

Doktorska disertacija

UPORABA KALMANOVEGA FILTRA
PRI KINEMATIČNIH GEODETSKIH MERITVAH

Sonja Gamse, univ.dipl.inž.geod.

Julij, 2010

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana **Sonja Gamse**, univ. dipl. inž. geod., izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom:

**UPORABA KALMANOVEGA FILTRA PRI KINEMATIČNIH
GEODETSKIH MERITVAH.**

Ljubljana,

(podpis avtorja)

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo
----------------	------------------	---------	--------

*Ne moreš obstajati, če ne delaš,
ne moreš obstajati, če ne misliš.
(Dr. France Bučar)*

...Posvečeno mami...

ZAHVALA

Ob koncu enega dela prehojene poti - nočem reči končanega dela, saj že na tem mestu vidim nove izzive - je tudi priložnost, da se ozrem nazaj v čas in naredim analizo prehojene poti. Kaj mi je prinesla, kaj sem si znala vzeti, kateri so bili tisti ključni trenutki, vrhovi in padci, kdo me je spremljal na tej poti ali se ji priključil ... Težko bi bilo vse občutke in misli strniti na eno stran, zato le kratka, a iskrena hvala vsem, ki ste mi na tej poti tako ali drugače pomagali.

Hvala mentorju izr. prof. dr. Dušanu Kogoju za dano priložnost, zaupanje in strokovne napotke. Ich bedanke prof. dr. Thomas A. Wunderlich für das feste Vertrauen, dass alle Türen am Lehrstuhl für Geodäsie an der Technischen Universität München mir immer offen waren. Ich bedanke Ihnen und Ihren Mitarbeiter - dr. Werner W. Stempfhuber, dr. Karl Foppe und bedonders dr. Peter Wasmeier für die weitergegebene Kenntnisse und die Hinweise bei meiner Arbeit. Ich bedanke mich für die schöne und fruchtbare Zeit in München.

Hvala Jaki in podjetju Geograd za izposoj instrumenta na začetku moje poti. Hvala podjetju Geoservis in Gregorju za vso posredovano znanje.

Hvala Skladu dr. Otta Likarja, dipl. inž., in Karle Likar, prof. dr. Mihi Boltežarju, in skladu Deutscher Akademischer Austausch Dienst za zaupanje in finančno podporo, brez katere bi bila izbrana pot izjemno težko uresničljiva.

Hvala prof. dr. Goranu Turku in izr. prof. dr. Mihaelu Permanu za temeljit pregled doktorske disertacije in plodne konzultacije, ki so delu dale dokončno obliko in vsebino.

Hvala tistim, ki ste me znali poslušati. Z vami mi je bilo lažje, ob vas nisem pozabila še na druge plati življenja. Hvala Bojan, Gašper, Iztok, Dejan, Barbi, Primož, Tina, Robert, Nataša, Primož, Oskar, Dejan, Lucija. Ich bedanke mich Walkiria und Frank für die Hilfe und unvergeßliche Zeit und Beziehung in München. Hvala Ivi, Vesni, Špeli, Maji, Maidi; hvala vam za čudež, ki ste ga s svojim strokovnim delom in osebnim pristopom naredile pri Veroniki in Aleksandru. Hvala vam, da sem lahko bila vsak trenutek sproščena pri svojem delu, ko sta bila Veronika in Alekdander v vašem varstvu. Čar trdega dela je tudi v tem, da ti v življenje lahko prinese posebne ljudi, ki ostanejo s tabo tudi, ko delo dobi zaključeno obliko.

Hvala staršem za svobodo. Od kar se zavedam sebe, sta mi pustila svet okoli mene v lastno presojanje in samostojno izbiro poti.

Hvala Robi za ... premalo imam prostora; nama bi lahko posvetila knjigo.

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 519.22:528(043.3)
Avtor: Sonja Gamse, univ. dipl. inž. geod.
Mentor: izr. prof. dr. Dušan Kogoj
Komentor: univ. prof. dr. - ing. habil. Thomas A. Wunderlich
Naslov: Uporaba Kalmanovega filtra pri kinematičnih geodetskih meritvah.
Obseg in oprema: 96 str., 5 pregl., 59 sl., 81 en.
Ključne besede: diskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom, elektronski tahimeter, izboljšava meritev, Kalmanov filter, kinematični proces, stanje sistema

Izvleček

Zajem deformacij in premikov, tako v smislu merskega zajema kot analize rezultatov, danes zahteva interdisciplinarno delo strokovnjakov iz različnih področij. Prednost geodetskih postopkov zajema deformacij in premikov je zajem le-teh v prostoru in času. V primeru, da obravnavamo deformacije in premike kot kinematične, lahko za obdelavo kinematičnih terestričnih opazovanj uporabimo Kalmanov filter. V okviru doktorske disertacije so bile pridobljene konkretne meritve kinematičnega procesa. Meritve so bile izvedene z enim izmed najsodobnejših elektronskih tahimetrov z možnostjo samodejnega sledenja gibajočega reflektorja. Kinematičen proces je bil izveden na osnovi gibanja vozička z reflektorjem na tirnici, podani v lokalnem koordinatnem sistemu. Za zajem meritev je bil pripravljen program za vzpostavitev komunikacije z instrumentom, samodejno sledenje reflektorja in pridobivanje ter shranjevanje meritev. Za obdelavo meritev je bil uporabljen diskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom, s predhodno uporabo zakona o prenosu varianc in kovarianc. Poudarek doktorske disertacije je na statistični oceni razvitega modela, ki nam omogoča odkrivanje prisotnosti grobih pogreškov v meritvah in podaja ustreznost izbire vhodnih količin modela. Izvirnost doktorske disertacije predstavlja neodvisna kontrola zanesljivosti matematično stohastičnega modela, ki temelji na neodvisni referenčni tirnici. Prednost referenčne tirnice je možnost istočasnega vrednotenja modela in zmogljivosti instrumenta. Prispevek dela podaja ključna izhodišča, na katera je potrebno biti pozoren pri kinematičnih geodetskih terestričnih postopkih.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 519.22:528(043.3)
Author: Sonja Gamse, univ. dipl. ing. geod.
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Dušan Kogoj
Supervisor: Univ. Prof. Dr. - Ing. Habil. Thomas A. Wunderlich
Title: The Use of Kalman Filter for Kinematic Geodetic Observations
Notes: 96 p., 5 tab., 59 fig., 81 eq.
Key words: discrete Wiener process acceleration model, electronic tacheometer, measurement innovation, Kalman filter, kinematic process, system state

Abstract

Surveying of deformations and movements, which means measuring of processes and analyzing of observations, today requires interdisciplinary work of experts from different disciplines. The advantage of geodetic procedures in surveying of deformations and movements is their definition in space and time. In the case of deformations and movements regarded as kinematic, Kalman filter can be used for the processing of kinematic terrestrial observations. For the PhD thesis the concrete measurements of the kinematic process have been performed. Measurements were made with one of the most modern electronic tacheometers capable of automatic tracking of a moving reflector. Kinematic process was carried out based on the motion of the trolley with a reflector moving along a straight trajectory, given in a local coordinate system. To capture measurements a software was prepared to establish communication with the instrument, to automatically track the reflector and to acquire and store the measurements. For the processing of measurements the discrete Wiener process acceleration model was used, with prior application of the law of propagation of variances and covariances. The dissertation focuses on the statistical evaluation of the developed model, which allows us to detect the presence of gross errors in measurements and provides adequacy of the given input values. Originality of the thesis is represented by independent control of mathematical stochastic model reliability based on an independent reference trajectory. The advantage of the reference trajectory is the possibility of simultaneous evaluation of the model and capabilities of the instrument. The contribution of the work is in giving several demands that need extra attention in the case of kinematic geodetic terrestrial processes.

Kazalo vsebine

1	UVOD	1
1.1	Razvrstitev deformacijskih modelov	1
1.2	Kalmanov filter	2
1.3	Opis problema	4
1.4	Vsebina doktorske disertacije	6
2	KALMANOV FILTER	9
2.1	Linearni Kalmanov filter	11
2.1.1	Kalmanova matrika izboljšave $\mathbf{K}_k$	14
2.2	Diskretizacija: Prehod iz zveznega problema na diskretni linearni problem .	16
2.2.1	Definicija kovariančne matrike šuma sistema $\mathbf{Q}_k$	18
2.3	Razširitve Kalmanovega filtra	19
2.3.1	Ocena stanja sistema v primeru nelinearnih sistemov	19
2.3.2	Postopek linearizacije: Razvoj v Taylorjevo vrsto	20
3	STATISTIČNA ANALIZA ČASOVNO ODVISNIH PROCESOV	21
3.1	Ocena stanja sistema v diskretnem linearnem časovno odvisnem modelu . .	23
3.2	Preizkušanje konsistenčnosti postopka za ocenjevanje stanja sistema	23
3.2.1	Testna statistika v domeni meritev	23
3.2.2	Testna statistika v domeni vektorja stanja sistema	25
3.3	Zmožnost nadzora in opazovanosti sistema	25
3.3.1	Zmožnost nadzora sistema	25
3.3.2	Zmožnost opazovanosti sistema	26
4	KALMANOV MODEL MERITEV IN SISTEMA (RAČUNSKI PRIMER)	27
4.1	Opis problema	27
4.2	Vzpostavitev praktičnega primera	27
4.2.1	Referenčni okvir	27
4.2.2	Instrumentarij	30
4.3	Funkcionalni in stohastični model: Diskretni model Wiener-jevega procesa s pospeškom	37
5	VREDNOTENJE DISKRETNEGA MODELA WIENERJEVEGA PROCESA S POSPEŠKOM	45
5.1	Računske zahteve	46
5.2	Kazalci notranjega zaupanja	46
5.2.1	Zmožnost opazovanosti DMWPP	46
5.2.2	Zmožnost nadzora DMWPP	46
5.2.3	Lastnosti matrike $\mathbf{P}$	46
5.2.4	Lastnosti matrike $\mathbf{K}$	51
5.3	Statistični testi	58
5.3.1	Položaj reflektorja	58
5.3.2	Skladnost DMWPP v domeni meritev	66

5.3.3	Skladnost DMWPP v domeni stanja sistema	69
5.4	Referenčna tirnica kot parameter ocenjevanja	72
5.5	Povzetek rezultatov	76
6	ZAKLJUČKI	81
6.1	Povzetek prispevka dela	82
6.2	Nadaljnje raziskave	84
6.3	Zaključek	86
7	POVZETEK	89
8	SUMMARY	91
	VIRI	93
	PRILOGE	97
A	Rezultati programa CAPLAN	99
B	Razlike v meritvah	103

Kazalo preglednic

1.1	Razvrstitev in lastnosti deformacijskih modelov [Welsch, Heunecke (2001)]	2
4.1	Koordinate stojišča instrumenta s standardnimi deviacijami, Priloga A . . .	29
4.2	Tehnični podatki instrumenta <i>TCRA1201 Leica Geosystems</i> [Tech. Data] .	32
5.1	Vsota absolutnih razlik med napovedanimi oz. filtriranimi in merjenimi vrednostmi	63
5.2	Odstotek filtriranih vrednosti znotraj intervala 1σ in intervala 2σ	65

Kazalo slik

1.1	Diagram sistem-meritve-Kalmanov filter, povzeto po [Gelb (1974)].	3
2.1	Zanka KF, [Brown, Hwang (1992)]	10
2.2	Zanka KF	13
4.1	Geodetski laboratorij Katedre za geodezijo, TUM, z referenčno tirnico . . .	28
4.2	Reflektor <i>GRZ4 Leica Geosystems</i> 360° na vozičku	29
4.3	Položaj stojišča instrumenta (StandPunkt_S) in danih točk v referenčnem (y, x) sistemu laboratorija	30
4.4	Komunikacijski protokoli <i>Leica Geosystems</i>	33
4.5	Pregled aplikacije odjemalec - strežnik [GeoCOM Reference Manual V 1.20] . . .	33
4.6	Razvoj geodetskih instrumentov	35
4.7	Celotni računski postopek KF, z zakonom o prenosu varianc in kovarianc . . .	43
5.1	Konvergenca sledi a posteriori kovariančne matrike stanja sistema $\mathbf{P}_k^+$. . .	47
5.2	Konvergenca lastnih vrednosti 1,2,3 a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$. . .	48
5.3	Konvergenca lastnih vrednosti 4,5,6 a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$. . .	48
5.4	Konvergenca lastnih vrednosti 7,8,9 a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$. . .	49
5.5	Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, brez grobih pogreškov	50
5.6	Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, z grobimi pogreški	50
5.7	Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$ za različne vrednosti σ_w	51
5.8	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za kompo- nento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj	52
5.9	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za kompo- nento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Hitrost	53
5.10	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za kompo- nento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Pospešek	54
5.11	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj, $\sigma_w = 0.1$. . .	55
5.12	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Hitrost, $\sigma_w = 0.1$. . .	55
5.13	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Pospešek, $\sigma_w = 0.1$. . .	56
5.14	Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj, $\sigma_w = 0.000001$. . .	56

5.15	Elementi Kalmanove matrike izboljšave K ; rdeče - elementi matrike K za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike K za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike K za komponento z merskih popravkov: Hitrost, $\sigma_w = 0.000001$	57
5.16	Elementi Kalmanove matrike izboljšave K ; rdeče - elementi matrike K za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike K za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike K za komponento z merskih popravkov: Pospešek, $\sigma_w = 0.000001$	57
5.17	Položaj x reflektorja: rdeče - x položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev x , modro - filtrirane vrednosti položajev x	59
5.18	Položaj x reflektorja - izsek: rdeče - x položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev x , modro - filtrirane vrednosti položajev x	59
5.19	Položaj y reflektorja: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y	60
5.20	Položaj y reflektorja - izsek: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y	60
5.21	Položaj z reflektorja: rdeče - z položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev z , modro - filtrirane vrednosti položajev z	61
5.22	Položaj y reflektorja - izsek: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y	61
5.23	Horizontalna ravnina	62
5.24	Standardne deviacije položajnih komponent	62
5.25	Napaka položaja x (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$	63
5.26	Napaka položaja y (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$	64
5.27	Napaka položaja z (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$	64
5.28	Normirana kvadratna izboljšava	66
5.29	Izboljšave meritev KF	67
5.30	Histogram izboljšave meritev KF za komponento x	68
5.31	Histogram izboljšave meritev KF za komponento y	68
5.32	Histogram izboljšave meritev KF za komponento z	69
5.33	Normirana napaka stanja sistema	70
5.34	Histogram popravkov komponent stanja sistema - položajne komponente	70
5.35	Histogram popravkov komponent stanja sistema - komponente hitrosti	71
5.36	Histogram popravkov komponent stanja sistema - komponente pospeška	71
5.37	Pravokotna oddaljenost filtriranih (rdeče) in merjenih (modra) vrednosti od referenčne tirnice v horizontalni ravnini in interval 1 cm	72
5.38	Pravokotna oddaljenost filtriranih (rdeče) in merjenih (modro) vrednosti z -komponente od referenčne tirnice in interval 1 cm	73
5.39	Hitrost v vseh treh smereh (modro-filtrirane vrednosti, rdeče-referenčne vrednosti) in interval 2σ (modro)	74
5.40	Pospešek v vseh treh smereh (modro-filtrirane vrednosti, rdeče-referenčne vrednosti) in interval 2σ (modro)	74
5.41	Napaka hitrosti v vseh treh smereh ter interval σ (zelena polna črta) in interval 2σ (zelena prekinjena črta)	75

5.42	Napaka pospeška v vseh treh smereh ter interval σ (zelena polna črta) in interval 2σ (zelena prekinjena črta)	75
5.43	Standardne deviacije hitrosti v vseh treh smereh	76
5.44	Standardne deviacije pospeška v vseh treh smereh	76
5.45	Direktna opazovanja	78
5.46	Indirektna opazovanja ali meritve KF	78
B.1	Razlike v merjenih dolžinah, $d(i+1)-d(i)$	104
B.2	Razlike v opazovanih horizontalnih smereh, $hz(i+1)-hz(i)$	105
B.3	Razlike v opazovanih zenitnih razdaljah, $zr(i+1)-zr(i)$	106

SIMBOLI

a	... pospešek
Δa_m	... največja sprememba pospeška znotraj časovnega intervala
$\mathbf{A}$	... časovno zvezna matrika prehoda stanja
$\mathbf{B}(\tau)$	... časovno zvezna matrika vhoda
$\mathbf{C}$	... matrika nadzora
d	... poševna dolžina
$\mathbf{d}_k$	... izboljšava meritev
$\mathbf{D}_k$	... kovariančna matrika izboljšave meritev
$\mathbf{e}_k^-$	... a priori napaka
$\mathbf{e}_k^+$	... a posteriori napaka
$E[\cdot]$	... pričakovana vrednost
$\mathbf{f}(\cdot)$	... nelinearna funkcija sistema
$\mathbf{F}_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$	... matrika prehoda stanja
$\mathbf{G}_k$	... diskretna matrika vhoda
hz	... horizontalna smer
H_0	... ničelna domneva
H_a	... alternativna domneva
$\mathbf{h}(\cdot)$	... nelinearna funkcija meritev
$\mathbf{H}_k \in \mathcal{R}^{m \times n}$	... merska matrika
$\mathbf{I}$	... enotska matrika
KF	... Kalmanov filter/Kalmanovo filtriranje
$\mathbf{K}_k \in \mathcal{R}^{n \times m}$	... Kalmanova matrika izboljšave
LKF	... linearni Kalmanov filter
$\mathbf{L}_k$	... vektor direktnih meritev
m	... število meritev v vsakem časovnem koraku t_k
n	... število neznank / število komponent stanja sistema
n_r	... število matematičnih operacij
$\mathbf{N}_k$	... matrika parcialnih odvodov
$\mathbf{O}$	... matrika opazovanosti
$\mathbf{P}_k^-$	... a priori kovariančna matrika napake
$\mathbf{P}_k^+$	... a posteriori kovariančna matrika napake
$\mathbf{P}_{\mathbf{v}_{x,k}}$	... kovariančna matrika popravkov stanja sistema
$\mathbf{Q}_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$	... kovariančna matrika šuma sistema
R_n	... ostanek Taylorjeve vrste
$\mathbf{R}_L$	... kovariančna matrika direktnih meritev
$\mathbf{R}_k \in \mathcal{R}^{m \times m}$	... kovariančna matrika meritev
Δt	... časovni interval
$\mathbf{u}$	... vektor nadzora vnosa
$\mathbf{v}_k \in \mathcal{R}^{m \times 1}$	... merski šum
$\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}$	... vektor popravkov stanja sistema
zr	... zenitna razdalja

$\mathbf{z}_k \in \mathcal{R}^{m \times 1}$	...	vektor meritev za t_k
$\mathbf{w}_k \in \mathcal{R}^{n \times 1}$	...	šum sistema
$\tilde{w}_k$	...	sprememba pospeška
$\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^{n \times 1}$	...	vektor neznank/stanja sistema za t_k
$\mathbf{x}_k^-$	...	a priori ocena stanja sistema
$\mathbf{x}_k^+$	...	a posteriori ocena stanja sistema
$\mathbf{\Gamma}_k$	...	vektor izboljšave
$\Omega_{\mathbf{d},k}^2$	...	testna statistika v domeni meritev
$\Omega_{\mathbf{v}_{x,k}}^2$	...	testna statistika v domeni stanja sistema
$\chi_{r,1-\alpha}^2$	...	χ^2 -porazdelitev z r prostostnimi stopnjami in stopnjo značilnosti α
$\kappa(\mathbf{P})$	...	pogojno število
σ	...	standardna deviacija
σ_d	...	standardna deviacija dolžine
σ_{hz}	...	standardna deviacija horizontalne smeri
σ_{zr}	...	standardna deviacija zenitne razdalje
σ_w	...	skalar intenzitete šuma sistema

1 UVOD

Zajem deformacij grajenih ali naravnih objektov, tako v smislu merskega zajema kot analize rezultatov, danes zahteva interdisciplinarno delo strokovnjakov iz različnih področij, kot so gradbeništvo, geodezija, geologija, hidrologija, seizmologija, ... ter disciplin, ki se ukvarjajo s teorijo sistemov (matematika, statistika) in obdelavo signala (elektrotehnika). Interdisciplinarno delo posledično pogojuje podrobne zahteve glede opredelitev postopkov in analiz deformacij.

Geodetske meritve so le del postopkov spremljanja deformacij in premikov. Ena od glavnih geodetskih nalog je zajem in analiza deformacij in premikov naravnih in grajenih objektov, ki se lahko obravnavajo na različne načine glede na upoštevanje časa in delujočih sil. Danes najpogosteje uporabljeni modeli so dinamični in kinematični modeli.

Sodobni geodetski instrumenti omogočajo zajem kinematičnih procesov z visoko frekvenco meritev. Ta lastnost geodetskih instrumentov daje geodetskemu zajemu deformacij in premikov ključno prednost, t.j. opredelitev deformacij in premikov v prostoru in času. Z ustreznim deformacijskim modelom je vektor neznank (običajno so to prostorske koordinate referenčnih točk objekta), s pripadajočo oceno natančnosti, mogoče določiti v realnem času z upoštevanjem vseh časovnih zakasnitev.

Pri obravnavi objekta kot dinamični ali kinematični proces, se predpostavlja, da je objekt stalno v gibanju. Ob predpostavki, da so spremembe objekta zajete z merskim sistemom, ki omogoča enolično določitev položaja (npr. TPS, GPS, laserski interferometer), za posamezni časovni trenutek nimamo na voljo nadštevilnih meritev. Klasični geodetski postopki naknadne obdelave, ki temeljijo na izravnavi nadštevilnih geodetskih opazovanj, v tem primeru niso uporabni. Potrebno je vključiti druge tehnike, ki omogočajo oceno opazovanj v realnem času. Kalmanov filter (KF) predstavlja tehniko naprednih geodetskih postopkov kinematičnih procesov. Ocena temelji na napovedovanju prihodnjega stanja sistema na osnovi znanega preteklega vedenja.

1.1 Razvrstitev deformacijskih modelov

Geodetska deformacijska analiza danes pomeni *geodetsko analizo dinamičnih in kinematičnih procesov* [Welsch, Heunecke (2001)], kar pomeni vključevanje dejavnikov vpliva in časovne odvisnosti. V tabeli 1.1 je podana razvrstitev in lastnosti deformacijskih modelov.

V klasični geodeziji je najpogosteje uporabljen kongruenčni model. Deformacije in premiki objekta so definirani s spremembami položajev referenčnih točk objekta med dvema izmerama. V modelu niso vključene vzročne sile in časovna odvisnost. Ker se predpostavlja, da je objekt v času meritev v stanju mirovanja, je mogoče izvesti nadštevilne meritve. Nadštevilne meritve zagotavljajo klasično izravnavo geodetskih opazovanj [Bakker in sod. (1995)], katere rezultat je ocena neznank in pripadajoča natančnost. Izravnavo je izvedena na osnovi metode najmanjših kvadratov in omogoča objektivno kontrolo geodetskih

Deformacijski model	Kongruenčni model	Kinematični model	Statični model	Dinamični model
Časovna komponenta	brez modeliranja	premiki so funkcija časa	brez modeliranja	premiki so funkcija časa
Vzročne sile	brez modeliranja	brez modeliranja	premiki so funkcija sil	premiki so funkcija sil
Stanje objekta	zadostno stanje mirovanja	v gibanju	zadostno stanje mirovanja	v gibanju

Preglednica 1.1: Razvrstitev in lastnosti deformacijskih modelov [Welsch, Heunecke (2001)]

opazovanj, ki je zahteva pri vseh geodetskih delih ne glede na zahtevano natančnost, [Leick (1990)].

Novejša geodetska deformacijska analiza vse bolj vključuje geodetsko analizo dinamičnih in kinematičnih procesov, z vključitvijo sil in časovnega poteka nastalih deformacij in/ali premikov. Modeli, ki opisujejo deformacijo ali premik kot funkcijo sil in časa, se imenujejo dinamični modeli. Prva poenostavitve dinamičnih modelov so kinematični modeli, ki opisujejo deformacijo zgolj kot funkcijo časa. V preteklosti se je kinematika deformacijskih procesov obravnavala s transformacijo kinematičnega problema v zaporedje statičnih meritev. Moderni geodetski sistemi, kot sta globalni sistem določanja položaja, angl. Global Positioning System (GPS), in terestrični sistem določanja položaja, angl. Terrestrial Positioning System (TPS), omogočajo samodejno, ponavljajoče spremljanje objektov v gibanju in kot taki omogočajo zajem premikov in deformacij skoraj v realnem času. Geodetski instrumenti ponujajo možnost izpolnitve smernic v inženirski geodeziji, ki poleg geometričnih sprememb predvidevajo tudi in predvsem opis sprememb objekta v prostoru in času kot posledici sil. Tak postopek zahteva uporabo dinamičnih modelov, ki obravnavajo objekt, vzročne sile in nastale deformacije kot celoto. S poenostavitvijo dinamičnih modelov so izvedeni kinematični modeli. V kinematičnem pristopu obravnave koordinat točk kot funkcije časa je deformiranje opisano s koordinatami, hitrostjo in pospeškom.

Prav tako so področja kot so računalništvo, nove merske tehnike in novi algoritmi vrednotenja bistveno pripomogli h kvalitetnejši deformacijski analizi.

1.2 Kalmanov filter

V primeru, da opazujemo objekt, ki je v nenehnem gibanju, in pod predpostavko, da je kinematičen proces opazovan samo z elektronskim tahimetrom kot terestričnim sistemom za določanje položaja, ni mogoče izvesti nadštevilnih opazovanj, ki bi omogočala izračun natančnosti določitve neznank. Klasična geodetska izravnava z večjim številom opazovanj, kot jih je nujno potrebnih za enolično določitev neznank sistema, ne more biti izvedena. Za ovrednotenje neznanega vektorja stanja sistema in pripadajoče statistične ocene v realnem času je potrebno uporabiti druge metode. V kinematičnih procesih imamo opravka s časovnimi vrstami in standardnimi tehnikami odstranitve šuma iz časovne vrste, kot

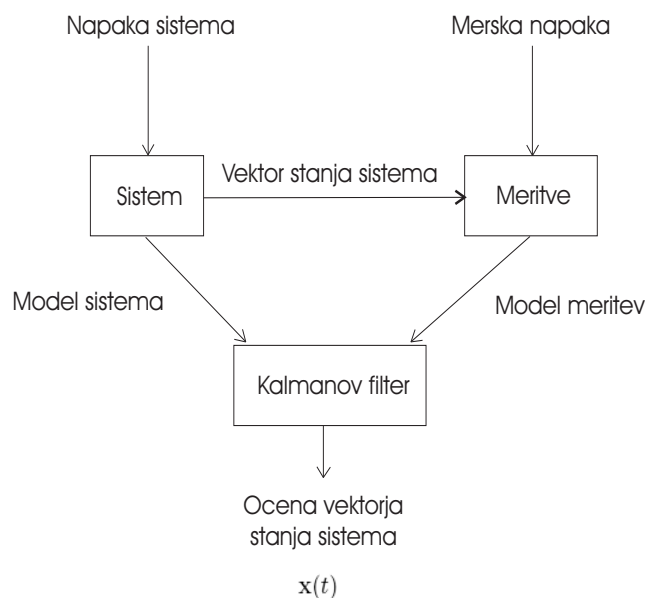
so filtriranje in glajenje. V smislu metode najmanjših kvadratov je odstranitev šuma optimalna z uporabo KF. KF reši problem enolične določitve neznank. Filter računsko zagotovi nadštevila opazovanja, ki so potrebna za odstranitev vplivov merskih napak [Sorenson (1970)] in izračun natančnosti ocene neznank.

Teorija KF je bila izpeljana iz del Gaussa, Kolmogorova in izsledkov Wienerjevega filtra v začetku 60. let prejšnjega stoletja. Wienerjev pristop filtriranju po metodi najmanjših kvadratov je uporabljen tudi v KF. Oba modela sta osnovana na definiciji utežne funkcije: kako utežiti vhodne podatke, da bodo zagotavljali pridobitev najboljše ocene neznank v danem trenutku.

KF je optimalni rekurzivni linearni algoritem za obdelavo meritev, v katerih je prisoten šum. Za izračun ocene vektorja neznank/stanja sistema algoritem vključi vsako opazovanje, ne glede na natančnost. Algoritem vključi v model sistema in model meritev vse razpoložljive informacije o, slika 1.1:

- dinamiki sistema (časovnem spreminjanju in silah),
- merskih sistemih,
- statističnih karakteristikah merskih napak in napak sistema ter
- začetnih vhodnih podatkih.

Izhodna količina Kalmanovega filtra je ocena stanja sistema v danem trenutku, slika 1.1.



Slika 1.1: Diagram sistem-meritve-Kalmanov filter, povzeto po [Gelb (1974)].
Figure 1.1: Block diagram depicting system-measurement-Kalman filter, derived from [Gelb (1974)]

Začetki praktične uporabe KF segajo na področje navigacije, to je določanja tirnice gibanja objekta v prostoru in času. Algoritem KF se danes uporablja na področjih geodezije, elektrotehnike, medicine, ..., povsod v nalogah, kjer so neznane količine določene kot funkcija pogrešenih opazovanj. Vhodne količine so določene z deterministično komponento in stohastičnimi motnjami. Namen metode KF je filtriranje podatkov, odkrivanje sistematičnih in grobih pogreškov ter določanje vpliva slučajnih pogreškov. Algoritem upošteva vse razpoložljive podatke o meritvah, predhodno znanje o sistemu in merskem instrumentariju, za pridobitev ocene stanja sistema na način, ki statistično minimizira napake. Učinkovitost filtra se je izkazala uspešna zlasti pri nalogah, kjer ni na voljo nadštevilnih meritev, t.j. v geodetskih nalogah navigacije ter stalnem zajemanju deformacij in premikov. Pri obdelavi podatkov rekurzivni algoritem KF ne zahteva shranjevanje vseh meritev in stanj sistema. Filter namreč izvede izračun neznanih količin v danem trenutku samo na osnovi podatkov predhodnega stanja sistema. Ta lastnost je ena temeljnih prednosti algoritma, kadar se uporablja za velike sisteme z veliko količino podatkov.

1.3 Opis problema

Glede na hiter razvoj merskih sistemov, ne le geodetskih, in potrebe po interdisciplinarni obravnavi deformacij in premikov morajo biti tudi sodobni geodetski merski sistemi in postopki poznani v vseh podrobnostih. Zmogljivosti kinematičnih postopkov GPS so dandanes že dobro poznane. Po drugi strani pa tudi terestrična geodezija s sodobnimi instrumenti ponuja možnosti za obravnavo deformacij in premikov naravnih in grajenih objektov kot kinematičnih procesov. Vključitev časovne komponente neposredno v obdelavo terestričnih kinematičnih opazovanj zahteva dobro poznavanje zmogljivosti sodobnih elektronskih tahimetrov in postopkov obdelave terestričnih kinematičnih opazovanj.

Na voljo je veliko literature, ki opisuje teoretične osnove ocenjevanja dinamičnih in kinematičnih sistemov in podajajo numerične primere filtriranja. V tem delu sta bili kot teoretična osnova uporabljeni predvsem deli: [Bar-Shalom in sod. (2001)] in [Simon (2006)]. Poleg navedenih temeljnih del so bila za teoretično podlago uporabljena naslednja dela: [Gelb (1974)], [Brown, Hwang (1992)], [Blackman, Popoli (1999)], [Grewal, Andrews (2001)], [Chui, Chen (1999)], [Welch, Bishop (2004)] in [Ribeiro (2004)]. Omenjena dela vključujejo številne kratke, vendar za razumevanje algoritma izjemno uporabne, numerične primere uporabe KF. Razvoj geodetskih postopkov in metod spremljanja in vrednotenja deformacij je opisan v dveh člankih: [Welsch (2002)] in [Welsch, Heunecke (2001)] ter knjigi [Welsch in sod. (2000)]. V doktorski disertaciji [Gülal (1997)] je podrobno opisana uporaba KF na primeru geodetskih opazovanj grajenega objekta - jezu. Nadaljnje praktične izvedbe KF so podane v [Busse, How (2002)], [Eichhorn (2005)], [Gao in sod. (2005)], [Negenborn (2003)], [Lippitsch, Lasseur (2006)] in [Pelzer (1987)]. Matematične osnove, potrebne za razumevanje KF, so podane v [Golub, Van Loan (1991)] in [Bronštejn, Semendjajev (1967)]. V knjigah [Ristic in sod. (2004)] in [Haykin (1999)] so predstavljene adaptivne tehnike filtriranja. Zmogljivosti sodobnih elektronskih tahimetrov so opisane v [Stempfhuber (2004)], [Bayoud (2006)] in [Schölderle (2006)].

Glavna naloga dela je strnjena v dveh delih:

1. Izvedba kinematičnega procesa

- simulacija kinematičnega procesa in
- zajem le-tega z elektronskim tahimetrom;

2. Zapis modela vrednotenja

- razviti ustrezen model vrednotenja in
- preveriti ustreznost modela z elementi notranjega zaupanja, statističnimi testi in neodvisnim referenčnim okvirjem.

Glavni poudarek dela je na opisu terestričnega kinematičnega procesa. Predmet doktorske disertacije je razviti primeren model vrednotenja opazovanj, zajetih s sistemi TPS, še posebej v nalogah, kjer je potrebno izpolniti visoke zahteve po natančnosti. Pri delu s praktičnimi problemi, ki vključujejo diskretne podatke, zlasti pri vrednotenju le-teh v realnem času, je pomembno, da je uporabljena metoda računsko izvedljiva, kot tudi matematično pravilna. Za preverjanje uporabljene metode so običajno izvedene predhodne simulacije in testi meritev. Druga možnost je vzpostavitev neodvisnega sistema kontrole.

Simulacija kinematičnega procesa

V okviru doktorske disertacije je bil simuliran kinematični proces na poznani referenčni tirnici v geodetskem laboratoriju Tehniške univerze München. Referenčna tirnica, na kateri je nameščen voziček, je definirana v lokalnem koordinatnem sistemu laboratorija. Na voziček je bil nameščen reflektor. Kinematične meritve so bile izvedene z elektronskim tahimetrom proizvajalca *Leica Geosystems*, ki omogoča samodejno prepoznavanje tarče in sledenje. Uporabljen je bil pripadajoči reflektor, proizvajalca *Leica Geosystems*. Meritve so bile zajete s programom *Visual Basic*, pripravljenim posebej za namen doktorske disertacije. V program je bila vključena knjižnica *Leica Geosystems GeoCOM*.

Model vrednotenja in preizkušanje le-tega

Glavni namen doktorske disertacije je bil razviti ustrezen model vrednotenja in ocena njegove učinkovitosti za ocenjevanje kinematičnega procesa, ki smo ga zajeli z elektronskim tahimetrom. Glede na dejstvo, da je bil kinematični proces zajet samo z enim merskim sistemom - elektronskim tahimetrom, ni bilo mogoče izvesti nadštevilnih meritev. Za pridobitev kinematičnega položaja premikajočega se reflektorja in predvsem parametrov, ki podajajo statistično oceno pridobljenega vektorja neznank, je potrebno uporabiti tehniko filtriranja.

Na podlagi podrobne študije teoretičnih osnov filtriranja, še posebej v literaturi [Bar-Shalom in sod. (2001)] in [Simon (2006)], so bile preizkušene različne možnosti izvajanja KF. Čeprav sta algoritem in delovanje KF relativno enostavna za razumevanje, je vse prednosti in pomanjkljivosti mogoče razumeti le z dobrim znanjem matematičnih osnov in na podlagi praktičnih izkušenj. Na osnovi podrobnega poznavanja gibanja vozička

vzdolž tirnice in zmogljivosti uporabljenega instrumenta za kinematične meritve bo razvit ustrezen model vrednotenja.

V okviru zadnje in najpomembnejše naloge dela so bile izvedene različne kontrole modela, kot so ocene izhodnih parametrov modela, statistični testi in neodvisna kontrola.

1.4 Vsebina doktorske disertacije

Doktorska disertacija vključuje 6 poglavij.

Poglavje 1 opisuje razvrstitev deformacijskih modelov in kratek opis KF.

Poglavje 2 podaja matematični model KF s poudarkom na linearnem KF in Kalmanovi matriki izboljšave. Podpoglavje 2.2 vključuje postopek diskretizacije - prehoda iz zveznega v diskretni časovni linearni model z definicijo kovariančne matrike procesnega šuma. V nadaljevanju, v podpoglavju 2.3, je na kratko opisan postopek v primeru nelinearnih sistemov. Podan je postopek linearizacije z razvojem v Taylorjevo vrsto.

Poglavje 3 je namenjeno statistični analizi. Bralca seznani z osnovami inženirskega vrednotenja sistemov. V poglavju so predstavljeni statistični postopki, ki so lahko uporabljeni v geodetski analizi ocenjevanja stanja sistema v diskretnih linearnih časovno odvisnih modelih, kjer je vektor stanja sistema funkcija časa. Poglavje opisuje postopke vrednotenja KF, ki so uporabljeni za vrednotenje rezultatov v računskem delu doktorske disertacije.

Poglavji 4 in 5 predstavljata osrednji del doktorske disertacije. Poglavje 4 - Kalmanov model meritev in sistema (računski primer) - opisuje zastavljen problem. V podpoglavju 4.2 je opisana praktična zasnova naloge: zagotovitev referenčnega okvirja, uporabljen instrumentarij in podroben opis funkcionalnega in stohastičnega modela, t.j. diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom.

Poglavje 5, z naslovom Vrednotenje diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom (DMWPP), razširi tehnike vrednotenja, teoretično predstavljene v poglavju 3, na primer časovno odvisnih količin v računskem primeru naloge. Obravnavan je problem ocenjevanja vektorja neznank v *stohastičnem linearnem časovno odvisnem modelu*. Vrednotenje diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom - DMWPP je izvedeno s pokazatelji notranje zanesljivosti - podpoglavje 5.2, s statističnimi testi - podpoglavje 5.3 in neodvisno referenčno tirnico - podpoglavje 5.4. Kot pokazatelja notranje zanesljivosti sta izračunani matrika nadzora in matrika opazovanosti. Opisane so lastnosti a posteriori kovariančne matrike vektorja neznank in matrike Kalmanove izboljšave. Problem skladnosti, ki je bistven pri vrednotenju optimalnosti modela vrednotenja v vsaki izvedbi, je obravnavan v podpoglavju 5.3. Izračun skladnosti je izveden na osnovi popravkov meritev - podpoglavje 5.3.2, in na osnovi popravkov vektorja neznank - podpoglavje 5.3.3. Kot neodvisen parameter za oceno modela je uporabljena referenčna tirnica. Rezultati so podani v poglavju 5.4.

V poglavju 6 je podan zaključek dela kot povzetek dognanj in prispevkov - podpoglavje 6.1. Podani so predlogi za nadaljnje delo in raziskovanje - podpoglavje 6.2 ter na koncu - podpoglavje 6.3 - zaključne opombe.

Doktorska disertacija vključuje dve prilogi. Prva - Priloga A - vključuje rezultate programa *CAPLAN* za določitev stojišča instrumenta. Druga priloga - Priloga B - grafično prikazuje razlike v meritvah.

2 KALMANOV FILTER

Na splošno lahko filtriranje opišemo kot postopek za ločevanje ene komponente ali določene vrednosti od druge. Problem filtriranja v inženirstvu izhaja s področja elektrotehnike, t.j. določitve signala znotraj nekega območja frekvenc in izločitev frekvenc, ki so izven opredeljenega območja. K problemu je mogoče pristopiti na dva načina:

- z izbiro ustreznega merskega instrumentarija ali
- z modeliranjem primerne matematičnega algoritma za vrednotenje merjenih in iskanih količin.

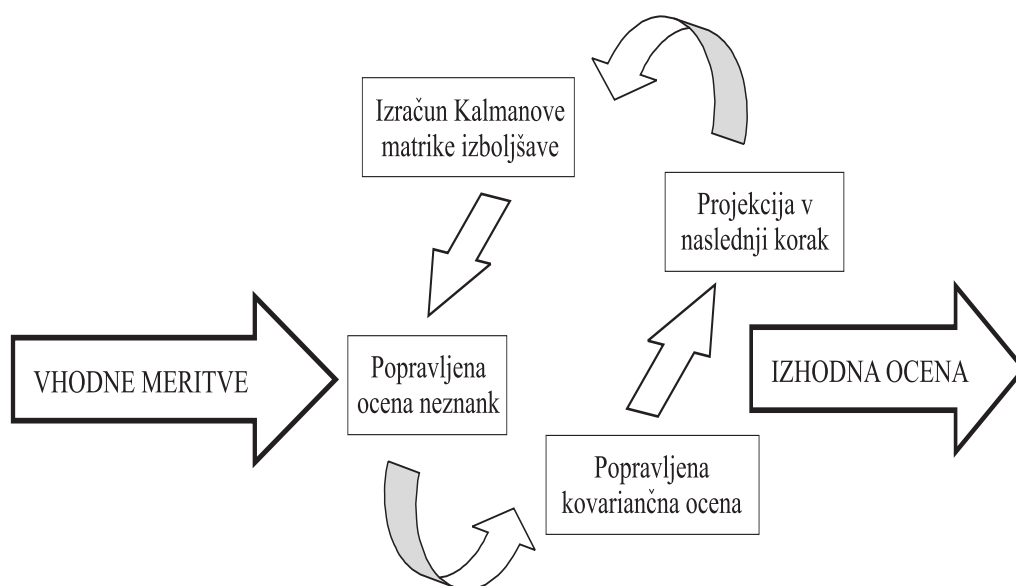
V 40. letih prejšnjega stoletja je Norbert Wiener pristopil k problemu z matematičnega vidika v smislu določitve filtrirane frekvence, ki bi ustrezala optimalni ločitvi signala in motenj - šuma. Rezultat dela je bil Wienerjev filter, ki ga označujejo naslednje značilnosti, [Brown, Hwang (1992)]:

- predpostavka, da sta signal in šum slučajna procesa z znanimi spektralnimi značilnostmi oziroma poznano avtokorelacijsko in navzkrižno korelacijsko funkcijo,
- kriterij pridobitve optimalne rešitve je najmanjši srednji kvadrat napake,
- rešitev temelji na določitvi optimalne utežne funkcije filtra.

Rezultat Wienerjevega filtra je utežna funkcija, ki določi uteži vhodnih količin na tak način, da je rezultat optimalna ocena izhodnih količin v danem trenutku. Vendar pa Wienerjev pristop ni podajal primerne rešitve za diskretne probleme, prav tako ne za zapletene časovno sprejemljive sisteme z večjim številom vhodnih in izhodnih količin. Leta 1960 je R. E. Kalman podal alternativno rešitev - filtriranje po kriteriju najmanjšega srednjega kvadrata napake. Glavni prednosti Kalmanovega zapisa in rešitve problema sta [Brown, Hwang (1992)]:

- vektorsko modeliranje slučajnih procesov in
- rekurzivna obdelava pogrešenih opazovanj kot vhodnih količin.

Ideja KF je podana na sliki 2.1.



Slika 2.1: Zanka KF, [Brown, Hwang (1992)]
Figure 2.1: KF loop, [Brown, Hwang (1992)]

KF je dobro poznano matematično orodje, ki daje odgovor na najpogostejše zastavljeno inženirsko vprašanje: kako pridobiti najboljšo oceno stanja sistema iz meritev, v katerih je prisoten šum. Odgovor na zastavljeno vprašanje ponuja algoritem za obdelavo podatkov, ki temelji na določitvi stanja sistema na osnovi pogrešenih meritev po metodi najmanjših kvadratov. Postopek zagotavlja pridobitev optimalne ocene stanja sistema in hkrati tudi mero, s kolikšno zanesljivostjo je ocenjeno stanje sistema tudi pravo stanje. KF je optimalen glede na katerokoli merilo v primeru linearnega procesa, kjer je v sistemu in meritvah prisoten nekoreliran, beli šum, z Gaussovo (normalno) porazdelitvijo in s srednjo vrednostjo enako nič [Negenborn (2003)]:

- *nekoreliranost*
KF predpostavlja, da sta šum v sistemu in meritvah neodvisna in njuna jakost nima medsebojnega vpliva.
- *beli šum*
Beli šum je šum, ki je nekoreliran v času, torej neodvisen od svojih preteklih stanj. Posledica je, da so napake nekorelirane v času.
- *srednja vrednost enaka nič*
Srednja vrednost šuma enaka nič pomeni, da je šum v sistemu in meritvah slučajen šum, kar pomeni, da lahko ima pozitiven ali negativen predznak, v povprečju pa njegova vrednost znaša nič.
- *Gaussova oz. normalna porazdelitev*
Predpostavka Gaussove porazdelitve pomeni, da je šum modeliran z Gaussovo krivuljo. Gaussov šum je v celoti opisan s srednjo vrednostjo in varianco ter tako podaja vse razpoložljive informacije o šumu in funkciji pogojne gostote verjetnosti.

KF predpostavlja, da je začetna vrednost stanja sistema prav tako modelirana kot slučajna spremenljivka, z Gaussovo porazdelitvijo s poznano srednjo vrednostjo in varianco. Šum v meritvah in sistemu ter začetna vrednost stanja sistema so prav tako medsebojno neodvisne količine.

Najosnovnejša tehnika KF je *linearni KF*, kjer je zveza med meritvami in neznanimi količinami linearna. KF omogoča tudi obdelavo nelinearnih sistemov; bodisi se nelinearnost pojavi v enačbi sistema in/ali v merskih zvezah. V primeru nelinearnosti je potrebna linearizacija, ki je izvedena z razvojem funkcije v Taylorjevo vrsto na dva načina [Brown, Hwang (1992)]:

- *linearizirani KF*

V primeru lineariziranega KF je linearizacija izvedena v poznanih približnih vrednostih, ki niso odvisne od meritev.

- *razširjeni KF*

V primeru razširjenega KF je linearizacija izvedena okoli ocenjenih stanj sistema, ki vključujejo informacije, pridobljene na osnovi meritev.

Pri vseh tehnikah KF moramo poznati nekatere predhodne parametre modela, t.j. matrika prehoda stanja, merska matrika, ki podaja zvezo med vektorjem meritev in vektorjem neznank, kovariančna matrika procesnega šuma in kovariančna matrika meritev.

2.1 Linearni Kalmanov filter

V tem poglavju je opisan model diskretnega linearnega KF (LKF). LKF obravnava problem ocenjevanja stanja sistema in pogrešenih opazovanj, ki so lahko v celoti opisana z linearnim modelom.

LKF obravnava slučajni kinematični proces, ki ga lahko modeliramo z *linearno enačbo sistema*:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

in *linearno enačbo meritev*:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

kjer je:

$\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^{n \times 1}$	...	vektor neznank sistema za t_k
$\mathbf{z}_k \in \mathcal{R}^{m \times 1}$	...	vektor meritev za t_k
$\mathbf{w}_k \in \mathcal{R}^{n \times 1}$	...	šum sistema
$\mathbf{v}_k \in \mathcal{R}^{m \times 1}$	...	merski šum
$\mathbf{F}_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$	...	matrika prehoda stanja
$\mathbf{H}_k \in \mathcal{R}^{m \times n}$	...	merska matrika
n	...	število neznank
m	...	število meritev za t_k

Vrednosti n in m sta v celotnem procesu konstantni. Algoritem oceni vektor neznank $\mathbf{x}_k$ na osnovi diskretnih opazovanj $\mathbf{z}_k$, v časovnem trenutku t_k . Matrika prehoda stanja $\mathbf{F}_k$ v enačbi sistema (2.1) povezuje dve zaporedni stanji sistema; $\mathbf{x}_{k+1}$ v trenutku t_{k+1} in $\mathbf{x}_k$ v trenutku t_k . Merska matrika $\mathbf{H}_k$ v enačbi meritev (2.2) povezuje trenutno stanje sistema $\mathbf{x}_k$ z meritvami $\mathbf{z}_k$. Matriki $\mathbf{F}_k$ in $\mathbf{H}_k$ sta sicer lahko funkciji časa, običajno pa sta konstantni. Vektorja $\mathbf{w}_k$ in $\mathbf{v}_k$ predstavljata slučajni beli šum sistema in merski šum z normalno porazdelitvijo; $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ in $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$. Pripadajoči kovariančni matriki $\mathbf{R}_k$ in $\mathbf{Q}_k$ vektorjev $\mathbf{w}_k$ in $\mathbf{v}_k$ sta podani z:

$$E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \quad (2.3)$$

$$E[\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \quad (2.4)$$

$$E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{za vse } k \text{ in } i. \quad (2.5)$$

V procesu sta matriki $\mathbf{R}_k$ in $\mathbf{Q}_k$ konstantni ali pa sta funkciji časa. Kovariančna matrika meritev $\mathbf{R}_k \in \mathcal{R}^{m \times m}$ je določena na osnovi poznane natančnosti merskega sistema ali pa je določena na osnovi predhodnih meritev. Določitev kovariančne matrike šuma sistema $\mathbf{Q}_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$ je veliko težja, saj model, s katerim je opisan proces, ne moremo istočasno nadzorovati.

Enačbe KF lahko zapišemo v dveh skupinah: *enačbe napovedovanja ali enačbe časovne korekcije* in *enačbe meritev ali enačbe merske korekcije*. V nadaljevanju tega poglavja bomo oceno stanja sistema označili z $\hat{\mathbf{x}}$. Kasneje bo znak zaradi poenostavljenega zapisovanja opuščen, saj imamo vedno opravka z dejanskimi numeričnimi vrednostmi, ki pa podajajo oceno stanja sistema. V različni literaturi lahko zasledimo oba zapisa. Proces KF zahteva poznavanje ocene začetnega stanja sistema oz. napovedano začetno vrednost, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, in pripadajočo a priori kovariančno matriko, $\mathbf{P}_k^-$, za časovni trenutek t_k . Merske enačbe vključujejo nove meritve $\mathbf{z}_k$ v a priori oceno $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ za pridobitev izboljšane vrednosti oziroma za pridobitev a posteriori ocene stanja sistema, $\hat{\mathbf{x}}_k^+$, in pripadajoče a posteriori kovariančne matrike, $\mathbf{P}_k^+$. *Enačbe meritev* sestavljajo:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k) \cdot \mathbf{P}_k^-. \quad (2.8)$$

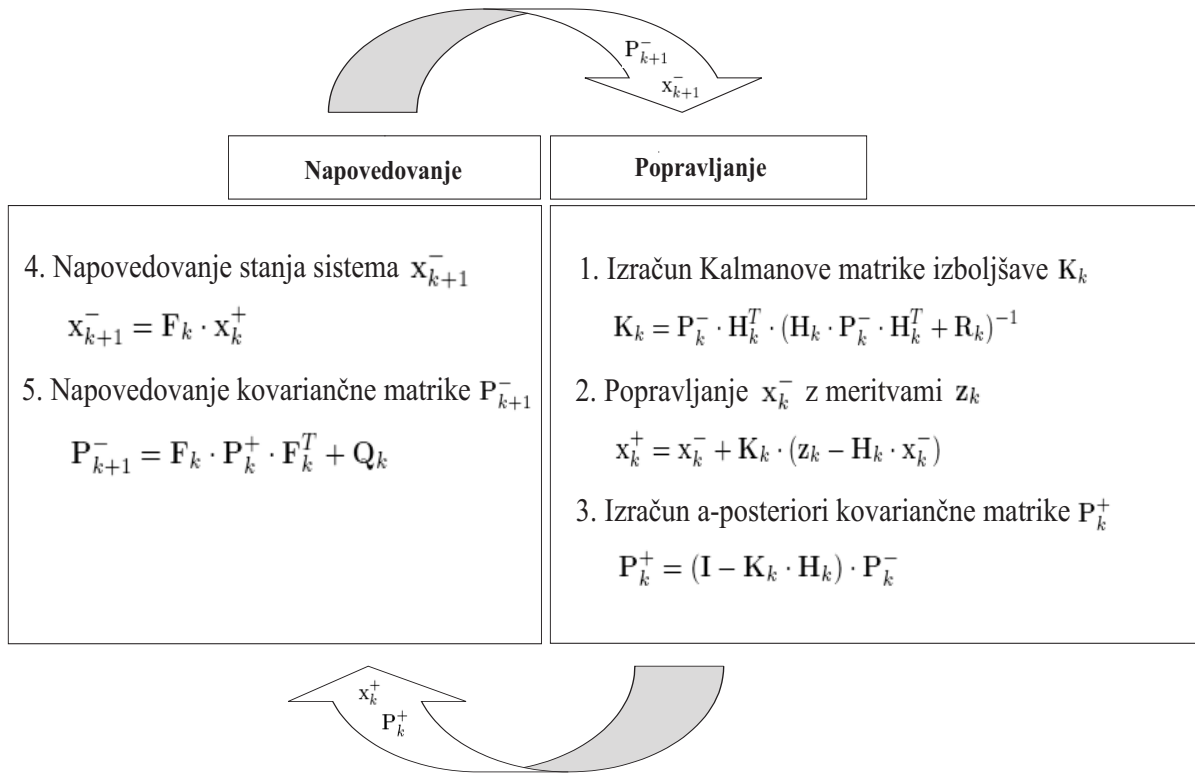
A posteriori ocena v enačbi (2.7) je linearna kombinacija a priori ocene stanja sistema $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ in utežene razlike med dejanskimi $\mathbf{z}_k$ in napovedanimi $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ meritvami. Uteži so določene s Kalmanovo matriko izboljšave, $\mathbf{K}_k \in \mathcal{R}^{n \times m}$, optimalno po izbranem kriteriju. Izbran je kriterij najmanjšega srednjega kvadrata napake. KF iterativno popravlja Kalmanovo matriko izboljšave $\mathbf{K}_k$ tako, da ocena vektorja stanja sistema konvergira k optimalni rešitvi. Enačbe napovedovanja projicirajo stanje sistema in njegovo oceno v naslednji

korak ter omogočajo pridobitev a priori ocene za naslednji časovni trenutek t_{k+1} , $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ in $\mathbf{P}_{k+1}^-$. *Enačbe napovedovanja* sestavljajo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{P}_k^+ \cdot \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (2.10)$$

Celotna zanka KF je podana na sliki 2.2.



Slika 2.2: Zanka KF
Figure 2.2: KF loop

Alternativne oblike določitve a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$

Alternativna oblika za izračun a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$ v enačbi (2.8) je *Josephova oblika a posteriori kovariančne matrike*, podane z enačbo, [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k) \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{K}_k^T. \quad (2.11)$$

Izraz je sicer računsko zahtevnejši, vendar manj občutljiv na zaokrožitvene napake. Izraz ne daje negativnih lastnih vrednosti, kot se to lahko zgodi v izrazu (2.8) kot posledica

odštevanja. Izraz (2.11) zagotavlja simetričnost in pozitivno definitnost matrike $\mathbf{P}_k^+$, dokler je $\mathbf{P}_k^-$ simetrična pozitivno definitna matrika. Izraz (2.8) je računsko enostavnejši kot izraz (2.11). Njegova oblika ne zagotavlja simetričnosti in pozitivne definitnosti matrike $\mathbf{P}_k^+$.

2.1.1 Kalmanova matrika izboljšave $\mathbf{K}_k$

V tem podpoglavju je podana izpeljava Kalmanove matrike izboljšave, $\mathbf{K}_k$, in njen pomen.

Glavni cilj KF je pridobitev izraza za izračun a posteriori ocene vektorja stanja sistema $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ kot linearne kombinacije a priori ocene stanja sistema $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ in utežene razlike med pravimi vrednostmi meritev $\mathbf{z}_k$ in napovedanimi meritvami $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$, podane v enačbi (2.7). Razlika

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (2.12)$$

je *izboljšava meritev* ali popravek meritev. Vrednost izboljšave odraža neskladnost ali razliko med napovedanimi opazovanji $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ in pravimi opazovanji $\mathbf{z}_k$. Popravek ali izboljšava, ki ima vrednost enako 0, $\mathbf{d}_k = 0$, pomeni popolno skladnost med vektorjem napovedanih in dejanskih meritev [Welch, Bishop (2004)].

Vprašanje, ki se zastavlja, je, kako določiti Kalmanovo matriko izboljšave $\mathbf{K}_k$ tako, da bo zagotavljala najboljšo a posteriori oceno vektorja stanja sistema $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. **Kot kriterij je izbran najmanjši srednji kvadrat napake.** Kar pomeni, da želimo v postopku optimizacije določiti tako matriko $\mathbf{K}_k$, ki bo minimizirala posamezne elemente vzdolž diagonale a posteriori kovariančne matrike vektorja neznank $\mathbf{P}_k^+$, ki predstavljajo variance (standardne deviacije) elementov vektorja stanja sistema oz. vektorja neznank $\mathbf{x}_k$.

A priori $\mathbf{e}_k^-$ in a posteriori $\mathbf{e}_k^+$ napako vektorja stanja sistema $\mathbf{x}_k$ zapišemo kot:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (2.13)$$

$$\mathbf{e}_k^+ = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+. \quad (2.14)$$

Pripadajoči a priori in a posteriori kovariančni matriki sta:

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \cdot (\mathbf{e}_k^-)^T] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \cdot (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \quad (2.15)$$

in

$$\mathbf{P}_k^+ = E[\mathbf{e}_k^+ \cdot (\mathbf{e}_k^+)^T] = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+) \cdot (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T], \quad (2.16)$$

kjer je $E[\cdot]$ pričakovana vrednost.

Z vključitvijo enačbe meritev (2.2) v izraz za a posteriori oceno stanja sistema (2.7) in z nadomestitvijo pridobljenega izraza za $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ v enačbi (2.16) dobimo razširjen izraz za $\mathbf{P}_k^+$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ = E[[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-)] \cdot \\ \cdot [(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-)]^T]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Z zapisom izraza za pričakovano vrednost in ob upoštevanju, da je a priori napaka $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)$ nekorelirana z mersko napako $\mathbf{v}_k$, dobimo izraz:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k) \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{K}_k^T. \quad (2.18)$$

Enačba (2.18) je splošen izraz za a posteriori kovariančno matriko in ustreza katerikoli matriki $\mathbf{K}_k$. Cilj KF je minimizacija sledi matrike $\mathbf{P}_k^+$, saj le-ta predstavlja vsoto srednjih kvadratov popravkov v oceni vseh elementov vektorja neznank oz. vektorja stanja sistema [Brown, Hwang (1992)]. S ciljem pridobitve optimalne matrike $\mathbf{K}_k$ je potrebno odvajati sled (tr) matrike $\mathbf{P}_k^+$ po matriki $\mathbf{K}_k$:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k^+))}{d\mathbf{K}_k} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Za odvajanje gornjega izraza je potrebno poznati dve operaciji matričnega odvajanja, [Brown, Hwang (1992)]:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{AB}))}{d\mathbf{A}} = \mathbf{B}^T \quad (2.20)$$

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{ACA}^T))}{d\mathbf{A}} = 2\mathbf{AC}, \quad (2.21)$$

kjer mora biti produkt $\mathbf{AB}$ kvadratna matrika in matrika $\mathbf{C}$ simetrična matrika, t.j. $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$. Odvod skalarja po matriki je definiran z izrazom:

$$\frac{ds}{d\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{ds}{da_{11}} & \frac{ds}{da_{12}} & \cdots \\ \frac{ds}{da_{21}} & \frac{ds}{da_{22}} & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Izraz (2.18) sedaj zapišemo kot:

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \cdot \mathbf{K}_k^T. \quad (2.23)$$

Z uporabo enačb za matrično odvajanje pridobimo izraz za odvod sledi matrike $\mathbf{P}_k^+$ po matriki $\mathbf{K}_k$:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k^+))}{d\mathbf{K}_k} = -(\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^-)^T + 2 \cdot \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k). \quad (2.24)$$

Optimalna matrika $\mathbf{K}_k$ je rešitev enačbe:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k^+))}{d\mathbf{K}_k} = 0 \quad (2.25)$$

in jo zapišemo kot:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (2.26)$$

Iz izraza Kalmanove matrike izboljšave v enačbi (2.26) lahko povzamemo [Welch, Bishop (2004)]:

- Če se vrednost kovariančne matrike opazovanj $\mathbf{R}_k$ (diagonalni členi predstavljajo natančnost meritev, t.j. variance meritev) približuje nič, vrednost matrike $\mathbf{K}_k$ konvergira proti $\mathbf{H}_k^{-1}$:

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{H}_k^{-1}.$$

Kalmanova matrika izboljšave doda popravkom meritev večjo utež. Meritev $\mathbf{z}_k$ se obravnava kot bolj natančna v primerjavi z napovedano vrednostjo meritve $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$.

- Po drugi strani, v primeru, ko se a priori kovariančna matrika vektorja stanja sistema $\mathbf{P}_k^-$ približuje nič, vrednost matrike $\mathbf{K}_k$ konvergira proti nič:

$$\lim_{\mathbf{P}_k^- \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{0}.$$

Kalmanova matrika izboljšave doda popravkom meritev manjšo utež. Meritev $\mathbf{z}_k$ se obravnava kot manj natančna v primerjavi z napovedano vrednostjo meritve $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$.

Kalmanovo matriko izboljšave lahko imenujemo tudi utežna matrika.

2.2 Diskretizacija: Prehod iz zveznega problema na diskretni linearni problem

Večina sistemov v realnem svetu je opisana z linearnim ali nelinearnim zveznim modelom. Ker imamo v praksi običajno na voljo direktna ali indirektna opazovanja stanja sistema izvedena v diskretnih časovnih trenutkih, je potrebno izvesti ustrezno transformacijo iz zveznega sistema v diskreten sistem. Sistem je opisan z zveznimi diferencialnimi enačbami na eni strani, medtem ko se vhodne količine spremenijo le v diskretnih časovnih trenutkih (npr., meritve pridobimo v časovnih trenutkih $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$). Cilj je pridobitev ocene stanja sistema in pripadajoče ocene natančnosti v teh časovnih trenutkih.

Zvezni stohastični linearni sistem opišemo z diferencialno enačbo, [Simon (2006)]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad (2.27)$$

kjer je $\mathbf{x}$ vektor stanja sistema, $\mathbf{A}$ časovno zvezna matrika prehoda stanja, $\mathbf{u}$ vektor nadzora vnosa, matrika $\mathbf{B}$ časovno zvezna matrika vhoda in $\mathbf{w}$ šum sistema porazdeljena po Gaussovi porazdelitvi, s srednjo vrednostjo enako nič in kovariančno matriko $\mathbf{Q}_k$. V primeru, da sta matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ konstantni, je rešitev enačbe (2.27) za $\mathbf{x}(t)$ v izbranem časovnem trenutku t_k podana z izrazom, [Simon (2006)]:

$$\mathbf{x}(t_k) = e^{\mathbf{A} \cdot (t_k - t_{k-1})} \cdot \mathbf{x}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A} \cdot (t_k - \tau)} \cdot [\mathbf{B}(\tau) \cdot \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{w}(\tau)] \cdot d\tau. \quad (2.28)$$

Pri modeliranju diskretnega sistema predpostavimo, da so vhodne količine odsekoma konstantne, t.j. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ za $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Zapišimo:

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k). \quad (2.31)$$

Ob upoštevanju gornjih definicij zapišemo enačbo (2.28) kot

$$\mathbf{x}_k = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A} \cdot (t_k - \tau)} \cdot \mathbf{B}(\tau) \cdot d\tau \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A} \cdot (t_k - \tau)} \cdot \mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

Sedaj definiramo $\mathbf{F}_k$ in $\mathbf{G}_k$ kot

$$\mathbf{F}_k = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t}, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A} \cdot (t_{k+1} - \tau)} \cdot \mathbf{B}(\tau) d\tau \quad (2.34)$$

in

$$\mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A} \cdot (t_{k+1} - \tau)} \cdot \mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Enačba (2.32) dobi obliko:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.36)$$

in predstavlja stohastični linearni diskretni model in je aproksimacija zveznega modela, podanega v enačbi (2.27). Diskretni model določa $\mathbf{x}_k$ samo v izbranih časovnih trenutkih $\{t_k\}$ in ne daje informacije o tem, kaj se dogaja z zveznim signalom $\mathbf{x}(t)$ med izbranimi časovnimi trenutki. Izpeljave integriranja so podrobneje opisane v [Simon (2006)]. V primeru, da ima sistem konstantne parametre, kar pomeni, da je matrika $\mathbf{A}$ v enačbi (2.27) konstantna, zapišemo matriko prehoda stanja z eksponentno vrsto, ki predstavlja eno od numeričnih možnosti zapisa izraza $e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t}$ [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

$$\mathbf{F}_k = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t} = \mathbf{I} + (\mathbf{A} \cdot \Delta t) + \frac{(\mathbf{A} \cdot \Delta t)^2}{2!} + \dots, \quad (2.37)$$

kjer je $\mathbf{I}$ enotska matrika, enakih dimenzij kot $\mathbf{F}_k$, t.j. $\mathbf{I} \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Rešitev izraza $e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t}$ je tako pridobljena z numerično metodo, z vključitvijo n -tega člena.

Če zapišemo srednjo vrednost izraza v enačbi (2.36) in ob upoštevanju, da je srednja vrednost $\mathbf{w}(t)$ enaka nič, dobimo izraz:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = E[\widehat{\mathbf{x}}_k] = \mathbf{F}_{k-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1}. \quad (2.38)$$

V primeru, da je $\mathbf{G}_{k-1} = 0$, sledi poenostavitev izraza za $\mathbf{x}_k$:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (2.39)$$

Šum sistema $\mathbf{w}_k$ v enačbi (2.36) vstopi neposredno v sistem. V veliko primerih je šum sistema pomnožen z ustrezno matriko, [Simon (2006)]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{k-1}, \quad (2.40)$$

z $\tilde{\mathbf{w}}_k \sim (0, \tilde{\mathbf{Q}}_k)$. Kovariančna matrika skrajno desnega izraza je podana z:

$$E[(\mathbf{\Gamma}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{k-1}) \cdot (\mathbf{\Gamma}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{k-1})^T] = \mathbf{\Gamma}_{k-1} \cdot E(\tilde{\mathbf{w}}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{k-1}^T) \cdot \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T = \mathbf{\Gamma}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T. \quad (2.41)$$

Enačba (2.40) je ekvivalentna enačbi (2.36), kjer je $\mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{\Gamma}_k \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_k \cdot \mathbf{\Gamma}_k^T)$.

Podobna transformacija je lahko izvedena z enačbami meritev, [Simon (2006)].

2.2.1 Definicija kovariančne matrike šuma sistema $\mathbf{Q}_k$

Šum sistema $\mathbf{w}_k$, ki je opisan s kovariančno matriko šuma sistema $\mathbf{Q}_k$, ima zelo velik vpliv v procesu filtriranja. Šum predstavlja neznane in nemodelirane šume v sistemu med časovnim intervaloma t_k in t_{k+1} . V podpoglavju je podana izpeljava matrike $\mathbf{Q}_k$ po literaturi [Brown, Hwang (1992)]. Ob predpostavki, da je procesni šum rezultat zveznega belega šuma $\mathbf{u}_k$ v procesu in vstopi v sistem preko časovno zvezne matrike vhoda $\mathbf{B}$ v enačbi (2.28), je šum sistema dan z:

$$\mathbf{w}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k, \tau) \cdot \mathbf{B}(\tau) \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.42)$$

Matrika $\mathbf{Q}_k$, ki opisuje $\mathbf{w}_k$, je podana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^T] = \\ &= E \left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k, \xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) \cdot \mathbf{u}(\xi) \cdot d\xi \right) \cdot \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k, \eta) \cdot \mathbf{G}(\eta) \cdot \mathbf{u}(\eta) \cdot d\eta \right)^T \right] = \\ &= \int_{\eta=t_{k-1}}^{t_k} \int_{\xi=t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k, \xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) \cdot E[\mathbf{u}(\xi) \cdot \mathbf{u}^T(\eta)] \cdot \mathbf{G}^T(\eta) \cdot \mathbf{F}^T(t_k, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.3 Razširitve Kalmanovega filtra

V poglavju je opisan problem filtriranja, ko je sistem nelinearen. Nelinearnost lahko nastopi v enačbi sistema in/ali enačbi meritev. KF je v osnovi namenjen oceni stanja sistema v linearnem modelu. V primeru, da je model nelinearen, je za zapis enačb filtriranja potrebna linearizacija.

2.3.1 Ocena stanja sistema v primeru nelinearnih sistemov

V realnem svetu imamo pogosto opravka z zapletenimi sistemi, ki so nelinearni, nestacionarni, s porazdelitvijo, ki je ne moremo opisati kot Gaussovo, in zveznimi vrednostmi stanja sistema. V teh primerih optimalni filtri, ki predpostavljajo linearni model z diskretnimi opazovanji, katerih pogreški so opisani z Gaussovo (normalno) krivuljo, ne morejo biti uporabljeni. Zato so se razvile še druge oblike KF, ki ne zahtevajo strogih predpostavk, tako kot to zahteva osnovni model linearnega KF. Najpogosteje uporabljeni so približni nelinearni filtri, ki jih razvrščamo v štiri skupine [Ristic in sod. (2004)]:

- analitične aproksimacije,
- numerične aproksimacije,
- Gaussova vsota ali večvrstni modeli filtrov in
- postopki vzorčenja.

V primeru nelinearnih, časovno spremenljivih sistemov so funkcije, ki opisujejo prehajanje stanja sistema v času ter zveze med stanjem sistema in meritvami, nelinearne. Za uspešno obvladovanje praktičnih problemov moramo vzpostaviti nekatere predpostavke in izvesti linearizacijo za pridobitev linearnega modela. Sistem aproksimiramo z linearnim modelom za majhne razlike vrednosti komponent vektorja stanja sistema. Model deluje, če so vrednosti meritev nezvezne. Namesto predpostavke o linearnosti modela, obravnavamo nelinearen model, ki ga sestavljajo nelinearne enačbe sistema in/ali nelinearne enačbe meritev [Negenborn (2003)]. Prehod stanja sistema v času je podan z *nelinearno enačbo sistema*:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (2.44)$$

kjer je $\mathbf{f}(\cdot)$ nelinearna funkcija sistema, ki povezuje predhodno stanje sistema $\mathbf{x}_{k-1}$ v trenutku t_{k-1} s trenutnim stanjem sistema $\mathbf{x}_k$. Vektor $\mathbf{w}_{k-1}$ predstavlja šum sistema med časovnima trenutkoma t_{k-1} in t_k .

Meritve so vključene v model z *nelinearno enačbo meritev*:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.45)$$

kjer je $\mathbf{h}(\cdot)$ nelinearna funkcija meritev, ki povezuje stanje sistema in meritve.

Za šum sistema in šum meritev, $\mathbf{w}_{k-1}$ in $\mathbf{v}_k$, se predpostavlja, da sta medsebojno neodvisna, bela, z Gaussovo porazdelitvijo in srednjo vrednostjo enako nič, s pripadajočima

kovariančnima matrikama $\mathbf{Q}_{k-1}$ in $\mathbf{R}_k$. Funkciji sistema in meritev, $\mathbf{f}$ in $\mathbf{h}$, sta neodvisni od časa, zato lahko indekse opustimo.

2.3.2 Postopek linearizacije: Razvoj v Taylorjevo vrsto

Linearni modeli imajo številne prednosti, predvsem so računsko enostavnejši in lažji za razumevanje. Linearna teorija je bolj raziskana, prav tako je reševanje linearnih diferencialnih enačb enostavnejše. Na drugi strani je nelinearne modele težje opisati in so težji za razumevanje. Rešitev nelinearnih sistemov pogosto temelji na aproksimaciji z sistemom nižjega reda. Tehnike linearizacije aproksimirajo linearno obnašanje lokalno, v izbranih točkah ali na manjših prostorsko-časovnih intervalih. Tako lahko uporabimo orodja za ocenjevanje linearnih sistemov.

Linearizacija je izvedena z *razvojem v Taylorjevo vrsto*. Linearizacija okrog točke x pomeni aproksimacijo funkcije na majhnem intervalu okrog x . Razvoj eno-dimenzionalne funkcije f , z zveznimi odvodi do reda $(n + 1)$, v Taylorjevo vrsto okrog eno-dimenzionalne točke x , zapišemo [Bronštejn, Semendjajev (1967)]:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f^{(1)}(x) \cdot \Delta x + \frac{f^{(2)}(x)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot \Delta x^n + R_n, \quad (2.46)$$

kjer je R_n ostanek Taylorjeve vrste po $n + 1$ členih, podan z izrazom:

$$R_n = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot f^{(n+1)}(x + \vartheta \cdot \Delta x), \quad (2.47)$$

kjer je $0 < \vartheta < 1$. Ostanek Taylorjeve vrste pri velikih n konvergira proti 0 na določenem intervalu okoli x . Vrednost funkcije in njenih odvodov so izračunani v točki linearizacije x . V postopku linearizacije izraza (2.46) zanemarimo odvode 2. in višjih redov ter izvedemo aproksimacijo vrednosti $f(x + \Delta x)$:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f^{(1)}(x) \cdot \Delta x. \quad (2.48)$$

Pri nelinearnih KF sta najpogosteje uporabljeni dve osnovni tehniki linearizacije [Brown, Hwang (1992)] in [Grewal, Andrews (2001)].

- V prvem primeru je linearizacija izvedena okoli nominalne tirnice, ki ni odvisna od merskih podatkov. Filter imenujemo *linearizirani filter* ali *perturbacijski KF*.
- Drug postopek je linearizacija okoli tirnice, kjer so ocenjeni položaji določeni na osnovi dejanskih meritev. Filter imenujemo *razširjeni KF*.

3 STATISTIČNA ANALIZA ČASOVNO ODVISNIH PROCESOV

Postopki reševanja inženirskih problemov so podani z obširnim opisom in razumevanjem problema, ki je praviloma sestavljen iz treh medsebojno povezanih sestavnih delov:

- mersko-tehnična komponenta,
- tehnika vrednotenja in
- interpretacija.

Postopek vključuje kvalitativno in kvantitativno analizo: fizikalno interpretacijo problema, ki ji sledi ustrezen matematični zapis. Opis sistema se prične z definiranjem nabora količin, ki sistem opisujejo in so merjene direktno ali, pogosteje, indirektno.

V splošnem ločimo dve vrsti signalov ¹:

- deterministične signale, ki jih je mogoče opisati z matematičnimi izrazi ali pravili. Zaradi te lastnosti je mogoče prihodnje stanje signala opisati na osnovi predhodnega obnašanja in lastnosti signala s popolnim zaupanjem.
- stohastični ali slučajni signali, pri katerih je prisotna nezanesljivost v obnašanju signala. Prihodnje stanje signala ni mogoče natančno napovedati, ampak je vrednost signala lahko samo ocenjena.

Za nadzor, modeliranje in analizo fizikalnih sistemov in procesov moramo, kljub vsem dognanjem na področju determinističnih sistemov in teorije kontrolnih sistemov, še vedno uporabiti stohastične modele.

Modeliranje pogreškov

Ker so v praksi vse meritve podvržene prisotnosti pogreškov, ne more biti nobena merjena količina določena povsem deterministično. V praksi je tako mogoče pridobiti le *oceno* iskane količine, ne pa tudi njeno *pravo* vrednost. Razlika med pravo in ocenjeno vrednostjo je *pogrešek merjene vrednosti*. Ločimo tri vrste pogreškov [Mikhail, Gordon (1981)]:

- grobi pogreški,
- sistematični pogreški in
- slučajni pogreški.

¹S signali pojmujeemo opis poteka nekega razvijajočega se fizikalnega procesa, kot ga lahko opazujemo s čutili ali z izvajanjem meritev fizikalne količine, ki nas zanima. Signali nas torej informirajo, kaj se z nekim procesom dogaja [Predstavitev signalov].

V vseh inženirskih nalogah je zelo pomembno, da imamo na voljo računske postopke za samodejno kontrolo opazovanj, ki omogočajo odkrivanje grobih pogreškov. V klasičnih geodetskih postopkih nam kontrolo opazovanj omogočajo nadštevilne meritve. *Natančnost* meritev je običajno poznana vnaprej, na osnovi predhodnih podobnih meritev in testov ali na osnovi tehničnih podatkov merskega instrumentarija, ki jih podaja proizvajalec. Natančnost meritev je podana kot *standardna deviacija meritev* [Bakker in sod. (1995)].

Glavna naloga inženirskih postopkov je zajem karakterističnih parametrov, s katerimi je opisan opazovan sistem. Običajno teh parametrov ni mogoče meriti neposredno. Da bi zmanjšali vpliv merskih pogreškov ter napak in nezanesljivosti modela, moramo zagotoviti nadštevilne meritve, ki omogočajo kontrolo sistema. Minimalno število meritev, ki omogoča enolično rešitev sistema oz. določitev neznanih količin, ne omogoča tudi pridobitev ocene natančnosti teh vrednosti in njihove interpretacije. Nadštevilne meritve omogočajo izravnavo opazovanj, z naslednjimi prednostmi [Bakker in sod. (1995)]:

- povečanje natančnosti izračunanih neznanih količin,
- določitev standardne deviacije opazovanj in neznank,
- preizkušanje matematičnega in stohastičnega modela,
- odkrivanje grobih pogreškov v opazovanjih,
- izračun zanesljivosti sistema.

Z današnjim merskim instrumentarijem, ki omogoča pridobitev meritev z visoko natančnostjo, povečanje natančnosti iskanih količin pogosto ni več glavni razlog za izvajanje nadštevilnih meritev. Glavni namen nadštevilnih meritev je odkrivanje grobih pogreškov, ki - v primeru, da niso odkriti - lahko povzročijo velike pogreške v ocenjenih neznanih količinah sistema. Na osnovi statističnih testov lahko odkrivamo grobe pogreške z določeno stopnjo zanesljivosti. Prav tako je mogoče določiti vpliv neodkritih grobih pogreškov na izhodne količine oz. zanesljivost sistema. Zanesljivost se nanaša na velikost pogreškov, ki jih je model sposoben odkriti z izbrano stopnjo verjetnosti [Bakker in sod. (1995)]. Model z visoko zanesljivostjo zagotavlja dobro kontrolo sistema, model z nizko stopnjo zanesljivosti pa slabo kontrolo sistema, tudi v primeru, ko imamo na voljo opazovanja z visoko natančnostjo.

Ocenjevanje procesov filtriranja

Filtriranje je postopek ocenjevanja (trenutnega) stanja časovno spremenljivega sistema na osnovi indirektnih, nezanesljivih opazovanj, v katerih so prisotni pogreški. Razlog za uporabo izraza *filter* je v načinu pridobivanja *najboljše ocene* in sicer filtriranje šuma iz pogrešenih opazovanj [Bar-Shalom in sod. (2001)]. Po samem postopku filtriranja je potrebno opraviti analizo filtriranih vrednosti in merskih popravkov. Ocenjevanje rezultatov filtriranja vključuje istočasno preizkušanje meritev in modela filtriranja.

3.1 Ocena stanja sistema v diskretnem linearnem časovno odvisnem modelu

V splošnem ločimo dve vrsti spremenljivk, ki jih ocenjujemo [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

- parameter - časovno neodvisna količina (skalar, vektor ali matrika),
- stanje sistema, ki se spreminja v odvisnosti od časa.

Posledično ločimo dve vrsti postopkov ocenjevanja:

- ocenjevanje parametra,
- ocenjevanje stanja sistema.

Ocenjevanje stanja sistema lahko obravnavamo tudi kot *problem časovno odvisnega ocenjevanja*. Obe spremenljivki - tako parameter kot stanje sistema - predstavljata količine, s katerimi je sistem popolnoma opisan za izbran časovni trenutek [Simon (2006)].

3.2 Preizkušanje konsistenčnosti postopka za ocenjevanje stanja sistema

Pojem konsistenčnost postopka za ocenjevanje (angl. consistency of an estimator) je bistvenega pomena pri ocenjevanju optimalnosti postopka za ocenjevanje v vsaki implementaciji. V primeru ocenjevanja konstantnega parametra je konsistenčnost postopka za ocenjevanje definirana kot konvergenca ocenjene vrednosti proti pravi vrednosti. V primeru ocenjevanja stanja sistema v splošnem nimamo opravka s konvergenco ocene stanja sistema. Kriteriji preizkušanja konsistenčnosti filtra so podani z naslednjimi pogoji [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

1. Pogreški stanja sistema morajo imeti srednjo vrednost enako nič, njihova velikost pa mora biti sorazmerna varianci stanja sistema, ki je rezultat filtra.
2. Izboljšave meritev morajo imeti enake lastnosti.
3. Izboljšave meritev morajo biti bele.

Le zadnji dve lastnosti je mogoče preizkušati v aplikacijah z realnimi podatki. Prvi kriterij, ki je sicer najpomembnejši, je lahko preizkušan samo na osnovi simulacij. Preizkušanje konsistenčnosti filtra temelji na preizkušanju testne statistike v domeni meritev in testne statistike domeni vektorja stanja sistema.

3.2.1 Testna statistika v domeni meritev

Globalni test v primeru filtriranja ni izveden na osnovi preizkušanja ničelne domneve, ki predpostavlja, da ni sprememb v prostorskih koordinatah in je najpogostejši postopek v klasični geodeziji. Globalni test je v primeru filtriranja izveden na osnovi primerjave napovedanih in pravih vrednosti meritev. V primeru, da ni bistvenega odstopanja od

ničelne vrednosti, lahko uporabimo vrednost izboljšave za posodobitev napovedanih vrednosti stanja sistema.

Popravek meritev, imenovan tudi *izboljšava meritev*, $\mathbf{d}_k$, je izračunan kot razlika med dejansko meritvijo $\mathbf{z}_k$ in najboljšo napovedano vrednostjo, ki temelji na modelu sistema in predhodnih merskih podatkih. Izraz za izboljšavo meritev je dan v enačbi (2.12), ki jo zapišemo ponovno za linearni KF:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-, \quad (3.1)$$

kjer je $\mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ napovedana meritev.

Pripadajoča kovariančna matrika izboljšave $\mathbf{d}_k$ je:

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T, \quad (3.2)$$

kjer je $\mathbf{H}_k$ merska matrika, $\mathbf{R}_k$ je kovariančna matrika meritev in $\mathbf{P}_k^-$ je a priori kovariančna matrika vektorja neznank ali stanja sistema. Izboljšava $\mathbf{d}_k$ predstavlja mero skladnosti med teoretičnim modelom in realnimi meritvami [Eichhorn (2005)]. Izboljšava ima srednjo vrednost enako nič in je bela (nekorelirana) [Bar-Shalom in sod. (2001)] ter ima normalno porazdelitev.

Kalmanovo matriko izboljšave $\mathbf{K}$ v enačbi (2.6) in a posteriori kovariančno matriko filtrirane vrednosti stanja sistema $\mathbf{P}_k^+$ v enačbi (2.8) lahko sedaj zapišemo z matriko $\mathbf{D}_k$ po [Pelzer (1987)]:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{K}_k^T. \quad (3.4)$$

Testna statistika v domeni meritev je definirana na osnovi kovariančne matrike $\mathbf{D}_k$ in izboljšave $\mathbf{d}_k$ kot *normirana kvadratna izboljšava* (angl. normalized innovation squared (NIS)) [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

$$\Omega_{\mathbf{d},k}^2 = \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{D}_k^{-1} \cdot \mathbf{d}_k. \quad (3.5)$$

Ničelna domneva je definirana kot H_0 : $E(\mathbf{d}_k) = 0$ in preizkušana z alternativno domnevo H_a : $E(\mathbf{d}_k) \neq 0$. Testna statistika $\Omega_{\mathbf{d},k}^2$ je porazdeljena po porazdelitvi χ^2 s številom prostostnih stopenj m . Razmerje verjetnosti je podano z izrazom:

$$P\{\Omega_{\mathbf{d},k}^2 \leq \chi_{m,1-\alpha}^2 | H_0\} = 1 - \alpha, \quad (3.6)$$

kjer je m število opazovanj v časovnem trenutku t_k in predstavlja število prostostnih stopenj. α je tveganje. V primeru, ko je $\Omega_{\mathbf{d},k}^2 < \chi_{m,1-\alpha}^2$, ničelno domnevo ne zavrnamo. Povzamemo lahko, da ni statistično značilnega odstopanja med modelom sistema in meritev ter ni potrebno poseganje v filter. V primeru, da je odkrita večja vrednost izboljšave, ničelno domnevo zavržemo. V naslednjem koraku je potrebno poiskati vzroke neskladja. Razlog za neskladnost je lahko v opazovanjih, v napovedanih vrednostih ali stohastičnem modelu filtra [Eichhorn (2005)].

3.2.2 Testna statistika v domeni vektorja stanja sistema

V domeni vektorja stanja sistema preizkušamo, ali je filtrirana vrednost stanja sistema primerljiva s predhodnim znanjem o sistemu. Da bi lahko odgovorili na zastavljeno vprašanje, moramo analizirati razliko med filtrirano $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ in napovedano vrednostjo $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ stanja sistema. Z upoštevanjem enačb (2.7) in (2.12) je popravek stanja sistema $\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}$ zapisan kot:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x},k} = \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{d}_k. \quad (3.7)$$

Pripadajoča kovariančna matrika je dana z [Lippitsch, Lasseur (2006)]:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}} = \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{K}_k^T. \quad (3.8)$$

Popravek stanja sistema ima normalno porazdelitev $\mathbf{v}_{\mathbf{x},k} \sim N(0, \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}})$. Popravek stanja sistema predstavlja razliko med oceno stanja sistema pred meritvijo in po njej. V primeru, da ima popravek veliko vrednost, pomeni, da je napovedana vrednost slaba ali da je prisotno slabo opazovanje.

Ničelna domneva je definirana kot H_0 : $E(\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}) = 0$ in preizkušana z alternativno domnevo H_a : $E(\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}) \neq 0$. Pripadajočo testno statistiko zapišemo z izrazom [Lippitsch, Lasseur (2006)]:

$$\Omega_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}}^2 = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}^T \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x},k}}{\sigma_0^2}, \quad (3.9)$$

kjer je σ_0^2 referenčna varianca. Testna statistika $\Omega_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}}^2$ je porazdeljena po porazdelitvi χ^2 s številom prostostnih stopenj n (število neznank v časovnem koraku t_k) in α tveganjem. Razmerje verjetnosti je podano z izrazom:

$$P\{\Omega_{\mathbf{v}_{\mathbf{x},k}}^2 \leq \chi_{n,1-\alpha}^2 | H_0\} = 1 - \alpha. \quad (3.10)$$

3.3 Zmožnost nadzora in opazovanosti sistema

Meri nadzor (angl. controllability) in opazovanost (angl. observability) sistema sta ključnega pomena v teoriji nadzora sistemov. Nadzor sistema nam pove, kako dobro se lahko poljubno stanje sistema približa želeni vrednosti. Opazovanost sistema definira začetne pogoje, t.j. določitev začetnih pogojev na osnovi meritev izhodnih količin [Simon (2006)].

3.3.1 Zmožnost nadzora sistema

Diskretni in deterministični sistem je *popolnoma nadzorovan*, če za poljubno stanje sistema obstaja vhodno zaporedje, ki s končnim številom korakov zagotavlja prehod sistema iz začetnega stanja do poljubno izbranega stanja sistema. Za diskretni linearni časovno invariantni sistem z dolžino vektorja stanja sistema n je *pogoj nadzorovanosti* izpolnjen, če ima matrika nadzora

$$\mathbf{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \quad \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n-1)} \cdot \mathbf{G}] \quad (3.11)$$

polni rang, torej enak n [Bar-Shalom in sod. (2001)]. V časovno invariantnem sistemu, s konstantnim časovnim intervalom, so matrike $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ in $\mathbf{H}$ neodvisne od časa [Grewal, Andrews (2001)].

Pogoj nadzorovanosti določa, da je šum sistema prisoten v vsakem stanju sistema in preprečuje, da bi kovarianca stanja sistema konvergirala nič. Ta pogoj zagotavlja, da je kovariančna matrika pozitivno definitna, t.j. da so lastne vrednosti pozitivne [Bar-Shalom in sod. (2001)].

3.3.2 Zmožnost opazovanosti sistema

Deterministični sistem je *popolnoma opazovan*, če je začetna vrednost stanja sistema lahko ponovno pridobljena povsem enolično na podlagi končnega števila opazovanj izhodnih stanj in poznanih vhodnih stanjih. Za diskretni linearni časovno invariantni sistem z dolžino vektorja stanja sistema n je *pogoj opazovanosti* izpolnjen, če ima matrika opazovanosti

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

polni rang, enak n [Bar-Shalom in sod. (2001)].

4 KALMANOV MODEL MERITEV IN SISTEMA (RAČUNSKI PRIMER)

4.1 Opis problema

Naloga doktorske disertacije je realizirati uporabo KF za obdelavo terestričnih geodetskih meritev. Glavni namen je razviti KF model za poseben kinematični proces, ki ga opazujemo z elektronskim tahimetrom, in ovrednotenje numeričnih rezultatov, ki jih pridobimo s filtrom. Vrednotenje modela je izvedeno s statističnimi testi, parametri notranjega zaupanja in na osnovi poznanega neodvisnega referenčnega sistema.

KF omogoča nov pristop pri obdelavi geodetskih meritev in postopkih deformacijske analize. Omogoča obdelavo geodetskih referenčnih točk kot kinematičnih, ne samo kot statičnih, kot je to običaj v klasični geodeziji. Na drugi strani je potrebno dati velik poudarek na pomembnost razvoja geodetskega terestričnega instrumentarija, tako v optičnem, mehanskem kot elektronskem smislu. V delu je poseben poudarek na modernih elektronskih tahimetrih (angl. *Terrestrial Positioning Systems - TPS*) proizvajalca *Leica Geosystems*. S teoretičnega vidika je glavni poudarek dela na statistični analizi časovno odvisnih procesov, t.j. statistični analizi razvitega modela, in potrditev rezultatov s poznanim referenčnim sistemom. Slednje je podrobneje predstavljeno v poglavju 5 - Vrednotenje diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom.

4.2 Vzpostavitev praktičnega primera

Glavna ideja dela je, kot že omenjeno v poglavju 1.3:

- simulirati kinematični proces,
- zajeti proces z elektronskim tahimetrom,
- razviti model vrednotenja in
- preveriti ustreznost modela z neodvisnim referenčnim okvirjem.

4.2.1 Referenčni okvir

Ustrezni neodvisni referenčni okvir za vrednotenje razvitega modela, t.j. vrednotenje izhodnih količin glede na različne vhodne količine, smo zagotovili z ustrezno referenčno tirnico. Geodetski laboratorij Katedre za geodezijo na Tehniški univerzi München (TUM), slika 4.1, ima v lasti tako tirnico.

Geodetski laboratorij na TUM se ukvarja s številnimi geodetskimi nalogami. Poleg širokega spektra del na področju kalibracije geodetskih instrumentov se ukvarja tudi z inovativnimi raziskovalnimi nalogami, katerih rezultati so kot velik doprinos na področju poznavanja zmogljivosti sodobnih geodetskih instrumentov in postopkov. Trenutno je poudarek na kalibraciji in preizkušanju kvalitete natančnih geodetskih instrumentov [GeodeticLaboratory]:



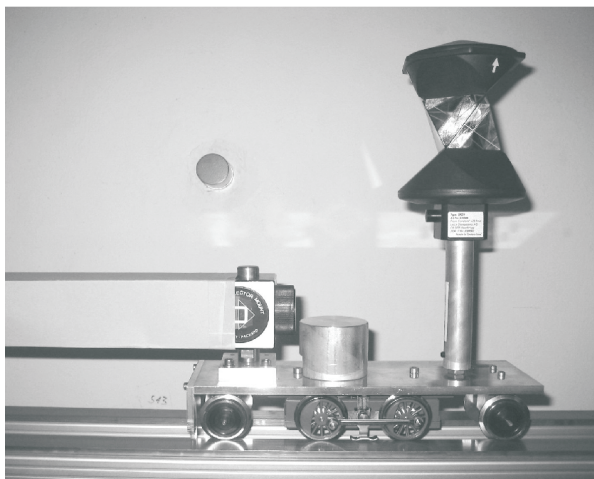
Slika 4.1: Geodetski laboratorij Katedre za geodezijo, TUM, z referenčno tirnico
Figure 4.1: Geodetic laboratory at Chair for Geodesy, TUM, with reference trajectory

- preizkušanje kinematičnih senzorjev, še posebej kalibracija tahimetrov, ki omogočajo sledenje in zajem kinematičnih procesov,
- kalibracija preciznih invar nivelmanskih lat (s kodirano ali klasično razdelbo) za nivelman najvišje natančnosti,
- kalibracija zelo dolgih merskih trakov za potrebe višinomerstva na jezovih,
- preizkušanje terestričnih laserskih skenerjev.

Kinematični proces je bil definiran kot problem sledenja. *Sledenje* je ocenjevanje položaja objekta, ki je v gibanju, na osnovi *daljinskih meritev* [Bar-Shalom in sod. (2001)]. Meritve so izvedene z uporabo enega ali več senzorjev na izbranih položajih. Kinematični proces je bil simuliran z vozičkom, sliki 4.1 in 4.2, ki se giblje vzdolž vodoravne kalibracijske tirnice dolžine 15 m. Tirnica je bila vzpostavljena posebej z namenom preizkušanja elektronskih tahimetrov s samodejnim prepoznavanjem reflektorja (avtomatsko prepoznavanje tarče - APT [Valh in sod. (2008)], angl. Automatic Target Recognition - ATR oz. APT) in sledenjem. Dosežena je bila zahtevana natančnost namestitve tirnice

1 mm v horizontalnem položaju. Višinska komponenta je konstantna znotraj zahtevane natančnosti vertikalne namestitve tirnice, ki je prav tako 1 mm (osebna komunikacija z Dr.-Ing. P. Wasmeier-jem, znanstveni asistent in vodja Geodetskega laboratorija TUM). Geometrija referenčne tirnice je določena na osnovi sistema teodolitov *ECDS 3* (Electronic Coordinate Determination System), proizvajalca Kern/Leica [Schölderle (2006)]. Sistem *ECDS 3* je bil uporabljen tudi za vzpostavitev referenčnega lokalnega koordinatnega sistema v laboratoriju, za definiranje večjega števila točk, ki so lahko uporabljene za določitev koordinat poljubnega stojišča instrumenta. Tirnica je nameščena tako, da je vzporedna osi y lokalnega koordinatnega sistema.

Za kinematične meritve je najprimernejši 360° reflektor. V nalogi je bil uporabljen reflektor *GRZ4 Leica Geosystems*, slika 4.2, s konstanto 23.1 mm, ki je bil nameščen na voziček.

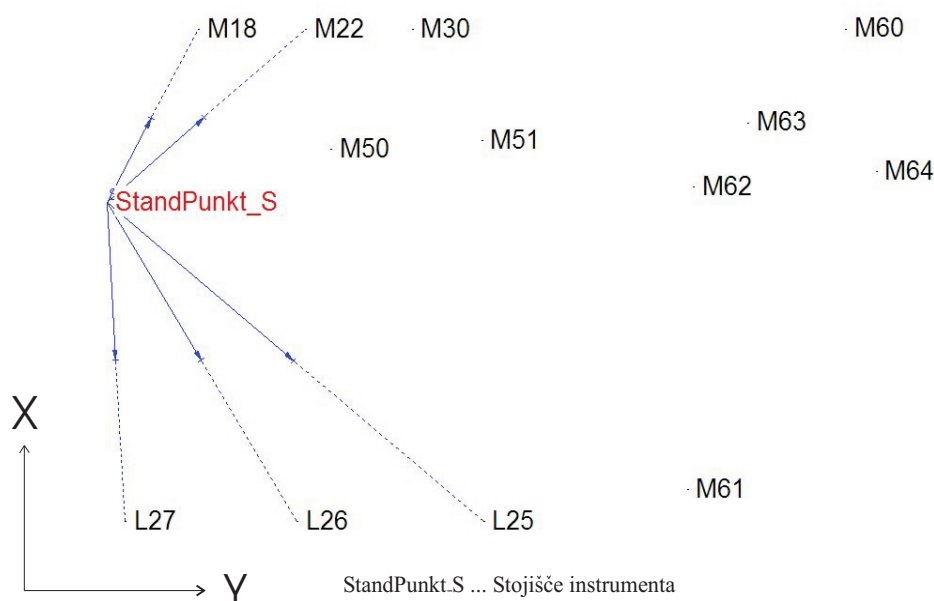


Slika 4.2: Reflektor *GRZ4 Leica Geosystems* 360° na vozičku
Figure 4.2: Reflector *GRZ4 Leica Geosystems* 360° on trolley

Izvedeno je bilo večje število kinematičnih opazovanj, pri različnih hitrostih vozička. Med meritvami je instrument postavljen na stabilnem stebru, katerega koordinate so bile določene s programom *CAPLAN*, slika 4.3, po metodi notranjega ureza z izravnavo. Uporabljene so bile meritve horizontalnih smeri, zenitnih razdalj in poševnih dolžin proti petim danim točkam. Rezultati so podani v preglednici 4.1 in Dodatku A.

Y_StPt [m]	X_StPt [m]	Z_StPt [m]
-14.640	1.116	-0.388
σ_Y [m]	σ_X [m]	σ_Z [m]
± 0.002	± 0.003	± 0.001

Preglednica 4.1: Koordinate stojišča instrumenta s standardnimi deviacijami, Priloga A



Slika 4.3: Položaj stojišča instrumenta (StandPunkt_S) in danih točk v referenčnem (y, x) sistemu laboratorija

Figure 4.3: Instrument stand point (StandPunkt_S) and reference points, given in coordinate system (y, x) of laboratory

4.2.2 Instrumentarij

Meritve so bile izvedene s sodobnim elektronskim tahimetrom ali sistemom TPS *TCRA1201*, serije *TPS1200 Professional Series* proizvajalca *Leica Geosystems* (Heerbrugg, Švica).

Tahimeter je geodetski instrument, v geodeziji najpogosteje uporabljen za terensko izmero za različne naloge, ki je sestavljen iz dveh glavnih komponent:

- elektronskega teodolita za merjenje horizontalnih smeri in zenitnih razdalj ter
- elektronskega razdaljemera (EDM) za merjenje poševnih dolžin.

Moderni tahimetri merijo horizontalne smeri na osnovi elektro-optičnega skeniranja natančne digitalne kodne razdelbe, nameščene na steklenem limbu znotraj instrumenta. Osnovi princip merjenja dolžin z elektronskimi razdaljemerji je določitev velikosti dolžine na osnovi izmerjenega časa, v katerem elektromagnetno valovanje prepotuje razdaljo med začetno in končno točko. Instrument je izvor elektromagnetnega valovanja. Valovanje preko oddajne optike instrumenta usmerimo proti reflektorju. Valovanje pade na prizmo reflektorja, kjer se elektromagnetni valovi odbijejo nazaj proti instrumentu. Valovanje še enkrat prepotuje merjeno dolžino v obratni smeri in pade na sprejemno optiko instrumenta [Kogoj (2002)]. Signal, ki se vrne v instrument, je registriran in interpretiran v

instrumentu. Podatki o oddanem in odbitem signalu so pretvorjeni v dolžino. Skoraj vsi sodobni elektronski instrumenti omogočajo merjenje dolžine brez reflektorja (angl. reflectorless (R)). Podsystem za merjenje dolžine je eden najboljčutljivejših sestavnih delov in pogojuje najvišjo mersko frekvenco pri kinematičnih meritvah.

Avtomatski elektronski tahimetri (A) so opremljeni z motoriziranimi horizontalnimi in vertikalnimi pogoni ter senzorji za samodejno prepoznavanje reflektorja. V okviru tehnologije APT obstajata dva sistema: avtomatsko viziranje tarče (AVT) in avtomatsko sledenje tarče (AST) [Kogoj (2002)]. Sistem AST omogoča hitro in natančno sledenje reflektorja v prostoru. Natančnost določanja položaja je v največji meri odvisna od natančnosti merjenja razdalje, ki je funkcija merskega programa EDM, in od natančnosti merjenja kotov. Natančnost izračunanih koordinat je odvisna tudi od uporabljenega reflektorja, oddaljenosti, kalibriranega instrumenta, upoštevanja sistematičnih pogreškov in od atmosferskih pogojev.

Med izvajanjem meritev v laboratoriju so bili merjeni atmosferski pogoji, ki so bili zelo konstantni ($T \doteq 22.1^\circ \text{ C}$, $p \doteq 961.6 \text{ mbar}$, $e \doteq 60\%$). Vpliv spremenjenih pogojev je pri kratkih dolžinah majhen in zato popravki niso bili vključeni v izračun.

Tehnični podatki uporabljenega elektronskega tahimetra *TCRA1201 Leica Geosystems* so podani v preglednici 4.2. Uporabljen instrument ima tako razdaljemer z infrardečo svetlobo kot z vidnim laserskim žarkom.

Instrument <i>TCRA1201 Leica Geosystems</i>	
Lastnosti	dvoosni kompenzator samodejno prepoznavanje reflektorja; angl. Automatic Target Recognition - ATR merjenje brez reflektorja; angl. reflectorless - R
Delovno območje	$[-20^\circ \text{ C}, +50^\circ \text{ C}]$
Masa	4.9 kg
Kotna hitrost	$45^\circ / \text{ s}$
Povečava objektiva	30 krat
Premer objektiva	40 mm
Najkrajša merjena razdalja	1.5 m
Občutljivost libele	dozna libela: $6'/2 \text{ mm}$ elektronska libela: ločljivost $2''$
Kotne meritve	
Natančnost hz, zr^1 , podana s standardno deviacijo ISO 17123-3	$\sigma_{hz,zr} = 1''$
Natančnost prikaza	$0.1''$

Merjenje dolžin	
Merska frekvenca	100 MHz/1.5 m
Način merjenja	fazni način
EDM način	dvo-osni, infra-rdeč laserski žarek
Nosilno valovanje	780 nm
Natančnost za sledilni način, podana s standardno deviacijo	$\sigma_d = 5 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$
ISO 17123-4	
čas meritev	< 0.15 s

¹ *hz*-horizontalna smer, *zr*-zenitna razdalja

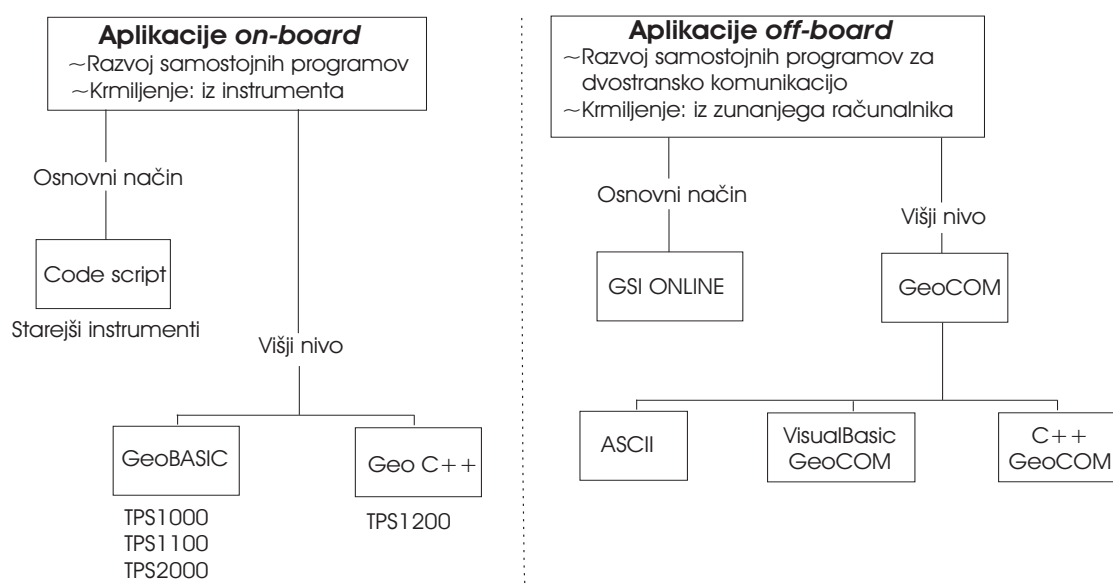
Preglednica 4.2: Tehnični podatki instrumenta *TCRA1201 Leica Geosystems* [Tech. Data]

Odprta arhitektura serije *Leica Geosystems TPS1200 Series*

Elektronski tahimetri serije *TPS1200* so eni najsodobnejših instrumentov za izvajanje geodetskih meritev. Z njimi lahko opravimo večino geodetskih nalog, še posebej z njihovimi integriranimi aplikacijami. Za izvedbo širšega spektra nalog in aplikacij je na voljo dodaten vmesnik za dostopanje do posameznih funkcij senzorjev *TPS1200*. Programska oprema sistema *TPS1200* organizira in nadzoruje medsebojno delovanje več senzorjev in tvori okvir za aplikacije, ki jih je mogoče izvajati. Z novim vmesnikom *Leica Geosystems* omogoča odprto arhitekturo tahimetrov serije *TPS1200*. Vmesnik lahko uporabimo za reševanje posebnih nalog, v kolikor obstoječe rešitve *Leica Geosystems* ne zagotavljajo potrebne funkcionalnosti ali zgolj za izboljšanje obstoječih rešitev [GeoCOM Reference Manual V 1.20]. Uporabniške programe za elektronske tahimetre lahko krmilimo neposredno v instrumentu (angl. *on-board*) ali iz zunanega računalnika (angl. *off-board*). Komunikacijski protokoli *Leica Geosystems* so prikazani na sliki 4.4.

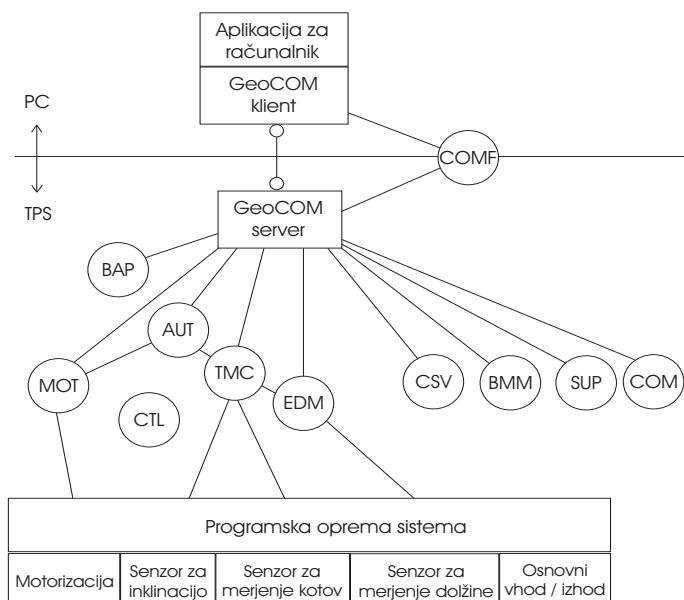
Programi so razviti s komunikacijskimi standardi za sodobne instrumente *Leica Geosystems TPS1200 Professional Series*. Aplikacije *On-board* so razvite na zunanjem računalniku v programskem vmesniku *Leica Geosystems GeoBASIC*, nato pa so prenesene v instrument. V primeru aplikacij *off-board* so le-te razvite in krmiljene preko zunanega računalnika v programskem vmesniku *Leica Geosystems GeoCOM*. Časovne zakasnitve prenosa podatkov so odvisne od uporabljenega vmesnika.

V doktorski disertaciji je bila dvostranska komunikacija z instrumentom izvedena z vmesnikom *Leica GeoCOM*. V programsko okolje *Visual Basic* je bila vključena knjižnica *Leica Geosystems GeoCOM*. Knjižnica vključuje podatkovne datoteke z vsemi potrebnimi konstantami, tipi podatkov in definicijami funkcij. Za namen vzpostavitve koordinatnega sistema oziroma izračun koordinat stojišča instrumenta so bile meritve najprej izvedene proti znanim točkam. Dolžine so bile izmerjene v načinu *merjenje dolžin brez reflektorja*. V naslednjem koraku je bila zapisana koda za izvajanje kinematičnih meritev v načinu *LOCK*, ki instrumentu omogoča, da samodejno spremlja reflektor na gibajočem vozičku. Vse meritve so bile shranjene neposredno v računalnik. V nadaljevanju sta podana zgradba in delovanje vmesnika *GeoCOM*. Programska oprema sistema *TPS1200*



Slika 4.4: Komunikacijski protokoli *Leica Geosystems*
Figure 4.4: *Leica Geosystems* communication protocols

je izdelana v sklopu posameznih senzorjev, zato so funkcije organizirane kot podsistemi, slika 4.5 [GeoCOM Reference Manual V 1.20].



Slika 4.5: Pregled aplikacije odjemalec - strežnik [GeoCOM Reference Manual V 1.20]
Figure 4.5: Overview Client-Server application [GeoCOM Reference Manual V 1.20]

AUS	Podsistem <i>AltUser</i> vključuje funkcije, dostopne preko gumba <i>SHIFT+USER</i> : nastavitev statusa ATR in <i>LOCK</i> načina merjenja
AUT	Avtomatizacija (angl. Automatization); modul, ki zagotavlja funkcije, kot so nadzor samodejnega prepoznavanja reflektorja, spremembe krožne lege ali določitve položaja.
BAP	Osnovne aplikacije (angl. Basic Applications); funkcije, ki jih je mogoče zelo enostavno uporabljati za pridobitev podatkov meritev.
BMM	Funkcije, ki nadzirajo osnovne vhodne ali izhodne funkcije, npr. nastavitev zvočnega alarma, itd. (angl. Basic Man Machine)
COMF	Komunikacija (angl. Communication); modul, ki nadzira osnovne komunikacijske parametre. Večina funkcij se nanaša tako na del za odjemalca kot na del za strežnik.
COM	Komunikacija (angl. Communication); funkcije, ki prav tako nadzirajo proces komunikacije. Te funkcije se nanašajo bodisi na del za odjemalca bodisi na del za strežnik.
CSV	Osrednje funkcije (angl. Central Services); ta modul zagotavlja funkcije za pridobivanje ali nastavljanje osrednjih/osnovnih informacij o instrumentu <i>TPS1200</i> .
CTL	Nadzor (angl. Control Task); modul vsebuje funkcije za spremljanje delovanja sistema.
EDM	Merjenje dolžine (angl. Electronic Distance Meter); modul za merjenje dolžine.
MOT	Motorizacija (angl. Motorization); funkcije za nadzor premika, tudi nadzor hitrosti, instrumenta.
SUP	Nadzor (angl. Supervisor); funkcije za nadzor nekaterih splošnih vrednosti instrumenta <i>TPS1200</i> : npr. stanje baterije, čas sistema, stanje pomnilne kartice.
TMC	Meritve in izračuni (angl. Theodolite Measurement and Calculation); ključni modul za pridobivanje podatkov o meritvah.

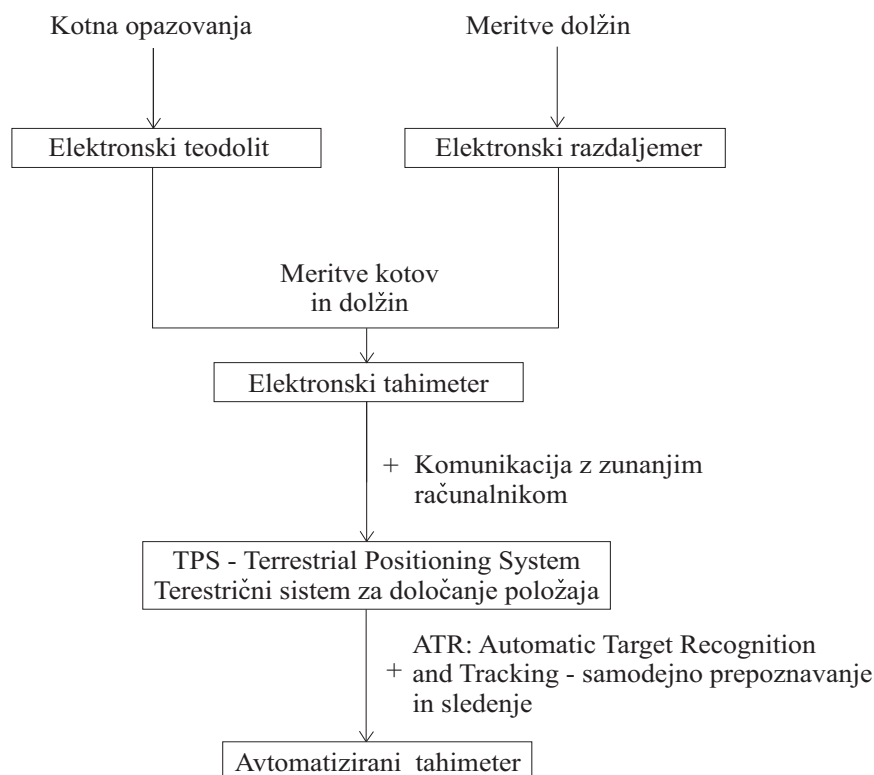
GeoCOM je izveden kot:

- sinhrona komunikacija: Komunikacija se izvaja med dvema enotama - odjemalcem (zunanja naprava) in strežnikom (instrument *TPS1200*). Posamezna komunikacijska enota je sestavljena iz zahteve in ustreznega odziva, kar pomeni, da para zahteva/odziv ne more prekiniti drugi par zahteva/odziv.
- protokol *Remote Procedure Call* (RPC): Vsakemu postopku, ki je izveden na oddaljenem instrumentu, je dodeljena identifikacijska številka.
- Komunikacija se vzpostavi preko serijskega vmesnika *RS-232*. Za učinkovito komunikacijo morajo biti nastavljeni ustrezni komunikacijski parametri.
- Programiranje temelji na konceptu DLL (Dynamic Link Library).

V doktorski disertaciji je bila za pridobivanje meritev v načinu sledenja uporabljena funkcija *GeoCOM Leica Geosystems VB_TMC_QuickDist(OnlyAngle, dSlopeDistance)*. Funkcija najprej prične z merjenjem dolžine v sledilnem načinu in čaka, dokler razdalja ni izmerjena. Nato sporoči vrednost horizontalne smeri, zenitne razdalje in poševne dolžine, ne pa tudi koordinat. Če razdalje ni mogoče izmeriti, instrument sporoči vrednost horizontalne smeri in zenitne razdalje ter ustrezno kodo sporočila.

Tahimetri s samodejnim prepoznavanjem reflektorja

Sodobni tahimetri omogočajo poleg merjenja horizontalnih smeri, zenitnih razdalj in dolžin še veliko drugih funkcij. V zadnjem desetletju so instrumenti opremljeni s funkcijami za samodejno prepoznavanje reflektorja, natančno viziranje, sledenje in samodejno izvajanje meritev. Z vključitvijo elektronske kamere v tahimeter je omogočeno samodejno odkrivanje statičnih in kinematičnih objektov. Razvoj geodetskih instrumentov je opisan na sliki 4.6.



Slika 4.6: Razvoj geodetskih instrumentov
Figure 4.6: Development of geodetic instruments

Pri izvajanju kinematičnih meritev, kjer je reflektor nenehno v gibanju, ni mogoče izvajati nadštevilnih opazovanj, s katerimi bi zmanjšali ali odstranili vplive delovnega okolja, instrumentalnih pogreškov ali negativne vplive matematičnega modela, ki so posledica po-

enostavitev funkcionalnega modela. Zato je potrebno za vsak kinematični proces določiti naslednje vrednosti in izpolniti zahteve:

- velikost vektorja premika; t.j. hitrost in smer premika reflektorja/objekta,
- frekvenca meritev: Frekvenca meritev mora zadoščati opisu gibanja v smislu smeri, hitrosti in pospeška. Predvsem pri zajemu nepravilnega gibanja mora biti frekvenca meritev dovolj visoka.
- samodejno sledenje premikajočega objekta
- sinhronizacija: Visoka kakovost sinhronizacije senzorjev - senzorja za merjenje horizontalnih smeri in zenitnih razdalj, senzorja za merjenje razdalje in senzorja za samodejno sledenje - je ključnega pomena za natančne meritve. Poleg tega je potrebna velika natančnost pri določanju časa vsake meritve.
- kalibrirani instrument: Pri kinematičnem merjenju nimamo možnosti izvajanja meritev horizontalne smeri in zenitne razdalje v dveh krožnih legah in nadštevilnih meritev dolžine, ki bi omogočale odstranitev instrumentalnih pogreškov. Zato je še posebej pomembno, da je instrument redno kalibriran.
- kratek čas prenosa: Pri shranjevanju meritev/koordinat na zunanji računalnik je potrebno določiti čas prenosa. Izračunani položaj, ki mu pripada določen časovni trenutek, zaradi časa prenosa merskih podatkov ne ustreza popolnoma izmerjenemu položaju. Določitev oz. upoštevanje časa prenosa je pomembna zlasti v sistemih, ki delujejo v dejanskem času.
- natančnost reflektorja,
- možnost samodejnega iskanja reflektorja, kar je zlasti pomembno v primeru neenakomernega gibanja ali ovir med instrumentom in reflektorjem,
- brezhibna komunikacija med merskim in operacijskim sistemom ter sistemom za obdelavo opazovanj,
- možnost krmiljenja merskega sistema z zunanjim računalnikom,
- možnost transformacij med koordinatnimi sistemi.

V splošnem so zahteve pri kinematičnih meritvah veliko kompleksnejše, izbira ustreznega instrumenta pa je zelo pomembna.

Samodejno prepoznavanje tarč in sledenje omogočata visoko produktivnost, krajši delovni čas, sledenje reflektorja pa je omogočeno tudi pri slabši vidljivosti ali celo v temi.

Meritve z avtomatskim sledenjem lahko izvajamo na tri različne načine:

- statični način: meritve se izvajajo proti statičnemu objektu/reflektorju,

- način *stop-and-go*: instrument sledi reflektorju, meritve pa se sprožijo, ko objekt miruje,
- kinematični način: med sledenjem se izvajajo tudi meritve dolžine, zenitne razdalje in horizontalne smeri.

Zadnji način je tehnično najzahtevnejši; potrebna je visoka stopnja sinhronizacije senzorjev ter kratek čas meritev, zapisa le-teh in izračuna.

4.3 Funkcionalni in stohastični model: Diskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom

Z razvitim programom je bila vzpostavljena komunikacija z izbranim elektronskim tahimetrom, kjer so bile meritve poševne dolžine d , zenitne razdalje zr in horizontalne smeri hz zajete v kinematičnem načinu. Za vsako mersko epoho je bila registrirana tudi časovna komponenta. Podatki meritev so bili ovrednoteni s programom *Matlab*. Glavni poudarek dela je pridobiti oceno horizontalnega položaja (y, x) in višine z reflektorja na premičnem vozičku za vsak registrirani časovni trenutek t_k z uporabo KF. Meritve je mogoče obdelati s KF na dva načina:

- z razširjenim KF (angl. extended KF), kjer so v zanki KF obdelane *direktne meritve* - hz , d , zr , ali
- z linearnim KF (angl. linear KF), kjer so v zanki KF obdelane *indirektne meritve* - x , y , z ; model vključuje zakon o prenosu varianc in kovarianc.

V doktorski disertaciji je bil razvit in preizkušan linearni model KF.

Za opis je bil uporabljen kinematični model. V osnovi so kinematični modeli za oceno stanja sistema izpeljani iz diferencialnih enačb. Definiramo jih tako, da je vrednost določenega odvoda položaja enaka nič. Za te vrste modele predpostavimo [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

- gibanje vzdolž izbrane koordinate je neodvisno od druge koordinate in
- šumi v koordinatah so medsebojno neodvisni.

Ker so v vsakem modelu prisotne določene motnje, lahko le-te obravnavamo in modeliramo kot slučajne pogreške. Eden od načinov modeliranja je modeliranje s časovno zveznim belim šumom sistema. Ker pa se opazovanja skoraj vedno izvajajo v diskretnem času, potrebujemo ustrezne enačbe stanja sistema za diskreten čas. V splošnem sta predstavljena dva kinematična modela stanja sistema [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

- kinematični model drugega reda ali model pospeška, opisanega z belim šumom (angl. white noise acceleration model): hitrost je Wienerjev proces,
- kinematični model tretjega reda ali model pospeška, opisanega kot Wienerjev proces (angl. Wiener process acceleration model): pospešek je Wienerjev proces.

Ker se direktna ali indirektna opazovanja zveznega stanja sistema izvajajo v diskretnem času, potrebujemo ustrezne kinematične modele za diskretni čas. Glede na način pridobitve diskretnih kinematičnih modelov s šumom (angl. *discrete time kinematic models*) le-te ločimo v dve skupini [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

- modeli, pridobljeni z diskretizacijo zveznih modelov, z zveznim belim šumom, za določeni interval vzorčenja,
- modeli, pridobljeni z direktnim definiranjem šuma sistema v diskretnem času kot deloma konstanten slučajni beli proces - za šum sistema predpostavimo, da je konstanten za določeni interval vzorčenja in neodvisen med posameznimi intervali.

V doktorski disertaciji smo zaradi visoke frekvence meritev predpostavili, da gibanje reflektorja lahko opišemo kot gibanje s približno konstantnim pospeškom a v vsakem časovnem intervalu dolžine $\Delta t = 0.125$ s, ki je enak časovni registraciji med dvema zaporednima trenutkoma pridobitve meritev. Na osnovi opisane predpostavke je bil razvit **diskretni kinematični model tretjega reda ali diskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom (DMWPP) ali model z odsekoma konstantnim pospeškom, opisan kot Wienerjev proces** (angl. *discrete third-order kinematic model* ali *discrete Wiener process acceleration model* ali *piecewise constant Wiener process acceleration model*), s tremi parametri za vsako smer. Prednost te vrste modelov je, da s šumom sistema lahko opišemo način gibanja, za katerega se predpostavljajo majhne spremembe pospeška znotraj časovnega intervala. Enak model je bil uporabljen za vse tri koordinate.

Linearna enačba sistema in kovariančna matrika šuma sistema

Stanje sistema $\mathbf{x}_k$ zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x & v_x & a_x & y & v_y & a_y & z & v_z & a_z \end{bmatrix}_k^T, \quad (4.1)$$

kjer so x, y, z koordinate lege premikajočega se reflektorja, v_x, v_y, v_z in a_x, a_y, a_z pa hitrost in pospešek v vseh treh smereh.

Za simulirani kinematični proces predpostavimo naslednje:

- časovno spreminjanje stanja sistema je neodvisno od nadzornih signalov: diskretna matrika vhoda v enačbi (2.36) je enaka nič, $\mathbf{G}_k = 0$,
- šum sistema vstopi v sistem preko matrike $\mathbf{\Gamma}_k$, enačba (2.40).

Enačba sistema diskretnega stanja sistema tretjega reda (pospešek se obravnava kot približno konstanten, kar pomeni, da je tretji odvod položaja enak nič) v primeru simuliranega kinematičnega procesa je:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k \cdot \tilde{w}_k, \quad (4.2)$$

kjer je $\tilde{w}_k$ nekorelirani šum sistema in predstavlja spremembo pospeška v intervalu k . Za spremembo pospeška predpostavimo, da je bela, s srednjo vrednostjo nič. Pospešek je tako opisan kot diskretni Wienerjev proces:

$$\tilde{w}_k \sim (0, \sigma_w^2). \quad (4.3)$$

$\mathbf{\Gamma}_k$ je v primeru simuliranega kinematičnega procesa vektor izboljšave, ki pomnoži skalarni šum sistema $\tilde{w}_k$. Če $\tilde{w}_k$ predstavlja konstantni pospešek v intervalu k , je sprememba hitrosti v tem intervalu podana z

$$\tilde{w}_k \cdot \Delta t.$$

Vpliv pospeška na položaj je podan z:

$$\tilde{w}_k \cdot \frac{\Delta t^2}{2}.$$

Vektor izboljšave $\mathbf{\Gamma}_k$ je za posamezno smer podan kot:

$$\mathbf{\Gamma}_k = \left[\frac{\Delta t^2}{2} \quad \Delta t \quad 1 \right]^T \quad (4.4)$$

in za vse tri smeri kot:

$$\mathbf{\Gamma}_k = \left[\frac{\Delta t^2}{2} \quad \Delta t \quad 1 \quad \frac{\Delta t^2}{2} \quad \Delta t \quad 1 \quad \frac{\Delta t^2}{2} \quad \Delta t \quad 1 \right]^T. \quad (4.5)$$

Matriko prehoda stanja $\mathbf{F}_k$ je mogoče izpeljati iz linearne diferencialne enačbe prvega reda zveznega stohastičnega sistema, enačba (2.27), kjer šum sistema vstopi v sistem preko matrike $\mathbf{B}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}. \quad (4.6)$$

Za naš primer kinematičnega sistema s tremi parametri neznank (položaj, hitrost, pospešek), s pospeškom, opisanim kot belim šumom, in indirektnimi meritvami prostorskega položaja - ima vektorska oblika, enačba (4.6), tri-dimenzionalnega problema obliko:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ a_x \\ \dot{a}_x \\ v_y \\ a_y \\ \dot{a}_y \\ v_z \\ a_z \\ \dot{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ a_x \\ y \\ v_y \\ a_y \\ z \\ v_z \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t). \quad (4.7)$$

V primeru, da je $u(t) = 0$ v enačbi (4.7), enačba opisuje gibanje točke s konstantnim pospeškom. Linearni diskretni model za simulirani kinematični proces pridobimo na osnovi splošnega linearnega diskretnega modela, enačba (2.36). Če prenesemo matriko $\mathbf{A}$ iz enačbe (4.7) v enačbo (2.37), dobimo matriko prehoda stanja $\mathbf{F}_k$ za diskretno enačbo sistema, podano v enačbi (4.2):

$$\mathbf{F}_k(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

V zapisu matrike $\mathbf{F}_k(\Delta t)$ predpostavimo konstantni časovni interval med dvema meritvama, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Matrika $\mathbf{F}_k$ je konstantna ves čas procesa, zato lahko indeksiranje opustimo.

Če ponovno zapišemo $\mathbf{w}_k = \mathbf{\Gamma}_k \cdot \tilde{\mathbf{w}}_k$, enačba (2.40), in ob upoštevanju, da $\tilde{\mathbf{w}}_k$ v primeru simuliranega kinematičnega procesa predstavlja spremembo pospeška, $\tilde{w}_k \sim (0, \sigma_w^2)$, ki vstopi v sistem preko vektorja izboljšave $\mathbf{\Gamma}_k$, lahko zapišemo kovariančno matriko šuma sistema za eno dimenzijo v primeru DMWPP kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k(1)} &= \mathbf{\Gamma}_k \cdot E[\tilde{w}_k \cdot \tilde{w}_k^T] \cdot \mathbf{\Gamma}_k^T = \mathbf{\Gamma}_k \cdot \sigma_w^2 \cdot \mathbf{\Gamma}_k^T = \\ &= \sigma_w^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ob upoštevanju, da so šumi med posameznimi smermi medsebojno neodvisni, lahko zapišemo kovariančno matriko šuma sistema za DMWPP kot:

$$\mathbf{Q}_k = \sigma_w^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Ponovno lahko opustimo indeks k , ker je matrika $\mathbf{Q}$ konstantna ves čas procesa. Rezultat različnih praktičnih primerov je interval za najboljšo izbiro velikosti šuma pospeška - $0.5 \cdot \Delta a_M \leq \sigma_w \leq \Delta a_M$, kjer je Δa_M največja sprememba pospeška [Bar-Shalom in sod. (2001)]. V primeru doktorske disertacije je bilo izvedenih več meritev. Velikost šuma pospeška je bila določena za vsak posamezen primer na osnovi povprečnega pospeška, brez prisotnosti grobih pogreškov.

Linearna enačba meritev in zakon o prenosu varianc in kovarianc

V modelu linearnega KF so opazovanja v vektorju meritev $\mathbf{z}_k$, enačba (2.2), indirektna opazovanja x , y in z - položajne komponente reflektorja za vsak časovni trenutek t_k . V nadaljevanju so ta opazovanja imenovana *meritve KF*. Merska matrika $\mathbf{H}_k$ ima obliko:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Matrika $\mathbf{H}_k$ je konstantna ves čas procesa, zato lahko opustimo indeks k .

Vrednosti meritev KF, x , y in z , so izračunane izven zanke KF, na osnovi direktnih meritev horizontalne smeri hz , zenitne razdalje zr in poševne dolžine d , z upoštevanjem desno-sučnega koordinatnega sistema v vsakem časovnem trenutku t_k , kot:

$$\mathbf{z}_{k[3,1]} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_StPt + d_k \cdot \sin(zr_k) \cdot \cos(hz_k) \\ Y_StPt + d_k \cdot \sin(zr_k) \cdot \sin(hz_k) \\ Z_StPt + d_k \cdot \cos(zr_k) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Vrednosti X_StPt , Y_StPt , Z_StPt so koordinate stojišča instrumenta in so podane v preglednici 4.1.

Zakon o prenosu varianc in kovarianc je potrebno uporabiti za izračun kovariančne matrike meritev $\mathbf{R}_k$ vektorja meritev KF $\mathbf{z}_k$, ki je časovno odvisna. Kovariančna matrika $\mathbf{R}_L$ direktnih opazovanj hz , d in zr je definirana s standardnimi deviacijami opazovanj - $\sigma_{hz} = 1''$, $\sigma_d = 5$ mm, $\sigma_{zr} = 1''$, podanimi v tehničnih podatkih uporabljenega elektronskega tahimetra *TCRA1201*, preglednica 4.2:

$$\mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} \sigma_{hz}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zr}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Za upoštevanje zakona o prenosu varianc in kovarianc je potrebno najprej izračunati matriko parcialnih odvodov $\mathbf{N}_k$ vektorja $\mathbf{z}_k$ po direktnih meritvah $\mathbf{L}_k$:

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} hz \\ d \\ zr \end{bmatrix}_k. \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_k &= \frac{\partial \mathbf{z}_k}{\partial \mathbf{L}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial hz} & \frac{\partial x}{\partial d} & \frac{\partial x}{\partial zr} \\ \frac{\partial y}{\partial hz} & \frac{\partial y}{\partial d} & \frac{\partial y}{\partial zr} \\ \frac{\partial z}{\partial hz} & \frac{\partial z}{\partial d} & \frac{\partial z}{\partial zr} \end{bmatrix}_k = \\ &= \begin{bmatrix} -d_k \cdot \sin(zr_k) \cdot \sin(hz_k) & \sin(zr_k) \cdot \cos(hz_k) & d_k \cdot \cos(zr_k) \cdot \cos(hz_k) \\ d_k \cdot \sin(zr_k) \cdot \cos(hz_k) & \sin(zr_k) \cdot \sin(hz_k) & d \cdot \cos(zr_k) \cdot \sin(hz_k) \\ 0 & \cos(zr_k) & -d_k \cdot \sin(zr_k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Kovariančna matrika $\mathbf{R}_k$ vektorja $\mathbf{z}_k$ se nato izračuna z zakonom o prenosu varianc in kovarianc:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{N}_k \cdot \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{N}_k^T. \quad (4.16)$$

Iz enačb (4.15) in (4.16) sledi, da kovariančna matrika meritev KF $\mathbf{R}_k$ ni konstantna skozi proces, ampak je odvisna od natančnosti direktnih meritev, ki jih določajo standardne deviacije, in njihovih vrednosti.

Inicializacija

Za izvedbo KF moramo poznati nekatere a priori informacije o sistemu. Aproksimacija vektorja začetnega stanja sistema $\mathbf{x}_0^-$ in pripadajoče kovariančne matrike $\mathbf{P}_0^-$ je pridobljena na osnovi opazovanj in ponovitve meritev. Začetna kovariančna matrika $\mathbf{P}_0$ je:

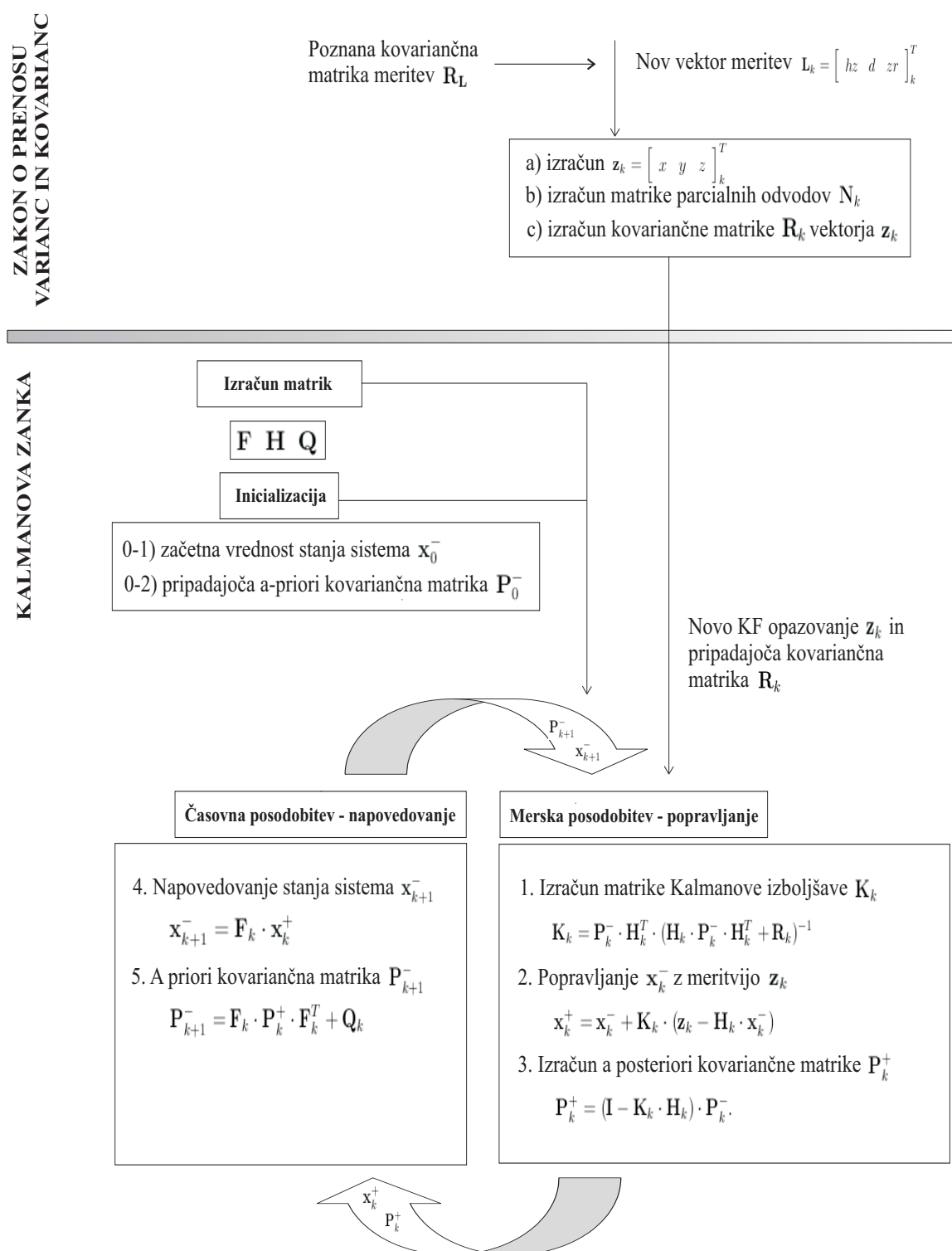
$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{vx0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ax0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{y0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{vy0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{ay0}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{vz0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{az0}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= 0.0001 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

kjer so vrednosti standardnih deviacij položaja, hitrosti in pospeška $\sigma_{x,y,z} = 0.01$ m, $\sigma_{vx,vy,vz} = 0.1$ m/s in $\sigma_{ax,ay,az} = 0.1$ m/s².

Določitev kovariančne matrike šuma sistema $\mathbf{Q}$ (t.j. skalarja intenzitete šuma sistema σ_w v enačbi (4.10)) ter s tem razmerja med šumom sistema in šumom meritev za posamezen primer je bistveno težja. Z uravnavanjem intenzitete šuma sistema parametri KF pridobijo vrednosti, ki zagotavljajo dobre rezultate KF, vključno z oceno položajev, hitrosti in pospeškov reflektorja.

Celotni računski postopek KF, vključno z zakonom o prenosu varianc in kovarianc, je prikazan na sliki 4.7.



Slika 4.7: Celotni računski postopek KF, z zakonom o prenosu varianc in kovarianc
Figure 4.7: Complete computational procedure of KF with the law of propagation of variances and covariances

5 VREDNOTENJE DISKRETNEGA MODELA WIENERJEVEGA PROCESA S POSPEŠKOM

Vsak model vrednotenja je aproksimacija opazovanega procesa in zahteva natančno vrednotenje rezultatov. V tem poglavju je dan poseben poudarek na statističnih testih, ki so lahko uporabljeni za interpretacijo izhodnih količin razvitega stohastičnega modela - DMWPP. Statistični testi so ključni za oceno rezultatov vrednotenja stanja sistema s filtrom - tako v primeru simulacij kot tudi pri nalogah v realnem času. Natančnost izhodnih količin je mera za kvaliteto:

- instrumentarija,
- meritev,
- uporabljene metode dela,
- matematičnega modela

in kažejo na zanesljivost izračunanih vrednosti.

Kontrola DMWPP je bila v osnovi izvedena:

- z indikatorji notranjega zaupanja,
- s statističnimi preizkusi ter
- s poznano referenčno tirnico.

Že sam model KF nam daje indikatorje, ki omogočajo vrednotenje izhodnih količin. Ker so te količine izračunane skozi proces KF, jih lahko uporabimo zgolj kot mere notranje zanesljivosti. Ti indikatorji so konvergenca sledi matrike $\mathbf{P}$ in lastnosti Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$. V naslednjem koraku so uporabljene statistične metode in parametri, ki podajajo zanesljivost modela in izračunanih vrednosti. V doktorski disertaciji je bila dodatno, poleg mer notranje zanesljivosti in statističnih testov, izvedena neodvisna kontrola z uporabo poznane referenčne tirnice. Zanesljivost DMWPP je bila kontrolirana tudi z lastnostmi nekaterih pomembnih matrik.

Rezultati so podani za izbrano vrednost maksimalne spremembe pospeška znotraj časovnega intervala $\tilde{w}_k$, ki je definirana za vsak kinematični proces. Vrednost največje spremembe pospeška znaša $\tilde{w}_k = 0.001$, razen v primeru, ko je zapisano drugače. Na osnovi več numeričnih ponovitev in opazovanj modela, kjer niso prisotni grobi pogreški in pri skoraj konstantnem gibanju reflektorja, brez nenadnih sprememb hitrosti, je bila definirana najboljša vrednost skalarja intenzitete šuma sistema. Rezultati so podani za $\sigma_w = 0.1$, razen če ni izrecno navedeno drugače, v primerih, ko želimo prikazati in poudariti pomembnost KF indikatorjev ocene, vrednosti vhodnih parametrov in izhodnih KF količin.

5.1 Računske zahteve

Število računskih operacij KF je približno sorazmerno n_r^3 , kjer je $n_r = \max(n, m)$ [Bar-Shalom in sod. (2001)]. V primeru DMWPP za $n = 9$, $m = 3$ znaša: $n_r^3 = 9^3 = 729$.

5.2 Kazalci notranjega zaupanja

5.2.1 Zmožnost opazovanosti DMWPP

Matrika opazovanosti $\mathbf{O} \in \mathcal{R}^{27 \times 9}$ DMWPP je bila izračunana po enačbi (3.12). Za razviti model DMWPP je pogoj opazovanosti izpolnjen, saj je rang matrike opazovanosti enak dimenziji vektorja stanja sistema $\mathbf{x}_k$:

$$\text{rang}(\mathbf{O}) = n = 9. \quad (5.1)$$

Pomen definicije opazovanosti se v praksi kaže v slednjem:

- Model je samo približek realnega sistema, v praksi pa nas v osnovi zanimajo lastnosti realnega sistema in ne modela. V vsakem stohastičnem modelu dejanskega sistema so prisotne določene poenostavitve. Način modeliranja sistema je odvisen od tega, ali vemo, kje nastopijo poenostavitve in kako oceniti napake, ki so posledica poenostavitvev in ki povzročijo razlike med realnim sistemom in modelom. Poenostavitvev v modelu DMWPP je potrebna pri izračunu diskretne matrike prehoda stanja sistema $\mathbf{F}$ z razvojem v Taylorjevo vrsto.

5.2.2 Zmožnost nadzora DMWPP

Matrika nadzora $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{9 \times 9}$ modela DMWPP je bila izračunana po enačbi (3.11), kjer je namesto matrike $\mathbf{G}$ v našem primeru uporabljen vektor $\mathbf{\Gamma}$, enačba (4.4), saj je sistem neodvisen od kontrolnih signalov, torej $\mathbf{G} = 0$. Šum vstopi v sistem preko vektorja $\mathbf{\Gamma}$. Rang izračunane matrike $\mathbf{C}$ znaša:

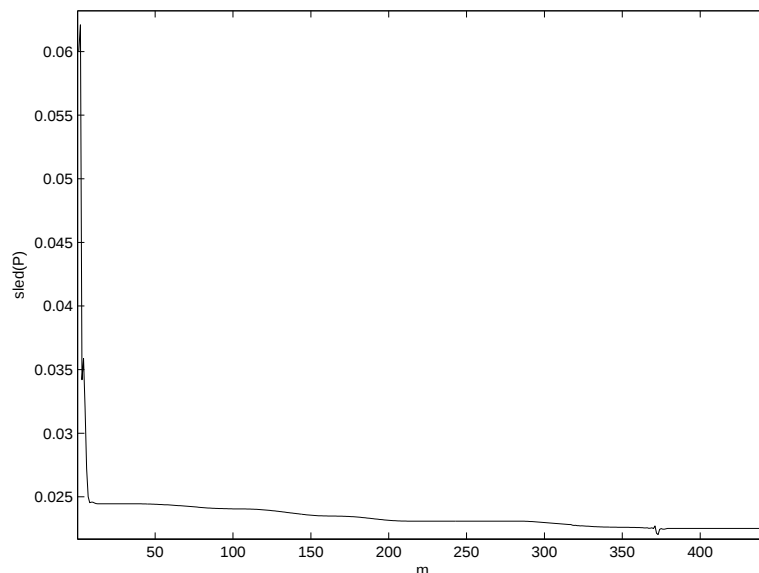
$$\text{rang}(\mathbf{C}) = 3, \quad (5.2)$$

kar ni enako $n = 9$. Na prvi pogled bi lahko zaključili, da našega modela ni mogoče nadzorovati. Če pa pogledamo strukturo matrike $\mathbf{F}$, enačba (4.8), in matrike $\mathbf{\Gamma}$, enačba (4.4), lahko vidimo ekvivalentnost vseh treh dimenzij. Množenje teh dveh matrik nam da matriko $\mathbf{C}$, katere rang je enak 3, t.j. število komponent stanja sistema za vsako posamezno smer. Zaključimo lahko, da je naš model mogoče nadzorovati za vse tri komponente (položaj, hitrost in pospešek), v vseh treh dimenzijah.

5.2.3 Lastnosti matrike $\mathbf{P}$

Prvi, najbolj očiten in najpomembnejši pogoj za zanesljivost modela KF, je konvergenca sledi a posteriori kovariančne matrike stanja sistema oz. neznank $\mathbf{P}_k^+$. Pogoj konvergence je v primeru DMWPP izpolnjen. Konvergenca sledi matrike $\mathbf{P}_k^+$ je podana na sliki 5.1. Pomen konvergence sledi kovariančne matrike stanja sistema podaja naslednja definicija:

$\text{tr}(\mathbf{P})$ je vsota diagonalnih elementov matrike $\mathbf{P}$, ki predstavljajo variance (kvadrate standardnih deviacij) komponent stanja sistema. Če vsota diagonalnih elementov konvergira proti določeni vrednosti, lahko rečemo, da tudi posamezni elementi (standardne deviacije) konvergirajo proti določeni vrednosti, slike 5.24, 5.43 in 5.44.

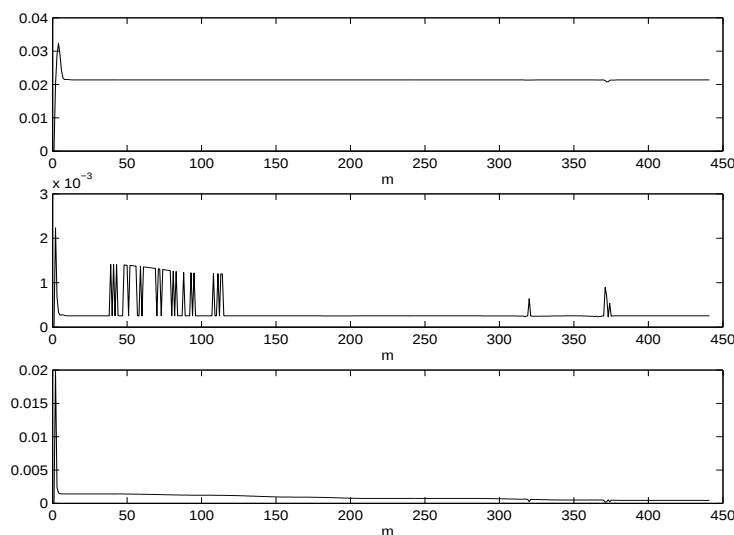


Slika 5.1: Konvergenca sledi a posteriori kovariančne matrike stanja sistema $\mathbf{P}_k^+$
Figure 5.1: Convergence of trace of a-posteriori system state covariance matrix $\mathbf{P}_k^+$

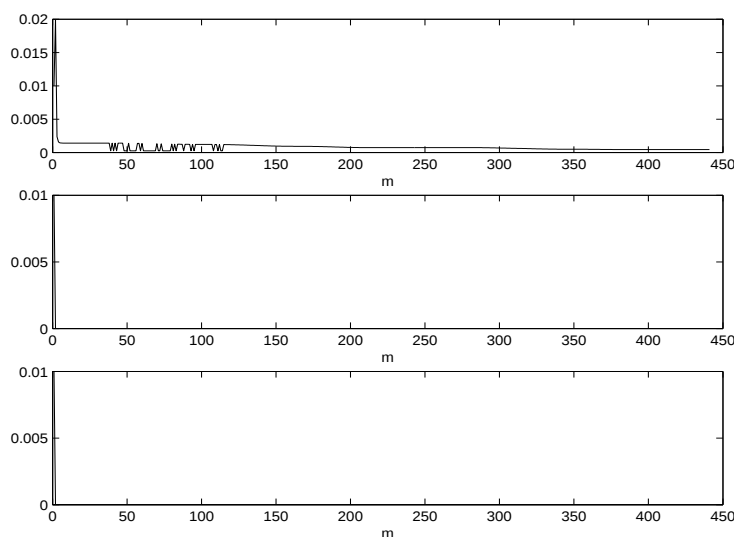
V splošnem modelu LKF je izračun matrik $\mathbf{P}_k^-$, $\mathbf{K}_k$ in $\mathbf{P}_k^+$ neodvisen od meritev $\mathbf{y}_k$ in je odvisen samo od matrik sistema $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{Q}_k$ in $\mathbf{R}_k$. To pomeni, da je Kalmanova matrika izboljšave $\mathbf{K}_k$ lahko izračunana in shranjena še preden model dejansko nadzoruje sistem. Ko začne model delovati v realnem času, je potrebno izpeljati samo enačbe za $\mathbf{x}_k$. Poleg tega je mogoče delovanje filtra raziskati in oceniti še preden filter dejansko deluje. Matrika $\mathbf{P}_k$ podaja oceno natančnosti filtra in jo je mogoče prav tako izračunati vnaprej, saj ni odvisna od meritev [Simon (2006)]. V razvitem modelu DMWPP imamo v osnovi opravka z direktnimi in indirektnimi meritvami, pri čemer kovariančno matriko indirektnih opazovanj izračunamo iz direktnih opazovanj z zakonom o prenosu varianc in kovarianc. Zato v našem primeru ne moremo govoriti o popolnoma linearnem modelu. V našem primeru matrike $\mathbf{P}_k$ in tudi matrike $\mathbf{K}_k$ ni mogoče izračunati vnaprej. Tudi če pogledamo enačbo (2.6), lahko vidimo, da je Kalmanova matrika izboljšave odvisna od kovariančne matrike meritev $\mathbf{R}_k$, ki se izračuna po enačbi (4.16) in je časovno odvisna matrika.

Rešitev kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$ bi morala biti teoretično vedno simetrično pozitivna semi-definitna (nenegativno definitna) matrika. Obe lastnosti kovariančne matrike (simetrija in pozitivna definitnost) se lahko namreč v procesu Kalmanovih enač izgubita zaradi napak zaokroževanja [Bar-Shalom in sod. (2001)]. Zato je potrebno ti dve lastnosti nadzorovati.

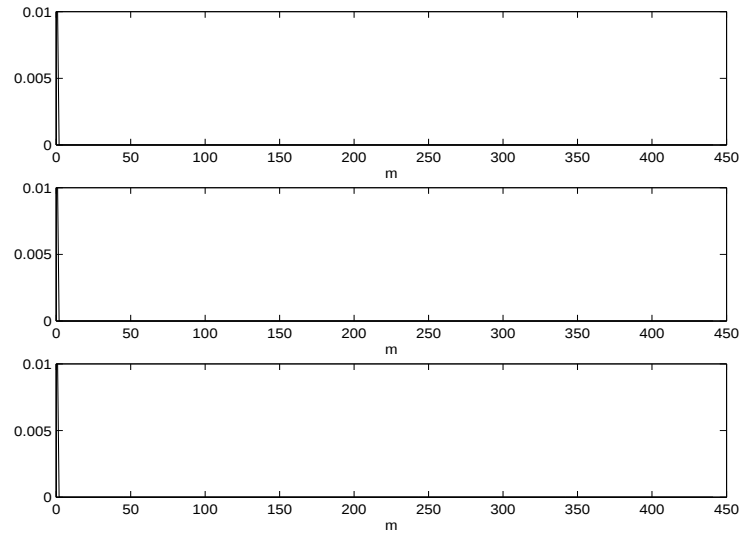
V postopku izračuna DMWPP je pogoj simetričnosti a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$ ves čas izpolnjen. Tudi pogoj pozitivne semidefinitnosti je za DMWPP izpolnjen. Simetrična matrika je pozitivno semidefinitna, če so vse lastne vrednosti nenegativna realna števila. Lastne vrednosti matrike $\mathbf{P}_k^+$ so podane na slikah 5.2, 5.3 in 5.4.



Slika 5.2: Konvergenca lastnih vrednosti 1,2,3 a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$
Figure 5.2: Convergence of eigenvalues 1,2,3 of a-posteriori covariance matrix $\mathbf{P}_k^+$



Slika 5.3: Konvergenca lastnih vrednosti 4,5,6 a posteriori kovariančne matrike $\mathbf{P}_k^+$
Figure 5.3: Convergence of eigenvalues 4,5,6 of a-posteriori covariance matrix $\mathbf{P}_k^+$



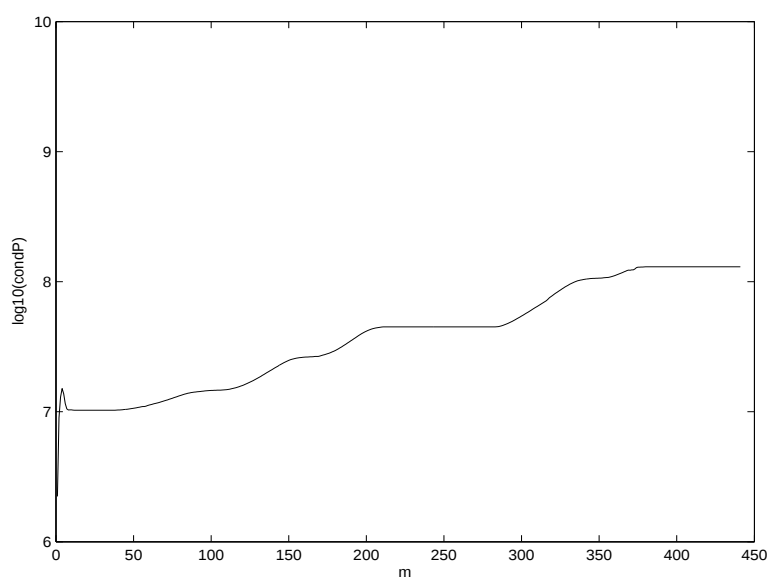
Slika 5.4: Konvergenca lastnih vrednosti 7,8,9 a posteriori kovariančne matrice $\mathbf{P}_k^+$
Figure 5.4: Convergence of eigenvalues 7,8,9 of a-posteriori covariance matrix $\mathbf{P}_k^+$

Matematično je matrika $\mathbf{P}_k^+$ nesingularna, vendar lahko numerični problemi pri računalniških izvedbah lahko vodijo v matrike, ki postanejo nedefinitne in nesimetrične. Numerični problem lahko nastane v primerih, ko so nekateri elementi vektorja stanja sistema $\mathbf{x}$ ocenjeni z veliko večjo natančnostjo kot drugi elementi vektorja $\mathbf{x}$. Razlog je lahko tudi v različnih enotah komponent vektorja stanja sistema [Simon (2006)]. Za naš model predvidimo natančnost ocene komponent začetnega stanja sistema: $\sigma_{x,y,z} = 0.01$ m, $\sigma_{vx,vy,vz} = 0.1$ m/s in $\sigma_{ax,ay,az} = 0.1$ m/s². Če pogledamo standardne deviacije komponent stanja sistema, izračunane tekom KF procesa, slike 5.24, 5.43 in 5.44, lahko prav tako opazimo različne rede za natančnost položaja, hitrosti in pospeška. Razlog je v različnih enotah in v tem, da je komponente položaja lažje opazovati kot hitrost in pospešek. To neskladje potrjujejo tudi različne lastne vrednosti matrice $\mathbf{P}_k^+$, slike 5.2, 5.3 in 5.4, kar se odraža tudi v pogojnem številu matrice $\mathbf{P}_k^+$. Pogojno število pozitivno definitne simetrične matrice je definirano kot desetiški logaritem razmerja med največjo in najmanjšo lastno vrednostjo [Bar-Shalom in sod. (2001)]:

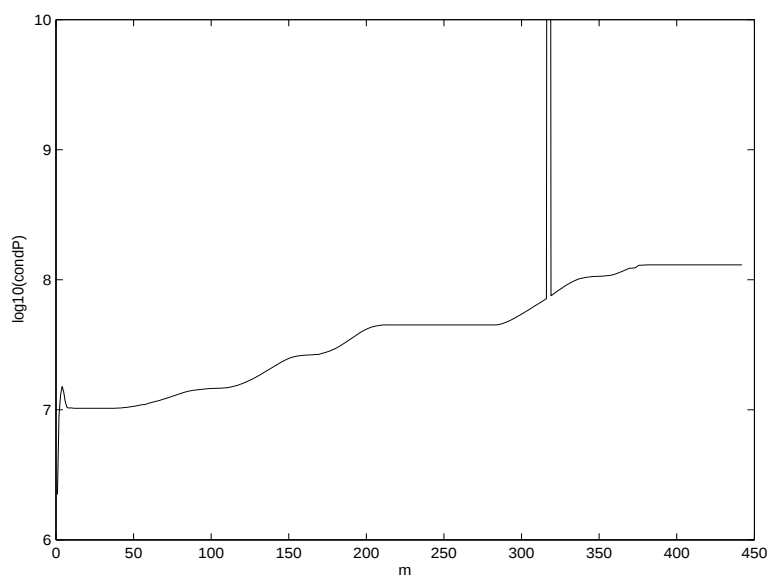
$$\kappa(\mathbf{P}) = \log_{10} \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (5.3)$$

Pogojno število a posteriori kovariančne matrice $\mathbf{P}_k^+$ za DMWPP je podano na sliki 5.5, v primeru prisotnosti grobih pogreškov v opazovanjih, in sliki 5.6, kjer so prisotni grobi pogreški. Velika vrednost pogojnega števila kaže na skoraj singularen problem; pri 32-bitnem računalniku $\kappa(\mathbf{P}) > 6$ kaže na slabo pogojeno matriko. Za DMWPP lahko rečemo, da je pogojno število še vedno sprejemljivo, saj se njegova vrednost stabilizira pri 9. Na sliki 5.6 lahko vidimo, kako že pogojno število lahko pokaže odstopanja v modelu.

Vrednost pogojnega števila je močno odvisna od vrednosti skalarja intenzitete šuma sis-

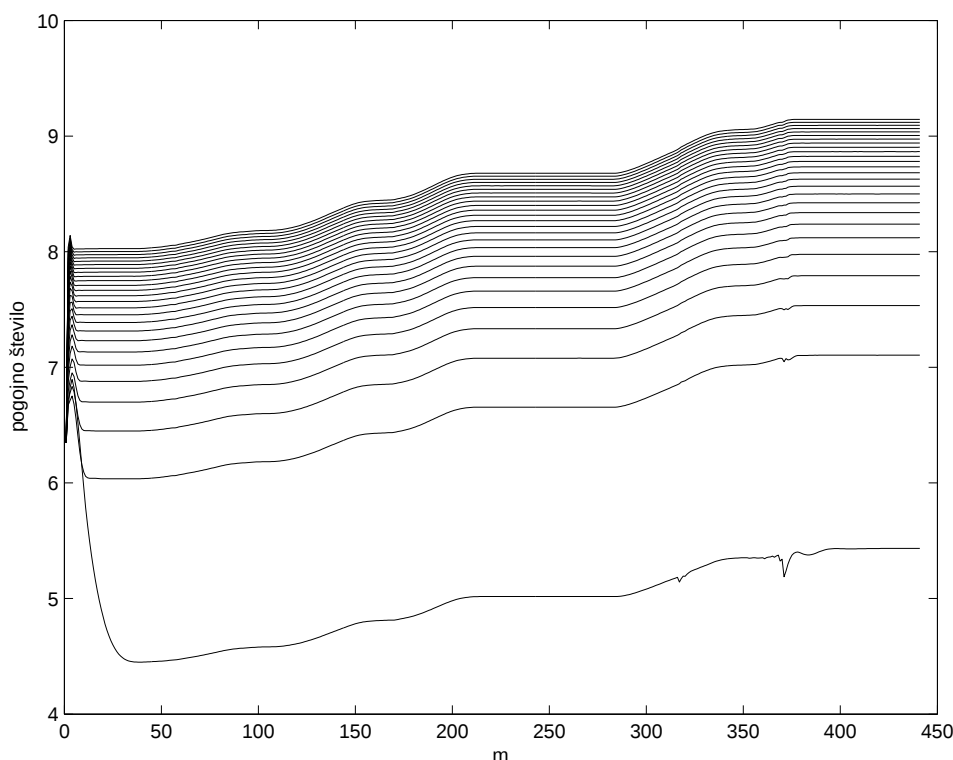


Slika 5.5: Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, brez grobih pogreškov
Figure 5.5: Condition number $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, no gross errors



Slika 5.6: Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, z grobimi pogreški
Figure 5.6: Condition number $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$, with gross errors

tema σ_w . Pogojno število zato lahko podaja razmerje med šumom sistema in šumom meritev. Na sliki 5.7 je predstavljeno pogojno število za različne vrednosti šuma sistema σ_w , $\sigma_w = 0.001 : 0.020 : 0.51$. Spodnji graf prikazuje pogojno število za najmanjšo vrednost σ_w , t.j. $\sigma_w = 0.001$.



Slika 5.7: Pogojno število $\kappa(\mathbf{P}_k^+)$ za različne vrednosti σ_w
Figure 5.7: Condition number for different values of σ_w

V delu je bila izračunana tudi *Josephova oblika a posteriori kovariančne matrike stanja sistema* po enačbi (2.11), ki predstavlja stabilizirano obliko enačbe a posteriori kovariančne matrike. Z Josephovo posodobljeno kovariančno matriko ne dobimo bistveno bolj-
ših rezultatov. Za vse izračune smo tako uporabili kovariančno matriko stanja sistema, izračunano po enačbi (2.8). Vse lastne vrednosti so pozitivne realne vrednosti, glej slike 5.2, 5.3 in 5.4.

5.2.4 Lastnosti matrike $\mathbf{K}$

Vključitev meritev v oceno stanja sistema določa matrika Kalmanove izboljšave $\mathbf{K}$, na katero vpliva negotovost v predhodni oceni stanja sistema in negotovost v oceni meritev. V splošnem lahko rečemo, da meritve z visoko natančnostjo zagotavljajo natančno oceno stanja sistema. Meritve namreč merijo stanje sistema - direktno ali indirektno - in tako lahko ob dovolj visoki natančnosti KF računa nanje kot na dobre pokazatelje dejanskega stanja sistema. Slednje bi morala odražati Kalmanova matrika izboljšave.

Interpretacija in pomen matrike Kalmanove izboljšave

Iz enačbe Kalmanove matrike izboljšave, enačba (2.6), vidimo, da je izboljšava:

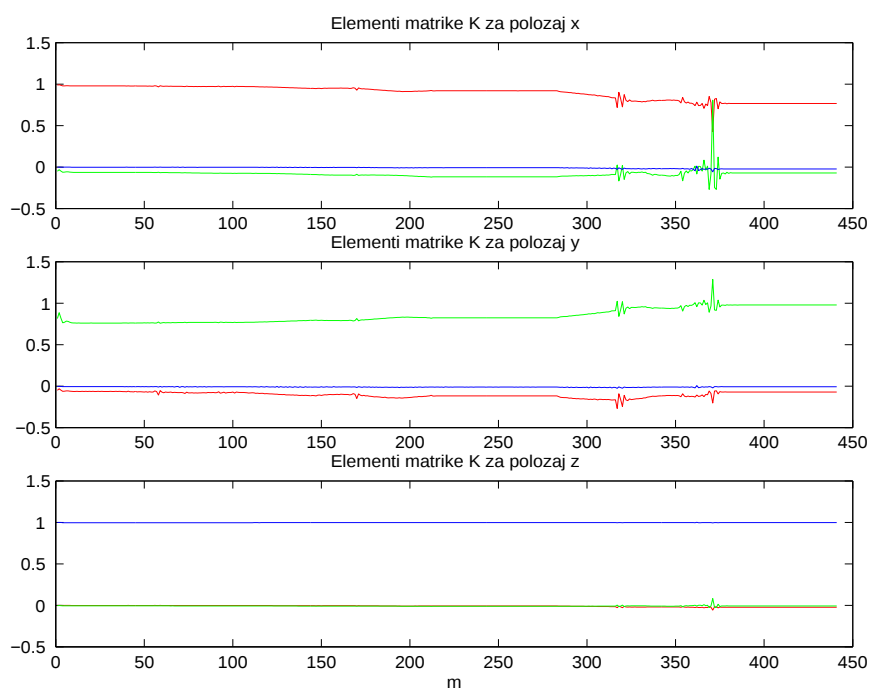
- sorazmerna z variancami napovedi stanja sistema v matriki $\mathbf{P}_k^-$,
- obratno sorazmerna z variancami izboljšav meritev, $\mathbf{D}_k^{-1} = (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$.

Izboljšava je torej

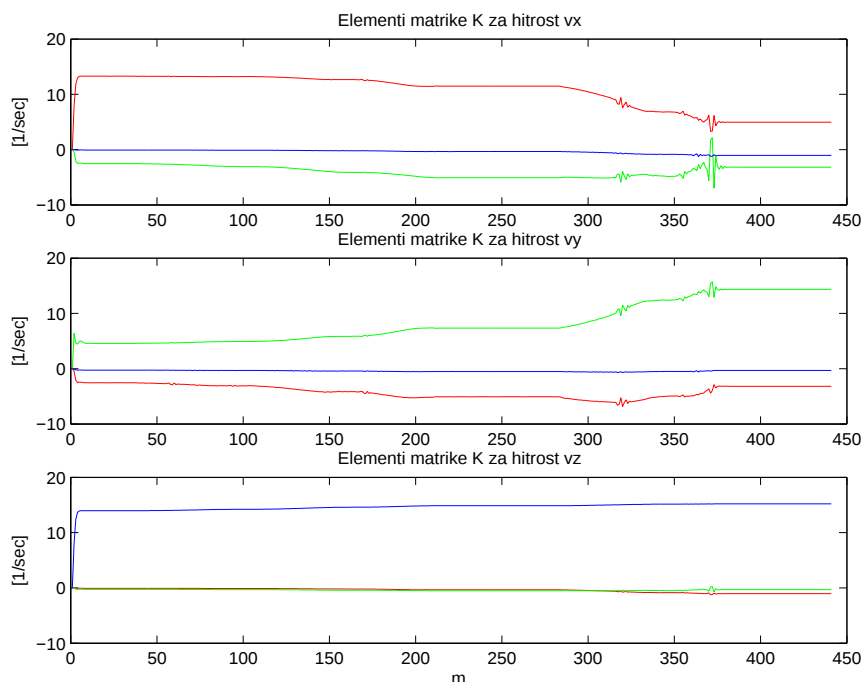
- velika, če je napoved stanja sistema netočna (ima veliko varianco) in meritev natančna (ima relativno majhno varianco),
- majhna, če je napoved stanja točna (ima majhno varianco) in meritev slaba (ima relativno veliko varianco).

Velika vrednost izboljšave kaže hiter odziv na meritve pri posodobitvi stanja sistema, medtem ko majhna vrednost izboljšave daje počasnejši odziv na meritve.

Na slikah 5.8, 5.9 in 5.10 so prikazani grafi elementov matrike uteži $\mathbf{K}$ za komponente položaja, hitrosti in pospeška v vseh treh dimenzijah.



Slika 5.8: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj
Figure 5.8: Elements of weighting matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Position



Slika 5.9: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Hitrost
Figure 5.9: Elements of weighting matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Velocity

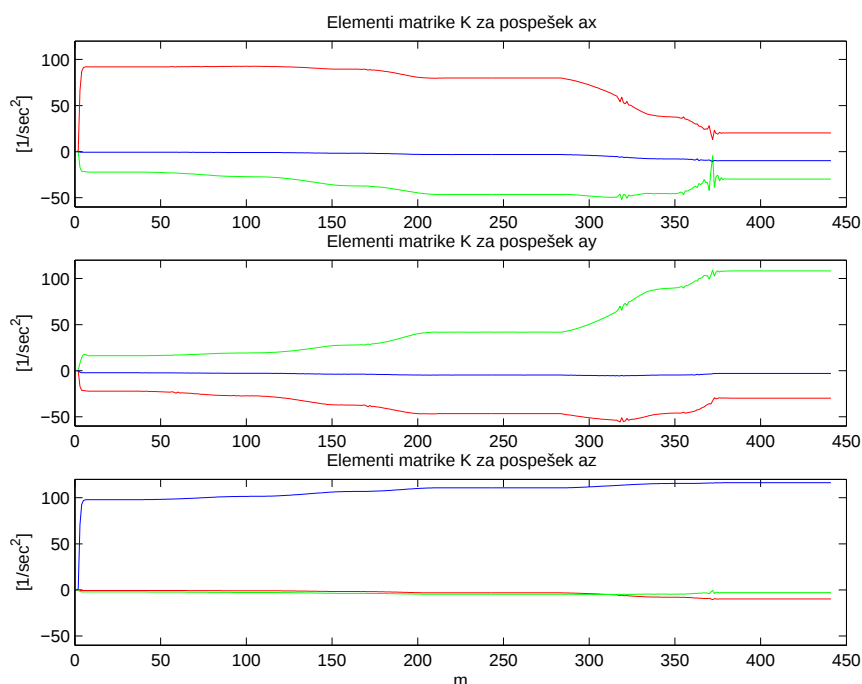
Iz grafov elementov matrike $\mathbf{K}$ lahko sklepamo naslednje:

1. Za vsako smer - x , y ali z - je v izračunu popravka (corr) položaja, hitrosti ali pospeška v vektorju stanja sistema pripadajoča utež popravkov meritev KF ($\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$) - v smislu izbrane smeri vedno največja.
Na primer: Popravek za položaj v smeri x je:

$$\text{corr}_x = \mathbf{K}_{11} \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-)_{11} + \mathbf{K}_{12} \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-)_{21} + \mathbf{K}_{13} \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-)_{31},$$

kjer je element $\mathbf{K}_{11}$, ki vključuje komponento x popravka meritev KF, največji. Na sliki 5.8-zgoraj, ki prikazuje elemente matrike $\mathbf{K}$ za položaj x , so vrednosti matrike $\mathbf{K}$, ki vključujejo komponento x popravka meritev KF, prikazane z rdečim grafom.

2. Če pogledamo grafe elementov matrike $\mathbf{K}$, ki vključujejo popravke položajev, slika 5.11, lahko vidimo, da je za vsako komponento položaja utež ustreznega popravka meritev KF približno enaka 1 in za druga dva popravka meritev KF približno enaka 0. Enak trend je viden pri hitrosti, slika 5.12, in pospešku, slika 5.13.

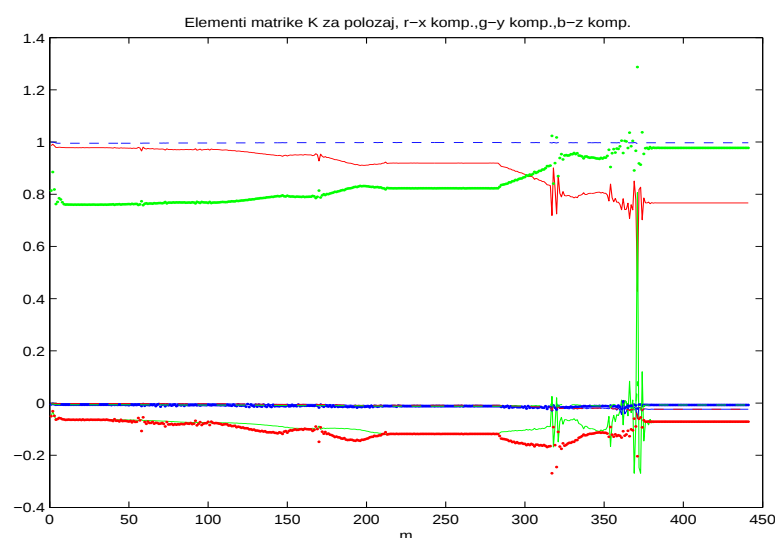


Slika 5.10: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Pospešek
Figure 5.10: Elements of weighting matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Acceleration

3. Če primerjamo uteži za položaj - x, y, z , hitrost - vx, vy, vz in pospešek - ax, ay, az , vidimo, da so uteži za položaj velikostnega reda 10^0 , za hitrost velikostnega reda 10^1 in za pospešek velikostnega reda 10^2 . Razlog za to je verjetno v tem, ker opazujemo samo položaje, zato jih je tudi mogoče bolj napovedati. Za vrednost skalarja intenzitete šuma sistema σ_w , kjer je dosežena ustrezna skladnost med napako ocenjevanja in standardnimi deviacijami položajev reflektorja, je napoved hitrosti in predvsem pospeška slabša, zato daje DMWPP večjo utež indirektnim informacijah, ki jih dobi iz meritev KF.

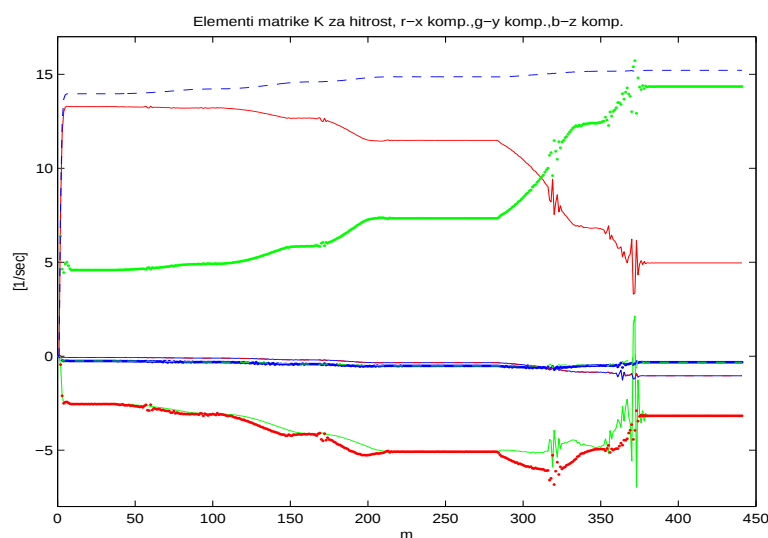
V našem modelu so vrednosti elementov matrike $\mathbf{K}$ odvisne od kovariančne matrike meritev KF, enačba (4.16), in jih ni mogoče izračunati vnaprej.

Elementi matrike uteži $\mathbf{K}$ so zelo močno odvisni od vrednosti skalarja intenzitete šuma sistema σ_w , predvsem elementi, ki določajo popravke hitrosti in pospeška. Na spodnjih slikah, 5.11, 5.12 in 5.13, so podani grafi za elemente matrike $\mathbf{K}$ za $\sigma_w = 0.1$. Na slikah 5.14, 5.15 in 5.16 so podani elementi matrike $\mathbf{K}$ za ekstremno vrednost $\sigma_w = 0.000001$.



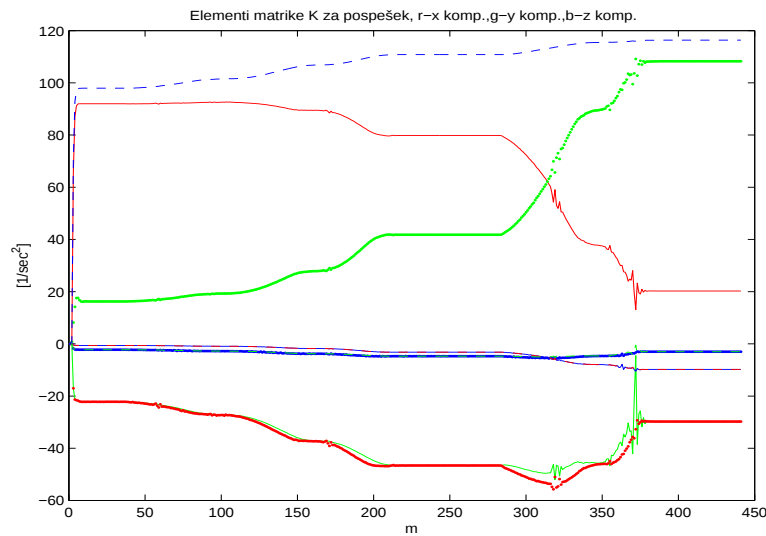
Slika 5.11: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj, $\sigma_w = 0.1$

Figure 5.11: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Position, $\sigma_w = 0.1$



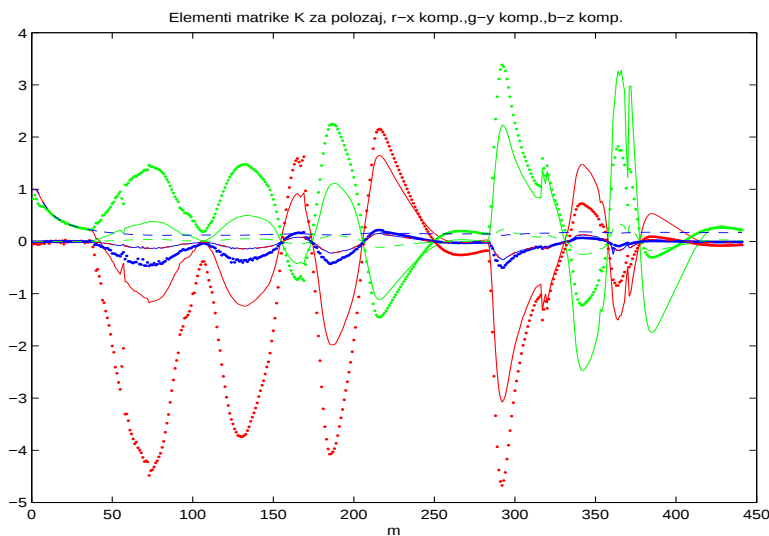
Slika 5.12: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Hitrost, $\sigma_w = 0.1$

Figure 5.12: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Velocity, $\sigma_w = 0.1$



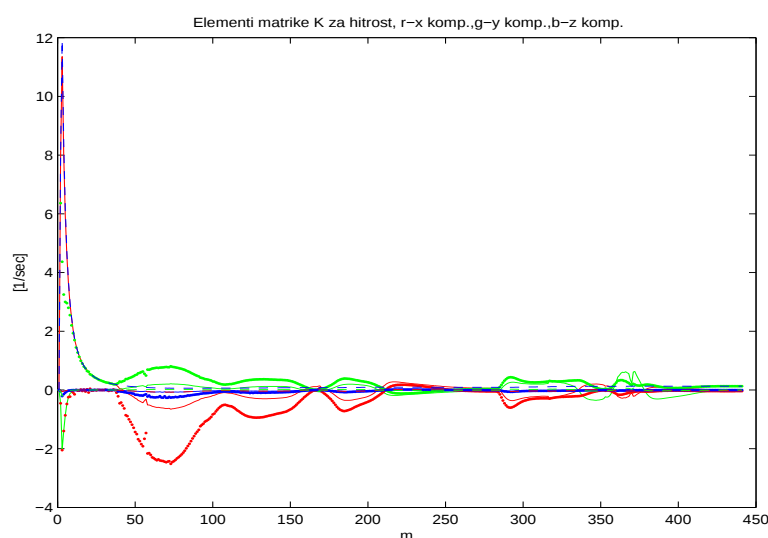
Slika 5.13: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Pospešek, $\sigma_w = 0.1$

Figure 5.13: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Acceleration, $\sigma_w = 0.1$



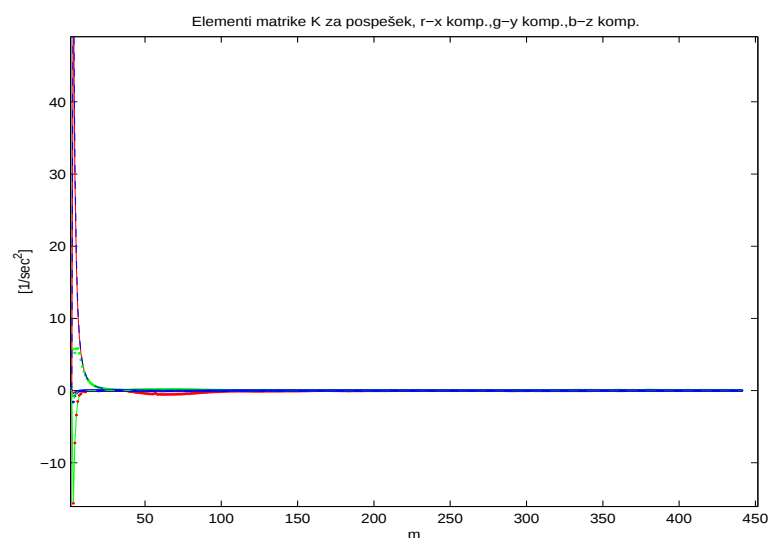
Slika 5.14: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Položaj, $\sigma_w = 0.000001$

Figure 5.14: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Position, $\sigma_w = 0.000001$



Slika 5.15: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Hitrost, $\sigma_w = 0.000001$

Figure 5.15: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Velocity, $\sigma_w = 0.000001$



Slika 5.16: Elementi Kalmanove matrike izboljšave $\mathbf{K}$; rdeče - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento x merskih popravkov, zeleno - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento y merskih popravkov, modro - elementi matrike $\mathbf{K}$ za komponento z merskih popravkov: Pospšek, $\sigma_w = 0.000001$

Figure 5.16: Elements of Kalman gain matrix $\mathbf{K}$; red - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component x of measurement correction, green - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component y of measurement correction, blue - elements of matrix $\mathbf{K}$ for component z of measurement correction: Acceleration, $\sigma_w = 0.000001$

Iz slike 5.15 in slike 5.16 lahko vidimo, da je pri majhni vrednosti šuma sistema, t.j. $\sigma_w = 0.000001$, zaupanje v model veliko, napovedane vrednosti in s tem tudi popravki meritev pa imajo veliko manjšo utež. Elementi matrike $\mathbf{K}$, ki vključujejo popravke meritev za komponente hitrosti in pospeška, konvergirajo proti nič. Elementi matrike $\mathbf{K}$ za položajno komponento so nesprejemljivo razpršeni. Za vrednost $\sigma_w = 0.000001$ je DMWPP neskladen.

V nadaljevanju je izvedena statistična ocena v domeni meritev in v domeni stanja sistema, z namenom, ugotoviti razloge za odstopanja med oceno napake in standardno deviacijo.

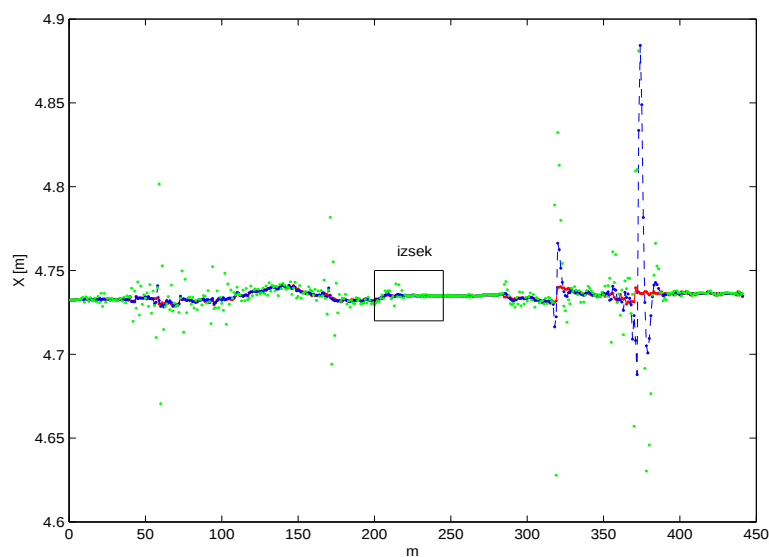
5.3 Statistični testi

Enačbe za kovariančno matriko izboljšave, enačba (3.2), matriko Kalmanove izboljšave, enačba (2.6), izboljšavo meritev, enačba (2.12), a posteriori oceno stanja sistema, enačba (2.7), in pripadajočo a posteriori kovariančno matriko, enačba (2.8), so rezultat modela filtriranja in so natančne le, če držijo vse predpostavke o modeliranju, uporabljene pri izpeljavi filtra. V praksi temu ni vedno tako, zato je potrebno dodatno preizkusiti izračunane količine, ki podajajo informacijo o natančnosti ocenjenega stanja sistema [Bar-Shalom in sod. (2001)].

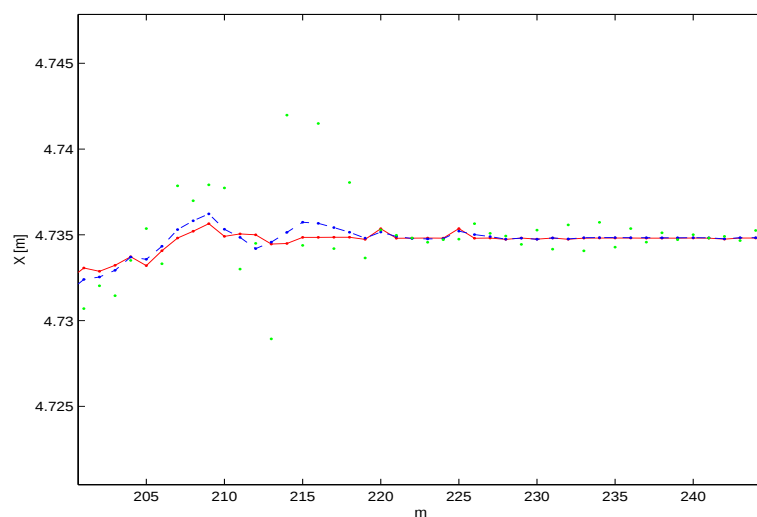
Pridobljeni rezultati, ki vključujejo oceno položaja, hitrosti in pospeška, so odvisni od uravnavanja razmerja med šumom sistema in šumom meritev ter a priori informacij. Z uravnavanjem filtra je mogoče opazovati ocenjeno stanje sistema in ali je dosežena skladnost z a posteriori kovariančno matriko $\mathbf{P}_k^+$. Skladnost preverimo na osnovi intervala σ in sicer je skladnost dosežena, če je napaka stanja sistema znotraj intervala 2σ pri 95% zanesljivosti. Interval σ , kjer σ predstavlja standardno deviacijo, je določen s kvadratnim korenom ustreznih diagonalnih elementov v izračunani a posteriori kovariančni matriki $\mathbf{P}_k^+$ (standardna deviacija $\sigma_i = \pm \sqrt{\mathbf{P}_{k(i,i)}^+}$). Če napaka ocene presega interval 2σ , rezultati KF niso sprejemljivi ob izbranih vhodnih parametrih.

5.3.1 Položaj reflektorja

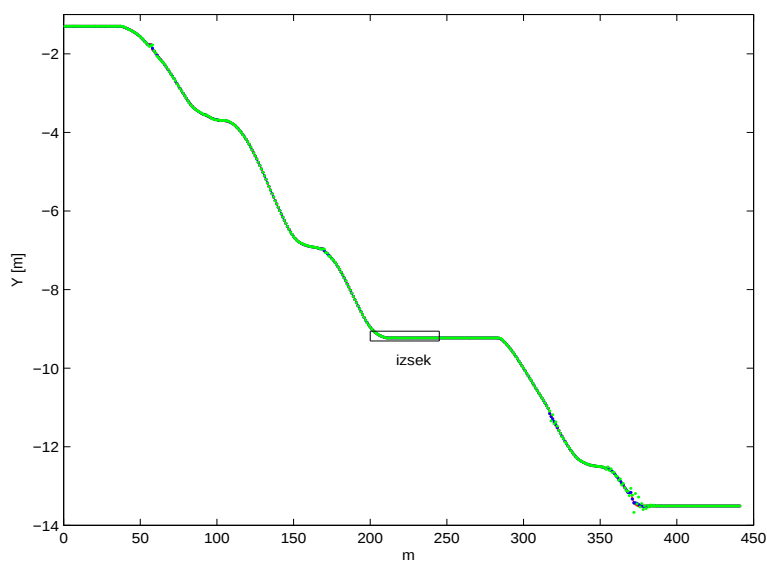
Glavni namen dela je bil oceniti položaj, slike 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 in 5.22, hitrost in pospešek reflektorja v vseh treh smereh, x , y in z . Za vse tri komponente lahko opazimo večjo razpršenost napovedanih vrednosti (zelena) in boljše ujemanje filtriranih vrednosti z referenčnimi položaji (rdeča), kar sledi tudi iz numeričnih vrednosti v preglednici 5.1. DMWPP daje več zanesljivosti meritvam kot modelu oz. napovedanim vrednostim.



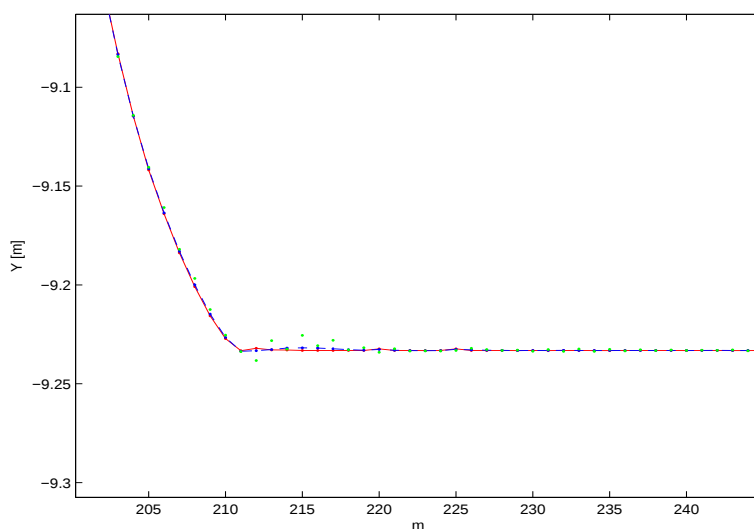
Slika 5.17: Položaj x reflektorja: rdeče - x položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev x , modro - filtrirane vrednosti položajev x
Figure 5.17: Position x of trolley: red - x component from measurements, green - predicted x , blue - filtered x



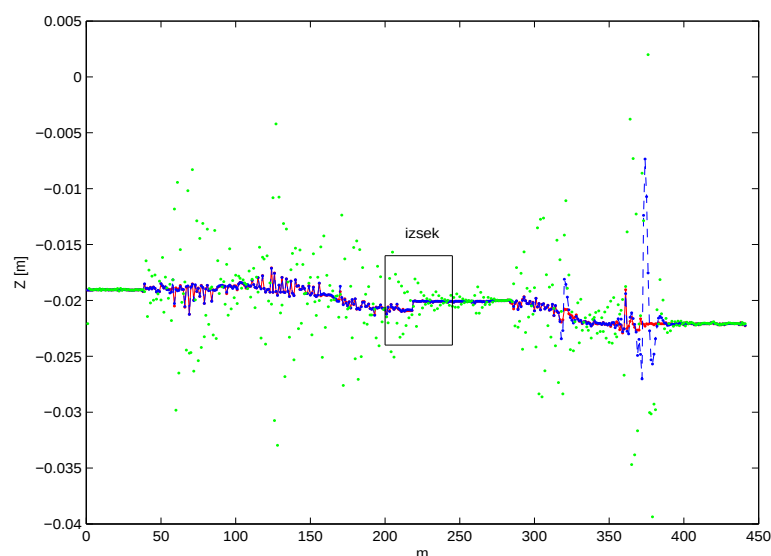
Slika 5.18: Položaj x reflektorja - izsek: rdeče - x položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev x , modro - filtrirane vrednosti položajev x
Figure 5.18: Position x of trolley - detail: red - x component from measurements, green - predicted x , blue - filtered x



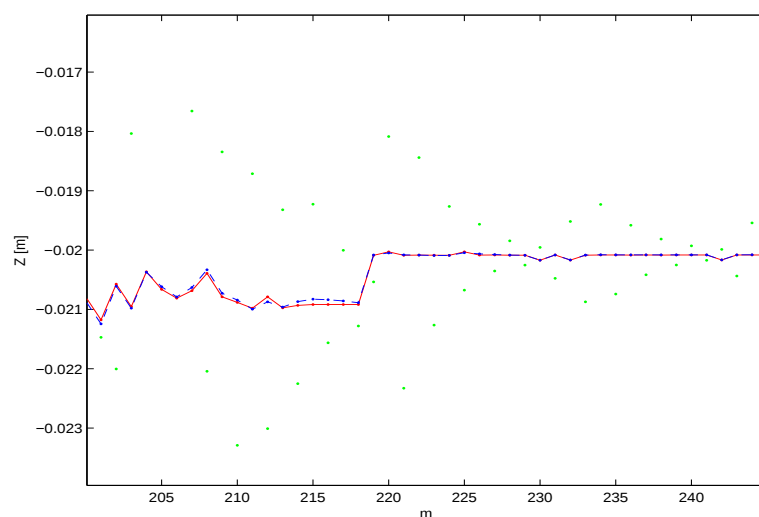
Slika 5.19: Položaj y reflektorja: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y
Figure 5.19: Position y of trolley: red - y component from measurements, green - predicted y , blue - filtered y



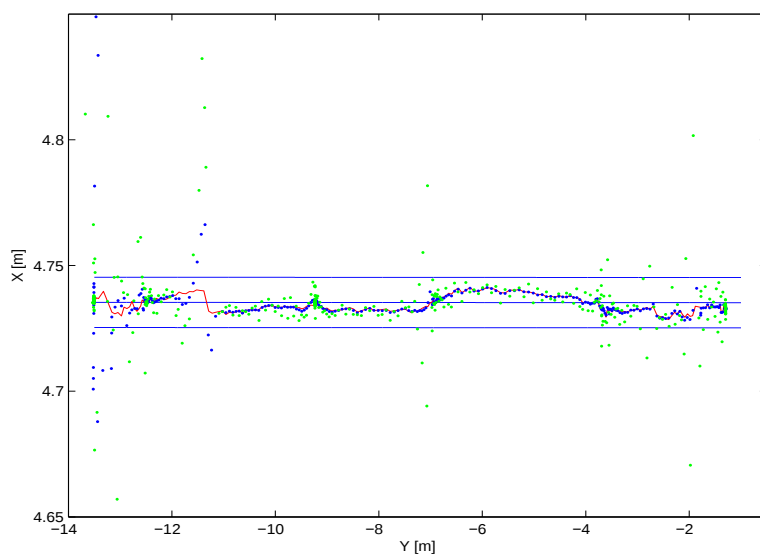
Slika 5.20: Položaj y reflektorja - izsek: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y
Figure 5.20: Position y of trolley - detail: red - y component from measurements, green - predicted y , blue - filtered y



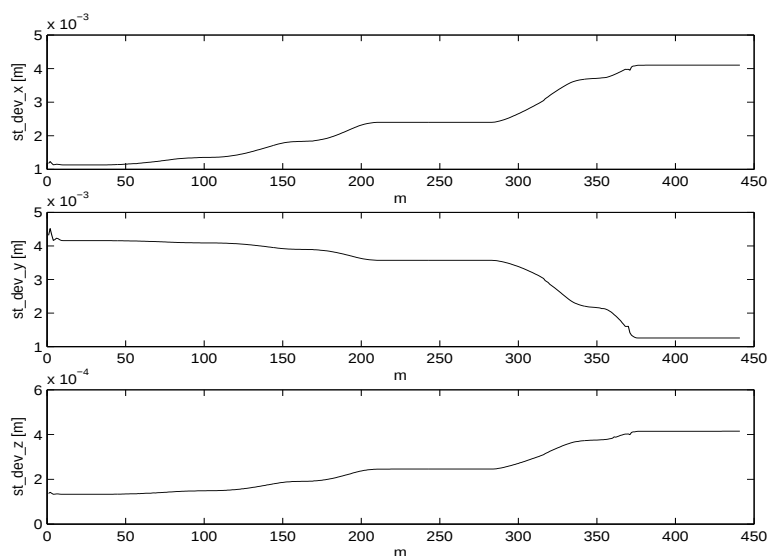
Slika 5.21: Položaj z reflektorja: rdeče - z položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev z , modro - filtrirane vrednosti položajev z
Figure 5.21: Position z of trolley: red - z component from measurements, green - predicted z , blue - filtered z



Slika 5.22: Položaj y reflektorja - izsek: rdeče - y položaj izračunan iz meritev, zeleno - napovedane vrednosti položajev y , modro - filtrirane vrednosti položajev y
Figure 5.22: Position y of trolley - detail: red - y component from measurements, green - predicted y , blue - filtered y



Slika 5.23: Horizontalna ravnina
Figure 5.23: Ground plane



Slika 5.24: Standardne deviacije položajnih komponent
Figure 5.24: Standard deviation of position components

Variance položajnih komponent stanja sistema

Variance ocen stanja sistema, ki jih izračunamo s KF, bi morale v idealnem primeru ves čas vključevati dejansko stanje sistema. Grafično lahko to prikažemo z izrisom standardnih deviacij ocen stanja sistema in napak v oceni komponent stanja sistema. Interval 1σ oz.

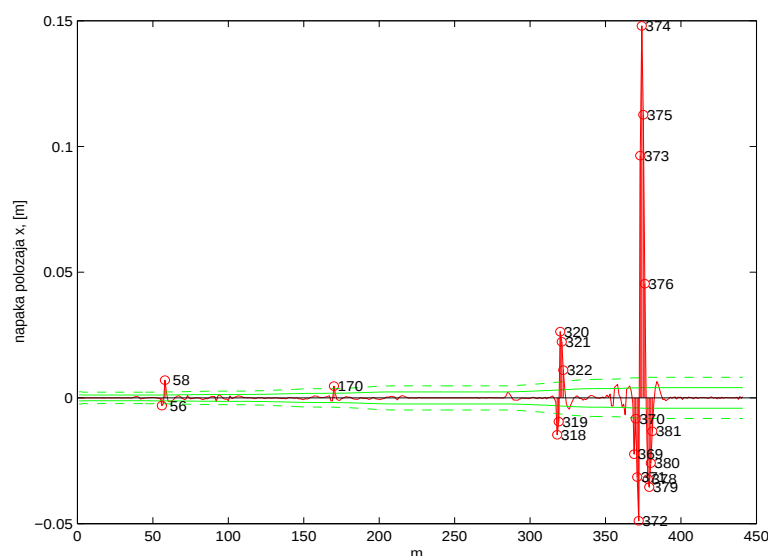
	$\sum napovedano - merjeno $ [m]	$\sum filtrirano - merjeno $ [m]
x	3.785	0.935
y	3.590	0.597
z	1.031	0.095

Preglednica 5.1: Vsota absolutnih razlik med napovedanimi oz. filtriranimi in merjenimi vrednostmi

2σ , ki ga izračuna KF, nam pove, koliko je verjetno, da je pravo stanje znotraj določene razdalje od ocenjenega stanja [Negenborn (2003)]. KF je:

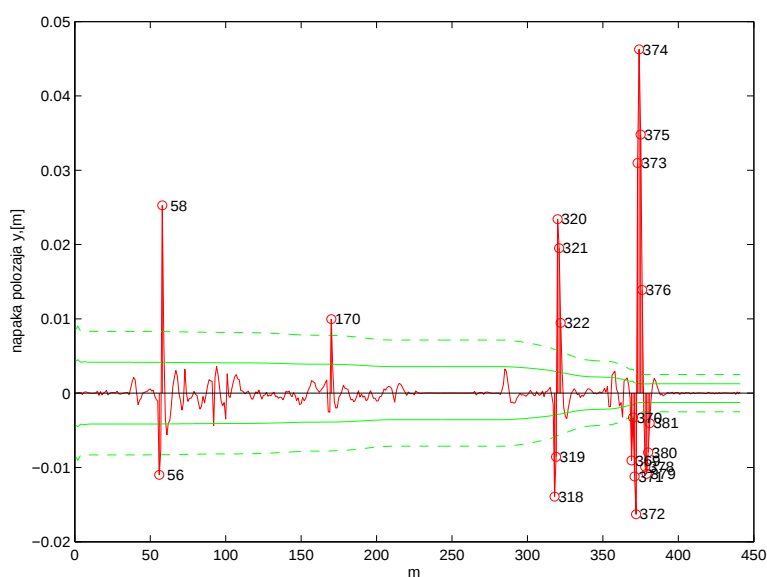
- 68% zanesljiv, da je pravo stanje sistema znotraj intervala 1σ ; t.j. znotraj oddaljenosti 1σ od ocenjenega stanja sistema, ali
- 95% zanesljiv, da je pravo stanje sistema znotraj intervala 2σ ; t.j. znotraj oddaljenosti 2σ od ocenjenega stanja sistema.

Če narišemo standardne deviacije σ skupaj z napakami, mora napaka ostati znotraj izbranega intervala σ . Za DMWPP in $\sigma_w = 0.1$ sta interval 1σ in interval 2σ prikazana za vsako komponento položaja posebej na slikah 5.25, 5.26 in 5.27, numerične vrednosti pa so podane v preglednici 5.2. Na grafičnem prikazu je izpisana številka koraka, v katerem napaka ocenjenega položaja presega 2σ vrednost.

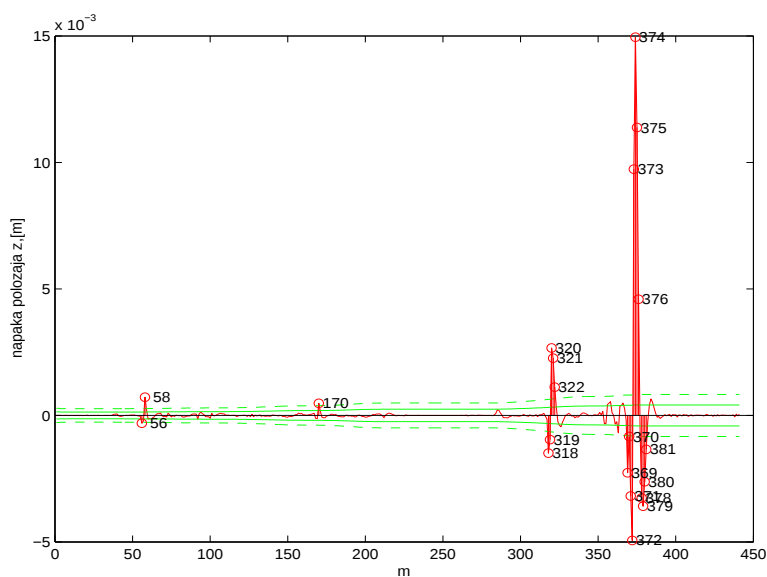


Slika 5.25: Napaka položaja x (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$

Figure 5.25: Position error x (red solid), σ -interval (green solid) and 2σ -interval (green dashed solid), no gross errors, $\sigma_w = 0.1$



Slika 5.26: Napaka položaja y (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$
Figure 5.26: Position error y (red solid), σ -interval (green solid) and 2σ -interval (green dashed solid), no gross errors, $\sigma_w = 0.1$



Slika 5.27: Napaka položaja z (polna rdeča črta), interval 1σ (zelena polna črta) in interval 2σ (prekinjena zelena črta), brez prisotnosti grobih pogreškov, $\sigma_w = 0.1$
Figure 5.27: Position error z (red solid), σ -interval (green solid) and 2σ -interval (green dashed solid), no gross errors, $\sigma_w = 0.1$

	Interval 1σ (za normalno porazdelitev 68% znotraj)			Interval 2σ (za normalno porazdelitev 95% znotraj)		
	x % znotraj	y % znotraj	z % znotraj	x % znotraj	y % znotraj	z % znotraj
$\sigma_w = 0.1$	91.4	91.8	92.1	95.5	95.5	95.5
$\sigma_w = 0.1$	$\log_{10}(\text{cond}\mathbf{P}) \rightarrow 8.115$ brez grobih pogreškov					
$\sigma_w = 0.06$	87.3	87.3	87.8	92.1	92.1	92.1
$\sigma_w = 0.06$	$\log_{10}(\text{cond}\mathbf{P}) \rightarrow 7.782$ brez grobih pogreškov					
$\sigma_w = 0.01$	45.1	46.5	46.3	61.0	60.3	60.8
$\sigma_w = 0.01$	$\log_{10}(\text{cond}\mathbf{P}) \rightarrow 6.642$ brez grobih pogreškov					

Preglednica 5.2: Odstotek filtriranih vrednosti znotraj intervala 1σ in intervala 2σ

Iz preglednice 5.2 lahko opazimo zmanjšanje pogojnega števila (hkrati nastopi boljša konvergenca sledi matrike $\mathbf{P}_k^T$) z večjim zaupanjem v model (manjša vrednost σ_w). Hkrati pa je veliko manj napak položaja znotraj intervala 1σ ali intervala 2σ ocenjenih položajev, kar predstavlja neskladje z dejanskim stanjem. Za $\sigma_w = 0.1$ lahko sklepamo, da so ocene stanja sistema skladne z dejanskimi napakami. Rezultati za vrednost $\sigma_w = 0.06$ so še sprejemljivi za interval 2σ in povsem sprejemljivi za interval 1σ . Za $\sigma_w = 0.01$ lahko rečemo, da so ocene stanja položaja neskladne z izračunanimi standardnimi deviacijami. Samo približno 46% ocenjenih položajev je znotraj 1σ -intervala in 61% ocenjenih položajev znotraj intervala 2σ .

V praktičnih primerih modelirani šum sistema ne odraža vedno pravega šuma sistema. Zato je težko pridobiti natančne vrednosti varianc komponent stanja sistema. Prav tako se lahko šum spreminja skozi proces. Zato moramo v vsakem modelu preučiti vpliv večjega oz. manjšega šuma sistema na rezultate KF. V idealnem primeru modelirani šum sistema popolnoma odraža šum sistema dejanskega procesa. KF uporabi modelirani šum sistema kot izraz nezanesljivosti v oceni stanja sistema zaradi nemodeliranih vplivov. Če je modelirani šum sistema večji kot dejanski šum sistema, potem KF predpostavi, da je v sistemu prisotno več šuma in zato po nepotrebnem preveč zmanjša zanesljivost ocene stanja sistema. V primeru določanja položaja pomeni modeliranje prevelikega šuma večjo nezanesljivost v ocenjenem položaju in odločanje kontrolorja v tem primeru je *preveč pazljivo*. Na voljo ima slabe informacije o oceni položaja. Večji šum sistema torej pomeni poslabšanje napovedanega stanja sistema, kar ima za posledico vključitev meritev [Negenborn (2003)].

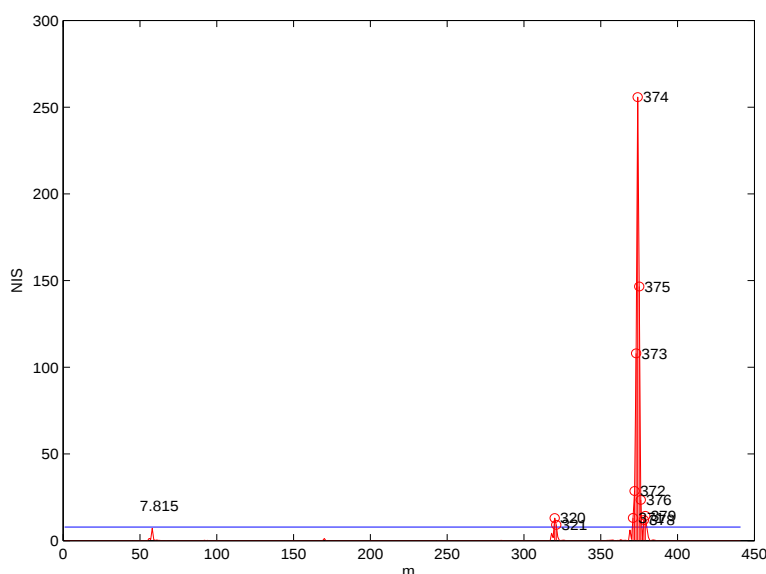
Opazimo lahko tudi različne velikostne rede standardnih deviacij za različne položajne komponente, ki pa so znotraj izbranega intervala. Če bi v modelu DMWPP dali preveliko zaupanje napovedanim vrednostim, bi standardne deviacije za vse tri ocenjene položajne komponente konvergirale proti 0. V tem primeru je sicer informacija o ocenjenem po-

ložaju boljša, ni pa skladna z dejansko napako. V primeru, da imamo opraviti z nižjo zanesljivostjo sistema, se lahko zgodi, da prava vrednost ni znotraj intervala zaupanja.

Hitrost in pospešek reflektorja in pripadajoče standardne deviacije so podane v poglavju 5.4.

5.3.2 Skladnost DMWPP v domeni meritev

Izboljšave meritev KF na sliki 5.29, s pripadajočo kovariančno matriko, izračunano v postopku filtriranja, so preizkušane na osnovi normirane kvadratne izboljšave, enačba (3.5), in razmerjem verjetnosti, podanim v enačbi (3.6). Za DMWPP je vrednost prostostne stopnje enaka $r = 3$. Statistični testi so izvedeni za tveganje $\alpha = 0.05$; t.j. $P\{\Omega_{\mathbf{d},k}^2 \leq \chi_{3,1-0.05}^2 | H_0\} \geq 1 - 0.05$. Pri 95% stopnji zaupanja, za vektor meritev KF, ki vključuje tri komponente, je območje zaupanja za enostranski test definirano z $\chi_{3,1-0.05}^2 = 7.815$. Normirana kvadratna izboljšava za DMWPP je grafično prikazana na sliki 5.28. Če filter ustrezno opisuje sistem, se mora ocenjena napaka nahajati znotraj intervala 2σ 95% vseh merskih korakov [Gao in sod. (2005)].

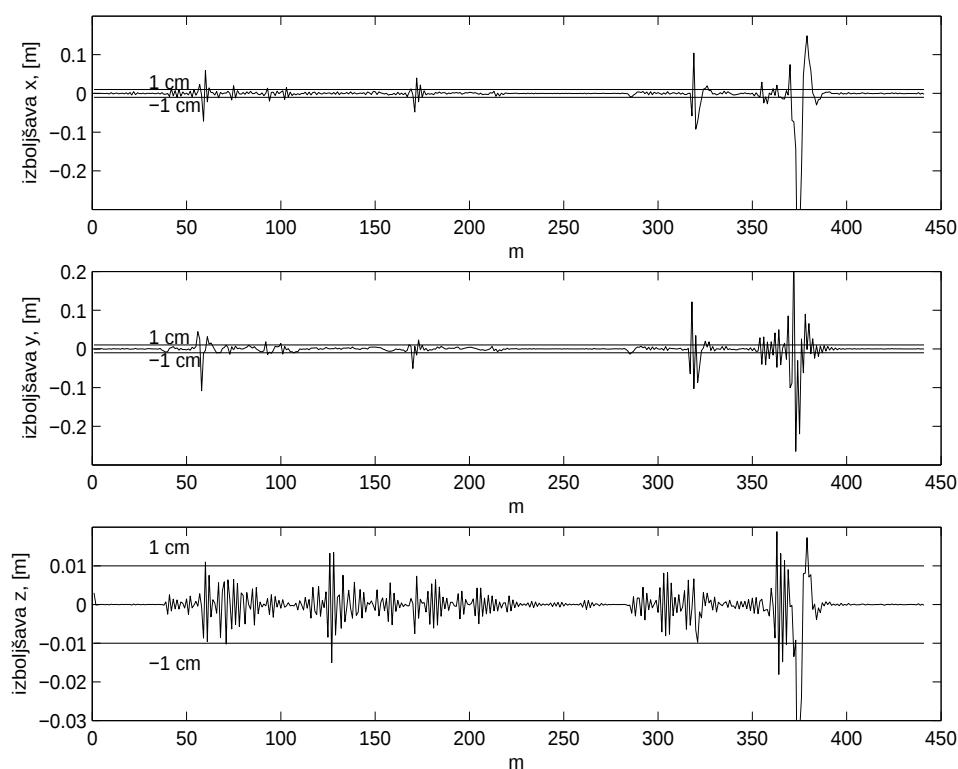


Slika 5.28: Normirana kvadratna izboljšava
Figure 5.28: Normalized innovation squared

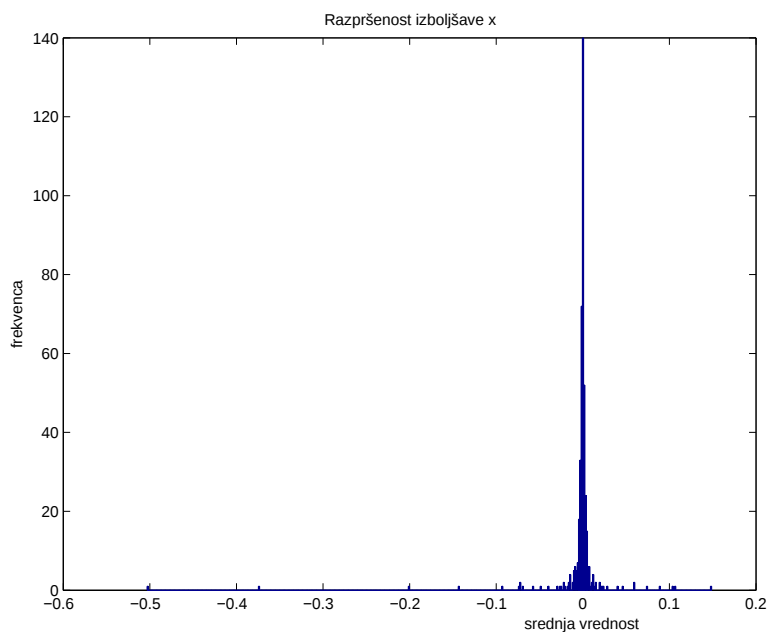
Za izboljšave meritev KF, enačba (4.12), ki predstavljajo popravke meritev, se predpostavlja, da jih je mogoče opisati z normalno porazdelitvijo, s srednjo vrednostjo nič in pripadajočo kovariančno matriko $\mathbf{D}_k$, dano v enačbi (3.2):

$$\mathbf{d}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{D}_k). \quad (5.4)$$

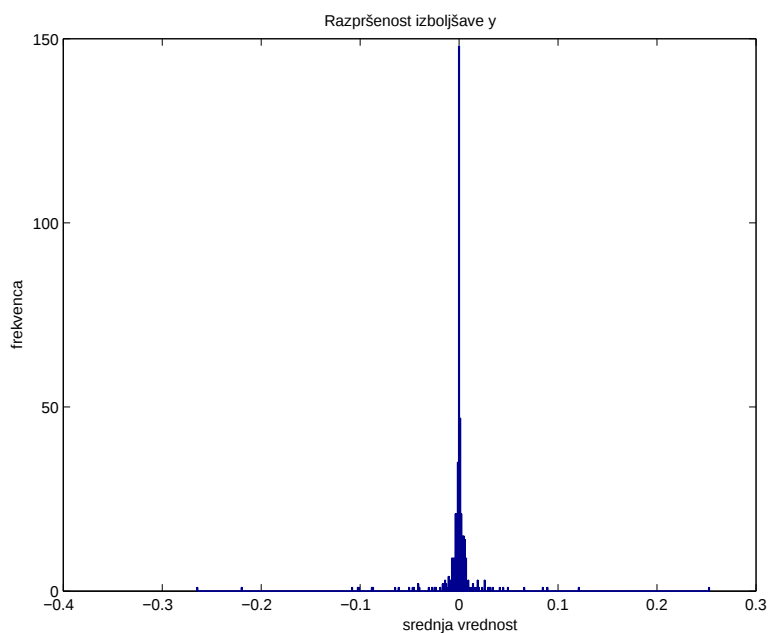
Za napake se predpostavlja, da so normalno porazdeljene, saj normalna porazdelitev običajno dobro aproksimira porazdelitev merjenih količin. Za normalno porazdelitev je značilno, da so slučajne napake večjih vrednosti redke. Rezultati statističnih testov, kot so intervali zaupanja in intervali napovedovanja, zahtevajo za njihovo veljavnost normalno porazdelitev. Če je srednja vrednost napak enaka nič, potem so napake popolnoma slučajne. Če pa srednja vrednost napak ni enaka nič, se lahko zgodi, da model ni ustrezen za opis sistema ali pa da napake niso povsem slučajne in so prisotni sistematični pogreški, [Matlab Help]. Za naš model DMWPP je porazdelitev izboljšav meritev KF podana na slikah 5.30, 5.31 in 5.32.



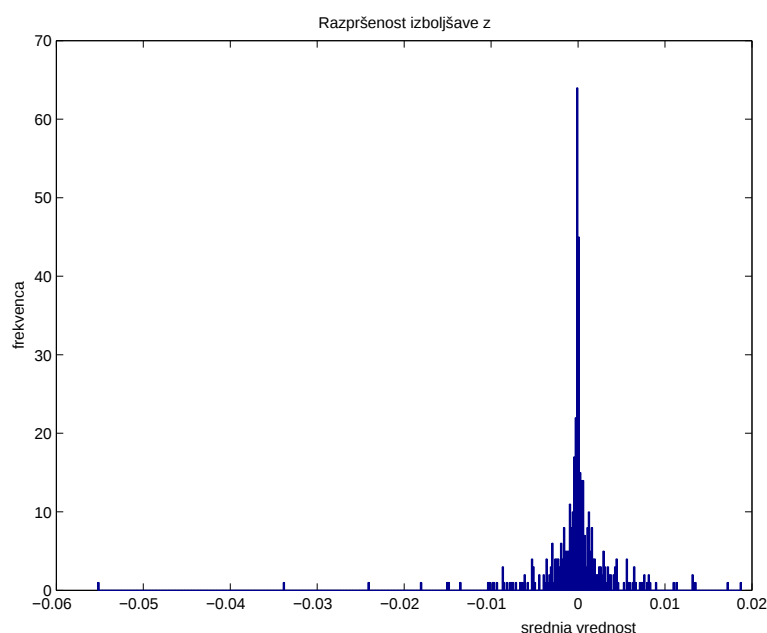
Slika 5.29: Izboljšave meritev KF
Figure 5.29: KF-measurement innovation



Slika 5.30: Histogram izboljšave meritev KF za komponento x
Figure 5.30: Innovations histogram for component x



Slika 5.31: Histogram izboljšave meritev KF za komponento y
Figure 5.31: Innovations histogram for component y



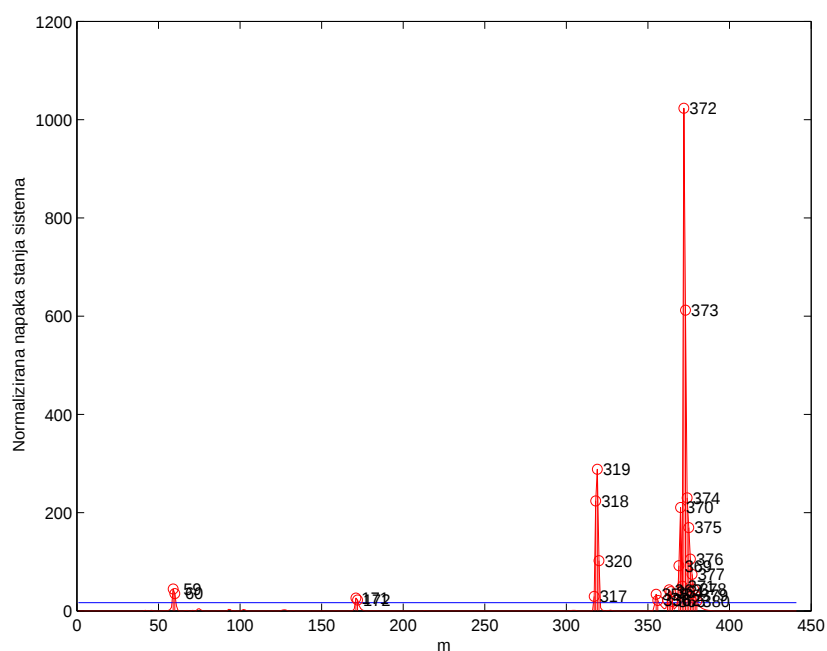
Slika 5.32: Histogram izboljšave meritev KF za komponento z
Figure 5.32: Innovations histogram for component z

5.3.3 Skladnost DMWPP v domeni stanja sistema

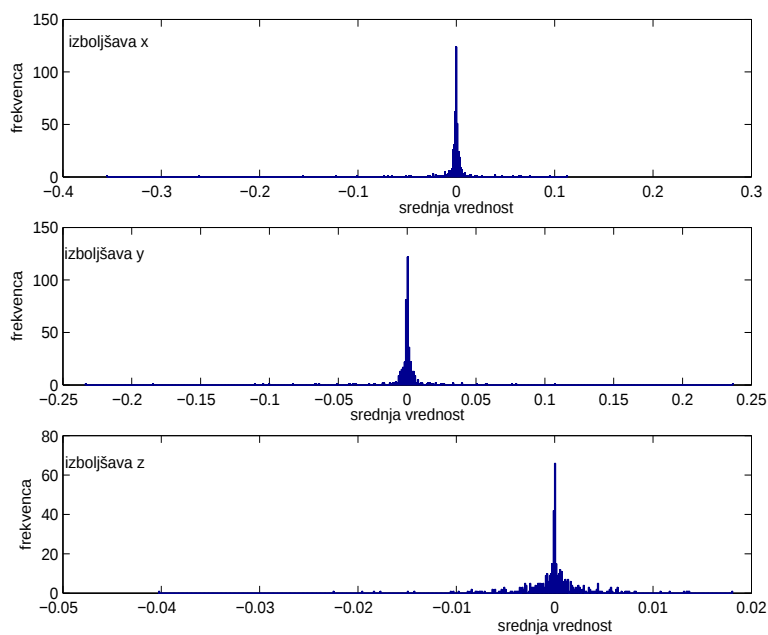
Drugi test skladnosti se izvede na osnovi normirane napake stanja sistema, enačba (3.9), kjer je razmerje verjetnosti podano v enačbi (3.10). Posamezni testi so bili izvedeni za različne vrednosti intenzitete skalarja šuma sistema σ_w , z namenom preveriti skladnost modela v domeni stanja sistema. V primeru vrednosti intenzitete šuma sistema $\sigma_w = 0.1$ je normirana napaka stanja sistema podana na sliki 5.33. Ob tveganju $\alpha = 5\%$ in prostostni stopnji 9, ki ustreza dolžini vektorja stanja sistema, znaša kritična vrednost testne statistike, ki je porazdeljena po porazdelitvi χ^2 , 16.919. V postopku filtriranja testna statistika preseže kritično vrednost za 26 točk od $N = 441$ meritev, kar predstavlja 6% vseh točk. Situacijo lahko opišemo kot sprejemljivo.

Testna statistika za preizkušanje skladnosti v domeni stanja sistema je bila izračunana po enačbi (3.9), kjer je a priori varianca izračunana na osnovi predhodnega filtriranja in znaša $\sigma_0^2 = 0.01$.

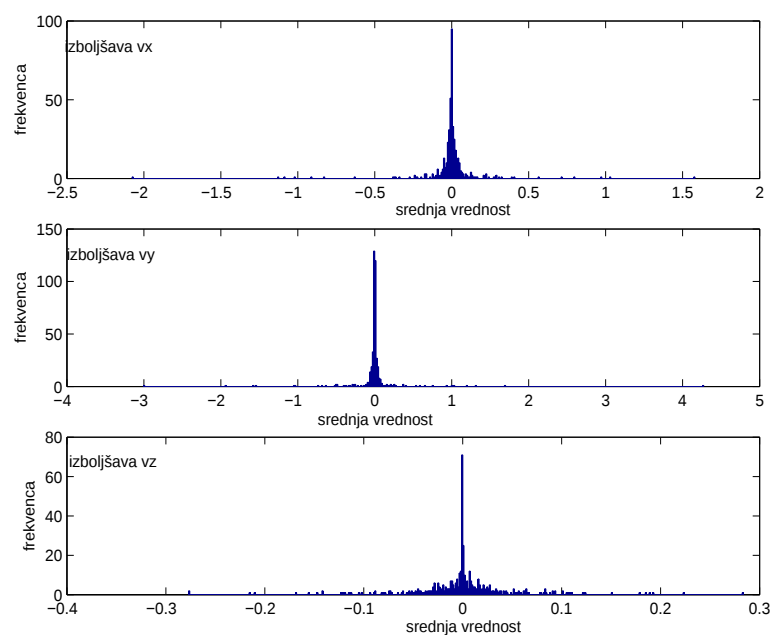
Na slikah 5.34, 5.35 in 5.36 so prikazani histogrami popravkov komponent stanja sistema.



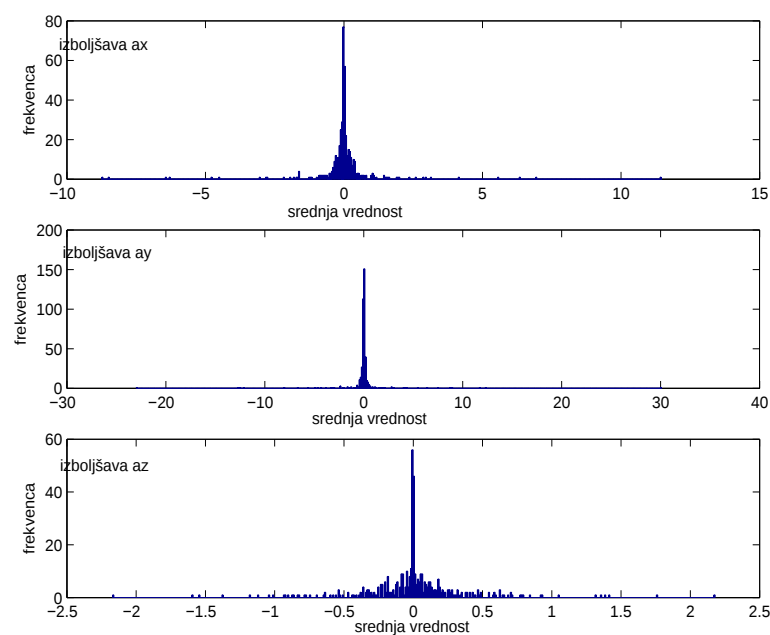
Slika 5.33: Normirana napaka stanja sistema
Figure 5.33: Normalized system state error



Slika 5.34: Histogram popravkov komponent stanja sistema - položajne komponente
Figure 5.34: System state incremental update histograms - position components



Slika 5.35: Histogram popravkov komponent stanja sistema - komponente hitrosti
Figure 5.35: System state incremental update histograms - velocity components



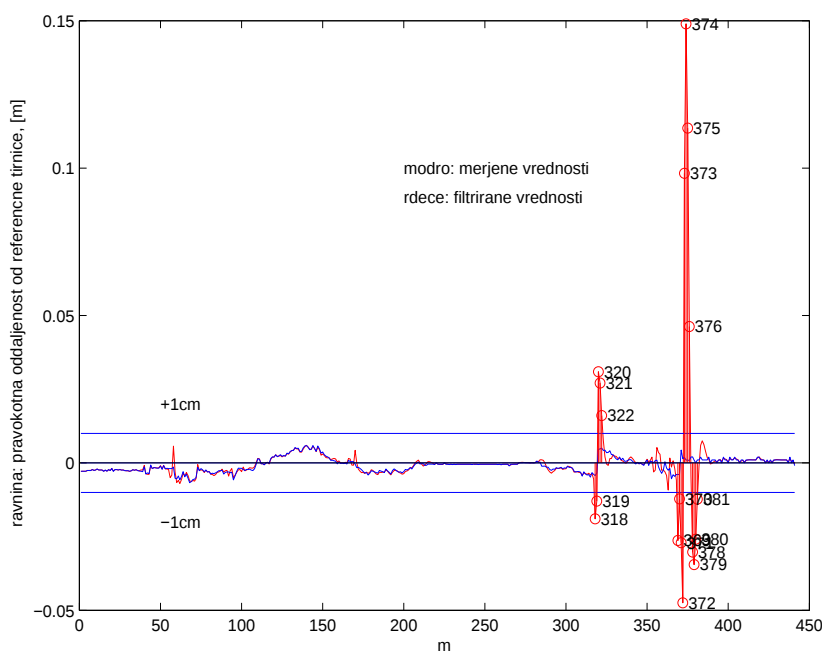
Slika 5.36: Histogram popravkov komponent stanja sistema - komponente pospeška
Figure 5.36: System state incremental update histograms - acceleration components

5.4 Referenčna tirnica kot parameter ocenjevanja

Proces uravnavanja razmerja med šumom sistema in šumom meritev, ki sta podana z matrikama $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$, je nujen za pridobitev dobrih rezultatov modela ter skladnosti med ocenami stanja sistema in dejanskimi napakami. Na osnovi simulacij različnih pogojev kinematičnega procesa (različne postavitve instrumenta, različne hitrosti vozička, različne vrednosti skalarja intenzitete šuma sistema) je bil razvit model, uporabljen za pridobitev ocene stanja sistema. Razen v primeru, ko so poznane prave vrednosti komponent stanja sistema, je zelo težko ovrednotiti, kako natančno in zanesljivo nam model KF izračuna vrednosti neznank, ki nas zanimajo. V ta namen je bila uporabljena referenčna tirnica, na osnovi katere so bili pridobljeni neodvisni referenčni parametri za oceno modela.

Na sliki 5.37 je grafično prikazana pravokotna oddaljenost merjenih in filtriranih/ocenjenih položajev od referenčne tirnice v horizontalni ravnini. Izrisan je tudi interval 1 cm , katerega vrednost je določena glede na pričakovano natančnost meritev, ki je odvisna predvsem od uporabljene funkcije *Leica Geosystems GeoCOM*, t.j.

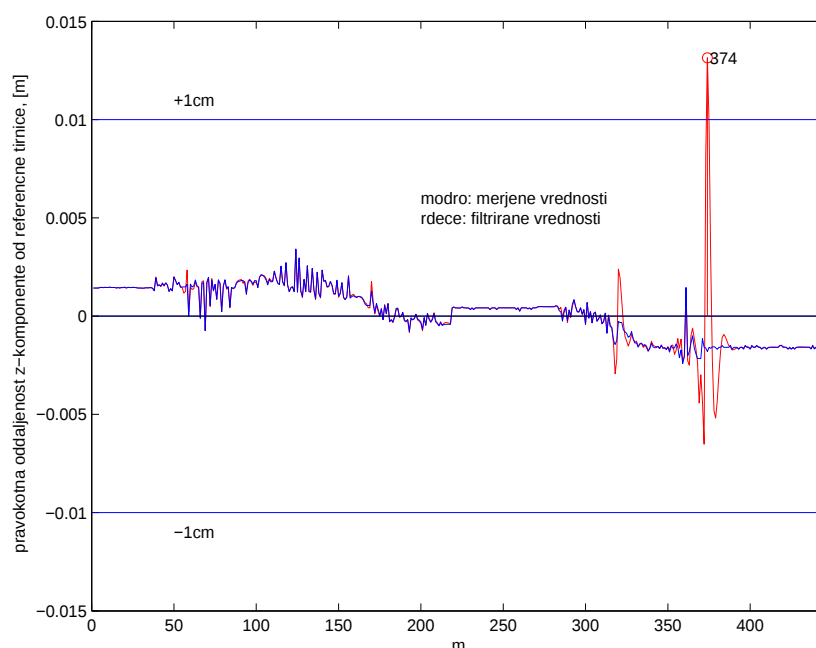
VB_TMC_QuickDist(OnlyAngle, dSlopeDistance), in hitrosti vozička. Vsi horizontalni položaji $(y, x)_k$, določeni na osnovi direktnih meritev, ležijo znotraj intervala 1 cm . V primeru filtriranih vrednosti pa nastopijo odstopanja.



Slika 5.37: Pravokotna oddaljenost filtriranih (rdeče) in merjenih (modra) vrednosti od referenčne tirnice v horizontalni ravnini in interval 1 cm

Figure 5.37: Perpendicular distance of filtered (red) and measured (blue) values from the reference trajectory in ground plane and 1 cm -bound

Na sliki 5.38 je podana pravokotna oddaljenost z -komponente od referenčne tirnice.



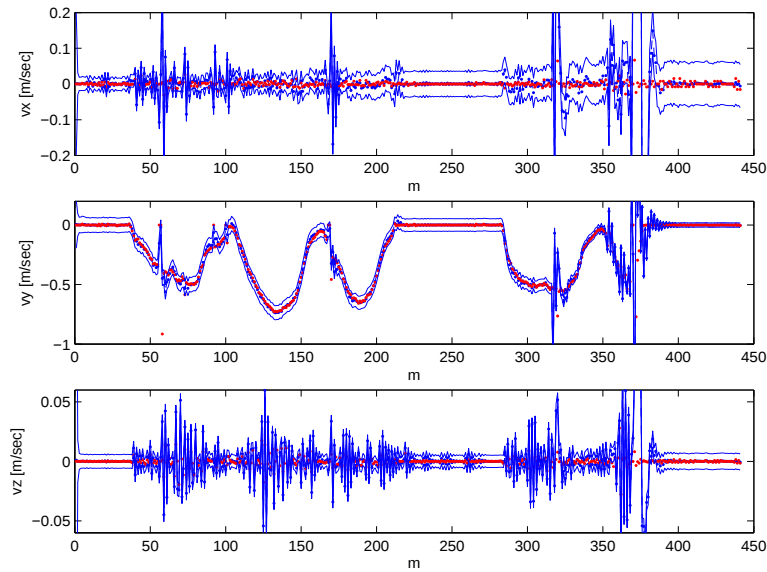
Slika 5.38: Pravokotna oddaljenost filtriranih (rdeče) in merjenih (modro) vrednosti z -komponente od referenčne tirnice in interval 1 cm

Figure 5.38: Perpendicular distance of filtered (red) and measured (blue) values of z -component from the reference trajectory and 1 cm -bound

Na osnovi podatkov referenčne tirnice in časovnega intervala med meritvami, $\Delta t = 0.125\text{ s}$, sta bila izračunana referenčna hitrost in pospešek v vseh treh dimenzijah. Na slikah 5.39 in 5.40 sta podana hitrost in pospešek za vse tri smeri, s pripadajočim intervalom 2σ .

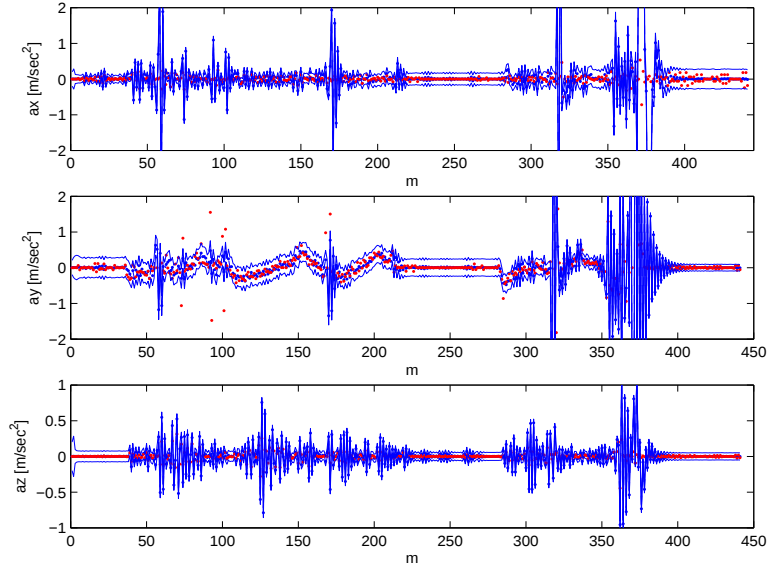
Na sliki 5.41 in sliki 5.42 so grafično podane napake hitrosti in pospeška v vseh treh smereh s pripadajočim intervalom σ in intervalom 2σ . Opazimo lahko veliko večje odstopanje napak hitrosti in napak pospeška kot v primeru položajev, podpoglavje 5.3.1, slike 5.25, 5.26 in 5.27. Razlog za to je v manjši opazovanosti komponent hitrosti in pospeška, ki jih ne merimo direktno, zato imamo na voljo manj informacij o teh komponentah stanja sistema. Hitrost in pospešek sta tako ocenjena le na osnovi modela. Prav tako je vzrok v nestabilnosti numeričnega odvajanja. Standardne deviacije hitrosti in pospeška v vseh treh dimenzijah so grafično prikazane na slikah 5.43 in 5.44.

Iz slik 5.43, 5.44 in 5.24 lahko opazimo različne velikostne rede standardnih deviacij za hitrost, pospešek in položajne komponente, kakor tudi med komponentami za različne smeri. Posledica različnih velikostnih redov standardnih deviacij je slabša vrednost pogojnega števila.



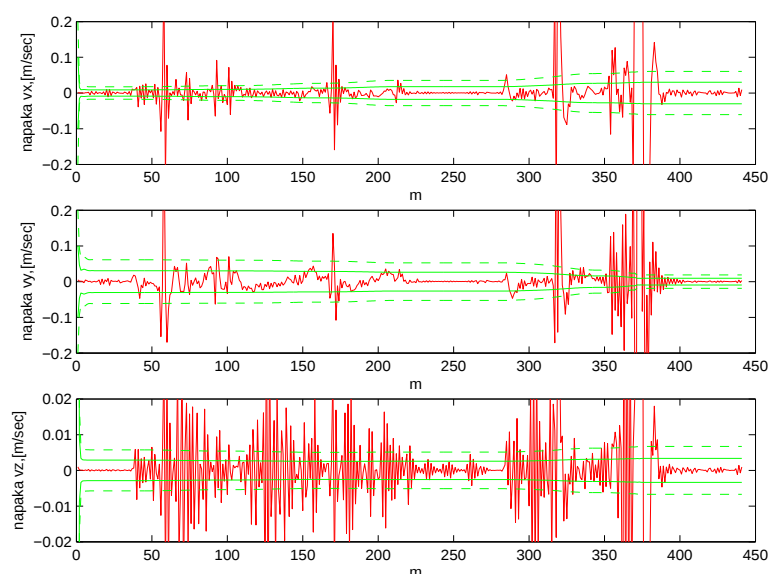
Slika 5.39: Hitrost v vseh treh smereh (modro-filtrirane vrednosti, rdeče-referenčne vrednosti) in interval 2σ (modro)

Figure 5.39: Velocity in all three components (blue-filtered, red-reference) and 2σ -bound (red)

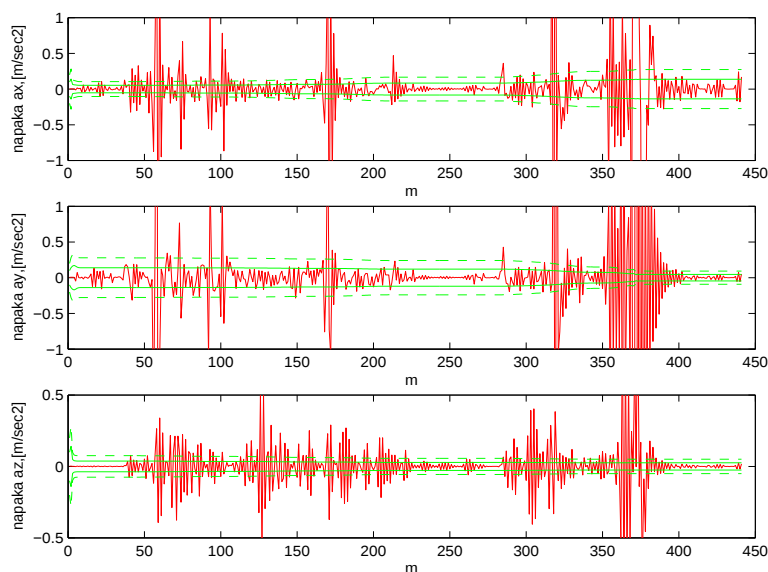


Slika 5.40: Pospešek v vseh treh smereh (modro-filtrirane vrednosti, rdeče-referenčne vrednosti) in interval 2σ (modro)

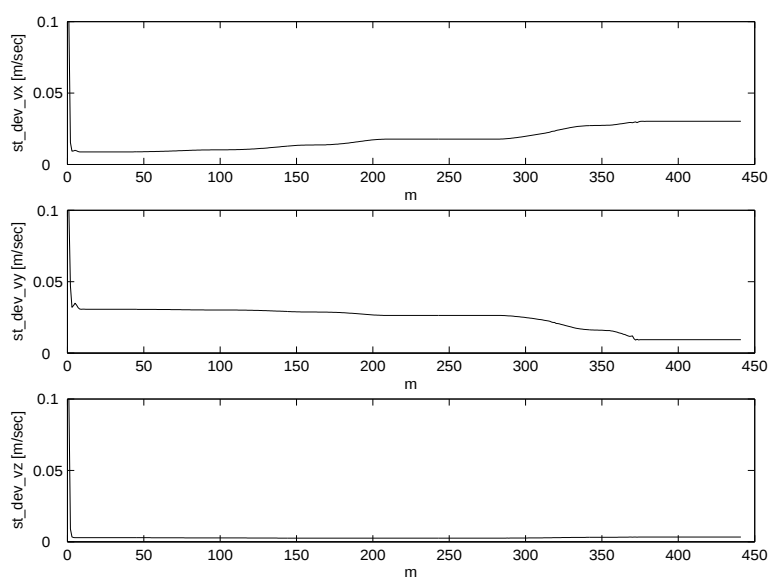
Figure 5.40: Acceleration in all three components (blue-filtered, red-reference) and 2σ -bound (red)



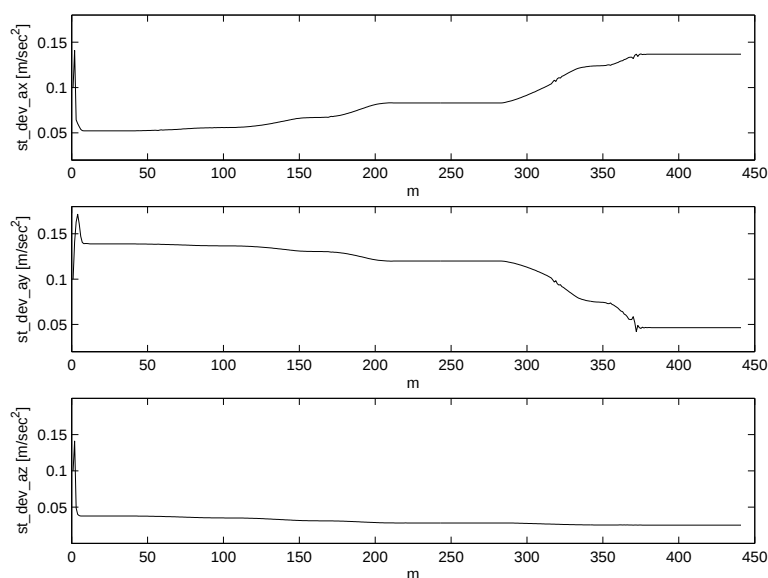
Slika 5.41: Napaka hitrosti v vseh treh smereh ter interval σ (zelena polna črta) in interval 2σ (zelena prekinjena črta)
Figure 5.41: Velocity error in all three components with σ -bound (green solid) and 2σ -bound (green dashed)



Slika 5.42: Napaka pospeška v vseh treh smereh ter interval σ (zelena polna črta) in interval 2σ (zelena prekinjena črta)
Figure 5.42: Acceleration error in all three components with σ -bound (green solid) and 2σ -bound (green dashed)



Slika 5.43: Standardne deviacije hitrosti v vseh treh smereh
Figure 5.43: Velocity standard deviations in all three dimensions



Slika 5.44: Standardne deviacije pospeška v vseh treh smereh
Figure 5.44: Acceleration standard deviations in all three dimensions

5.5 Povzetek rezultatov

Na osnovi testov vrednotenja DMWPP lahko zaključimo, da vsi testi - lastnosti matrike $\mathbf{P}_k^+$ in $\mathbf{K}$, skladnost v domeni meritev KF in domeni stanja sistema ter parametri vredno-

tenja na osnovi referenčne tirnice - pokažejo odstopanja bolj ali manj pri istih časovnih korakih meritev:

- sled matrike $\mathbf{P}_k^+$: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 370, slika 5.1;
- elementi matrike $\mathbf{K}$: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370, slike 5.8, 5.9 in 5.10;
- napaka položaja: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370, ter dodatno pri 57 in 170, slike 5.25, 5.26 in 5.27; za vse tri smeri nastopijo odstopanja za iste časovne korake meritev;
- skladnost v domeni meritev KF - preizkušanje normirane kvadratne izboljšave: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370, slika 5.28;
- izboljšave meritev KF in interval 1 cm: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370 ter dodatno manjša odstopanja pri 57 in 170, slika 5.29;
- skladnost v domeni stanja sistema: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370 ter dodatno pri 60 in 170, slika 5.33;
- pravokotna oddaljenost merjenih in filtriranih vrednosti horizontalnih položajev od referenčne tirnice: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 320 in 370, slika 5.37;
- pravokotna oddaljenost z -komponente od referenčne tirnice: odstopanja okrog časovnega koraka meritev 370, slika 5.38.

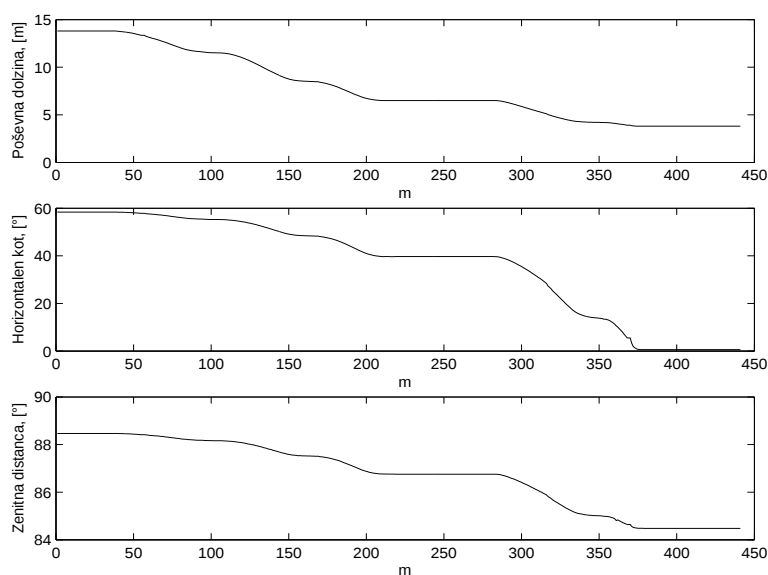
Če primerjamo napake hitrosti, pospeška in položaja, slike 5.25, 5.26 in 5.27 ter slike 5.41 in 5.42, lahko opazimo veliko večja odstopanja napak za hitrost in pospešek kot položajnih napak. Razlog za večji delež odstopanj napak hitrosti in napak pospeška je slabša zmogljivost modela v napovedovanju teh komponent. Ker so samo položajne komponente opazovane direktno, poskušamo najti razloge za odstopanja, ki nastopijo pri napakah položajev, slike 5.25, 5.26 in 5.27. Razlogi za odstopanja so lahko:

- v modelu ali
- v direktnih opazovanjih ali
- v gibanju vozička in reflektorja.

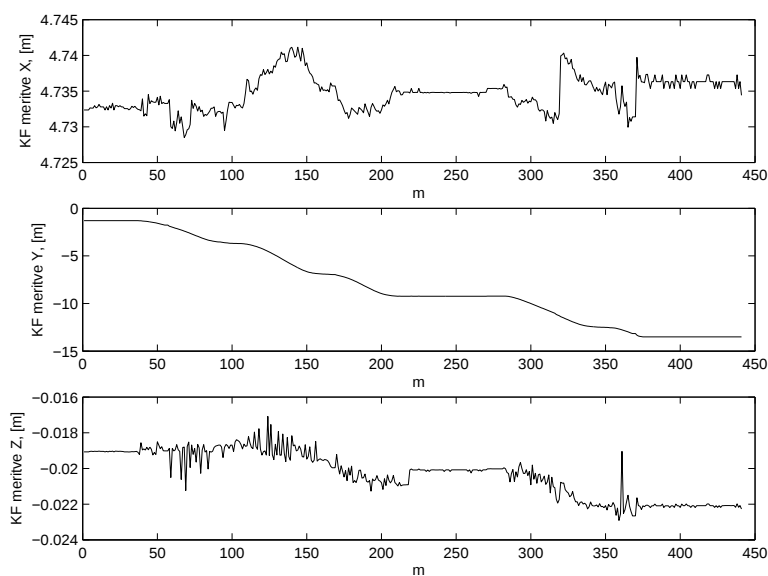
Razloge za odstopanja lahko določimo, če pogledamo vrednosti direktnih opazovanj - hz , d , zr , slika 5.45, vrednosti indirektnih opazovanj ali meritev KF - x , y , z , slika 5.46, in spremembe direktnih opazovanj med časovnim korakom meritev t_{i+1} in t_i , Dodatek B, slike B.1, B.2 in B.3.

Iz grafov direktnih opazovanj na sliki 5.45, lahko sklepamo, da v opazovanjih ni prisotnih grobih pogreškov.

Ob poznanem gibanju vozička, kjer so prisotni nenadni sunki in nagibanja reflektorja, še posebej v smeri x , t.j. v pravokotni smeri na tirnico v horizontalnem smislu, ter na osnovi sprememb direktnih, Dodatek B, in indirektnih opazovanj, slika 5.46, lahko zaključimo:



Slika 5.45: Direktna opazovanja
Figure 5.45: Direct measurements



Slika 5.46: Indirektna opazovanja ali meritve KF
Figure 5.46: Indirect or KF- measurements

- časovni korak meritev okrog 320: spremembe vseh treh komponent direktnih meritev, Dodatek B - slike B.1, B.2 in B.3, pokažejo odstopanja. Če vključimo informacije, pridobljene iz indirektnih meritev, slika 5.46, kjer je prisotna nenadna sprememba v smeri x , velikosti približno 1 cm, lahko zaključimo, da je razlog za

neskladnost DMWPP v neenakomernem gibanju vozička. Za časovni korak meritev okrog 320 lahko, glede na vrednosti sprememb meritev - razlike v dolžini dosežejo vrednost približno 5 cm, razlike v horizontalnem kotu približno $30'$ in razlike v zenitni razdalji približno $2'$, zaključimo, da so spremembe še sprejemljive glede na možne nagibe vozička/reflektorja in da instrument sledi reflektorju ter izvaja meritve.

- časovni korak meritev okrog 370: spremembe vseh treh komponent direktnih meritev, Dodatek B - slike B.1, B.2 in B.3, kažejo odstopanja. Če vključimo informacije, pridobljene iz indirektnih meritev na sliki 5.46, kjer nastopi nenadna sprememba v smeri x , prav tako velikosti približno 1 cm, lahko ponovno zaključimo, da je razlog za neskladnost DMWPP v neenakomernem gibanju vozička. Vrednosti sprememb meritev za časovni korak meritev okrog 370 so: razlike v dolžini znašajo približno 5 cm, razlike v horizontalnem kotu približno 2.2° in razlike v zenitni razdalji približno $5'$. Prav tako je interval nenadnih odstopanj širši. Posledično ne moremo z zanesljivostjo trditi, ali instrument ustrezno sledi reflektorju in so spremembe še sprejemljive ali da instrument, kljub visokim tehničnim zmogljivostim, ne more slediti tako hitrim spremembah v gibanju reflektorja, kot v tem primeru.
- časovni korak meritev okrog 170 in 60: za oba primera nastopi znatno odstopanje sprememb dolžine, še posebej za časovni korak meritev okrog 60, kjer znaša sprememba dolžine približno 1 dm. Za ta primera lahko zaključimo, da dolžina zaradi neenakomernih sprememb v gibanju vozička/reflektorja ni izmerjena dovolj natančno.

6 ZAKLJUČKI

V terestrični geodeziji smo priča hitremu razvoju geodetskih instrumentov kot posledici visoke zmogljivosti merskih senzorjev in programske opreme. S poznavanjem geodetskih metod in postopkov ter poznavanjem delovanja in zmogljivosti merskih senzorjev in programske opreme lahko bistveno razširimo področje uporabe sodobnih geodetskih instrumentov. Eno od glavnih področij je zajemanje kinematičnih procesov. Glede na to, da je pri zajemu kinematičnih procesov reflektor stalno v gibanju, ni mogoče izvajati nadštevilnih meritev, ki bi omogočale zmanjšanje ali odstranitev vplivov delovnega okolja, instrumentalnih pogreškov in negativnih vplivov matematičnega modela. V splošnem so zahteve pri kinematičnih meritvah veliko strožje. Izbira instrumenta je pri zajemanju kinematičnih procesov ključnega pomena. Prav tako je potrebno uporabiti primerne postopke vrednotenja, ki omogočajo določitev neznanih količin in oceno natančnosti le-teh. V kinematičnih merskih tehnikah imamo opravka s časovnimi analizami in tehnikami filtriranja.

Pri zajemu kinematičnega procesa, kjer je stanje sistema funkcija časa, s samo enim merskim sistemom, ki omogoča enolično določitev položaja, ni mogoče izvesti nadštevilnih meritev. V okviru doktorske disertacije je bil simulirani kinematični proces opazovan z elektronskim tahimetrom. Namesto klasičnih geodetskih metod so bile uporabljene druge metode za pridobitev neznanih količin. KF je metoda zaporedne izravnave v primeru kinematičnih sistemov ali časovnih vrst. Filter daje rezultate takoj, ko vstopi novo opazovanje v sistem. Postopek KF tako omogoča kontrolo opazovanj in stanja sistema, čeprav nimamo na voljo nadštevilnih meritev.

V realnih časovnih vrstah, kot je to naš primer kinematičnega procesa, je prisotnost šuma, ki vpliva na modeliranje in pridobivanje optimalnih rezultatov, pogosta. Odstranitev šuma iz časovne vrste je v smislu kriterija najmanjšega srednjega kvadrata napake optimalna s KF. KF je lahko uporabljen le, če poznamo enačbe procesa.

Prvi kriterij uspešnosti filtriranja je konvergenca sledi a posteriori kovariančne matrike stanja sistema ali vektorja neznank in konvergenca standardnih deviacij komponent stanja sistema. Vendar pa je ta kriterij lahko uporabljen le kot *indikator notranjega zaupanja* ali kriterij natančnosti položaja reflektorja. Da bi lahko ocenili tudi točnost filtrirane vrednosti, moramo uporabiti metodo, ki bo omogočala primerjavo s *pravo vrednostjo*, [Bogatin in sod. (2008)]. Optimalnost algoritma KF je povezana z a priori informacijami o šumu sistema in merskem šumu. Dobro a priori poznavanje je odvisno od vrste aplikacije in časovnega poteka procesa, kar pa je težko pridobiti. Ne zadostno a priori statistično poznavanje sistema lahko zmanjša točnost ocenjenih neznank ali vodi celo v divergenco rešitve filtra. Divergenca nastopi, ko vrednost kovariančne matrike $\mathbf{P}$, natančneje njenih diagonalnih elementov, postane nesprejemljivo majhna v primerjavi z dejansko oceno neznank [Sorenson (1970)]. Začetne informacije imajo namreč preko funkcij povezav neposreden vpliv na oceno glavnih komponent (v našem primeru položaj, hitrost in pospešek). Ne zadostne a priori informacije in sprejemljivo okolje (npr. hitre spremembe hitrosti) tako vplivajo na točnost in natančnost sistema za vrednotenje.

Klasična deformacijska analiza obravnava koordinate kot kvazi-statične in se osredotoči na spremembe koordinat med dvema merskima epohama. Preizkušanje značilnih sprememb je smiselno le za točke, za katere se domneva, da med izvedbo meritev mirujejo. Pri kinematičnih postopkih pa so spremembe lege točk dovoljene. Glavni namen kinematične analize je zajem in analiza sprememb lege točk, ne samo koordinatnih sprememb, ampak tudi sprememb hitrosti in pospeška v vsakem času.

Z razvojem geodetskih kinematičnih merskih sistemov - GPS in TPS - so se pojavili instrumenti različnih proizvajalcev, ki omogočajo samodejni in stalni zajem koordinat ter določanje položaja referenčnih točk v realnem času. Oba sistema sta uspešno uveljavljena v geodeziji za hitro določanje položaja. Sistema sta uporabna v krmiljenju delovnih strojev, nalogah gradnje in kmetijstvu, kjer omogočata avtomatizacijo tehničnih delovnih procesov.

6.1 Povzetek prispevka dela

Prispevek doktorske disertacije lahko zaokrožimo v dva osnovna prispevka: razvoj diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom za izbran geodetski terestrični kinematični proces in vrednotenje modela s parametri notranjega zaupanja, statističnimi testi in neodvisnim referenčnim okvirjem.

V postopku zagotovitve merskega okolja za kinematičen proces so bile izvedene naslednje naloge:

- Kot osnova je bila uporabljena horizontalna tirnica v Geodetskem laboratoriju Tehniške univerze München, katere geometrija je bila določena s sistemom teodolitov *ECDS 3*.
- Na tirnici je nameščen voziček, katerega gibanje je sproženo in nadzorovano z ustreznim programom (asist. dr. P. Wasmeier, TUM). Na vozičku je nameščen 360°-reflektor.
- Sodoben elektronski tahimeter *TCRA1201*, iz serije *Leica Geosystems TPS1200*, je bil postavljen na stabilnem stebru, katerega koordinate so bile določene v lokalnem koordinatnem sistemu laboratorija s programom *CAPLAN* z metodo notranjega ureza.
- Izveden je bil niz kinematičnih opazovanj z različnimi hitrostmi vozička v obeh smereh vzdolž tirnice in za različne postavitve instrumenta.
- Za zajem meritev je bil zapisan program v programskem jeziku *Visual Basic*. V prvem koraku je bila vzpostavljena dvostranska komunikacija. Za pridobivanje meritev v kinematičnem načinu je bila uporabljena posebna merska funkcija *Leica Geosystems GeoCOM*. Vse meritve so bile prenešene in shranjene na računalnik.

V obsegu razvoja modela vrednotenja so bile izpolnjene naslednje naloge:

- Vsi postopki vrednotenja so bili izvedeni z naknadno obdelavo s programom *Matlab*.
- Glede na ocenjeno gibanje vozička vzdolž tirnice je bila izvedena formulacija KF modela sistema in meritev. Razvit je bildiskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom - DMWPP.
- Meritve KF predstavljajo indirektne meritve položaja vozička. Za določitev natančnosti indirektnih meritev je bil uporabljen zakon o prenosu varianc in kovarianc.
- DMWPP je bil preizkušan za različne vhodne informacije in različne hitrosti vozička. Enak model je bil uporabljen za vse tri smeri.
- Vrednotenje DMWPP je bilo izvedeno z:
 - indikatorji notranjega zaupanja,
 - statističnimi preizkusi in
 - neodvisno referenčno tirnico.

Stabilnost in učinkovitost DMWPP se lahko bistveno spreminjata za različne primere vrednotenja stanja sistema. Stabilnost in učinkovitost DMWPP zato preučujemo tako na osnovi teoretičnih rezultatov kakor tudi simulacij. Učinkovitost filtra je bila ovrednotena za različne začetne pogoje, različne konfiguracije (stojiščna točka instrumenta) in šuma meritev. V računskem primeru doktorske disertacije je podan pomen definiranja začetnih parametrov filtra, s poudarkom na določitvi skalarja intenzitete šuma sistema.

Kot neodvisni postopek vrednotenja razvitega matematičnega modela je bil uporabljen kalibracijski sistem z znano tirnico in poznano hitrostjo gibanja vozička. Tak sistem zagotavlja neodvisno mero zanesljivosti. Še posebej v zahtevnih inženirskih nalogah so zahteve po natančnosti izjemno visoke. V doktorski disertaciji je vrednost 1 cm definirana kot kriterij za določanje prevelikih odstopanj. Vrednost je bila določena na osnovi številnih eksperimentalnih testov za različne funkcije *Leica Geosystems GeoCOM* in glede na nagibanje relektorja. Kalibracijski sistem ponuja možnost preizkušanja zmogljivosti instrumentov za kinematične meritve v odvisnosti od merskih vrednosti in hitrosti.

Ugotovitve dela lahko strnemo v naslednjih alinejah:

- Glede na različne teste na tirnici je pričakovana natančnost položaja reflektorja v največji meri odvisna od hitrosti vozička in uporabljene merske funkcije ali programa *Leica Geosystems*.
- Prednost takšnega referenčnega okvirja, t.j. referenčne tirnice, je istočasno vrednotenje modela in zmogljivosti instrumenta.
- V vsakem projektu je potrebno definirati natančnost meritev in izhodnih količin. Za vsak projekt posebej je potrebno preučiti prednosti in slabosti statičnih in kinematičnih meritev.

- Rezultati numeričnih testov so potrdili primernost modela vrednotenja za kinematične geodetske meritve, kjer nimamo na voljo nadštevilnih opazovanj.
- Model je primeren za obdelavo geodetskih kinematičnih meritev. V geodeziji je namreč vse pogostejši kinematični pristop k obravnavi položajev točk, tudi v nalogah deformacijske analize.
- Za vsak projekt je smiselno izvesti predhodne simulacije, če je mogoče, pa tudi predhodne meritve. S predhodnimi deli in raziskavami lahko ocenimo natančnost meritev in določimo najboljše vrednosti vhodnih količin KF.

6.2 Nadaljnje raziskave

Z raziskovanjem opisanega področja v doktorski disertaciji so se odprle številne zanimive poti, ki ponujajo ali celo zahtevajo nadaljnje delo in raziskovanje. Nekaj najpomembnejših področij je:

1. razviti nove modele vrednotenja, ki bodo temeljili na:

- nelinearnem filtriranju: V prihodnosti je potrebno preučiti nelinearne tehnike. Razviti je potrebno model lineariziranega in razširjenega filtra, kjer opazovanja dolžin in kotov vstopajo neposredno v algoritem filtriranja. Omenjena modela je potrebno primerjati z drugimi nelinearnimi filtri in metodami, kot sta *unscented filter* in sekvenčne naključne metode ocenjevanja položaja (angl. *particle filter*).
- adaptivnih tehnikah: Ena od glavnih zahtev KF je predpostavka o poznavanju a priori statistike šuma meritev in šuma sistema. Glede na to, da model ni vedno na voljo ali pa se spreminja s časom, je potrebno uporabiti adaptivno tehniko, kjer se model odzove na časovne spremembe sistema, brez a priori znanja o spremembah. Ena od možnosti razširitve KF, ki rešuje problem nezadostnih a priori informacij, je prilagoditev na osnovi učenja filtra o vrednostih izboljšav meritev, [Mohamed, Schwarz (1999)]. Tudi v primeru neskladnosti, kot posledici prisotnosti grobih pogreškov v opazovanjih, je potrebno preučiti možnosti spreminjanja skalarja intenzitete šuma sistema v realnem času. Raziskave je potrebno podkrepiti z numeričnimi testi.
- filtriranje s kvadratnim korenom (angl. *square root filtering*): V primeru velike vrednosti pogojnega števila matrike $\mathbf{P}_k^+$, kar pomeni, da je matrika $\mathbf{P}_k^+$ računalniškem pomenu skoraj singularna, je potrebno numerično preučiti možnosti filtriranja s kvadratnim korenom [Simon (2006)].
- istočasna uporaba modela drugega in tretjega reda: V večini primerov, kakor tudi v DMWPP, je enak model uporabljen za vse tri smeri. Lahko pa uporabimo za gibanje v vodoravni ravnini model tretjega reda in model drugega reda za navpično gibanje z manjšimi spremembami [Bar-Shalom in sod. (2001)]. Tudi v našem primeru so spremembe komponente z manjše in je smiselno preizkusiti kombinacijo modela drugega reda za komponento z in tretjega reda za komponenti x in y .

- filtri ravnovesnega stanja sistema (angl. steady-state filters): Za DMWPP je predpostavljen odsekoma konstanten pospešek. Za kinematične modele s šumom so izpeljani filtri ravnovesnega stanja sistema. Filtri ustrezajo modelom drugega in prvega reda in so poznani kot $\alpha - \beta$ in $\alpha - \beta - \gamma$ filtri. Rezultat filtra je izražen s t.i. indeksom vodenja tarče - razmerjem med nazanesljivostjo gibanja in mersko nezanesljivostjo [Bar-Shalom in sod. (2001)].
- upoštevanje višjih členov pri izračunu diskretne matrike prehoda stanja ali uporaba drugih postopkov.

2. vključitev drugih merskih sistemov:

- vključitev meritev, izvedenih z laserskim interferometrom: na enem krajišču tirnice v Geodetskem laboratoriju, TUM, je nameščen laserski interferometer, ki meri oddaljenost vozička od ničelne točke. Natančnost dolžin, merjenih z laserskim interferometrom, znaša $1 \mu\text{m}$. Meritve LI so lahko uporabljene za pridobitev boljšega referenčnega položaja reflektorja in posredno za izračun referenčne hitrosti in pospeška. Za ta namen je potrebno zagotoviti visoko stopnjo sinhronizacije med LI in TPS. Potrebno je upoštevati časovne zakasnitve in oceniti odzivni čas. Z meritvami LI lahko tako pridobimo še boljšo neodvisno oceno za vrednotenje razvitega KF modela. Prav tako bi meritve LI omogočale lažje in zanesljivejše določanje vzrokov neskladnosti v modelu. Za ta namen predlagam nekatere izboljšave pri gibanju vozička, t.j. zagotoviti bolj gladko gibanje vozička, brez nenadnih sunkov, kar bi zmanjšalo nagibanje reflektorja. Prav tako bi bilo potrebno izvesti nov pregled in izmero tirnice. Namreč, vse meritve so pokazale spremembo višinske komponente v vrednosti 3 mm vzdolž tirnice.
- nadštevilnost: Problem nadštevilnosti lahko rešimo tudi s kombinacijo različnih merskih sistemov. *Leica Geosystems* ponuja zelo zmogljive instrumente ter programsko opremo za kombiniranje sistemov TPS in GPS. V prihodnosti je potrebno izvesti model KF, v katerega bodo vključena tako TPS kot tudi GPS opazovanja. Kombinacija opazovanj pa ponuja tudi druge prednosti, t.j. vključitev enega tipa opazovanj v primeru izpada opazovanj drugega tipa. Tudi na tem področju so potrebne raziskave.
- nadštevilnost: Nadštevilnost opazovanj lahko dosežemo s sistemom za merjenje pospeškov in nagibov.

3. implementacija tehnik KF v geodetski deformacijski analizi v praksi

- obravnava geodetskih deformacijskih mrež kot kinematičnih 3D mrež in razvoj ustreznega KF modela, ki bo vključeval vse meritve in potrebne informacije za ohranitev natančnosti in zanesljivosti mreže ter bo omogočal istočasno določitev sprememb položajev, hitrosti in pospeška referenčnih točk objekta.

6.3 Zaključek

Kot inženirki mi največje zadovoljstvo doktorske disertacije daje občutek, da so stvari postale *žive*. Soočiti se s problemom, ga razumeti teoretično in ga tudi praktično izvesti dajejo močan občutek izpolnitve doseženega cilja.

Razvoj tehnologije je omogočil zajem statičnih ali kinematičnih objektov/točk v realnem času. Glede na potrebe in zahteve so na voljo različni merski sistemi (GPS in TPS), ki se razlikujejo glede natančnosti, frekvence meritev in načina prenosa podatkov. Izbira merskega sistema je odvisna od zmogljivosti le-tega in zahtev naloge, predvsem v smislu natančnosti meritev in rezultatov, kakor tudi v ekonomskem smislu.

Zaradi razlik v funkcionalnosti terestričnih instrumentov različnih proizvajalcev se soočamo z različnimi zmogljivostmi instrumentov. Kadar preučujemo zmogljivosti instrumentov je, poleg običajnih instrumentalnih pogreškov, pomembno upoštevati posebne lastnosti, ki se navezujejo na samodejno prepoznavanje in sledenje reflektorja. Določitev koordinat in njihove natančnosti je običajno odvisno od najpočasnejšega procesa. Zmogljivost elektronskega tahimetra s samodejnim sledenjem v primeru kinematičnih meritev določata največji kot rotacije in pospešek reflektorja.

Procesi avtomatizacije še vedno temeljijo na klasičnih geodetskih metodah kot so trilateracija in triangulacija. Nove so zahteve:

- visoka hitrost zajemanja meritev in numeričnih algoritmov,
- obdelava in vrednotenje v realnem času z najmanjšimi možnimi časovnimi zakasnitvami.

Učinkovitost matematičnega algoritma KF je postala zelo razširjena v elektrotehniki, medicini, itd., povsod v nalogah, kjer je potrebno ocenitni neznane količine, v katerih je prisoten šum, kot funkcijo časa in pogrešenih opazovanj. Tudi v geodeziji je algoritem KF že uspešno uporabljen, še posebej na področju globalnega določanja položaja. S hitrim razvojem terestričnih instrumentov v zadnjem desetletju pa so se pojavila področja in naloge tudi v terestrični geodeziji, kjer je lahko KF učinkovito uporabljen ali pa je celo nujen. V geodetskem inženirstvu je matematični algoritem KF primaren v nalogah, kjer ni mogoče zagotoviti nadštevilnih meritev, t.j. na področju navigacije in zveznega spremljanja premikajočih se objektov. Na osnovi izkušenj, pridobljenih v okviru doktorske disertacije, lahko zaključim, da je potrebno pri kinematičnih meritvah posvetiti posebno pozornost:

- zmogljivosti uporabljenega instrumenta za kinematične meritve:
Pri seriji instrumentov *TPS1100 Leica Geosystems* je bila ugotovljena visoka odvisnost natančnosti položaja od hitrosti reflektorja. Napaka v položaju lahko znaša tudi do nekaj *cm*, [Stempfhuber (2004)], odvisno od hitrosti, in je posledica časovne zakasnitve med meritvijo kotov in dolžine. Decembra 2005 je bila s serijo *TPS1200 Leica Geosystems* predstavljena izboljšana sinhronizacija, kjer ocenjena časovna zakasnitev med merjenjem kotov in dolžin znaša nekaj milisekund.

- primernosti modela za vrednotenje - v tem primeru modela KF:
Konvergenca sledi in standardnih deviacij so mere notranje zanesljivosti modela. Poleg statističnih testov predlagam zagotovitev neodvisnega testa, ki bo omogočil oceno primernosti matematičnega modela in bo predstavljal zunanjo mero zanesljivosti modela. Tak sistem omogoča tudi preizkušanje zmogljivosti instrumenta za kinematične meritve kot funkcije merjenih vrednosti in hitrosti gibanja.

Zaključim lahko, da ne obstaja splošni model vrednotenja s KF za obdelavo terestričnih kinematičnih meritev. Potrebno je razviti model vrednotenja s KF za vsak problem posebej in ga preizkusiti glede na predhodne informacije o merskem sistemu in glede na vhodne količine v modelu.

7 POVZETEK

V današnjem času zajem in analiza deformacij in premikov grajenih ali naravnih objektov pomeni interdisciplinarno delo strokovnjakov različnih področij. Pri zajemanju deformacij in premikov so geodetske meritve le del merskih postopkov. Z vidika instrumentarija moderni geodetski instrumenti omogočajo zajem kinematičnih procesov z visoko frekvenco meritev. Ta zmožnost geodetskih instrumentov daje geodetski deformacijski analizi glavno prednost, t.j. definiranje deformacij in premikov v prostoru in času. Z ustreznim deformacijskim modelom je stanje sistema (običajno so to prostorske koordinate referenčnih točk objekta) in pripadajočo statistično oceno mogoče pridobiti v realnem času ob upoštevanju časovnih zakasnitev. V primeru, ko objekt obravnavamo kot kinematičen, je le-ta v stalnem gibanju. Ob predpostavki, da je objekt opazovan z merskim sistemom, ki nam zagotavlja enolično določitev položaja (npr. TPS, GPS, laserski interferometer), za časovni trenutek ni mogoče izvajati nadštevilnih opazovanj. Klasična geodetska obdelava opazovanj z naknadno izravnavo nadštevilnih opazovanj ni primerna. Potrebno je uporabiti druge tehnike, kot so tehnike filtriranja in ki omogočajo oceno opazovanj v realnem času. Kalmanov filter predstavlja metodo napredne geodetske analize kinematičnih procesov. Filter zagotovi nadštevilno opazovanje z izračunom napovedane vrednosti meritev in kot tak omogoča pridobitev ocene natančnosti.

Zaradi hitrega razvoja merskih sistemov, tudi geodetskih, in potrebe po interdisciplinarni obravnavi deformacij in premikov je potrebno dobro poznati in razumeti geodetske merske sisteme in postopke. Zmogljivosti in natančnost GPS kinematičnih tehnik so v današnjem času dobro poznane. Na drugi strani pa tudi terestrična geodezija z modernimi instrumenti ponuja možnosti obravnave deformacij in premikov naravnih in grajenih objektov kot kinematičnih procesov. Vključitev časovne komponente neposredno v obdelavo terestričnih kinematičnih opazovanj zahteva dobro poznavanje zmogljivosti elektronskih tahimetrov in postopkov obdelave kinematičnih opazovanj.

V doktorski disertaciji je bil za namen preizkušanja zmogljivosti uporabljenega elektronskega tahimetra za kinematične meritve in z namenom preizkušanja razvitega modela Kalmanovega filtra simuliran kinematični proces. Kinematični proces je bil simuliran na poznani referenčni tirnici v geodetskem laboratoriju Tehniške univerze München. Referenčna tirnica, na kateri je nameščen voziček, je definirana v lokalnem koordinatnem sistemu laboratorija. Na voziček, ki se giblje vzdolž tirnice, je bil nameščen reflektor. Kinematične meritve so bile izvedene z elektronskim tahimetrom *Leica Geosystems*, ki omogoča samodejno prepoznavanje reflektorja in sledenje. Uporabljeni reflektor je prav tako od proizvajalca *Leica Geosystems*. Meritve - poševna dolžina, zenitna razdalja in horizontalna smer - so bile zajete s programom, zapisanim posebej za doktorsko disertacijo v programskem okolju *Visual Basic*, ob uporabi *Leica Geosystems GeoCOM* knjižnice.

Glavni namen doktorske disertacije je bil razviti primeren model vrednotenja za simulirani kinematični proces. Poudarek dela je pridobiti oceno horizontalnega položaja (y, x) in višinske komponente z reflektorja na premikajočem vozičku za vsak časovni korak meritev, t_k , z uporabo Kalmanovega filtra. Zaradi visoke frekvence meritev lahko predpostavimo,

da je gibanje reflektorja/vozička mogoče opisati s približno konstantnim pospeškom znotraj časovnega intervala Δt med registracijami meritev. Posledično je bil razvit diskretni kinematični model tretjega reda ali diskretni model Wienerjevega procesa s pospeškom, v kombinaciji z zakonom o prenosu varianc in kovarianc. Model ima tri parametre (položaj, hitrost in pospešek) za vsako smer. V vseh treh smereh je uporabljen enak model.

Ker je razviti model vrednotenja le aproksimacija dejanskega procesa, je potrebna natančna obravnava dobljenih rezultatov. Kontrola diskretnega modela Wienerjevega procesa s pospeškom je bila izvedena s kazalci notranjega zaupanja, statističnimi metodami in parametri ter s pomočjo poznane referenčne tirnice, ki omogoča preizkušanje na osnovi neodvisnih parametrov. Izhodne napake filtriranja so bile preizkušane za različne vhodne pogoje, različne konfiguracije in različne natančnosti meritev. V doktorski disertaciji je kot kriterij za določitev prevelikih odstopanj izbran centimetrski pas. Vrednost je bila določena na osnovi več predhodnih praktičnih testov za različne merske funkcije *Leica Geosystems GeoCOM* in glede na nagibanje reflektorja. Na osnovi testov vrednotenja modela lahko zaključimo, da so vsi testi - lastnosti a posteriori kovariančne matrike stanja sistema, skladnost v domeni meritev ali v domeni stanja sistema in parametri vrednotenja, pridobljeni na osnovi referenčne tirnice - pokazali značilna odstopanja bolj ali manj pri istih merskih korakih. Razlogi za odstopanja so v največji meri v neenakomernem gibanju vozička.

Rezultati numeričnih testov so potrdili primernost modela za vrednotenje geodetskih kinematičnih meritev, kjer ni na voljo nadštevilnih opazovanj. Lahko pa zaključimo, da splošnega modela Kalmanovega filtra za obdelavo terestričnih geodetskih kinematičnih opazovanj ni. Model vrednotenja moramo razviti za vsak problem posebej in ga preizkusiti glede na a priori informacije o merskem sistemu in glede na vhodne vrednosti modela.

8 SUMMARY

Nowadays measuring and analyzing the deformations and movements of man made or natural objects requires interdisciplinary work of experts from different disciplines. Part of the monitoring procedure is geodetic measurements. From the instruments point of view modern geodetic instruments allow capturing kinematic processes with high frequency of measurements. This property of geodetic instruments gives the geodetic deformation analysis its main advantage, i.e. definition of deformations and movements in space and also in time. With proper deformation model the system state (usually the space coordinates of the object's reference points) and its statistics are definable in real time, with time delays taken into account. When considering the object as kinematic, it is permanently in motion. Under presumption that the object is observed with the measurement system, which enables uniform definition of its position (i.e. TPS, GPS, laser interferometer), no redundant observations are available for the time point. The classical geodetic adjustment with post-processing adjustment with redundant observations can not be used. Other techniques, that enable estimation of observations in real time such as filtering, have to be used. Kalman filter represents a method of advanced geodetic analysis of kinematic processes. The filter ensures redundant data with computation of predicted values of measurements and as such ensures the accuracy estimation.

According to quick development of measurement systems, not just geodetic, and the need for interdisciplinary processing of deformations and movements, also contemporary geodetic measurement systems and procedures have to be known and understood in all details. The feasibility and accuracy of GPS kinematic techniques are nowadays quite well known. On the other hand, also terrestrial geodesy with modern instruments offers opportunities to process deformations and movements of natural or man made objects as kinematic. Incorporating a time component directly into the processing of terrestrial kinematic observations demands good knowledge about the capabilities of electronic tacheometer and also procedures of processing terrestrial kinematic observations.

In the PhD work special kinematic process was simulated for the purpose of testing capabilities of the used electronic tacheometer for kinematic measurements and for the purpose of testing the developed Kalman filter model. The kinematic process was simulated on the known reference trajectory in the Geodetic Laboratory of the Technical University Munich. The reference trajectory, on which the trolley is installed, is defined in known local coordinate system of the laboratory. The geodetic reflector was positioned on a moving trolley. The kinematic measurements were done using an electronic tacheometer by the manufacturer *Leica Geosystems*, which enables automatic target recognition and tracking. The used reflector was from the same manufacturer. The measurements - slope distances, zenith distances and horizontal angles - were captured with the program, written specially for PhD work in *Visual Basic* environment, using *Leica Geosystems GeoCOM* library.

The main purpose of the PhD work was to develop the appropriate evaluation model for a simulated kinematic process. The focus of our study was on estimating the horizontal position (y, x) and height component z of the reflector on the moving trolley for each registered

time-step t_k , using Kalman filter. Because of high frequency of measurements, we assume, that the movement of the reflector/trolley can be described as movement with approximately constant acceleration during each sampling period of length Δt . Consequently, the discrete third-order kinematic model or discrete Wiener process acceleration model, in combination with the law of propagation of variances and covariances, was developed. The model is three-dimensional per coordinate (position, velocity and acceleration). The same model was used for all three coordinates.

Because the developed evaluation model is an approximation of the process, it demands thorough evaluation of the results. The verification of discrete Wiener process acceleration model was controlled with the indicators of inner confidence, the statistical methods and parameters, and the known reference trajectory, which offers independent evaluation parameters. The error performance of the filter was evaluated for a variety of initialization conditions, different configurations (standpoint of the instrument), and for measuring noise variances. In our work the 1cm -bound was taken as a limit for defining too big deviations. This value was defined after several experimental tests for different *Leica Geosystems GeoCOM* functions and according to the reflector inclination. From the evaluation tests we concluded that all tests - properties of the a-posteriori covariance matrix of systems state, consistency in the domain of measurements or in the system state domain and evaluation parameters connected with the reference trajectory - show significant deviations more or less at the same measurement steps. The reasons for deviations lie mostly in discontinuous motion of the trolley.

The results of numerical tests confirmed the adequacy of the model for the evaluation of geodetic kinematic measurements, where no redundant observations are available. However, I can conclude that there is no universal Kalman filter model for processing terrestrial geodetic kinematic measurements. For every specific problem the evaluation model has to be developed separately and tested according to prior information about measurement system and according to the input values of the model.

VIRI

- [Bakker in sod. (1995)] Bakker, G., de Munck, J. C., Strang van Hees, G. L.. 1995. Radio Positioning at Sea - Geodetic Survey Computations, Least Squares Adjustment. Delft. Delf University of Technology, Faculty of Geodetic Engineering: 251 str.
- [Bar-Shalom in sod. (2001)] Bar-Shalom, Y., Li, X. R., Kirubarajan, T.. 2001. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. New York, John Wiley & Sons, Inc: 547 str.
- [Bayoud (2006)] Bayoud, F. A.. 2006. Leica's Pinpoint EDM Technology with Modified Signal Processing and Novel Optomechanical Features. Munich. V: XXIII FIG Congress. 8.-12.10.2006.
- [Blackman, Popoli (1999)] Blackman, S., Popoli, R.. 1999. Design and analysis of modern tracking systems. Norwood, Artech House: 1185 str.
- [Bogatin in sod. (2008)] Bogatin, S., Foppe, K., Wasmeier, P., Wunderlich, Th. A., Schäfer, T., Kogoj, D.. 2008. Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements. Measurement. Vol. 41, No. 5: 561-578.
- [Bronštejn, Semendjajev (1967)] Bronštejn, J. N., Semendjajev, K. A.. 1967. Matematični priročnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol. Prevedel A. Žabkar. Ljubljana, Življenje in tehnika: 699.
- [Brown, Hwang (1992)] Brown, R. G., Hwang, P. Y. C.. 1992. Introduction to random signals and applied Kalman filtering. Second edition. Electrical Engineering Department. Iowa State University. Rockwell International Corporation. New York, John Wiley & Sons, Inc: 512 str.
- [Busse, How (2002)] Busse, F. D., How, J. P.. 2002. Demonstration on Adaptive Extended Kalman Filter for Low Earth Orbit Formation Estimation Using CDGPS. Presented at the Institute of Navigation GPS Meeting. Portland OR.
- [Chui, Chen (1999)] Chui, C. K., Chen, G.. 1999. Kalman Filtering with Real-Time Applications. Third Edition. Berlin, Springer-Verlag: 227 str.
- [Eichhorn (2005)] Eichorn, A.. 2005. Ein Beitrag zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven Kalman-Filterung. Dissertation. München. Deutsche Geodätische Kommission: 124 str.
- [Gao in sod. (2005)] Gao, J., Webb, P., Gindy, N.. 2005. Research on an inertial positioning system for a parallel kinematic machine. Mechatronics. Vol. 15, No. 1: str. 1-22.
- [Gelb (1974)] Gelb, A.. 1974. Applied optimal estimation. Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology. THE M.I.T. PRESS: 374 str.

- [Golub, Van Loan (1991)] Golub, G. H., Van Loan, C. F.. 1991. Matrix Computations. Second edition. Baltimor, The John Hopkins university Press: 694 str.
- [Grewal, Andrews (2001)] Grewal, M., Andrews, A. P.. 2001. Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB. Second Edition. New York, John Wiley & Sons, Inc: 401 str.
- [Gülal (1997)] Gülal, E.. 1997. Geodätische Überwachung einer Talsperre - Eine Anwendung der KALMAN-Filtertechnik. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover: 151 str.
- [Haykin (1999)] Haykin, S.. 1999. Adaptive Filter Theory. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall: 989 str.
- [Heunecke, Kuhlmann (2002)] Heunecke, O., Kuhlmann, H.. 2001. Auswerteverfahren für Deformationsmessungen aus geodätischer Sicht. Interdisziplinäre Messaufgaben im Bauwesen, Schriftenreihe 43/2002. Deutscher Verein für Vermessungswesen, Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement. Vermessungswesen der Universität Hannover.
- [Kogoj (2002)] Kogoj, D.. 2002. Merjenje dolžin z elektronskimi razdaljemerji. Ljubljana. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za geodezijo: 157 str.
- [GeoCOM Reference Manual V 1.20] Leica TPS1200, GeoCOM Reference Manual, Version 1.20. 2005. Heerbrugg, Leica Geosystems: 191 str.
- [Tech. Data] Leica TPS1200 Series, Technical Data. 2005. Heerbrugg, Leica Geosystems: 16 str.
- [Leick (1990)] Leick, A.. 1990. GPS Satellite Surveying. New York, John Wiley & Sons, Inc.: 435 str.
- [Lippitsch, Lasseur (2006)] Lippitsch, A., Lasseur, C.. 2006. An alternative approach in metrological network deformation analysis employing kinematic and adaptive methods. 3rd IAG. V: 12th FIG Symposium. Baden.
- [Matlab Help] MATLAB, The Language of Technical Computing, Version 6.5, Release 13.
- [Mikhail, Gordon (1981)] Mikhail, E. M., Gordon, G.. 1981. Analysis and adjustment of survey measurements. New York, Van Nostrand Reinhold: 368 str.
- [Mohamed, Schwarz (1999)] Mohamed, A. H., Schwarz, K. P.. 1999. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. Journal of Geodesy, 73, str. 193-203.
- [Negenborn (2003)] Negenborn, R.. 2003. Robot localization and Kalman filters - On finding your position in a noisy world. Thesis number: INF/SCR-03-09. Utrecht University.
http://www.negenborn.net/kal_loc/thesis.pdf (10.6.2010).

- [Pelzer (1987)] Pelzer, H.. 1987. Deformationsuntersuchungen auf der Basis kinematischer Bewegungsmodelle. Allgemeine Vermessungsnachrichten. Karlsruhe, Herbert Wichmann Verlag GmbH, 94, 2.
- [Ribeiro (2004)] Ribeiro, M. I.. 2004. Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties. Institute for System and Robotics, Lisbona, Portugal, 2004.
http : //scholar.google.si/scholar?q = Kalman + and + Extended + Kalman + Filters : + + + + Concept, + Derivation + and + Properties.&hl = sl&as_sdt = 0&as_vis = 1&oi = scholart (10.6.2010).
- [Ristic in sod. (2004)] Ristic, B., Arulampalam, S., Gordon N.. 2004. Beyond Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications. Boston, Artech House: 299 str.
- [Schölderle (2006)] Schölderle, F.. 2006. Untersuchung der Zeitsynchronisation zielverfolgender Tachymeter zum Aufbau einer Prüfeinrichtung. Diploma. Munich, Technical University Munich.
- [Simon (2006)] Simon, D.. 2006. Optimal state estimation: Kalman, H_∞ and nonlinear approaches. New York, John Wiley & Sons, Inc: 554 str.
- [Sorenson (1970)] Sorenson, H. W.. 1970. Least-squares estimation: from Gauss to Kalman. Copyright (c) 2004 IEEE. Reprinted from IEEE Spectrum, Vol.7, str. 63-68.
http : //www.cs.unc.edu/ welch/kalman/media/pdf/Sorenson1970.pdf (10.6.2010).
- [Stengel (1993)] Stengel, R. F.. 1993. Optimal Control and Estimation. New Jersey. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University. New York, Dover Publication, INC: 639 str.
- [Stempfhuber (2004)] Stempfhuber, W. V.. 2004. Ein integritätswahrendes Messsystem für kinematische Anwendungen. Dissertation. München, Technische Universität München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen.
- [Valh in sod. (2008)] Valh, M. M., Marjetič, A., Ježovnik, V., Kogoj, D.. 2008. Avtomatski elektronski tahimetri ali kam vodi razvoj TPS sistemov. Geodetski vestnik, 52,3, str. 488-500.
- [Welch, Bishop (2004)] Welch, G., Bishop, G.. 2004. An Introduction to the Kalman Filter. Updated: 5.4.20042004.
http : //www.cs.unc.edu/ welch/media/pdf/kalman_intro.pdf (10.6.2010).
- [Welsch (2002)] Welsch, W. M.. 2002. Zur Entwicklung geodätischer Überwachungsmessungen - Deformationsmodelle gestern, heute und morgen. Geodäsie im Wandel - Einhundertfünfzig Jahre Geodätisches Institut. Schriftenreihe des Geodätischen Instituts. Dresden, Technische Universität Dresden.

- [Welsch, Heunecke (2001)] Welsch, W. M., Heunecke, O.. 2001. Models and terminology for the analysis of geodetic monitoring observations. Official report of the ad-hoc committee of FIG working group 6.1. Published by The International Federation of Surveyors (FIG). Frederiksberg, Denmark.
- [Welsch in sod. (2000)] Welsch, W. M., Heunecke, O., Kuhlmann, H.. 2000. Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. Handbuch Ingenieurgeodäsie. Heidelberg, Herbert Wichmann Verlag.
- [GeodeticLaboratory] [http : //www.geo.bv.tum.de/index.php?option = com_content&task = view&id = 398&Itemid = 412](http://www.geo.bv.tum.de/index.php?option=com_content&task=view&id=398&Itemid=412) (10.6.2010).
- [Predstavitev signalov] [http : //www.aktivno.si/ai/sl/644 – predstavitev – signalov](http://www.aktivno.si/ai/sl/644-predstavitev-signalov) (10.6.2010).

PRILOGE

A Rezultati programa CAPLAN

Različica programa

Programmversion : CAPLAN Version 07-Apr-2009
Berechnung vom : 14-Aug-2009, Uhrzeit 09:54

Odpiranje projekta

★ PROJEKT ÖFFNEN ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Projektdatei : *C : \Cremer\USR\TUM_Kellerpunkte.CP*

Punkte und Linien: *C : \Cremer\USR\TUM_Kellerpunkte.L*

D G M :

Geodätisches Netz:

Polarmessungen : *C : \Cremer\USR\TUM_Kellerpunkte.7*

GPS-Basisvektoren:

Achsen :

Profile :

3D-Objekte :

Hintergrundbild :

Seznam izključenih točk

★ LISTE DER GELÖSCHTEN PUNKTE ★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Punktbezeichnung	Rechtswert	Hochwert	Höhe	Bemerkung
------------------	------------	----------	------	-----------

StandPunkt_S	−14.640	1.116	−0.388	
--------------	---------	-------	--------	--

Seznam referenčnih točk in meritev

StandPunkt_S - stojišče instrumenta

Strecke - Dolžina

Richtung - Horizontalna smer

Delta-H - Višinska razlika

★ BERECHNUNG VON EINSCHALTPUNKTEN ★★★★★★★★★★★★

Neupunkt:	StandPunkt_S	-14.640	1.116	-0.388
Standardabweichungen	sx...sz	0.002	0.003	0.001
Anschluss	M18	-12.503	5.046	-0.107
Anschluss	M9	-9.994	5.054	0.596
Anschluss	L25	-5.831	-6.131	0.735
Anschluss	L26	-10.201	-6.127	0.734
Anschluss	L27	-14.211	-6.128	0.741

Von Punkt	Nach Punkt	Element	Gemessen	Reduziert	Gerechnet	Diff.
Standpunkt_S	M18	Strecke	4.479		4.474	0.006
Standpunkt_S	M9	Strecke	6.096		6.091	0.005
Standpunkt_S	L25	Strecke	11.413		11.407	0.006
Standpunkt_S	L26	Strecke	8.507		8.494	0.013
Standpunkt_S	L27	Strecke	7.258		7.257	0.001
Standpunkt_S	M18	Richtung	13.4470		31.7164	-0.001
Standpunkt_S	M9	Richtung	36.9600		55.2378	-0.002
Standpunkt_S	L25	Richtung	125.5730		143.8234	0.001
Standpunkt_S	L26	Richtung	146.7460		164.9941	0.001
Standpunkt_S	L27	Richtung	178.0050		196.2280	0.004
Standpunkt_S	L18	Delta-H	0.280		0.281	-0.001
Standpunkt_S	L9	Delta-H	0.984		0.985	-0.001
Standpunkt_S	L25	Delta-H	1.123		1.123	0.000
Standpunkt_S	L26	Delta-H	1.124		1.122	0.002
Standpunkt_S	L27	Delta-H	1.129		1.129	0.000

Rezultati izravnave

ZUSAMMENSTELLUNG DER NEU BERECHNETEN PUNKTE

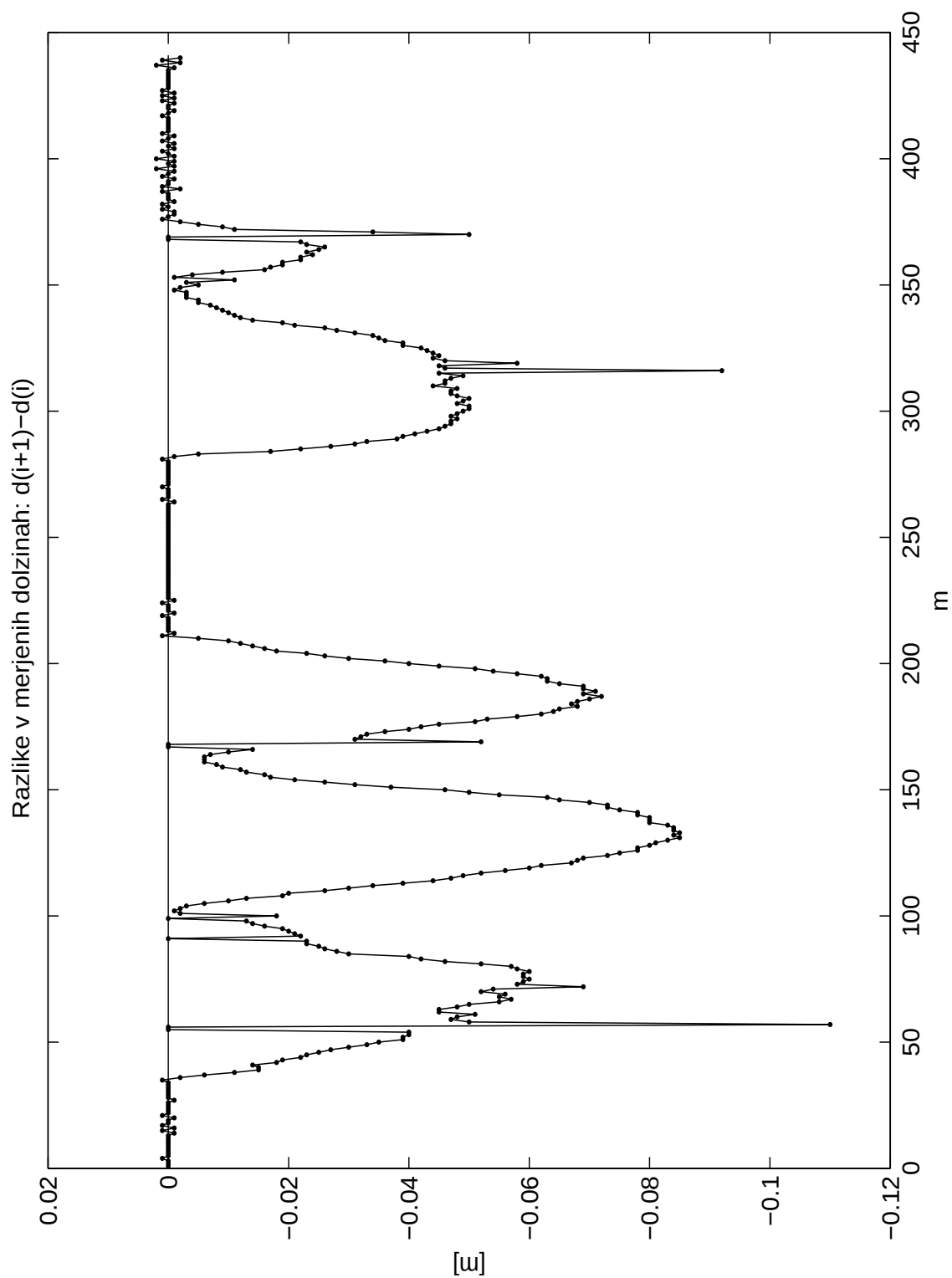
Alle berechneten Neupunkte sind nach Namen sortiert aufgelistet. Entspricht der Neupunkt einem bereits vorhandenen (Anschluss-)punkt, werden die Abweichungen (Klaffen) ausgewiesen. Die vorhandenen Anschluss-Koordinaten bleiben unverändert; eine Ergänzung in Lage oder Höhe ist jedoch möglich.

Punktbezeichnung	Rechtswert	Hochwert	Höhe	Standpkt/Mittel	Einpassung L/H
Standpunkt_S	-14.640	1.116	-0.388	Ausgeglichen	

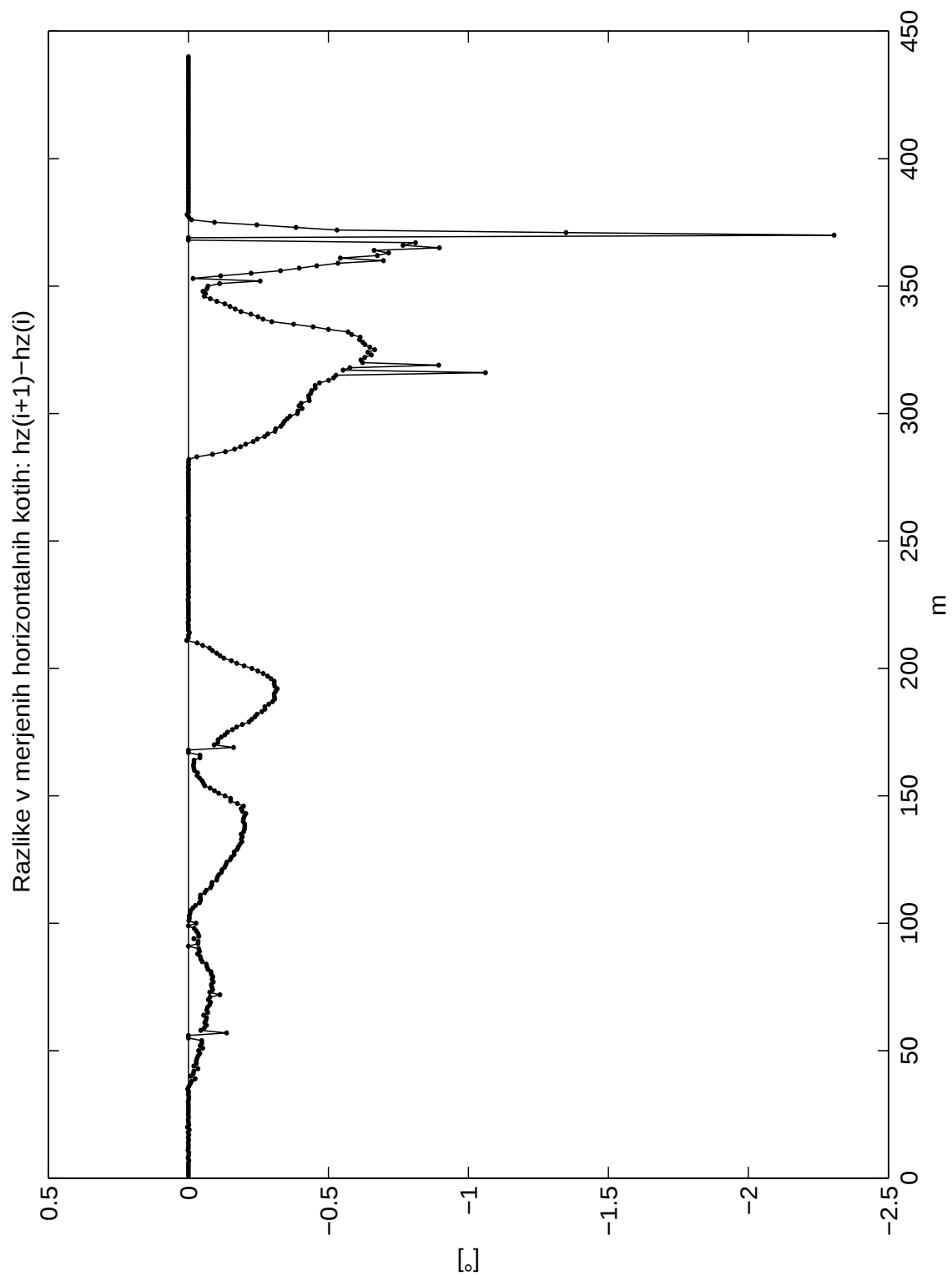
★ ABRISS ★★★★★★★★★★★★

Standpunkt	StandPunkt_S: Orientierung mit Std.abw. 18.24977 + −0.00778 (gon)					
Zielpunktname	Richtung	gem. / ger.	orientiert	Differenz	QA (mm)	Anderes Ziel?
M18	13.44700	31.71642	31.69677	0.01965	1	
M9	36.96000	55.23779	55.20977	0.02802	3	
L25	125.57300	143.82344	143.82277	0.00067	0	
L26	146.74600	164.99414	164.99577	-0.00163	0	
L27	178.00500	196.22798	196.25477	-0.02679	3	

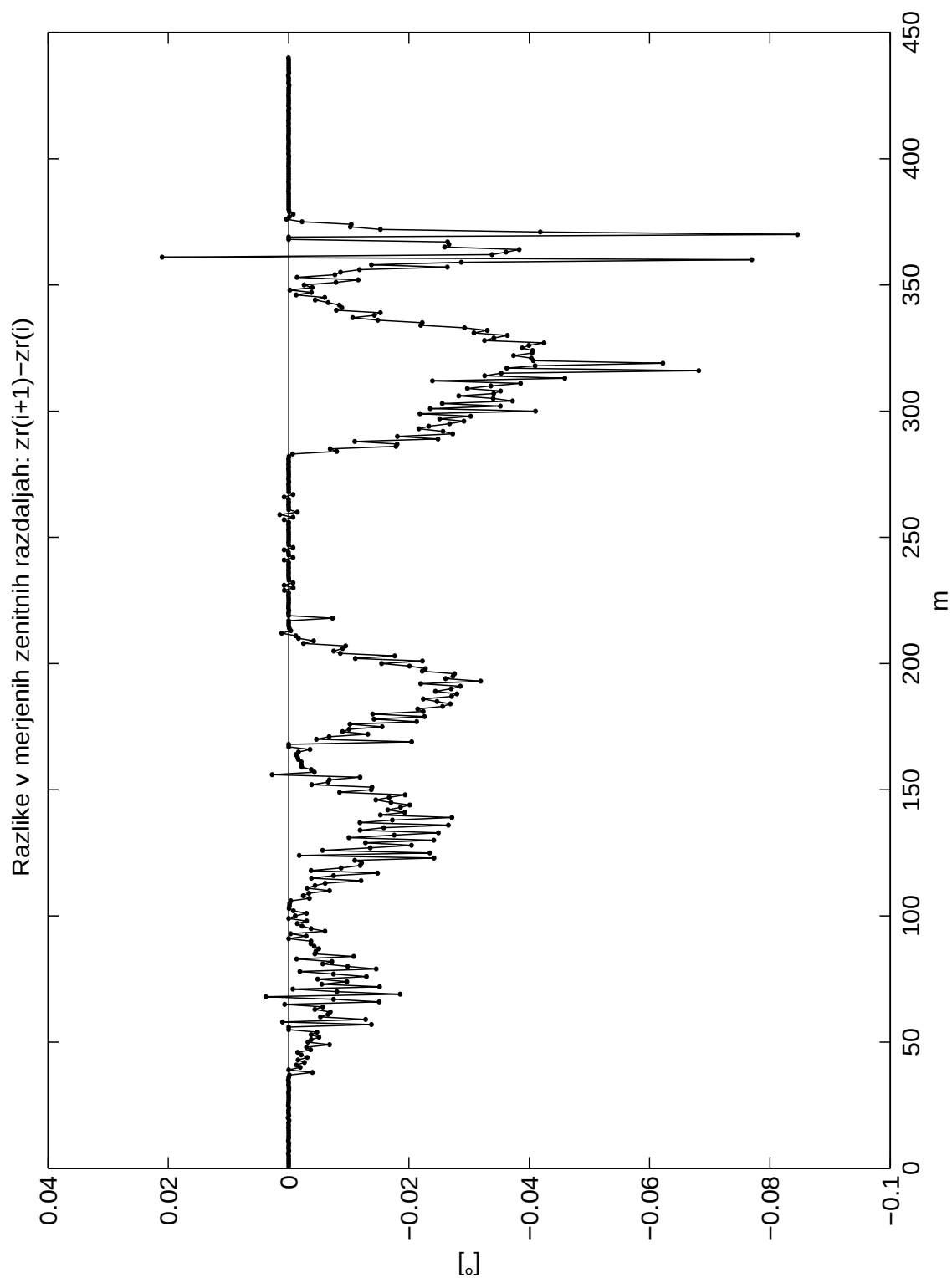
B Razlike v meritvah



Slika B.1: Razlike v merjenih dolžinah, $d(i+1)-d(i)$



Slika B.2: Razlike v opazovanih horizontalnih smereh, $hz(i+1)-hz(i)$



Slika B.3: Razlike v opazovanih zenitnih razdaljah, $zr(i+1) - zr(i)$