Kako so Arabci reševali kvadratne enačbe

Marjan Jerman

Že v srednji šoli se srečamo z reševanjem kvadratne enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

Koeficienti a, b in c so običajno realna ali kompleksna števila. Da je enačba res kvadratna, dodatno zahtevamo, da je vodilni koeficient a različen od 0.

Enačbo (1) lahko rešimo s prevedbo na ekvivalentne lažje rešljive enačbe. Najprej se znebimo vodilnega člena z deljenjem z a. Po uvedbi novih spremenljivk $p = \frac{b}{a}$ in $q = \frac{c}{a}$ enačbo prevedemo v obliko

$$x^2 + px + q = 0.$$

Nato si pomagamo z dopolnitvijo do popolnih kvadratov. Tako enačbo prepišemo v obliko

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

S tem smo prišli do obeh rešitev enačbe. Ker je

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

sta njeni rešitvi podani z dobro znano formulo

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{2}$$

Tudi če sta števili p in q realni, je lahko izraz pod korenom, ki ga imenujemo *diskriminanta*, negativen, zato sta v splošnem ničli kvadratne enačbe kompleksni števili.

V 21. stoletju se običajno ne zavedamo, koliko izjemnih odkritij in lepe matematike se skriva na navidez enostavni poti do rešitve. Oznake za osnovne računske operacije so se pojavile šele v renesansi. Pred tem simbolični zapis ni bil možen in enačbe so bile skrite v daljšem in manj preglednem besedilu. Na korene negativnih števil je prvi naletel italijanski matematik, zdravnik in astrolog Gerolamo Cardano (1501–1576) pri reševanju kubične enačbe.

Presenetljivo so formulo za rešitvi kvadratne enačbe v običajni obliki (2) poznali že Babilonci vsaj 18. stoletij pred našim štetjem. Težko je razumeti, kako so prišli do rešitev.

V tem prispevku si bomo ogledali, kako so Arabci v devetem stoletju s pomočjo geometrijske predstave reševali kvadratne enačbe. Seveda enačbe niso bile napisane v takšni obliki, kot jo poznamo danes. Ena od arabskih nalog, recimo, sprašuje, kako število 10 razstaviti na vsoto dveh pozitivnih števil, tako da je njun produkt enak 21. Danes bi nalogo rešili s pomočjo sistema enačb

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ xy &= 21, \end{aligned}$$

ki vodi do kvadratne enačbe $x^2 - 10x + 21 = 0$.

V knjigi *Najnujnejše o algebri* iz leta 820 Al Hvarizmi (780–850), perzijski matematik, astronom in geograf, linearne in kvadratne enačbe najprej razdeli na šest tipov:

(i)	$ax^2 = bx$;
(ii)	$ax^2 = c$;
(iii)	$bx = c$;
(iv)	$ax^2 + bx = c$;
(v)	$ax^2 = bx + c$;
(vi)	$ax^2 + c = bx$.

Z današnjega vidika je ta klasifikacija pretirano razdrobljena in nepotrebna, smiselna pa postane, če vemo, da so Arabci priznavali le enačbe, ki imajo za koeficiente strogo pozitivna števila in premorejo vsaj kako pozitivno rešitev. Tako se jim, recimo, enačba $ax^2 + bx + c = 0$ s pozitivnimi koeficienti a, b in c ne bi zdela smiselna, ker nima pozitivnih rešitev. V knjigi opiše tudi operaciji *al-jabr* in *al-muqabala*, ki vsako kvadratno enačbo prevedeta na enega od teh tipov. Operacija al-jabr na obeh straneh enačbe prišteje enako vrednost in tako poskrbi za odpravo negativnih členov, al-muqabala pa odšteje manjšo od skupnih količin in tako uravnoteži odvečne člene.

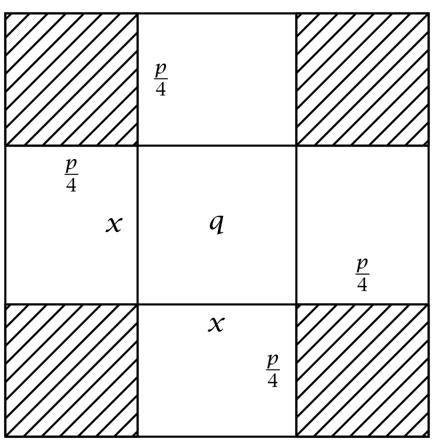
Najprej lahko odpravimo enačbi tipa (i) in (iii), ki v bistvu nista kvadratni. Enačbo tipa (ii) rešimo s preprostim korenjenjem. Preostale enačbe pa so veliko bolj zanimive. Enako kot prej lahko z deljenjem dosežemo, da je vodilni koeficient $a = 1$.

Lotimo se reševanja četrte enačbe $x^2 + px = q$, pri čemer sta p in q pozitivni števili. Člen x^2 si lahko predstavljamo kot ploščino kvadrata s stranico x. Nad stranicami kvadrata postavimo štiri skladne pravokotnike s stranicama x in $\frac{p}{4}$ (glej sliko 1). Vsota ploščin kvadrata in štirih pravokotnikov je tako enaka

- $x^2 + 4 \cdot x \cdot \dfrac{p}{4} = x^2 + px = q.$

Kvadrat, ki smo ga razširili s pravokotniki, lahko dodatno dopolnimo do večjega kvadrata tako, da med dodatne pravokotnike dorišemo štiri manjše kvadratke s stranicami velikosti $\frac{p}{4}$. Ploščina večjega kvadrata je tako enaka

- $S = q + 4 \cdot \left(\dfrac{p}{4}\right)^2 = q + \dfrac{p^2}{4}.$



SLIKA 1.
Reševanje enačbe $x^2 + px = q$.

Zato je stranica večjega kvadrata po eni strani enaka $\sqrt{S}$, po drugi strani pa $x + 2 \cdot \frac{p}{4}$. Tako smo reševanje kvadratne enačbe (iv) prevedli na enostavno rešljivo linearno enačbo

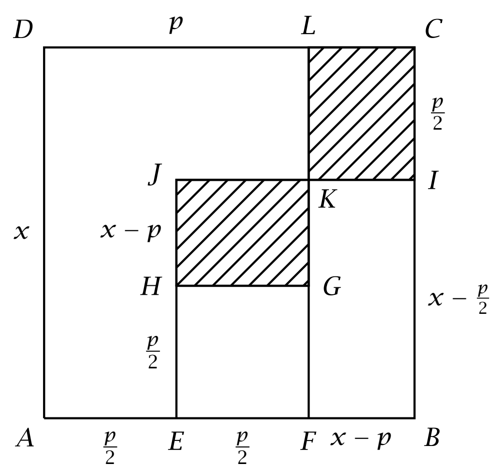
- $x + \dfrac{p}{2} = \sqrt{S}$

z rešitvijo $x = \sqrt{S} - \frac{p}{2}$. Ker je $S > \left(\frac{p}{2}\right)^2$, je dobljena rešitev pozitivna. Če pozorno pogledamo izpeljavo, lahko ugotovimo tudi, kam je »izginila« druga rešitev kvadratne enačbe. Brez geometrijske interpretacije bi lahko računsko gledano stranico kvadrata $\sqrt{S}$ zamenjali tudi z $-\sqrt{S}$, vendar bi bila rešitev v tem primeru strogo negativna:

- $x = -\sqrt{S} - \dfrac{p}{2};$

takšnih rešitev pa tedaj niso priznavali.

Al Hvarizmi reševanje opiše na primeru enačbe $x^2 + 10x = 39$. Nad manjšim kvadratom s stranico x narišemo štiri pravokotnike z višino $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Nato dodamo še manjše kvadratke s stranico $\frac{5}{2}$. Dopolnjen kvadrat ima ploščino enako $x^2 + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64$, zato je njegova stranica dolga 8. Hkrati vemo, da stranica večjega kvadrata meri $x + 2 \cdot \frac{5}{2} = x + 5$. Zato je stranica manjšega kvadrata enaka $x = 3$. Pri takšnem reševanju smo izgubili negativno rešitev $x = -8 - 5 = -13$.



SLIKA 2.
Reševanje enačbe $x^2 = px + q$.

Sedaj bomo pokazali, kako geometrijsko rešiti peto enačbo $x^2 = px + q$. Ker delamo samo s pozitivnimi števili, mora biti $px < x^2$ in zato $p < x$. Narišimo kvadrat $ABCD$ s stranico x. Na stranici AB izberimo točki E in F tako, da je $AE = \frac{p}{2}$ in $AF = p$ (glej sliko 2). Ker je $p < x$, obe točki ležita na stranici AB. Nad daljicama EF in EB konstruirajmo manjša kvadrata $EFGH$ in $EBIJ$. Premica skozi F in G naj seka daljico JI v točki K in stranico DC v točki L.

Glede na konstrukcijo je ploščina pravokotnika $AFLD$ enaka px, zaradi veljavnosti kvadratne enačbe pa je ploščina preostanka $FBCL$ enaka q. Ploščina kvadrata $EBIJ$ je po eni strani enaka $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$. Po drugi strani je kvadrat $EBIJ$ sestavljen iz kvadrata $EFGH$ s ploščino $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ in pravokotnikov $HGKJ$ in $FBIK$. Pravokotnika $HGKJ$ in $ICLK$ sta skladna pravokotnika s stranicama $\frac{p}{2}$ in $x - p$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $HGKJ$ in $FBIK$ enaka ploščini pravokotnika $FBCL$ in ploščina kvadrata $EBIJ$ enaka $S = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$. Tako smo peto enačbo prevedli na reševanje enačbe

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = S,$$

ki jo je mogoče enostavno rešiti s korenjenjem. Pozitivna rešitev enačbe je enaka

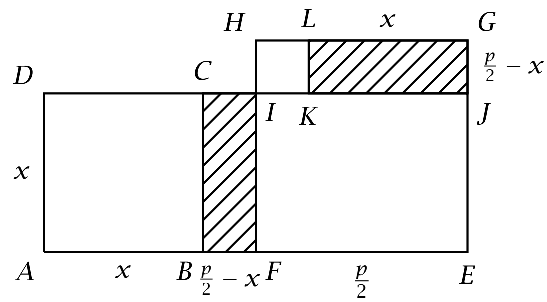
$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{S}.$$

Ker je $S > \left(\frac{p}{2}\right)^2$, smo ponovno »pozabili« na negativno rešitev $x = \frac{p}{2} - \sqrt{S}$.

Al Hvarizmi pokaže rešitev na primeru enačbe $x^2 = 3x + 4$. Ploščina kvadrata $EBIJ$ je po eni strani enaka $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, po drugi strani pa $4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Zato je x rešitev linearne enačbe $x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Izgubili smo negativno rešitev $x = -1$.

Ostala nam je še zadnja enačba, $x^2 + q = px$. Geometrijska rešitev te enačbe je bolj zapletena, ker je treba obravnavati dva primera. Najprej podobno kot prej vidimo, da je $x^2 < px$, zato je $x < p$. Narišimo kvadrat $ABCD$ s stranico x. Daljico AB podaljšajmo tako, da je $AE = p$. Na polovici daljice AE izberimo točko F.

Najprej obravnavajmo primer, ko je $x < \frac{p}{2}$. Takrat je točka F med točkama B in E. Nad daljico FE narišimo kvadrat $FEGH$ (glej sliko 3). Premica skozi D in C seka stranico FH v točki I in daljico EG v točki J. Nad daljico HI skonstruirajmo manjši kvadrat $HIKL$. Tokrat bomo na dva različna načina izrazili ploščino kvadrata $HIKL$. Po eni strani je njegova ploščina enaka $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2$. Glede na konstrukcijo in veljavnost kvadratne enačbe je ploščina pravokotnika $BEJC$ enaka q. Pravokotnika $BFIC$ in $JGLK$ sta skladna, ker imata enako dolgi stranici x in $\frac{p}{2} - x$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $FEJI$ in $KJGL$ enaka q. Kvadrat $FEGH$ ima ploščino enako $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Ploščino kvadrata $IKLH$ lahko tako izrazimo tudi kot razliko $S = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Enačbo (vi) smo s tem prevedli na reševanje enostavnejše enačbe



SLIKA 3.
Reševanje enačbe $x^2 + q = px$ v primeru, ko je $x < \frac{p}{2}$.

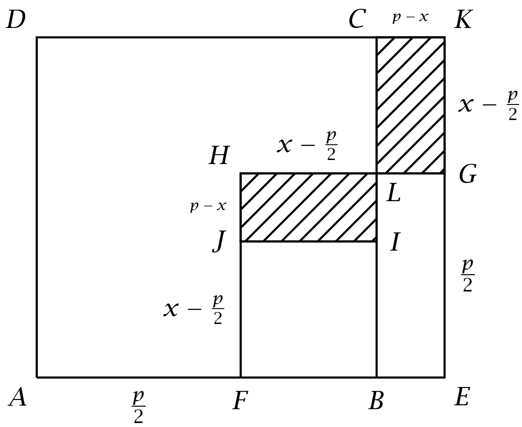
$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = S$$

s pozitivno rešitvijo

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{S},$$

ki ustreza pogoju $x < \frac{p}{2}$.

Preostali primer, ko je $x > \frac{p}{2}$, je natančneje obdelal Al Hvarizmijev sodobnik Ibn Turk. V tem primeru je točka F med točkama A in B. Nad daljico FE ponovno skonstruirajmo kvadrat $FEGH$, nad daljico FB pa kvadrat $FBIJ$ (glej sliko 4). Nosilki daljic DC in GE naj se sekata v točki K, daljici HG in BC pa v točki L. Na dva načina bomo izračunali ploščino kvadrata $FBIJ$. Ker je njegova stranica dolga $x - \frac{p}{2}$, ima ploščino $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$. Po konstrukciji in glede na kvadratno enačbo je ploščina pravokotnika $BEKC$ enaka q. Pravokotnika $JILH$ in $GKCL$ sta skladna, ker imata



SLIKA 4.
Reševanje enačbe $x^2+q=px$ v primeru, ko je $x>\frac{p}{2}$.

enako dolgi stranici $p-x$ in $x-\frac{p}{2}$. Kvadrat $FEGH$ ima ploščino $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $JILH$ in $BEGL$ enaka q. Ploščina kvadrata $FBIJ$ je tako tudi $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$. Namesto enačbe (vi) torej rešujemo enačbo

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=S,$$

s pozitivno rešitvijo

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{S},$$

ki ustreza pogoju $x>\frac{p}{2}$.

Tako ima enačba (vi) dve pozitivni rešitvi $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{S}$. Danes vemo, da ima kvadratna parabola $px-x^2=x(p-x)$ teme v točki $\left(\frac{p}{2},\frac{p^2}{4}\right)$, zato je število $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ za $0<x<p$ vedno pozitivno in $\sqrt{S}<\frac{p}{2}$.

Premisliti je treba še manjkajoči primer, ko je $x=\frac{p}{2}$. Zgodi se takrat, ko je $\left(\frac{p}{2}\right)^2=q$, ustrezna slika pa je unija dveh skladnih kvadratov s stranico x.

Al Hvarizmi reši npr. že znano enačbo $x^2+21=10x$. Prevede jo na reševanje enačb $(x-5)^2=5^2-21$ in $(5-x)^2=5^2-21$ z dvema pozitivnima rešitvama, $x=3$ in $x=7$.

×××

Rešitev naloge iz prejšnje številke

↓↓↓

Marko Razpet

→ Uporabimo enakost $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, pri čemer vzamemo

$$a=\sqrt[3]{50+\sqrt{\frac{67375}{27}}},\quad b=\sqrt[3]{50-\sqrt{\frac{67375}{27}}}.$$

Brez težav poenostavimo najprej produkt

$$ab=\sqrt[3]{2500-\frac{67375}{27}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{5}{3},$$

nato pa zapišemo

$$\begin{aligned}s^3&=(a+b)^3\\&=\left(50+\sqrt{\frac{67375}{27}}\right)+\left(50-\sqrt{\frac{67375}{27}}\right)+3\cdot\frac{5}{3}\cdot s\\&=100+5s.\end{aligned}$$

Torej je naše število s rešitev enačbe $x^3-5x-100=0$. Če pišemo

$$\begin{aligned}x^3-5x-100&=(x^3-125)+5(5-x)\\&=(x-5)(x^2+5x+25)-5(x-5)\\&=(x-5)(x^2+5x+20)=0\end{aligned}$$

in upoštevamo, da je kvadratni faktor $x^2+5x+20$ za vsako realno število x pozitiven, saj je

$$x^2+5x+20=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{55}{4},$$

potem takoj spoznamo, da je edina realna rešitev zgornje kubične enačbe $x=5$, to pa pomeni: $s=5$.

Bralec Etbin Bras je poslal zelo podobno rešitev.

×××