ŠTIRINAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 3. in 9. avgustom 2007 je v Blagoevgradu v Bolgariji potekalo že štirinajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Prva tekmovanja so bila organizirana v okviru projekta Tempus in so bila namenjena primerjavi kvalitete študija na evropskih univerzah. Zadnjih nekaj let pa prihaja tekmovat tudi čedalje več študentov iz Amerike in Azije in tekmovanje počasi postaja študentski ekvivalent srednješolskih matematičnih olimpijad. Rastoči ugled tekmovanja se kaže tudi v dejstvu, da so najboljšim tekmovalcem nekatere tuje univerze ponudile polne štipendije za dodiplomski in podiplomski študij pri njih. Za bodoče kadre so se zelo opazno potegovale tudi finančne inštitucije.

Slika 1. Slovenska ekipa: Nik Stopar, Sara Kališnik, Uroš Kuzman in Kris Stopar. Čepi vodja ekipe Marjan Jerman.

Iz prejšnjih let vsega hudega navajeni tekmovalci in vodje ekip smo bili pozitivno presenečeni nad zahodnimi standardi tekmovanja in bivanja, ki sta bila organizirana v okviru Ameriške univerze v Bolgariji. Blagoevgrad je eno najlepših in najbolj urejenih bolgarskih mest. Po tekmovanju so si študentje ogledali mesto Bansko, ki je pravi naravni biser in bolgarsko smučarsko središče; bolj radovedni pa so obiskali še bližnji znameniti rilski samostan.

Ljubljansko univerzo so zastopali Sara Kališnik iz drugega, Kris Stopar in Nik Stopar iz tretjega ter Uroš Kuzman iz četrtega letnika.

Naloge so bile letos težje kot po navadi. Le 50 (od 249) študentov je doseglo več kot polovico možnih točk. Nik Stopar je prejel drugo nagrado, Uroš Kuzman pa je dobil pohvalo. Tradicionalno je vsaka ekipa, ki predstavlja univerzo, sestavljena iz štirih študentov, nekatere univerze pa na tekmovanje pošljejo tudi večje ekipe. Letos je bil prvič objavljen tudi vrstni red ekip, kjer so za merilo vzeli vsoto točk najbolje uvrščenih štirih študentov iz ekipe. Prva tri mesta so zavzeli Madžari, Rusi in Iranci. Slovenska ekipa je zasedla 33. mesto med šestdesetimi univerzami.

Tako kot vsa leta je tekmovanje potekalo v prijetnem in prijateljskem ozračju. Nenavadno deževno in hladno vreme je preprečilo že skoraj tradicionalno tekmovanje ekip v nogometu.

Dva dneva so študentje vsak dan po pet ur reševali po šest nalog. Teža nalog približno narašča z zaporedno številko. Praviloma je prva naloga namenjena ogrevanju, zadnja pa je zelo težka.

Radoveden bralec lahko vseh dvanajst nalog najde na študentskih straneh Fakultete za matematiko in fiziko. Na tem mestu navedimo le štiri. Bralce vabim, da jih poskušajo rešiti sami. Za boljši uvid v težo nalog objavljamo tudi njihove rešitve.

I.3. Za polinom p v spremenljivkah $x_1, \ldots, x_k$ pravimo, da je *dober*, če obstajajo realne matrike $A_1, \ldots, A_k$ velikosti 2×2, za katere velja

$$p(x_1, \ldots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right).$$

Poišči vsa naravna števila k, za katera so vsi homogeni polinomi v k spremenljivkah stopnje 2 dobri.

I.6. Za polinom p s celimi koeficienti velja $|p(z)| \leq 2$ za vsa kompleksna števila z, ki ležijo na enotskem krogu. Kolikšno je največje število neničelnih koeficientov polinoma p?

II.1. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja: za poljubno realno število $c > 0$ lahko graf funkcije cf dobimo le s togim premikom (to je, z zaporedjem rotacij in translacij) grafa funkcije f. Ali je graf funkcije f nujno premica?

II.3. Naj bo C neprazna, zaprta in omejena podmnožica realne osi, $f\colon C \to C$ pa nepadajoča zvezna funkcija (to je, $f(x) \leq f(y)$ za vse $x \leq y$). Pokaži, da obstaja točka $p \in C$, za katero je $f(p) = p$.

Slika 2. Takole je bilo videti popravljanje naloge II.3, ki je trajalo do jutranjih ur. Vsako rešitev, ki mora biti napisana v angleščini (vsak tekmovalec je skrit pod šifro), neodvisno pregledata vsaj dve vodji ekip in jo ocenita po vnaprej določenem kriteriju. Ko je popravljanje končano, morajo popravljavci uskladiti ocene. V naslednjih dneh sledi še prizadevanje vodij ekip za višje ocene, s katerimi se morajo strinjati vsaj trije popravljavci. Na sliki je mednarodno pisana ekipa, spomnim se Brazilca, Madžara, Poljaka, Slovaka, Nizozemca in Ukrajinke.

Ne pokukajte prehitro v rešitve:

I.3. V primeru ene spremenljivke so edini homogeni polinomi stopnje dva oblike $p(x) = ax^2$ za primerno realno število a. Tedaj lahko vzamemo za $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$.

Vsi homogeni polinomi stopnje dva v dveh spremenljivkah so oblike $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$. Ker je

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} x & by \\ -y & ax + cy \end{vmatrix},$$

enakosti v nalogi zadoščata matriki $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ in $A_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -1 & c \end{smallmatrix}\right]$.

Sedaj privzemimo, da je $k \geq 3$. Pokažimo, da polinom $p(x_1, \dots, x_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2$ ni dober. V nasprotnem primeru bi za vse izbire $x_1, \dots, x_k$ veljalo

$p(x_1,\ldots,x_k)=\det\left(\sum\limits_{i=1}^{k}x_iA_i\right)$. Prvi stolpci treh 2×2 matrik so zagotovo linearno odvisni, zato lahko izberemo takšna števila y_1, …, y_k, da je prvi stolpec netrivialne linearne kombinacije $y_1A_1+\ldots+y_kA_k$ enak $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$. V tem primeru je $\det(y_1A_1+\ldots+y_kA_k)=0$, hkrati pa je $p(y_1,\ldots,y_k)=y_1^2+\ldots+y_k^2\neq 0$.

I.6. Pokazali bomo, da ima lahko takšen polinom največ dva neničelna koeficienta. Pogoj, recimo, izpolnjujejo polinomi 0, 1 in $1+z$.

Privzemimo, da tudi polinom $p(z)=a_nz^n+\ldots+a_0$, z več kot dvema neničelnima koeficientoma, izpolnjuje zahtevane pogoje. Ker lahko brez škode za splošnost polinom p delimo s primerno potenco z in morda zamenjamo p z $-p$ (pri tem se ne spremeni število neničelnih koeficientov in absolutna vrednost polinoma na enotski krožnici), lahko privzamemo, da je neničeln že prosti člen $a_0>0$.

Naj bo $q(z)=a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$. Pokazali bomo, da je $q=0$.

Na enotski krožnici izberimo števila w_0, …, w_{n-1}, za katera je $a_nw_n^k=|a_n|$, to je

$$w_k=\begin{cases}e^{2k\pi i/n}, & \text{če je } a_n>0\,;\\ e^{(2k+1)\pi i/n}, & \text{če je } a_n<0\,.\end{cases}$$

Tedaj je

$$\sum_{k=0}^{n-1}q(w_k)=\sum_{k=0}^{n-1}q\Big(w_0e^{2k\pi i/n}\Big)=\sum_{j=1}^{n-1}a_jw_0^j\sum_{k=0}^{n-1}\Big(e^{2j\pi i/n}\Big)^k=0\,.$$

Zadnja vsota je enaka 0, ker si lahko števila $\left(e^{2j\pi i/n}\right)^k$ predstavljamo kot oglišča pravilnega n-kotnika, njihovo vsoto pa kot vsoto krajevnih vektorjev oglišč. Prav tako bi jo lahko izračunali tudi kot vsoto členov končnega geometrijskega zaporedja.

Izračun povprečne vrednosti polinoma p v točkah w_k nam da

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p(w_k)=\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_0+q(w_k)+a_nw_k^n)=a_0+|a_n|\,,$$

zato je

$$2\geq\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|p(w_k)|\geq\left|\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p(w_k)\right|=a_0+|a_n|\geq 2\,.$$

Odtod sledi, da je $a_0=|a_n|=1$ in $|p(w_k)|=|2+q(w_k)|=2$ za vse k. Vse vrednosti $q(w_k)$ torej ležijo na krožnici $|z-(-2)|=2$, njihova vsota pa je enaka 0. To je možno le, če je $q(w_k) = 0$ za vse k. To pa pomeni, da ima polinom q, ki je stopnje največ $n-1$, vsaj n različnih ničel. Zato je $q = 0$ in ima polinom $p(z) = a_0 + a_n z^n$ največ dva neničelna koeficienta.

Kot zanimivost povejmo še, da je vodja madžarske ekipe Geza Kos opazil, da se lahko rešitvi naloge približamo s pomočjo Parsevalove enakosti. Drugo normo polinoma lahko izračunamo na dva načina, s pomočjo koeficientov in z integralom kvadrata absolutne vrednosti po enotski krožnici:

$$|a_0|^2 + \cdots + |a_n|^2 = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(e^{it})|^2 dt \le \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4\, dt = 4\,.$$

Odtod sledi, da so lahko največ štirje koeficienti polinoma neničelni in enaki ± 1. Kljub precejšnjim naporom pa nam naloge, tudi ob upoštevanju te omejitve, na tak način ni uspelo rešiti do konca.

II.1. Ker velja $ce^x = e^{x+\log c}$, temu pogoju zadošča tudi eksponentna funkcija $f(x) = e^x$.

II.3. Pa recimo, da je $f(x) \neq x$ za vse $x \in C$. Naj bo $[a, b]$ najmanjši zaprt interval, ki vsebuje C. Zaradi zaprtosti množice C mora veljati $a, b \in C$. Ker slika funkcija f nazaj v C in nima negibne točke, mora veljati $f(a) > a$ in $f(b) < b$. Sedaj uporabimo standardni trik iz Analize 1 in definirajmo

$$p = \sup\{x \in C;\ f(x) > x\}\,.$$

Ker je množica C zaprta, funkcija f pa je zvezna, je $f(p) \geq p$, zato je $f(p) > p$. Za vse $x \in C$, ki so večji od p, pa velja $f(x) < x$. Tako pridemo do protislovja $f(f(p)) < f(p)$ z dejstvom, da je f nepadajoča funkcija.

Marjan Jerman

STROKOVNA EKSKURZIJA DMFA V IDRIJO
Ogled tehniške dediščine (10. ali 17. maja 2008)

Ogledali si bomo muzejske zbirke v gradu Gewerkenegg, kanomeljske klavže, Antonijev rov, idrijsko kamšt, stroje ob jašku Frančiške, rudarsko hišo z etnološko zbirko in še kakšne znamenitosti Idrije.

DMFA želi obnoviti strokovne ekskurzije. Naslednja bo predvidoma septembra v inštitute v okolici Trsta. Če se zanimate za ekskurzijo v Idrijo ali za naslednje ekskurzije, se oglasite na naslov Mitja.Rosina@ijs.si, da vam bomo pošiljali nadaljnja obvestila. Poglejte tudi na spletno stran http://www.dmfa.si/.

Mitja Rosina