PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 116–124

Janez Strnad:

TRZAJ – SPREMEMBA POSPEŠKA V ČASU

Ključne besede: fizika, mehanika, kinematika, spreminjanje pospeška, premo gibanje, ravninsko gibanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Strnad.pdf

TRZAJ – SPREMEMBA POSPEŠKA V ČASU

Študenti pri nas učitelja ne zasipajo z vprašnji, zato jih učitelj – na splošno – spodbuja, naj sprašujejo. Pred časom me je po takšnem spodbujanju presenetilo vprašanje: "Zakaj v Newtonovem zakonu ni tretjega odvoda koordinate po času?" Pogovor je razkril, da je študent primerjal zakon gibanja z zakonom o temperaturnem raztezanju ali kakim drugim zakonom, ki vsebuje snovno lastnost. Relativno spremembo prostornine telesa postavimo sorazmerno spremembi temperature, sorazmernostni koeficient je prostorninski raztezek. Zveza velja, če je sprememba temperature dovolj majhna. Pri večji temperaturni spremembi dodamo člen, sorazmeren s kvadratom temperaturne spremembe, pri še večji člen s kubom temperaturne spremembe . . .

Zakon o temperaturnem raztezanju.

Prostornina telesa je odvisna od temperature: $V = V(T)$. Funkcijo razvijemo okoli temperature T_0 v *Taylorjevo vrsto*:

$$V(T) = V(T_0) + (dV/dT)_0\Delta T + \tfrac{1}{2}(d^2V/dT^2)_0(\Delta T)^2 + \tfrac{1}{6}(d^3V/dT^3)_0(\Delta T)^3 + ...$$

Pri tem je $T - T_0 = \Delta T$, $V - V_0 = \Delta V$ indeks 0 pa nakaže, da vzamemo količino pri temperaturi T_0, na primer $V_0 = V(T_0)$. Iz tega izhaja zakon o temperaturnem raztezanju

$$\Delta V/V_0 = \beta\Delta T + \beta'(\Delta T)^2 + \beta''(\Delta T)^3 + ...,$$

kjer je $\beta = (dV/VdT)_0$, $\beta' = (d^2V/2VdT^2)_0$, $\beta'' = (d^3V/6VdT^3)_0$ ... Pri dovolj majhni temperaturni razliki se zadovoljimo s prvim členom, s konstantnim prostorninskim raztezkom β.

Zaradi lažjega pripovedovanja mislimo na točkasto telo, ki se giblje v eni razsežnosti, denimo, po osi x. Po študentovi zamisli naj bi silo drugega telesa na to telo izrazili kot vsoto členov: koeficient krat koordinata, koeficient krat odvod koordinate po času, to je hitrost, koeficient krat drugi odvod koordinate po času, to je pospešek, ... Sila se ne sme spremeniti, če prestavimo izhodišče po osi x; zato mora biti koeficient prvega člena enak nič. Sila se ne sme spremeniti, če opazujemo telo iz vozečega vlaka; zato mora biti koeficient drugega člena enak nič. (Aristotel je z današnjega vidika predvidel zakon gibanja, po katerem bi bila sila sorazmerna s hitrostjo. Ni vedel za ugotovitev, do katere se je pozneje dokopal Galileo Galilei.) Tretji koeficient je masa in zakon gibanja je Newtonov zakon: sila je masa krat pospešek. Študenta je zanimal razlog, zaradi katerega so koeficienti četrtega člena in vseh nadaljnjih členov enaki nič. Opozoril sem ga na to, da je pri razmišljanju zavil na napačno pot. Newtonov zakon ni nekakšna Taylorjeva vrsta, ampak tak, kot je, zakon narave, ki ga podpirajo opazovanja in merjenja, če je hitrost teles dovolj majhna in so telesa dovolj velika.

Newtonov zakon po študentovo?

Koordinata gibajočega se telesa je odvisna od časa: $x = x(t)$. Funkcijo razvijemo okoli vrednosti t_0 v Taylorjevo vrsto:

$$x(t) = x(t_0 + \Delta t) =$$
$$= x(t_0) + (dx/dt)_0 \Delta t + \tfrac{1}{2}(d^2x/dt^2)_0(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}(d^3x/dt^3)_0(\Delta t)^3 + \ldots .$$

Indeks 0 nakaže, da vzamemo količino pri času $t = t_0$. Prestavimo ga od odvodov k časovnim razlikam, pa dobimo za silo F:

$$F \stackrel{?}{=} Kx + K'v + ma + K''b + \ldots,$$

če so K, K', K'', ... konstantni koeficienti. Navedli smo razloga, zaradi katerih je $K = 0$ in $K' = 0$. Zakaj pa naj bi bil nič tudi koeficient K''?

Indeksa seveda ne smemo tako prestaviti in tu je napaka! Ni osnove za misel, da bi upoštevali v zakonu gibanja tretji odvod koordinate po času ali kateri koli višji odvod.

Odslej sem se vedno, ko sem zasledil kako misel o spreminjanju pospeška s časom, spomnil tega študenta. Ali niso najbolj nerodna vprašanja najboljša? O spreminjanju pospeška več razpravljajo, kakor bi pričakovali. A razprava teče v okviru veljavnosti Newtonovega zakona, nihče ne pride na misel, da bi mu dodal člen te vrste.

Hitrost točkastega telesa meri spreminjanje koordinate s časom in pospešek spreminjanje hitrosti s časom. V nadaljnjem koraku vpeljejo količino, ki meri spreminjanje pospeška s časom. Imenujejo jo *trzaj* (angleško jerk, nemško Ruck). Po *Slovarju slovenskega knjižnega jezika* je trzaj sunkovit premik zaradi nehotenega krčenja mišic in s tem kar dober prevod angleškega in nemškega izraza. Upoštevati moramo, da je beseda "sunek" zasedena na primer s produktom sile in časa, če je sila konstantna.

Menda je količino prvi vpeljal francoski geometer A.Transon leta 1845. Pozneje so o njej precej razpravljali drugi, ne da bi omenili, zakaj je koristna. Leta 1928 je nemški inženir P.Melchior menil, da jo je smiselno vpeljati zaradi tega, ker med gibanjem čutimo spreminjanje pospeška. Po izkušnjah pri telovadbi in vožnji z železnico je določil, kolikšen najmanjši trzaj zaznamo in kolikšen zbudi neugodnost ali nam celo škoduje. Človek naj bi brez škode prenesel še trzaj $2 \cdot 10^4$ m/s^3. Sledila je razprava o tem, ali zares občutimo trzaj ali ne. Nekateri so predlagali, naj imenujemo trzaj le nenadno spremembo pospeška. Ostalo pa je pri starem. Ni malo učbenikov mehanike, ki obravnavajo trzaj. V posameznih knjigah o merilnikih najdemo tudi opise merilnikov trzaja. V redno poučevanje fizike trzaj zagotovo ne sodi. Morda pa bo kratek zapis o njem pritegnil katerega od Presekovih bralcev.

Začnimo s tem, da nadaljujemo po običajni poti, po kateri lahko vpeljemo hitrost in pospešek točkastega telesa pri *premem gibanju*. Vzemimo, da se telo giblje po osi x. Koordinata točkastega telesa, ki miruje, se ne spreminja s časom. Pri najpreprostejši spremembi koordinata s časom enakomerno narašča. To je *enakomerno premo gibanje*, pri katerem lahko vzamemo, da je koordinata sorazmerna s časom in sorazmernostni koeficient hitrost v (slika 1a):

$$x = vt, \qquad v = x/t.$$

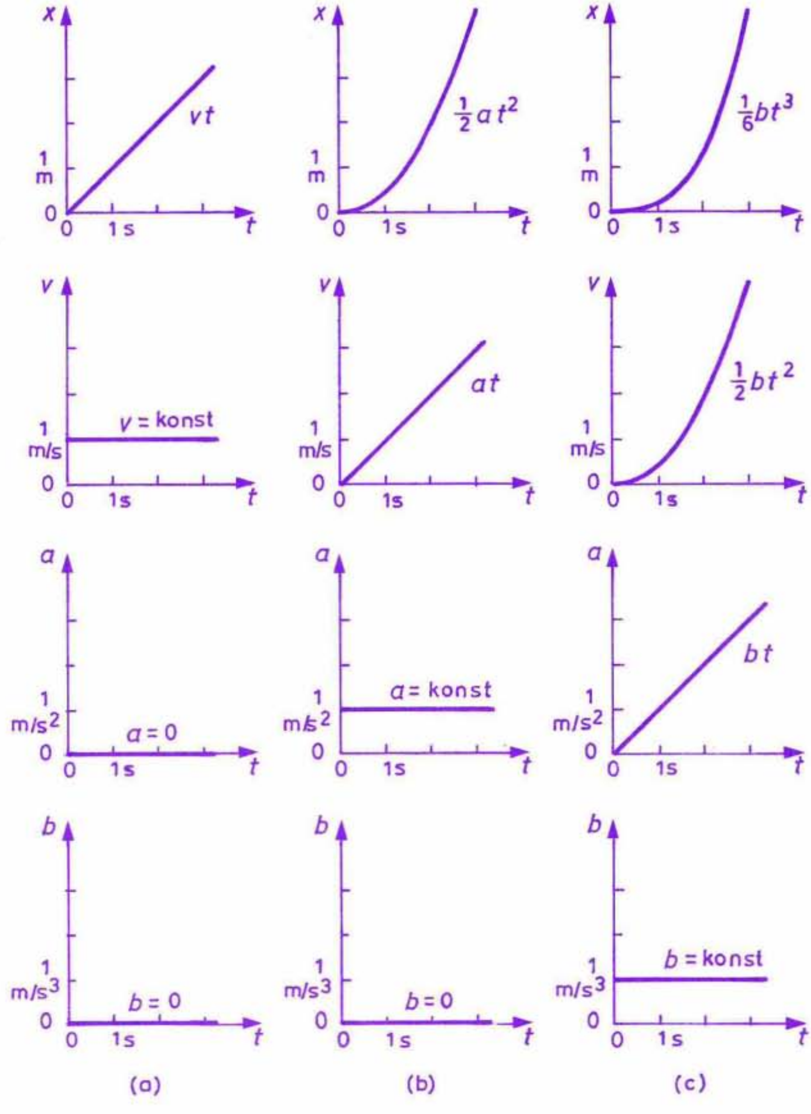
Enota hitrosti je m/s. Pospešek je pri takem gibanju enak nič.
Pri *enakomerno pospešenem premem gibanju* hitrost s časom enakomerno narašča. Vzamemo lahko, da je hitrost sorazmerna s časom in je sorazmernostni koeficient pospešek a (slika 1b):

$$v = at, \qquad a = v/t.$$

Enota pospeška je m/s^2. Trzaj je pri takem gibanju enak nič.
Pri *gibanju s konstantnim trzajem* pospešek enakomerno narašča s časom. Vzamemo lahko, da je pospešek sorazmeren s časom in je sorazmernostni koeficient trzaj b (slika 1c):

$$a = bt, \qquad b = a/t.$$

Enota trzaja je m/s^3. Gibanje je še bolj zapleteno, če se trzaj spreminja s časom.



Slika 1. Koordinata, hitrost, pospešek in trzaj pri premem gibanju v odvisnosti od časa: za enakomerno gibanje (a), enakomerno pospešeno gibanje (b) in gibanje s konstantnim trzajem (c). Da je diagrame laže risati, smo izbrali $v = 1$ m/s, $a = 1$ m/s^2 in $b = 1$ m/s^3. Pri drugih podatkih so risbe uporabne, če na navpični osi uporabimo različne enote.

Ostanimo pri premem gibanju. Zanimivo premo gibanje je *sinusno nihanje.* Tako bi se gibala drobna utež, obešena na vijačno vzmet, ko bi jo premaknili iz ravnovesne lege in spustili, če ne bi bilo treba upoštevati zračnega upora. Odmik od ravnovesne lege se spreminja takole (slika 2):

$$x = x_0 \cos \omega_0 t,$$

če je x_0 *amplituda odmika*, $\omega_0 = 2\pi / t_0$ krožna frekvenca in t_0 nihajni čas. Hitrost je

$$v = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t.$$

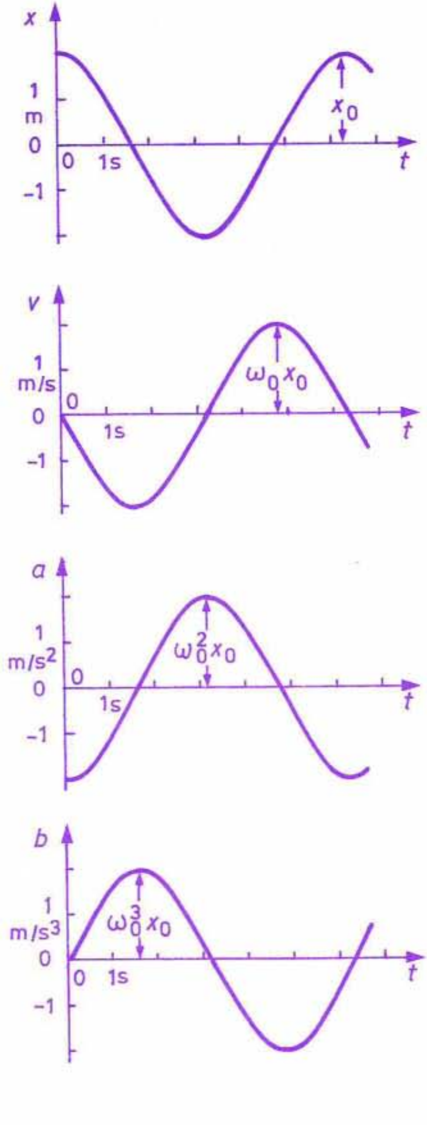
Amplituda hitrosti je $\omega_0 x_0$. Za pospešek dobimo

$$a = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t.$$

Amplituda pospeška je $\omega_0^2 x_0$. Za trzaj dobimo

$$b = \omega_0^3 x_0 \sin \omega_0 t.$$

Amplituda trzaja je $\omega_0^3 x_0$. Upoštevali smo, da je hitrost odvod koordinate po času $v = dx/dt$, pospešek odvod hitrosti po času $a = dv/dt$ in trzaj odvod pospeška po času $b = da/dt$. Pospešek je torej drugi, trzaj pa tretji odvod koordinate po času. (V pomoč pri odvajanju povejmo, da je odvod $\cos \omega_0 t$ in $\sin \omega_0 t$ po času $-\omega_0 \sin \omega_0 t$ in $\omega_0 \cos \omega_0 t$.)

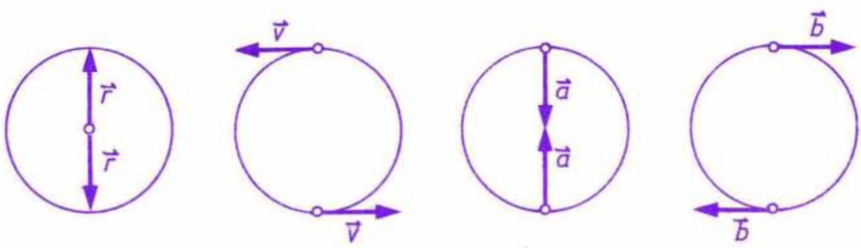


Slika 2. Odmik od ravnovesne lege, hitrost, pospešek in trzaj pri premem sinusnem nihanju. Izbrali smo $\omega_0 = 1\ s^{-1}$, da so vse amplitude enake.

Enačbe postanejo zanimivejše, a tudi bolj zapletene, ko od premega gibanja preidemo k ravninskemu. Dobra pot za ta prehod je kroženje. Kroženje si lahko mislimo sestavljeno iz dveh nihanj v pravokotnih smereh, ki sta drugo glede na drugo zakasnjeni za četrtino nihajnega časa. V ravnini vpeljimo koordinatni sistem z osema x in y. Začnimo z *enakomernim kroženjem*, pri katerem narašča zasuk sorazmerno s časom: $\omega_0 t$. Za komponente na osi x lahko kar prevzamemo zapisane izraze, le x_0 zamenjamo z radijem kroga r_0, komponente na osi y pa dobimo s premikom za četrt nihaja:

$$
\begin{aligned}
x &= r_0 \cos \omega_0 t & y &= r_0 \sin \omega_0 t, \\
v_x &= -\omega_0 r_0 \sin \omega_0 t & v_y &= \omega_0 r_0 \cos \omega_0 t. \\
a_x &= -\omega_0^2 r_0 \cos \omega_0 t & a_y &= -\omega_0^2 r_0 \sin \omega_0 t, \\
b_x &= \omega_0^3 r_0 \sin \omega_0 t & b_y &= -\omega_0^3 r_0 \cos \omega_0 t.
\end{aligned}
$$

Narišimo dobljene vektorje: krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y)$, vektor hitrosti $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, vektor pospeška $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ in vektor trzaja $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ (slika 3).



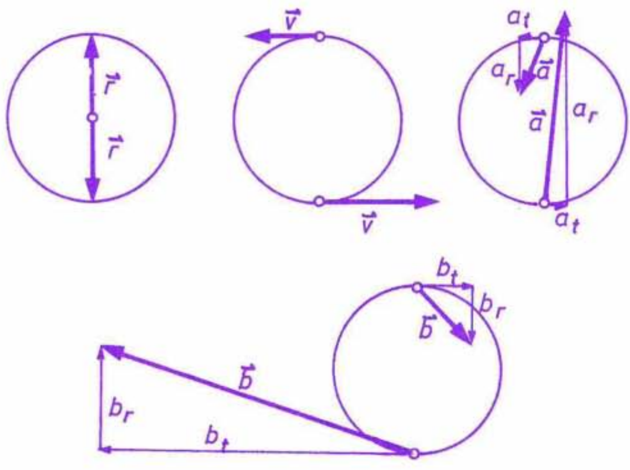
Slika 3. Krajevni vektor, vektor hitrosti, vektor pospeška in vektor trzaja pri enakomernem kroženju. Vektorji se vrtijo, ne da bi se spreminjale njihove velikosti. Izbrali smo $\omega_0 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, da so vsi vektorji enako veliki. Pri drugih podatkih so risbe uporabne, če na oseh v različnih risbah uporabimo različne enote.

Pri *enakomerno pospešenem kroženju* narašča zasuk sorazmerno s kvadratom časa $\frac{1}{2}\alpha_0 t^2$, če je α_0 konstantni kotni pospešek. Produkt funkcij odvajamo tako, da drugo funkcijo pomnožimo z odvodom prve in prištejemo s prvo funkcijo pomnoženi odvod druge: $d(fg)/dx = g df/dx + f dg/dx$.

Odvod t^2 je $2t$ in odvod t je 1. Naposled dobimo:

$$\begin{aligned}
x &= r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2, \qquad & y &= r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2; \\
v_x &= -\alpha_0 t r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2, \qquad & v_y &= \alpha_0 t r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2; \\
a_x &= -(\alpha_0 t)^2 r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2 - \alpha_0 r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2, \\
a_y &= -(\alpha_0 t)^2 r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \alpha_0 r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2; \\
b_x &= -3\alpha_0^2 t r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2 + (\alpha_0 t)^3 r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2, \\
b_y &= -3\alpha_0^2 t r_0 \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2 - (\alpha_0 t)^3 r_0 \cos \tfrac{1}{2}\alpha_0 t^2.
\end{aligned}$$

Narišemo dobljene vektorje in jih še razstavimo na *radialno komponento* v smeri zveznice točkastega telesa z izhodiščem in *tangentno komponento* pravokotno na to (slika 4). Hitrost ima smer tangente, pospešek ima radialno komponento $(\alpha_0 t)^2 r_0$ proti izhodišču in tangentno komponento $\alpha_0 r_0$ v smeri hitrosti, trzaj pa radialno komponento $3\alpha_0^2 t r_0$ proti izhodišču in tangentno komponento $(\alpha_0 t)^3 r_0$ v nasprotni smeri hitrosti.



Slika 4. Krajevni vektor, vektor hitrosti, vektor pospeška in vektor trzaja pri enakomerno pospešenem kroženju in njihove radialne in tangentne komponente. Izbrali smo trenutka, ko je $\frac{1}{2}\alpha_0 t^2$ enako $\frac{1}{2}\pi$ in $\frac{3}{2}\pi$ ter $\alpha_0 = \frac{1}{4}$ s^{-2}.

Zanimivo bi bilo obdelati še kako bolj zapleteno gibanje. Od mogočih zgledov nam pridejo na misel gibanje po *Arhimedovi spirali*, ko zveznica točkastega telesa z izhodiščem enakomerno kroži, njena dolžina pa narašča sorazmerno s časom: $r = v_r t$:

$$x = v_r t \cos \omega_0 t, \qquad y = v_r t \sin \omega_0 t,$$

gibanje po eni od *Lissajousovih* krivulj:

$$x = x_0 \cos n_x \omega_0 t, \qquad y = y_0 \sin n_y \omega_0 t,$$

če sta n_x in n_y majhni celi števili, gibanje planeta po elipsi. Vendar z računanjem ne kaže pretiravati.

Ne kaže zamolčati, kako občutimo pospešek in trzaj. Mislimo si, da se peljemo v avtobusu po gladki in ravni cesti. Po poskusih v avtobusu ne moremo ugotoviti, kako hitro se giblje, dokler se giblje s konstantno hitrostjo. Potnik lahko določi hitrost le tako, da pogleda iz avtobusa, poskusi v njem pa potekajo enako, kot če bi avtobus miroval. Opazovalni sistem, ki ga vpelje potnik v avtobusu, je enakovreden sistemu opazovalca s ceste. Oba sta *inercialna opazovalna sitema*. To Galilejevo spoznanje, ki ga lahko imenujemo *zakon relativnosti*, smo že omenili.

Drugače je, če se avtobus giblje s konstantnim pospeškom, ker pač nanj delujejo telesa iz okolice s konstantno vsoto zunanjih sil. Potnik v avtobusu še naprej opazuje pojave s svojega stališča, zase on miruje. Vidi, da se telesa ob cesti gibljejo s konstantnim pospeškom v nasprotni smeri vožnje, in upošteva ta pospešek kot *sistemski pospešek*. S tem pospeškom poveže *sistemsko silo*. Sistemski pospešek in sistemska sila imata enako velikost, a nasprotno smer kot pospešek avtobusa in vsota vseh zunanjih sil, s katero delujejo telesa iz okolice na avtobus. Sistemski pospešek in sistemska sila imata smer vožnje, če avtobus zavira. Po sistemskem pospešku in sistemski sili sklepa potnik v avtobusu, da se giblje pospešeno. (Glej še članek A. Likarja *Vrteči se opazovalni sistem*, Presek **6** (1979) 145.)

Mislimo si, da pospešek avtobusa enakomerno narašča, torej da je trzaj avtobusa konstanten in ima smer vožnje. Po tem, kar smo ugotovili, tudi sistemski pospešek in sistemska sila v nasprotni smeri vožnje enakomerno naraščata. Potnik v avtobusu vpelje sistemski trzaj, ki je enako velik kot trzaj avtobusa, a ima nasprotno smer. Ta sistemski trzaj občuti potnik, ki se giblje z naraščajočim pospeškom.

V tem prispevku se zadovoljimo z obdelanimi preprostimi zgledi za premo gibanje in gibanje v ravnini. Na eni strani smo se vadili v odvajanju, na drugi pa izračunali ne samo hitrost in pospešek, ampak tudi mnogo manj znani trzaj. Prvi dve količini moramo poznati, za trzaj pa si lahko mislimo, da smo ga dodali, ne da bi ga morali poznati, in ga lahko spustimo - kot tisti, ki se je od časa do časa udaril po prstu, zato da mu je bilo bolje, ko se ni udaril.

Obravnavali smo samo gibanje in se nismo spraševali po vzroku zanj. Ni težko vključiti Newtonovega zakona, samo pospešek pomnožimo z maso, pa dobimo silo, s katero deluje na opazovano točkasto telo drugo telo in ki povzroča opisano gibanje. Da bi spoznali globlje ozadje trzaja, pa bi morali gnati razpravo še precej dlje.[1]

Janez Strnad

---

[1] Bralcu, ki ga to zanima, priporočamo članek Stevena H. Scotta, *Jerk: The time rate of change of acceleration*, American Journal of Physics **46** (1978) 1090. Zanimiv je tudi članek T. R. Sandina, *The jerk*, The Physics Teacher **28** (1990) 36, v katerem je obdelan trzaj tudi v teoriji relativnosti. V Newtonovi mehaniki se trzaj pri prehodu iz inercialnega opazovalnega sistema v drug tak sistem sploh ne spremeni. V posebni teoriji relativnosti pa je enačba, ki opiše prehod veliko bolj zapletena. V nekem inercialnem opazovalnem sistemu je lahko trzaj enak nič, pa je v drugem od nič različen.