PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 1
Strani 18–26

Janez Strnad:

PARADOKSA S TEKOČINAMI

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1023-Strnad.pdf

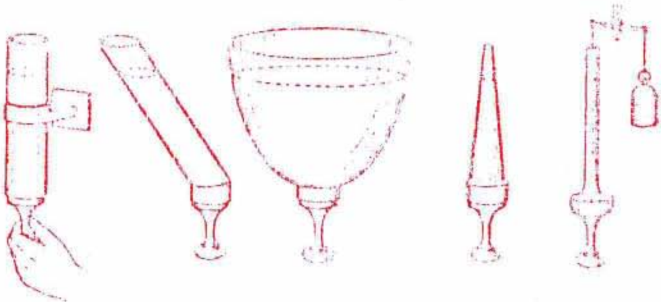
"PARADOKSA" S TEKOČINAMI

Nekateri slovarji pojasnijo *paradoks* kot trditev, ki se zdi na prvi pogled napačna, a se izkaže pri podrobnejšem pogledu za pravilno. Tudi v fiziki naletimo večkrat na besedo v tem pomenu. Včasih z narekovaji poudarimo, da ne gre za pravi paradoks, pri katerem je s trditvijo ali s sklepanjem nekaj zares narobe. V fiziki so navidezni paradoksi pogosto povezani z njenim razvojem. Kak pojav primerjamo z drugim, ki ga že obvladamo, toda pozneje se pokaže, da primerjava ni umestna. Novi pojav je treba pojasniti drugače in je pri njem zato izid drugačen, kot bi ga pričakovali, če bi bil novi pojav zares podoben prejšnjemu.

Obdelajmo dva pojava, ki ju včasih zaznamujemo kot "paradoksa". Opišimo ju, osvetlimo njuno zgodovinsko ozadje in pojasnimo. Oba sodita v poglavje o tekočinah, prvi v del, ki obravnava mirujoče tekočine, *hidrostatiko*, drugi v del o tekočinskem toku, *hidrodinamiko*. Oba dela menda ne sodita med kratkočasne in nekatere učne knjige drugega ali kar oba obidejo.

Vzemimo posode različnih oblik z enako velikim dnom in nalijmo v vse vodo do enake višine (slika 1). Sila vode na dno je v vseh primerih enaka in ni odvisna od oblike posode. Nekdaj se je zdelo to tako nenavadno, da so govorili o *"paradoksu" mirujoče tekočine* (*hidrostatičnem paradoksu*). Ali mislite, da spoznanje zasluži to ime?

Ni težko razumeti, zakaj se je zdelo spoznanje nekdaj bolj nenavadno kot dandanes. Pojav sodi v *statiko*, ki obravnava mirovanje teles. Nekaj njenih spoznanj izvira od Arhimeda iz 3. stoletja pred našim štetjem. Šele v šestnajstem stoletju so to znanje rešili pozabe in obnovili. Eden



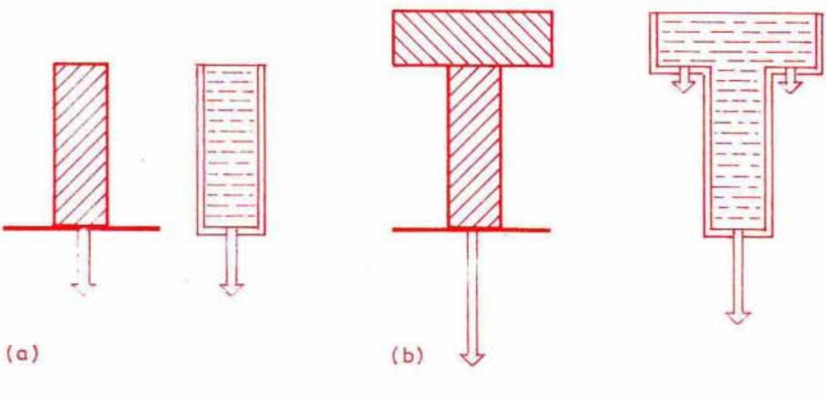
Slika 1. Pascalove posode iz njegove *Razprave o ravnovesju kapljevin*. Sila na dno je v vseh enaka, ker imajo posode enako veliko dno in sega vodna gladina v njih do enake višine.

izmed zaslužnih mož je bil Simon Stevin, ki je živel na Nizozemskem in leta 1586 izdal knjigo o umetnosti tehtanja. Tedaj so pogosto primerjali kapljevino s trdnim telesom. Stevin si je zamislil, da so deli kapljevine v posodi trdni, in dognal, da morajo biti gladine v povezanih posodah enako visoke. Toda zavedal se je že bistvene razlike med trdnim telesom in kapljevino (slika 2).

V tem so mu sledili še nekateri drugi fiziki, med njimi Evangelista Torricelli, ki ima zasluge za prvo meritev zračnega tlaka. Da je bilo nekaterim tedanjim fizikom težko uvideti razloček med trdnim telesom in kapljevino, priča zabaven Torricellijev zapis iz leta 1644: "Nekoč je živel filozof, ki je enega izmed svojih služabnikov videl, kako je vstavil cevko v steklenico z vinom. Okaral ga je češ, da vino nikoli ne bo steklo po cevki, ker težka telesa silijo navpično navzdol, a ne vodoravno v stran. Toda služabnik ga je z dejanjem prepričal, da sicer sili po naravi tudi kapljevina navzdol, a poleg tega sili na vse strani, celo navzgor, ker išče kraj, na katerega se bo premestila, tako da bo na njem odpor manjši kot sila kapljevine."

Deset let prej so fiziki, med njimi tudi Galileo Galilei, mislili še, da ima voda samo "absolutno težo". Del vode naj bi imel težo samo, če ga ne bi obdajali drugi deli vode. "Voda v vodi nima teže, ker se ne spušča." Niso uvideli, da za vsak del vode težo uravnovesi *vzgon*, to je sila okolnih delov vode.

Podrobno je pojave obdelal Blaise Pascal v *Razpravi o ravnovesju kap-*



(a) (b)

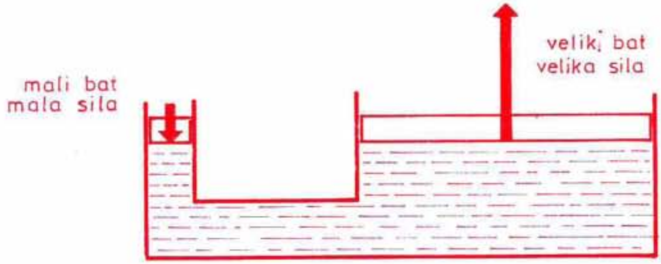
Slika 2. Razlika med trdnim telesom in kapljevino z enako gostoto v posodi. Sila opeke na podlago zaradi teže je enaka sili enako težke kapljevine na dno posode z enako obliko (a). Sila dveh opek na podlago zaradi teže pa ni enaka sili enako težke kapljevine na dno posode z enako obliko. Treba je upoštevati še navpično silo kapljevine na stranske vodoravne dele posode (črtkano) (b).

ljevin in teži mase zraka, ki je izšla leta 1663, leto po njegovi smrti. Jasneje kot drugi pred njim, na primer Simon Stevin, je opredelil tlak v mirujoči kapljevini. "Tlak, ki ga izvajamo kjerkoli na kapljevino v zaprti posodi, se prenaša nezmanjšan po vsej kapljevini in deluje pravokotno na vse stene." To trditev so imenovali *Pascalov izrek*. Pascalu se je na osnovi izreka porodila zamisel za napravo, ki so jo več kot sto let pozneje patentirali kot *kapljevinsko stiskalnico* (slika 3). "Posoda, polna vode, a sicer povsem zaprta, ima dve odprtini, od katerih je ena stokrat večja kot druga. Postavimo v odprtini bata, ki ju tesno zapirata. Mož, ki potiska mali bat, deluje s silo, enako sili, s katero potiska sto mož veliki bat, ki je stokrat večji... Za večjo jasnost lahko dodamo, da je tlak vode enak pod obema batoma; kajti, če je eden stokrat večji kot drugi, se tudi dotika stokrat več delov vode."

Pascal je pri poskusih raziskal odvisnost tlaka v mirujoči tekočini od višine, o kateri smo doslej molčali. Z dobrih deset metrov visokim stolpcem vode je uravnovesil zračni tlak. Svaka je pripravil do tega, da je izmeril zračni tlak ob vznožju in na vrhu gore. Merjenje je potrdilo misel, da tudi zračni tlak z višino pojema. Odvisnost tlaka od višine in njegovo neodvisnost od oblike posode je pokazal s sodom. V sod je vstavil dolgo navpično cevko z razmeroma majhnim premerom. Ko je dolil dovolj vode v cevko, je sod počil (slika 4).

Ker je Pascal med prvimi spoznal vlogo tlaka v mirujoči tekočini in razčistil nekatera vprašanja v zvezi z zračnim tlakom, ni neupravičeno, da

Slika 3. Poenostavljena shema kapljevinske stiskalnice.



Slika 4. Sod z navpično cevjo, v katero je B.Pascal dolil malo vode, in dosegel, da je sod počil.

so enoto za tlak poimenovali po njem:

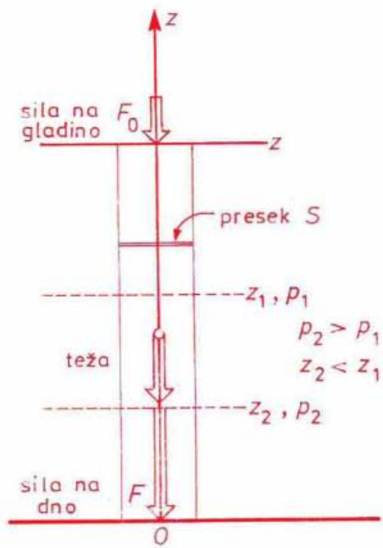
1 newton na kvadratni meter = 1 pascal ali $1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{Pa}$.

Naredimo kratek račun. Vzemimo, da je v posodi z ravnim dnom voda. Ker je tlak na dno neodvisen od oblike posode, si lahko mislimo, da ima posoda obliko prizme. Težo vode dobimo, če njeno maso m pomnožimo s težnim pospeškom g. Za to težo je sila na dno F večja od sile F_0 na gladino vode: $F = F_0 + mg$. Tlak dobimo, ko silo delimo s presekom S osnovne ploskve: $p = p_0 - \rho g z$. Pri tem je $p_0 = F_0/S$ tlak na gladini in prostornina prizme $V = Sz$. *Gostoto vode* vpeljemo kot kvocient mase in prostornine $\rho = m/V$. Višino prizme smo zaznamovali z z in opremili drugi člen z minusom, če merimo z od dna navzgor (slika 5). Tako upoštevamo, da z naraščajočo višino tlak pojema. Enačbi lahko damo obliko, ki poveže tlak p_2 v višini z_2 s tlakom p_1 v višini z_1:

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1) \qquad \text{ali} \qquad p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1$$

Enačba velja, če se med višinima z_2 in z_1 ne spremeni gostota. Pri kapljevinah, ki jih smemo imeti za nestisljive, je vedno tako, pri plinih pa samo, če višinska razlika ni prevelika. Spomnimo se, da zajamemo s *tekočinami* pline in kapljevine.

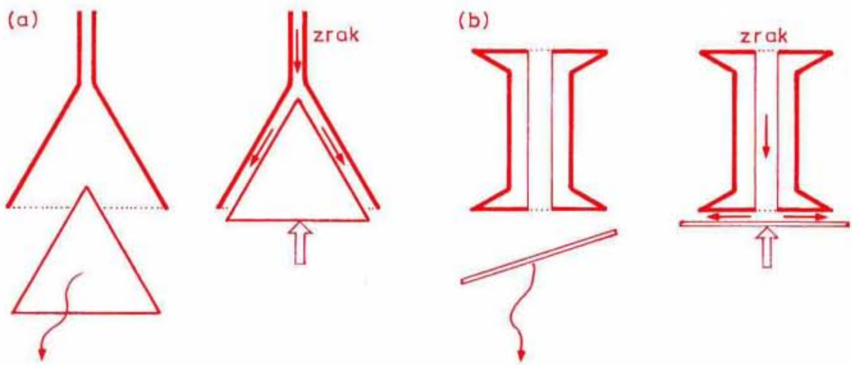
Preidimo k drugemu poskusu. Iz risalnega lista izrežimo krožni izsek,



Slika 5. Sila tlaka na dno $F = pS$ je večja kot sila tlaka na gladino $F_0 = p_0 S$ za težo kapljevine $mg = \rho V g = \rho S z g$. Tlak z naraščajočo globino narašča in z naraščajočo višino pojema, zato velja $p = p_0 - \rho g z$, če usmerimo os z navpično navzgor.

ga zvijmo v plašč stožca in zalepimo, tako da se prilega lijaku. V navpično postavljeni lijak dajmo papirnati stožec. Zaradi teže stožec pade. Pridržimo stožec v lijaku, pihajmo v lijak in spustimo stožec. Dokler pihamo, stožec ostane v lijaku in pade na tla, šele ko nam zmanjka sape. Podoben poskus se posreči tudi z vretenom za sukanec in s kosom papirja (slika 6). Izid marsikoga preseneti, saj bi pričakoval, da stožec zaradi upora v zračnem curku še hitreje pade na tla. Pojav včasih imenujejo *"paradoks" gibajoče se tekočine* (*hidrodinamični paradoks*). Povedati pa je treba, da nadenejo to ime zadnje čase tudi nekaterim drugim izidom.

Da bomo pojav razumeli, nadaljujmo prejšnjo razpravo. Torricelli je leta 1643, malo pred Galilejevo smrtjo, postal njegov sodelavec. Že prej je napisal rokopisni *Dve knjigi o gibanju prosto padajočih in vrženih težkih teles*. V njiju je mimogrede obravnaval tudi iztekanje vode iz posode skozi dovolj veliko odprtino. Iztekajoči curek je usmeril tudi navpično navzgor in ugotovil, da curek ni dosegel gladine. Vendar pri dobro oblikovani odprtini razlika ni bila velika. Po tem je sklepal, da bi curek dosegel gladino, če ne bi bilo upora. "Voda, ki izteka iz posode, ima v točki iztekanja enako hitrost, kot bi jo imelo poljubno težko telo, tudi kaplja te vode, ko bi prosto padla od gladine do višine odprtine." Trditev je postala znana kot *Torricellijev izrek*. Za hitrost iztekajoče vode v velja tedaj enačba $\frac{1}{2}v^2 = gz$, če je z višina gladine nad odprtino.



Slika 6. Poskus, pri katerem pihamo skozi lijak navpično navzdol in s tem dosežemo, da miruje v njem stožec iz papirja. Ko ne pihamo, stožec pade (a). Poskus se posreči tudi z vretenom za sukanec in kosom papirja (b). V ožini je hitrost zraka velika in tlak nižji od zunanjega zračnega tlaka.

* * *

Torricelli je naredil še drug poskus, ki ga najbolje razumemo na osnovi računa. Hitrost iztekanja vode $v = \sqrt{2hz}$ skozi odprtino s presekom S_d na dnu posode povežimo s hitrostjo zniževanja gladine $-dz/dt$ v prizmatični posodi s presekom S. Prostornina vode, ki izteče skozi odprtino na sekundo, je enaka prostornini med lego gladine in njeno lego sekundo pozneje:

$$vS_d = -S\frac{dz}{dt}$$

Enačbo $\sqrt{2gz}\ S_d = -Sdz/dt$ preuredimo v $dz/\sqrt{z} = -\sqrt{2g}(S_d/S)dt$ in integriramo od začetne višine gladine z_0 do višine z in od začetnega časa 0 do časa t:

$$2(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}) = -\sqrt{2g}\frac{S_d}{S}\ t \qquad \text{ali} \qquad \sqrt{z} = \sqrt{z_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\ \frac{S_d}{S}\ t.$$

Iz enačbe izhaja, da se gladina zniža do dna pri $z = 0$ v času $t_d = \sqrt{2z_0/g}\ S/S_d$. Ta čas razdelimo na N delov in vpeljemo $t_n = nt_d/N$, $n \leq N$. Vstavimo to v enačbo za višino gladine in enačbo kvadriramo:

$$z_n = z_0(1 - \frac{n}{N})^2$$

Naposled poiščemo razmerja višinskih razlik:

$$...(z_{N-3} - z_{N-2}) : (z_{N-2} - z_{N-1}) : (z_{N-1} - z_N) = ...5 : 3 : 1.$$

Torricelli je opazoval, kako se je v enakomernih časovnih razmikih nižala gladina v posodi proti koncu iztekanja in po ugotovljenem razmerju ...5.3.1 sklepal, da gre za kvadratno odvisnost. To razmerje so tedaj poznali od prostega padanja. Računa, kakršen je naš, v tej obliki še ni mogel narediti.

* * *

Privzeli smo, da deli vode na gladini pri višini z mirujejo. Če se pri višini z_1 gibljejo s hitrostjo v_1, se gibljejo pri višini z_2 s hitrostjo v_2 in velja

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1$$

Vstavimo $v_1 = 0$ in $z_1 = z$ ter $z_2 = 0$ in $v_2 = v$, pa dobimo prejšnjo zvezo $\frac{1}{2}v^2 = gz$. Obe strani enačbe smo še pomnožili z gostoto kapljevine ρ.

Če se ne spreminjata samo višina delov vode in njihova hitrost ampak tudi tlak, moramo povezati obe enačbi. Dobimo znamenito *Bernoullijevo enačbo*:

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 \ .$$

Enačbo, ki smo jo v Preseku že srečali (**6** (1978/79), str.241), je Daniel Bernoulli objavil v *Hidrodinamiki* leta 1738. Del kapljevine se lahko dvigne, če se mu zmanjša hitrost. Ker je višina povezana s tlakom, lahko preide tudi na območje s povišanim tlakom, če se mu zmanjša hitrost. Danes vemo, da velja enačba samo približno, in to tem bolje, čim manjše delo opravijo sile med plastmi kapljevine, čim manjše je "trenje" med deli kapljevine.

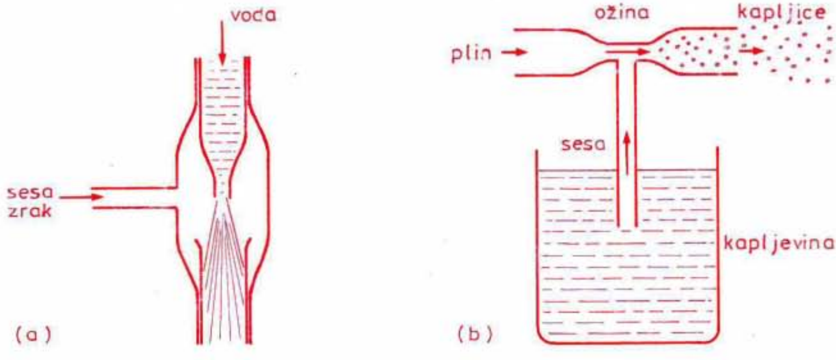
Potrebujemo samo enačbo za primer, da se ne spremeni višina:

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \ .$$

Enačba pove, da je tlak manjši na mestu, kjer ima kapljevina večjo hitrost. Vzemimo, da teče kapljevina skozi cev s spremenljivim presekom. Na mestu, kjer je hitrost v_1, je presek S_1, na mestu, kjer je hitrost v_2, pa presek S_2. Kapljevina je nestisljiva, zato se ne spremeni njena prostornina, ki preteče skozi določen presek v časovni enoti. Hitrosti potemtakem povezuje s presekoma enačba (ki smo jo uporabili tudi prej):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \ .$$

Čim manjši je presek, tem večja je hitrost in skupaj s prejšnjim: čim manjši je presek, tem manjši je tlak. Dobljeni sklepi obveljajo tudi za plin, če se njegova gostota ne spremeni znatno. Enačbe veljajo v tem primeru manj natančno.



Slika 7. Sesalka na vodni curek (a) in razpršilo (b)

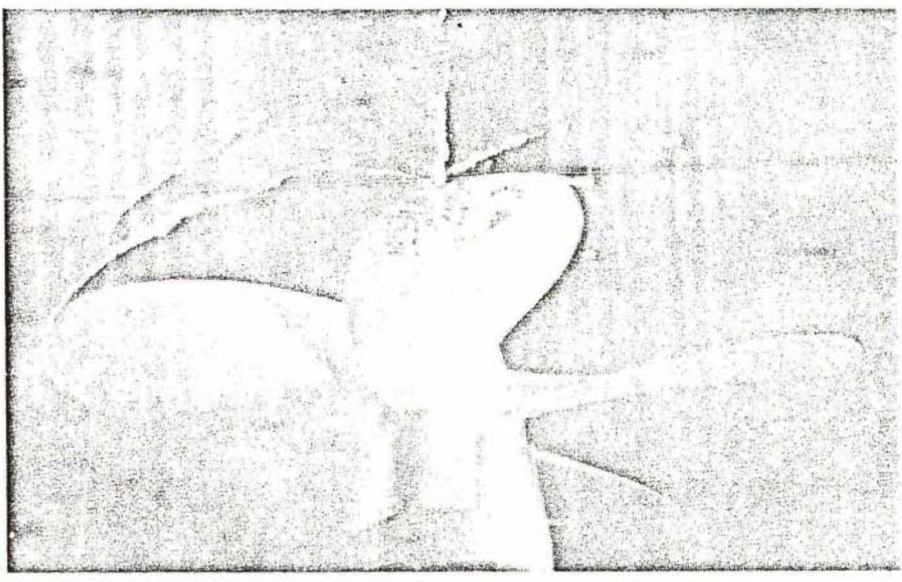
S tem ni težko pojasniti poskusa, katerega izid se je prej zdel nenavaden. V cevki lijaka, v katero pihamo, je tlak malo večji od zunanjega zračnega tlaka, hitrost delov zraka pa razmeroma majhna. V ožini med stožcem in lijakom je presek zelo majhen, hitrost velika in tlak manjši od zunanjega zračnega tlaka. Sila zaradi razlike tlakov uravnovesi težo stožca.

* * *

Kdor tega pojava še ni videl, se mu zdi čuden in nerazumljiv. Predstavlja si morda, da bi moral biti v ožini, kjer je voda utesnjena na manjši presek, tlak večji. Pri tem se človek nehote spomni na gnečo ljudi, ki bolj pritiskajo drug na drugega, kjer rinejo skozi vrata. Vendar je pri vodi poskus pokazal ravno nasprotno; v ožini je tlak zmanjšan. Ljudje se ne dajo dosti deformirati, kaplje pa čisto lahko.

I.Kuščer in A.Moljk, *Fizika*, 1.del, DZS, Ljubljana 1980, str. 250

* * *



Slika 8. Sled mehurjev, ki nastanejo ob vrtečem se vijaku na mestih, na katerih je hitrost delov vode zelo velika in tlak močno znižan.

Pojav izkorišča na primer *sesalka na vodni curek* (slika 7a). Curek vode iz pipe vodimo skozi ožino, po kateri se giblje z veliko hitrostjo. Na tem mestu in v njegovi okolici je tlak precej manjši od zunanjega zračnega tlaka. Skozi cevko iz dela posode, ki obdaja ožino, sesa naprava zrak. Podobno deluje razpršilo, le da sta v njem vlogi zamenjani. Namesto vodnega curka imamo curek zraka ali kakega drugega plina, ki sesa in razpršuje vodo ali dišečo kapljevino (slika 7b).

Menda sta zaradi tega pojava trčili ladji, ki sta vozili vštric po kanalu. Deli vode med njima so imeli večjo hitrost glede na njiju kot deli vode na nasprotni strani, zato je bil tlak na območju med ladjama manjši kot na nasprotnih straneh. Ladjo je tiščala proti drugi ladji sila zaradi razlike obeh tlakov. Če se je to zares primerilo, sta morala biti kapitana dokaj nepazljiva.

Pojav lahko moti še drugače. V vodnem toku okoli vrtečih se delov turbin ali ladijskih vijakov imajo deli vode zelo veliko hitrost. Hitrost je tolikšna, da je tlak manjši od izparilnega tlaka, voda izpareva in nastanejo mehurji vodne pare. Pojav, znan kot *kavitacija*, je škodljiv, ker mehurji zmanjšajo učinkovitost turbin ali vijakov in praskajo vrtljive dele, da se prej obrabijo (slika 8).

Tako smo dva "paradoksa" povezali v kramljanju, v katerem ni manjkal ščepec prave fizike. Ali ste se pri tem dolgočasili?

Janez Strnad