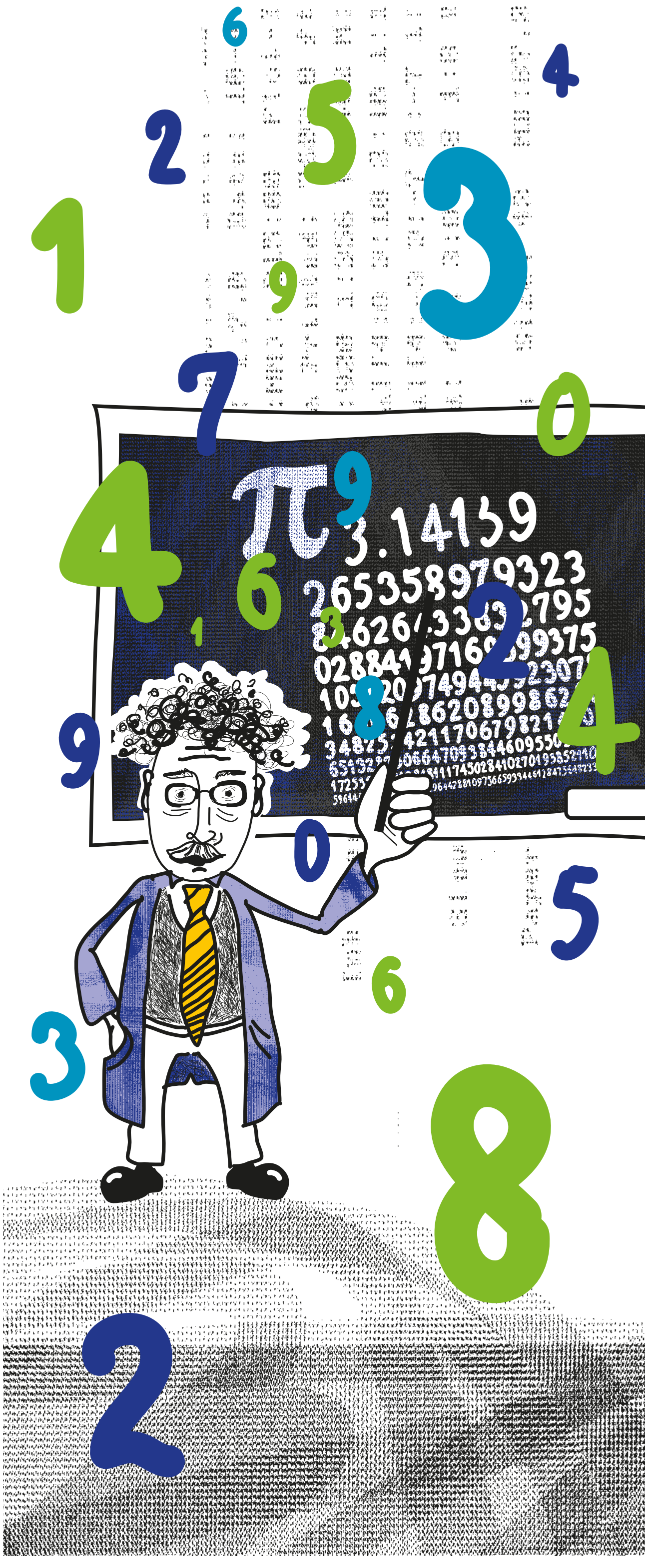


Znano in manj znano o številu π

IRENA KOSI – ULBL

→ Verjetno je prvo srečanje večine osnovnošolcev s številom π povezano z računanjem obsega in ploščine kroga. Uporaba števila π se nato razširi na računanje površin in prostornin geometrijskih teles. Nadaljnje poglabljanje v matematiko pa razkrije prav presenetljivo pogosto pojavljanje tega števila. Po pričakovanjih srečamo število π na najrazličnejših področjih našega življenja: radijski, televizijski, telefonski signali, navigacija in številna druga področja tehnike, kvantna mehanika, splošna teorija relativnosti.

In kje se zgodba o številu π sploh začne?

Zgodovina

Število π je zelo staro število. Zgodovinarji ocenjujejo, da so matematiki že 2000 let pr. n. št. vedeli, da je razmerje med obsegom in premerom kroga enako za vse kroge. Ugotovitev je temeljila na ideji o proporcionalnosti: Če podvojimo razdaljo „čez krog“, podvojimo tudi razdaljo „okoli kroga“. V današnjem algebraičnem zapisu imamo torej formulo

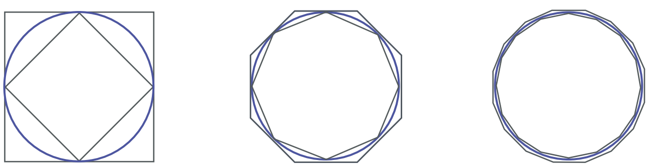
$$\pi = \frac{\text{obseg}}{\text{premer}}.$$

Moč tega odkritja je bila velika. Kroge so ljudje namreč opazili povsod: v Soncu, Luni, v človekovem očesu, v različnih predmetih, ki jih je naredil človek, v osnovnih religioznih ritualih. Ostajalo pa je nerešeno vprašanje – kolikšna je numerična vrednost števila π?

Stari Egipčani in Babilonci so vedeli za obstoj „konstante π“, vendar vrednosti števila π niso poznali prav posebej natančno. Babilonci so za število π uporabljali približek $3\frac{1}{8}$ (3,125), stari Egipčani pa vrednost $4 \cdot (8/9)^2$ (3,1605), s katero je bilo nekoliko težje računati. V sakralnih knjigah Jainov (indijska religiozna sekta) najdemo za približek števila π število $\sqrt{10} = 3{,}16227766\ldots$.

Grki v antiki so za število π uporabljali približek $\frac{22}{7} = 3{,}142857143\ldots$, v starih kitajskih zapisih pa je za približek števila π naveden ulomek $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$, kar je presenetljiva stopnja natančnosti. To vemo danes, ko lahko izračunamo veliko decimalnih mest števila π.

V petem in četrtem stoletju pred našim štetjem so grški matematiki za določanje približne vrednosti števila π predlagali idejo računanja obsegov krogu očrtanih in včrtanih pravilnih večkotnikov. Ugotovili so namreč, da je obseg krogu očrtanega pravilnega večkotnika večji, obseg krogu včrtanega pravilnega večkotnika pa manjši od obsega tega kroga (slika 1). Z naraščanjem števila stranic krogu očrtanega oz. včrtanega pravilnega večkotnika se obsega obeh likov poljubno približata, zato se približujeta tudi obsegu kroga. S to idejo se je veliko ukvarjal Arhimed, ko je izračunal obsege krogu včrtanega in očrtanega pravilnega 6-, 12-, 24-, 48- in 96-kotnika. Na osnovi rezultatov je ugotovil, da je število π med številoma $3\frac{1137}{8069}$ in $3\frac{2669}{18693}$, to je med vrednostima 3,1409097 in 3,1427807.



SLIKA 1.
Geometrijski prikaz metode krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov za določevanje približkov števila π za 4-, 8- in 12-kotnik.

Ptolomej, ki ni znan le po odkritju heliocentričnega planetarnega sistema, ampak je bil tudi dober matematik, je z izračunom obsega krogu včrtanega pravilnega 720-kotnika dobil za približek števila π ulomek $\frac{377}{120} = 3{,}1416666\ldots$. Naslednji korak je bil narejen 15 stoletij kasneje: francoski matematik Viète je z računanjem obsega včrtanega in očrtanega pravilnega $3 \cdot 2^{17} = 393216$-kotnika prišel do ocene

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537,$$

kar pomeni, da je izračunal vrednost števila π na 10 decimalnih mest natančno. Leta 1579 je v delu *Knjiga matematičnih smernic* število π izrazil tudi kot neskončni produkt:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=2}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^k} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdots =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Nizozemski matematik Adrian van Roomen je z omenjeno metodo izračunal približek števila π na 17 decimalnih mest natančno (uporabil je krogu včrtani pravilni 2^{30}-kotnik). Zadnji, ki se je poslužil Arhimedove ideje, je bil nemški matematik Ludolf van Ceulen. Za računanje obsegov krogu včrtanih pravilnih večkotnikov je porabil 10 let; število π pa je zaokrožil na 20 decimalnih mest natančno. Svoje delo je zaključil z besedami: „Kdor želi, naj nadaljuje“. Pa je nadaljeval kar sam in pridobil celo 35 natančnih decimalnih mest števila π. Po njem se število π tudi imenuje: Ludolfovo število.

Še en zanimiv prikaz števila π je konec 17. stoletja predstavil matematik John Wallis, ki je na desni strani izraza zapisal neskončni produkt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots,$$

v katerem je jasno izražen vzorec sodih in lihih števil v števcih oziroma imenovalcih faktorjev.

Angleški matematik Abraham Sharp je na prehodu iz 17. v 18. stoletje opazil, da iz prej omenjene vrste za funkcijo arctg x pri $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dobimo

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}+\cdots\right).$$

Z upoštevanjem le prvih šestih členov v tej vrsti dobimo približek za število π z napako, manjšo od 0,0005.

Simbol π je v našem modernem smislu prvič uporabil William Jones, prijatelj Isaaca Newtona, ko je leta 1706 zapisal: „Razmerje med premerom in obsegom kroga je enako razmerju med številom 1 in številom

- $\left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}\right) - \cdots = 3,14159... = \pi.$“

Zakaj število π označuje ravno grška črka pi in ne na primer alfa ali omega ali katera druga grška črka? Simbol izhaja iz prve črke grške besede $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho$, ki pomeni perimeter (obseg).

Z določanjem približkov števila π se je ukvarjal tudi Leonard Euler. Uporabil je izraz

- $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$

in ugotovil, da je francoski matematik Lagny, ki je pred tem izračunal približek števila π na 128 decimalnih mest natančno, naredil napako na 113. mestu, prav tako so bila napačna mesta, ki temu sledijo. Euler je nato za izračun približka števila π uporabil zvezo

- $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

Rekord svojega časa je postavil tudi naš matematik Jurij Vega, ki je konec 18. stoletja izračunal prvih 140 decimalnih mest števila π. Pri tem je uporabil izraz (ki je enak Eulerjevemu izrazu iz leta 1755)

- $\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}.$

Njegov dosežek je bil izboljšan šele po 52-ih letih.

V sredini 19. stoletja se je število natančnih decimalnih mest števila π povzpelo iz 200 na okoli 500. Sto let kasneje, s pojavom računalnika, pa je to število začelo strmo naraščati. Danes je znanih že več kot $13 \cdot 10^{15}$ natančnih decimalnih mest števila π, njihovo iskanje pa je postalo bolj šport kot pa matematična aktivnost. Matematično – računalniški entuziasti prirejajo tekmovanja v iskanju čim več pravilnih decimalnih mest, rekordi pa so bili objavljeni tudi v Guinnessovi knjigi rekordov.

Število π ni racionalno število

Število $\pi = 3.14159265358979323846264338329 7$-$5028841971\ldots$ je matematike privlačilo več tisoč let, ko so ga poskusili predstaviti kot razmerje dveh naravnih števil. Ker danes obstaja dokaz, da je število π iracionalno število, so bili seveda vsi ti poskusi obsojeni na neuspeh. Iracionalnost števila π je leta 1761 prvi dokazal nemški matematik in fizik Jochann Heinrich Lambert. Leta 1882 je nemški matematik Ferdinand von Lindemann dokazal, da je število π transcendentno število. To pomeni, da število π ni rešitev nobene enačbe z racionalnimi koeficienti. Tako števila π ne moremo izraziti le s končnim številom celih števil, ulomkov ali njihovih korenov. Ta lastnost števila π razreši tudi znameniti starogrški problem kvadrature kroga: samo z uporabo ravnila in šestila je nemogoče konstruirati kvadrat, katerega ploščina je enaka ploščini danega kroga. Z uporabo ravnila in šestila lahko namreč skonstruiramo le daljice, katerih dolžine so algebrska (torej ne transcendentna) števila.

Zanimivosti

- Nekaj zanimivih matematičnih enačb, ki vsebujejo število π:

1. *Enačba petih znamenitih števil (Eulerjeva formula)*, ki povezuje pet najpomembnejših števil (0, 1, e – osnova naravnega logaritma, π in i – imaginarna enota):

- $e^{i\pi} + 1 = 0$

2. *Normalna ali Gaussova porazdelitev* slučajne spremenljivke s parametroma a (matematično upanje) in σ (standardna deviacija) ima gostoto verjetnosti

- $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$

Parameter a je poljubno realno število, parameter σ pa poljubno pozitivno število.

3. *Stirlingova enačba:*

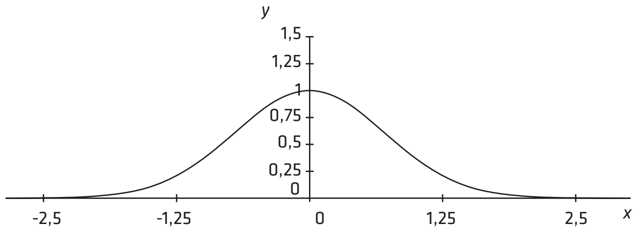
- $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$

4. Ploščina lika pod krivuljo e^{-x^2} (slika 2):

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

- Kako si zapomniti decimalna mesta števila π?

V številnih jezikih so ljubitelji števila π ustvarili povedi, verze, mini drame, komične epizode, ki s številom črk posamezne besede ponazarjajo števke



SLIKA 2.
Graf funkcije $f(x) = e^{-x^2}$

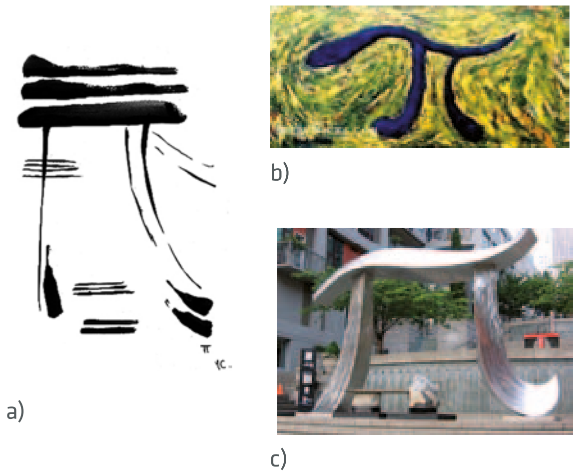
na decimalnih mestih števila π. Slovenski dosežek je: „*Kdo o tebi z glavo razmišlja, da spomni števk teh?*“(3,141592653). In še angleška poved za približek števila π: „*How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!*“ Na 32. decimalnem mestu števila π je števka 0. Za njeno kodiranje je bilo tako potrebno v spominske pripomočke vključiti tudi besedo z desetimi črkami... Eden najdaljših tekstov, ki omogoča pomnjenje 740 decimalk števila π, temelji na pesmi *The Raven* (*Krokar*), ki jo je napisal ameriški pesnik, pisatelj in kritik Edgar Allan Poe.

- Nekateri ljudje vidijo v številu π različne inspiracije (npr. zapisovanje števila v različnih bazah, ne le desetiški), nekateri mu pripisujejo celo religiozni pomen. Prirejajo tudi tekmovanja v poznavanju čim večjega števila decimalnih mest števila π na pamet (svetovni rekord je leta 2007 postavil Japonec, ki je decimalna mesta števila π recitiral okoli 16 ur in tako pravilno povedal okoli 42 000 prvih decimalk števila π). Ljubitelji števila π pravijo, da lahko sam sebe imenuješ π-fan, če znaš na pamet vsaj njegovih prvih 100 decimalnih mest.

- Obstaja tudi π – dan, praznik, namenjen številu π, ki ga ljubitelji števila π praznujejo 14. marca (verjetno ni težko ugotoviti, zakaj so izbrali ravno ta datum). Ideja o prazniku prihaja iz San Francisca, sicer pa tekmovanja v zvezi s številom π na ta dan potekajo tudi pri nas (recitiranje decimalk števila π, inovativno računanje števila π).

- Frekvenca števk 0, 1, 2, ..., 9, ki se pojavljajo na decimalnih mestih števila π, je približnao enaka – torej ni nobena števka zastopana bolj ali manj.

- Številu π se posvečajo tudi umetniki različnih smeri (slika 3):



SLIKA 3.
Na zgornjih slikah je risarska oz. slikarska upodobitev števila π neznanih avtorjev, na spodnji sliki pa je prikazana skulptura v centru Seattlea.

Čeprav je človeštvo spoznavnju števila π namenilo že več tisoč let, bo to število ostalo privlačno še za mnoge generacije matematikov in drugih ljubiteljev „zanimivih“ števil.

Literatura

[1] *Kaleidoscope: Nonrepeating, patternless, and perpetually approximated*, QUANTUM, nov./dec. 2000, vol. 11, **2**, str. 28–29.

[2] http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pi.html Povzeto dne: 13. 2. 2013

[3] http://mathforum.org/isaac/problems/pi1.html Povzeto dne: 13. 2. 2013

[4] http://mathforum.org/library/drmath/view/-52543.html Povzeto dne: 13. 2. 2013

[5] http://mathforum.org/library/drmath/view/-57045.html Povzeto dne: 13. 2. 2013

[6] http://mathforum.org/library/drmath/view/-57543.html Povzeto dne: 13. 2. 2013

[7] http://oldweb.cecm.sfu.ca/pi/pi.html
Povzeto dne: 13. 2. 2013

[8] http://www.maa.org/mathland/mathland_3_11.html
Povzeto dne: 13. 2. 2013

[9] http://www.thefreelibrary.com/Biting+off+a+recordbreaking+piece+of+pi.-a07703265
Povzeto dne: 13. 2. 2013

[10] http://www.artbywicks.com/abstract_art_interior_decorating.html
Povzeto dne: 13. 2. 2013

× × ×

Barvni sudoku

→ V 6 × 6 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve nastopalo vseh 6 števil.

1					
					2
			4		
	6				4
		3			

× × ×