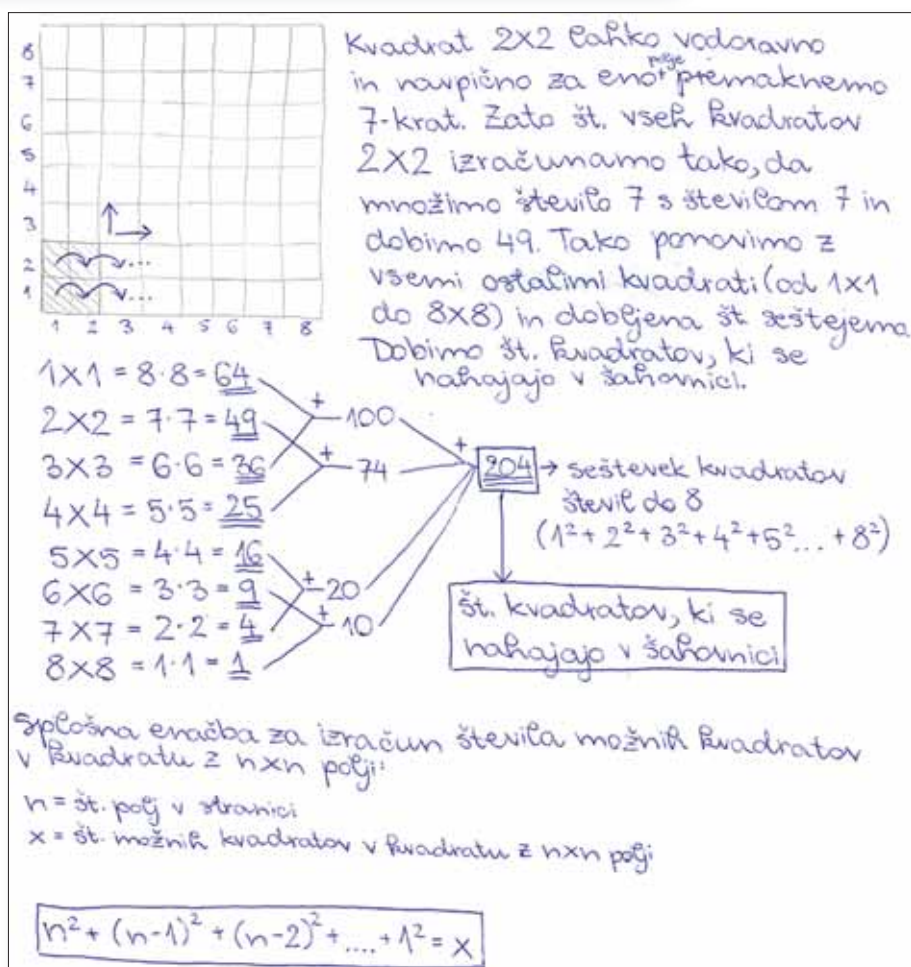


9. Najdi podatek, kaj je to palindromsko število. Nato razišči, kako pogosta so palindromska števila. Svoje ugotovitve prikaži na čim bolj jasn in zanimiv način.
10. Razišči palindromska praštevila. Razišči, katero je najmanjše trimesno praštevilo. Katero je najmanjše (največje) štirimesno praštevilo?

**Slika 5:**

Primer izdelka
učenke 8. razreda
OŠ Leskovec
pri Krškem
(Mentorica:
Tatjana Kerin)

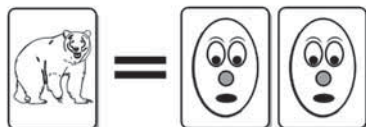
- Obravnavaj enakokrake trapeze s ploščino 24 cm^2 .
- Razišči količnike, ki nastanejo pri deljenju števila 1 z naravnim številom. (Calder, 2011)
- Razišči like, ki nastanejo kot presečišče dveh (enakostraničnih) trikotnikov.
- Na geoplošči razišči pravokotnike s ploščino 6 kvadratnih enot in ugotovi, kolikšen je njihov obseg.
- Kvadrat lahko razdelimo na manjše kvadrate. Razišči, na koliko manjših kvadratov ga lahko razdelimo. Če obstaja več rešitev, zapiši vse. Ali obstaja tako število n , da je razdelitev kvadrata na n manjših kvadratov nemogoča? Zapiši vse rešitve. (Fisch, 2018)
- Kateri jogurti so bolj zdravi: sadni ali navadni jogurti? Utemelji svoj odgovor.
- Za kakšen namen tvoji sošolci največ uporabljajo mobilni telefon (razgovor, SMS, brskanje po internetu ...)?



Slika 6: Primer izdelka učenke
8. razreda OŠ Leskovec pri Krškem
(Mentorica: Tatjana Kerin)

18. Kako vplivajo temperature zraka na obisk lokalnega kopališča?
19. Katera imena so najbolj priljubljena v tvojem razredu, na tvoji šoli, v državi? Pomagaj si z virom na spletni strani Statističnega urada RS <http://www.stat.si/imena.asp>.
20. Nejc je opazil plakat, ki vabi na otroško igrišče na menjavo sličic. Ker je vedel, da njegova mlajša sestra zbira sličice, si je plakat pozorno ogledal. Ugotovil je, da bo menjava potekala čez tri ure. S telefonom je fotografiral del plakata, kjer sta zapisani pravili menjave.

Na otroškem igrišču je stojnica, kjer lahko otroci med seboj menjajo sličice.



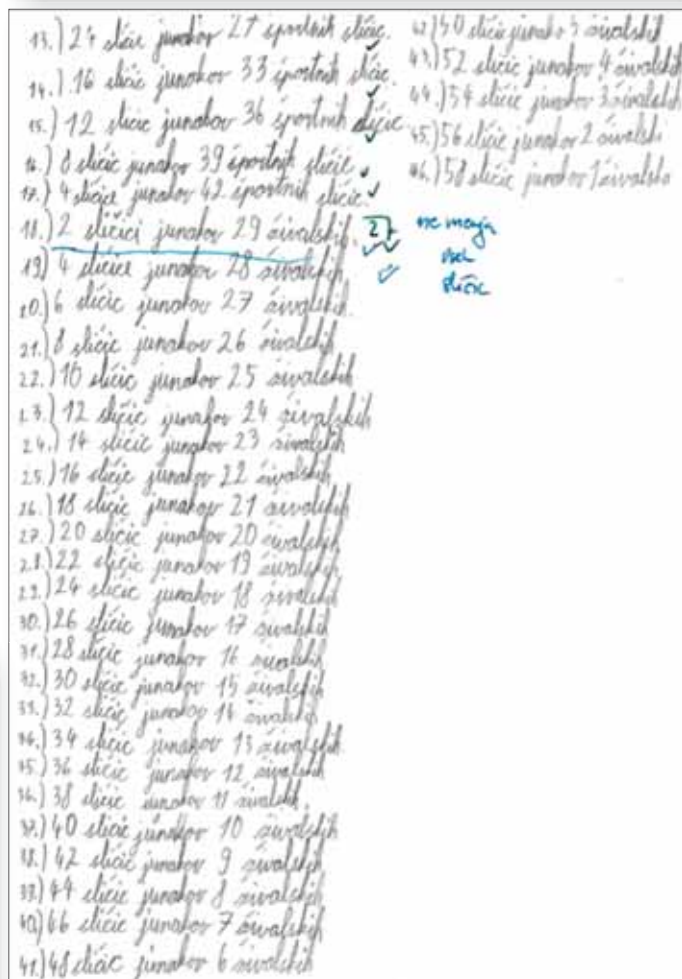
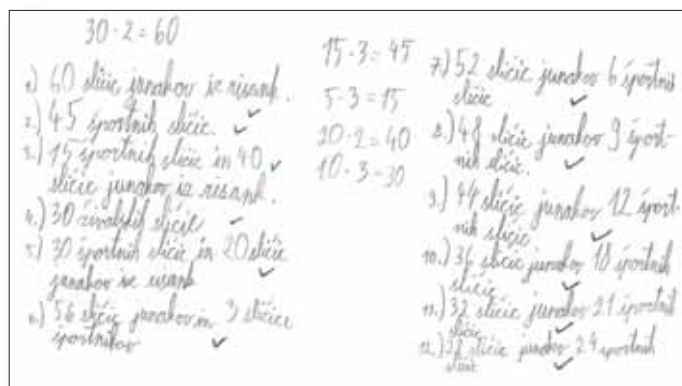
1 živalska sličica je vredna 2 sličici z junaki iz risank.



2 živalski sličici sta vredni 3 športne sličice.

Ko je prišel domov, je fotografijo pokazal Petri, ki se je odločila, da bo šla na otroško igrišče. Nejcju je povedala, da ima 30 živalskih sličic za menjavo na stojnici. Katere sličice ima lahko Petra po menjavi? Razišči vse možnosti. (Nalogo je po TIMSS 2011 (Japelj Pavešić, 2012) priredila mag. Valentina Herbjaj. Primer reševanja učenca je prikazan na sliki 7.)

- Ne glede na spreminjanje vrednosti a -ja je vsem funkcijam skupna točka $(2,1)$.
- Vrednost a vpliva na nagnjenost funkcije.
- Če je $a=0$, je funkcija enaka 1 ($f(x) = 1$).
- Če je a več od 0 funkcija narašča, če je a manj od nič funkcija pada.
- V kolikor je a več ali manj od 0, je funkcija vsaj na nekem intervalu negativna.
- Funkcija je splošno, če je $a=0$.
- Če za $f(x)$ vstavimo vrednost nič, dobimo dve funkciji.
- Ne glede na vrednost a , vedno dobiš premico.
- Funkcija je neomejena (na obeh straneh poteka v neskončnost).
- Vsaka premica, ki jo dobimo z različnimi vrednostmi a , je preslikana skozi točko $(2,1)$
- Funkcija ni ne konkavna, ne konveksna, saj je graf te funkcije premica.
- Za vrednost $a=0$ funkcija nima ničel
- Zaloge vrednosti in definicijsko območje sta v primeru, da a ni enako 0 vedno vsa realna števila.
- Če je $a=0$ je $Z_f(x)=1$, $D_f(x)$ pa vsa realna števila.
- Če je $a=0.5$ funkcija poteka naraščajoče skozi koordinatno izhodišče.
- Če je a več od 0.5 ima funkcija negativno začetno vrednost.
- Če je a manj od 0.5 ima funkcija pozitivno začetno vrednost.



Slika 7: Primer izdelka učenca 7. razreda OŠ Sladki Vrh (Mentorica: Lidija Jug). Učenec s sistematičnim zapisovanjem raziše možnosti za menjavo sličic.

Slika 8: Primer izdelka dijakinje Ekonomske šole Novo mesto (Mentorica: Mojca Plut)

21. Razišči lastnosti družine funkcij $\{f_a(x) = ax - 2a + 1; a \in \mathbb{R}\}$. Če si uporabil tehnologijo, napiši, kje in kako. (Avtorica naloge je Mojca Plut. Primera izdelkov dijakov sta na Sliki 8 in Sliki 9.)

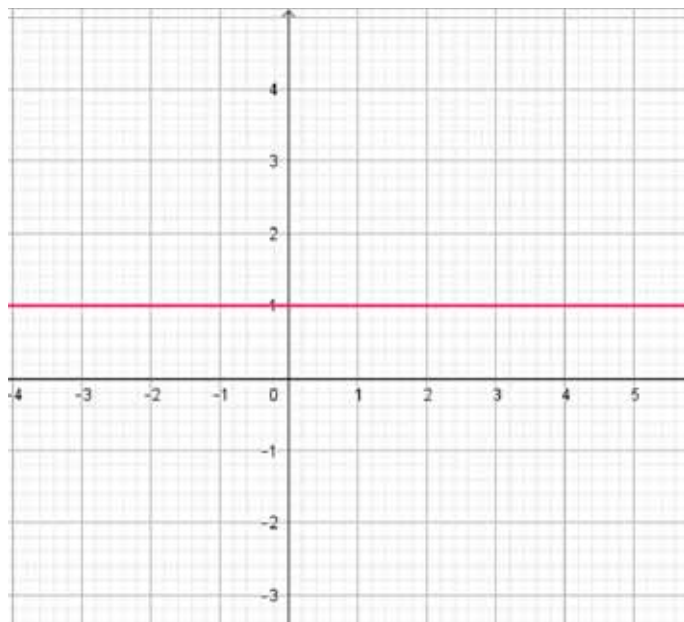
V programu Geogebra sem najprej u porabil drsник (a), s katerim sem ugotavljal premik funkcije glede na a (ko je pozitiven, negativen ali enak 0). Ugotovil sem da, če je a=0, je funkcija vzporedna z abscisno osjo (y=1).

Če je a negativen, potem je funkcija f(x) padajoča in če je a pozitiven, je funkcija naraščajoča.

Ne glede kakšen a vstavim v funkcijo, pride v koordinatnem sistemu premica. Torej iz tega vem, da funkcija ni omejena.

Ne glede na to ali je a pozitiven, negativen ali nenegativen, gre premica skozi točko T(2,1).

Prikaz funkcije, ko je a=0.



Slika 9: Primer izdelka dijaka Ekonomske šole Novo mesto (Mentorica: Mojca Plut)

Viri

- Calder, N. (2011). *Processing Mathematics Through Digital Technologies. The Primary Years*. s.l.: Sense Publishers.
- Fisch, B., Schaetzel, S., Heuskin, K. (2018). *Informatics and Communication Section - Section I ESC - Luxembourg. V International Approaches to STEM Education. CIDREE Yearbook 2018*. Luxembourg: Service de Coordination de la Recherche et de l'Innovation pédagogiques et technologiques, ur. Mysore, S.
- Magajna, Z., Žakelj, A., Petek, P. (2000). *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6-9*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Suban, M. (2017). *Vzgoja in izobraževanje, št. 4, let. XLVIII*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Winslow, C. idr. (2017). *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*. Ljubljana: s.n.