

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



PODIPLOMSKI ŠTUDIJ
GRADBENIŠTVA

DOKTORSKI ŠTUDIJ

Kandidatka:

TEJA MELINK, univ. dipl. inž. grad.

METODA STOHAŠTIČNIH KONČNIH ELEMENTOV V MODELIRANJU KONSTRUKCIJ

Doktorska disertacija štev.: 239

STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD IN STRUCTURE MODELLING

Doctoral thesis No.: 239

Soglasje k temi doktorske disertacije je dala Komisija za doktorski študij UL
na 8. redni seji 8. julija 2010.

Za mentorja je bil imenovan prof. dr. Jože Korelc.

Ljubljana, 16. junij 2014

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Komisijo za oceno ustreznosti teme doktorske disertacije v sestavi:

- izr. prof. dr. Jože Korelc,
- prof. dr. Darko Beg,
- prof. dr. Boris Štok, UL FS,
- prof. dr. Goran Turk,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 10. redni seji 21. aprila 2010.

Poročevalce za oceno doktorske disertacije v sestavi:

- prof. dr. Darko Beg,
- prof. dr. Boris Štok, UL FS,
- prof. dr. Goran Turk,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 3. redni seji 25. septembra 2013.

Naknadno je Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 9. redni seji 26. marca 2014, zaradi smrti poročevalca prof. dr. Darka Bega, imenoval dodatna poročevalca:

- prof. dr. Tomaža Rodiča, UL NTF,
- izr. prof. dr. Matjaža Dolška.

Komisijo za zagovor doktorske disertacije v sestavi:

- prof. dr. Matjaž Mikoš, dekan UL FGG, predsednik,
- prof. dr. Jože Korelc, mentor,
- prof. dr. Boris Štok, UL FS,
- prof. dr. Goran Turk,
- prof. dr. Tomaž Rodič, UL NTF,
- izr. prof. dr. Matjaž Dolšek,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 11. seji 28. maja 2014.

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana **TEJA MELINK**, univ. dipl. inž. grad., izjavljam, da sem avtorica doktorske disertacije z naslovom **METODA STOHAŠTIČNIH KONČNIH ELEMENTOV V MODELIRANJU KONSTRUKCIJ**.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 16. junij 2014

.....
(podpis)

Popravki

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo
----------------	------------------	---------	--------

“Ta stran je namenoma prazna.”

Bibliografsko-dokumentacijska stran

UDK: 624.07:519.21:519.63:(043)

Avtorica: Teja Melink

Mentor: prof. dr. Jože Korelc

Naslov: Metoda stohastičnih končnih elementov v modeliranju konstrukcij

Obseg in oprema: 191 str., 67 sl., 37 pregl., 194 en.

Ključne besede: metoda stohastičnih končnih elementov, stohastično polje, Karhunen-Loèvova dekompozicija, stohastični končni elementi, avtomatsko odvajanje, perturbacijska metoda

Izvelek: V disertaciji je razvit splošni simbolni pristop k avtomatizaciji metode stohastičnih končnih elementov v modeliranju konstrukcij. Uporabljen je hibridni simbolno-numerični pristop, v katerem so kombinirani: program za simbolno računanje Mathematica, avtomatski generator kode z vgrajeno tehniko avtomatskega odvajanja AceGen, ter okolje za končne elemente AceFEM. Za opis in diskretizacijo stohastičnega polja je izbrana Karhunen-Loèvova (K-L) dekompozicija. Za izračun determinističnih členov K-L dekompozicije je razvita formulacija stohastičnih končnih elementov, ki je primerna in uporabna v poljubnem standardnem okolju za končne elemente, ki omogoča vključevanje uporabniško definiranih končnih elementov. Posebna pozornost je namenjena poenostavljeni eksponentni kovariančni funkciji, ki se z namenom pocenitve numeričnega postopka v primeru srednje koreliranih stohastičnih polj pogosto uporablja v literaturi. V disertaciji je podan dokaz, da predlagana poenostavljena kovariančna funkcija ni pozitivno definitna, zaradi česar je problem numerično nestabilen. Predlagani sta dve alternativni modifikaciji kovariančne funkcije, ki pocenita numerično reševanje problema in hkrati zagotavljata boljšo numerično stabilnost. Za izračun odziva stohastičnih problemov je uporabljena perturbacijska metoda višjega reda. V ta namen je razvita na avtomatskem odvajanju bazirana občutljivostna analiza (poljubnega) višjega reda. Izračunani odvodi so analitični. Zaradi visoke numerične učinkovitosti postopka je možna izvedba perturbacijske metode višjega reda za neprimerno višje število uporabljenih členov Karhunen-Loèvove dekompozicije, kot je možno z drugimi metodami za izračun odvodov. Računski primeri so izbrani tako, da je razvita formulacija metode stohastičnih končnih elementov verificirana za vse osnovne primere, pomembne za inženirsko prakso, in sicer za različne količine, ki se jih modelira s stohastičnim poljem ter za različne porušne mehanizme, tako za mejno stanje materiala, kot za mejno stanje stabilnosti.

“Ta stran je namenoma prazna.”

Bibliographic and documentalistic information

UDC: 624.07:519.21:519.63:(043)

Author: Teja Melink

Supervisor: Prof. Jože Korelc, Ph.D.

Title: Stochastic finite element method in structure modelling

Notes: 191 pp., 67 fig., 37 tab., 194 eq.

Key words: stochastic finite element method, stochastic field, Karhunen-Loève decomposition, stochastic finite element, automatic differentiation, perturbation method

Abstract: In the thesis, the automation of stochastic finite element method to deal with stochastic fields is developed. The automation is based on hybrid symbolic-numeric approach. In this approach symbolic and algebraic computational system Mathematica, AceGen for the automatic code generation and the general-purpose finite element environment AceFEM are combined. The discretization of the stochastic field is done via Karhunen-Loève (K-L) expansion. Stochastic finite elements are developed to calculate the deterministic terms in K-L expansion. Further on, the approximation of exponential covariance function that reduces the cost of numerical calculation of K-L expansion is investigated. The thesis provides a proof that the approximation of covariance function that can often be found in the literature is not positive definite. The consequence is possible numerical instability of the problem expressed as loss of positive definiteness of covariance matrix. The thesis presents two alternative modifications of the covariance function that reduce the computation cost and at the same time significantly improve the numerical stability of the procedure. For the calculation of the stochastic system response, higher-order perturbation method is chosen, based on the sensitivity analysis. For this step, the automatic differentiation based (ADB) formulation of higher-order sensitivity analysis is developed. The advantages of the developed formulation are calculation of the exact derivatives, high numerical efficiency and abstract symbolic description of the finite element code to derive higher-order derivatives. The proposed formulation of stochastic finite element method is verified on all basic types of numerical examples that are important in the engineering practice, i.e. for various quantities modelled by stochastic field and for different failure modes: for excessive plastic deformations, as well as loss of structural stability.

“Ta stran je namenoma prazna.”

Zahvala

Zahvaljujem se Ministrstvu za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo, ki je moje raziskovalno delo financiralo v okviru programa mladih raziskovalcev.

Zahvaljujem se vam, mentor prof. dr. Jože Korelc, da ste mi zaupali in mi omogočili raziskovalno delo. Hvala vam, da ste me vedno sprejeli z dobro voljo, me usmerjali in mi bili vedno pripravljeni pomagati. Hvala, da ste me poleg raziskovalnega dela vključili tudi v pedagoški proces in mi zaupali vlogo somentorice pri dveh diplomskih nalogah.

Želela bi se zahvaliti žal preminulemu prof. dr. Darkotu Begu, ki je bil v času mojega raziskovalnega dela predstojnik katedre in mi prav tako stal ob strani ter mi pomagal pri širjenju znanja tudi na strokovnem področju.

Zahvaljujem se vsem sodelavcem na katedri: Niku Kristaniču, Urši Šolinc, Blažu Hudoživniku, Franciju Sinurju, Blažu Čermelju, Barbari Gorenc, Primožu Možetu, Romani Hudin, Petru Skubru in Luki Pavlovčiču ter ostalim mladim raziskovalcem: Maji, Mojci, Nataši, Klemnu, Zlatku, Matevžu, Robertu, Jaki, Davidu, Mihi, Mateju, Nani... za dobro delovno vzdušje, za bodrenje, ko je bilo potrebno, in za pomoč, ko sem jo potrebovala.

Posebna zahvala gre tebi mama Milena in tebi tata Janko, ker sta od malega verjela vame, me usmerjala, mi svetovala in mi pri moji poti brezmejno pomagala. Hvala tudi moji širši družini, da ste me podpirali in mi pomagali po svojih najboljših močeh.

Hvala tebi Igor, ki si me že kot trener atletike v dolgih letih naučil, da se nekaj lahko naredi dobro le, če se dela s srcem in vztrajnostjo. Hvala za vso tvojo podporo in spodbudo tudi na moji raziskovalni poti. Na koncu hvala še najinim trem sinovom Jakobu, Vidu in Levu, ki ste v tem obdobju s prihodom na svet dali mojemu življenju in delu dodaten smisel.

“Ta stran je namenoma prazna.”

KAZALO VSEBINE

1	Uvod	1
1.1	Predstavitev problema	1
1.2	Predstavitev stanja na obravnavanem področju	2
1.2.1	Diskretizacija stohastičnih polj	3
1.2.2	Izračun statistike odziva konstrukcije	5
1.2.3	Občutljivostna analiza	6
1.2.4	Programska okolja za metodo končnih elementov, ki omogočajo apli- kacijo stohastičnega pristopa	8
1.3	Tema doktorske disertacije	11
1.4	Zasnova doktorske disertacije	13
2	Numerično reševanje stohastičnih problemov v mehaniki kontinuuma	15
2.1	Diskretizacija stohastičnega polja	15
2.1.1	Diskretizacija stohastičnega polja v Karhunen-Loèvovo vrsto	18
2.1.2	Galerkinova procedura za numerično reševanje homogene Fredhol- move integralske enačbe drugega reda	21
2.2	Diskretni sistemi v mehaniki kontinuuma	26
2.2.1	Osnovne enačbe v mehaniki kontinuuma	27
2.2.2	Formulacija mehanskega problema z uporabo avtomatskega odvajanja	30
2.2.3	Klasifikacija mehanskih problemov in njihova formulacija v metodi končnih elementov	31
2.3	Perturbacijska metoda	33
2.3.1	Analitična občutljivostna analiza	36
2.3.2	Simbolna občutljivostna analiza	36
2.3.3	Metoda končnih diferenc	39

2.4	Metoda Monte Carlo za izračun statistike odziva konstrukcije	41
3	Hibridni simbolno-numerični pristop	43
3.1	Uporaba AceGen-a v metodi končnih elementov.	44
3.2	Avtomatsko odvajanje	47
4	Avtomatizacija diskretizacije stohastičnega polja	51
4.1	Stohastični končni elementi	51
4.2	Izvedba diskretizacije stohastičnega polja v okolju za končne elemente Ace-FEM	57
5	Problem stabilnosti Karhunen-Loèvove dekompozicije	63
5.1	Eksponentna kovariančna funkcija	64
5.2	Okrnjena eksponentna kovariančna funkcija	65
5.2.1	Dokaz, da okrnjena eksponentna kovariančna matrika ni pozitivno definitna	66
5.2.2	Priporočilo o izbiri minimalne efektivne dolžine, da je kovariančna matrika pozitivno definitna	68
5.3	Modificirana okrnjena eksponentna kovariančna funkcija	69
5.4	Gladka kovariančna funkcija	71
5.5	Modificirana gladka kovariančna funkcija	72
5.6	Vpliv efektivne dolžine na rezultirajočo Karhunen-Loèvovo vrsto	73
6	Analitična občutljivostna analiza višjega reda	81
6.1	Definicija občutljivostnega problema	81
6.2	Občutljivostna analiza prvega reda	82
6.2.1	Avtomatizacija občutljivostne analize prvega reda	84
6.3	Občutljivostna analiza drugega reda	86
6.3.1	Avtomatizacija občutljivostne analize drugega reda	90
6.4	Občutljivostna analiza višjih redov	93
6.4.1	Avtomatizacija občutljivostne analize višjega reda	94

6.5	Avtomatizacija občutljivostne analize za časovno neodvisen nepovezan problem	98
6.6	Elasto-plastični končni element z vgrajeno občutljivostno analizo drugega reda	101
6.6.1	Simbolni opis končnega elementa za elasto-plastično občutljivostno analizo drugega reda	104
6.7	Izvedba občutljivostne analize v okolju za končne elemente AceFEM	111
7	Računski primeri	119
7.1	Nelinearna analiza z upoštevanjem stohastične začetne geometrijske nepopolnosti.	119
7.1.1	Začetna geometrijska nepopolnost	119
7.1.2	Upogib sinusoidnega panela	119
7.1.3	Ciklično obremenjevanje jeklene epruvete	126
7.2	Nelinearna stohastična analiza korodiranih konstrukcij	139
7.2.1	Proces korozije	139
7.2.2	Tlačena vrtljivo podprta plošča	140
7.2.3	Tlačen korodiran nosilec z globalnim uklonom kot merodajnim porušnim mehanizmom	150
7.2.4	Tlačen korodiran nosilec s spremenljivim porušnim mehanizmom . .	158
8	Zaključki	167
9	Povzetek	173
10	Summary	179

“Ta stran je namenoma prazna.”

KAZALO SLIK

1.1	Procedura metode stohastičnih končnih elementov.	13
2.1	Prve štiri lastne funkcije za enodimenzionalno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo.	23
2.2	Prvih deset lastnih vrednosti za enodimenzionalno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo s tremi različnimi korelacijskimi dolžinami.	24
2.3	Primerjava realizacij dvodimenzionalnega stohastičnega polja z ničelno pričakovano vrednostjo, enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo.	25
2.4	Procedura primarne analize in občutljivostne analize višjega reda.	33
2.5	Newton-Raphsonova procedura reševanja, prilagojena za reševanje razvoja vektorja rešitve v vrsto za časovno neodvisne mehanske probleme.	40
3.1	Simultana stohastična poenostavitev izrazov, vgrajena v AceGen.	45
3.2	Hibridni simbolno-numerični pristop k avtomatizaciji metode stohastičnih končnih elementov.	46
4.1	Procedura avtomatizacije diskretizacije stohastičnega polja.	51
4.2	Razdelitev fizikalne domene D na n_D poddomen.	52
4.3	Diskretizacija dvodimenzionalne domene D in formulacija 2×4 -vozliščnih stohastičnih končnih elementov.	53
4.4	Diskretizacija dvodimenzionalne domene D in formulacija 2×4 -vozliščnih stohastičnih končnih elementov na razdalji l_{eff} , z upoštevanjem simetrije problema.	53
4.5	Izoparametrična preslikava iz globalnega v referenčni koordinatni sistem za primer dvodimenzionalnega, 2×4 -vozliščnega stohastičnega končnega elementa.	54

4.6	Skica fizikalne domene, preko katere je definirano stohastično polje za prikaz izvedbe diskretizacije v AceFEM-u.	58
4.7	Prve štiri lastne funkcije za prikazani primer postopka diskretizacije stohastičnega polja v AceFEM-u.	61
5.1	Eksponentna kovariančna funkcija C_A za tri različne korelacijske dolžine. .	64
5.2	Eksponentna kovariančna funkcija in njene modifikacije (C_A - eksponentna, C_B - okrnjena eksponentna, C_C - modificirana okrnjena eksponentna kovariančna funkcija).	65
5.3	Konvergenca prvih treh negativnih lastnih vrednosti K-L vrste kot funkcije števila končnih elementov (n_{el}) vzdolž enotske domene.	67
5.4	Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_B pozitivno definitna.	69
5.5	Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_C pozitivno definitna.	71
5.6	Gladka kovariančna funkcija (C_D) in modificirana gladka kovariančna funkcija (C_E).	72
5.7	Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_E pozitivno definitna.	74
5.8	Primerjava prve lastne funkcije za različne korelacijske in efektivne dolžine.	75
5.9	Primerjava četrte lastne funkcije za različne korelacijske in efektivne dolžine.	76
5.10	Najmanjša lastna vrednost za različne kovariančne funkcije in $l_c = 0.05$. . .	79
5.11	Primerjava globalne relativne napake variance stohastičnega polja za aproksimirano kovariančno funkcijo.	80
6.1	Upogib konzole.	112
6.2	Skica deformirane konzole.	115
6.3	Občutljivost navpičnega pomika konzole v odvisnosti od dolžine konzole in višine prečnega prereza konzole: (a) Dv/DL , (b) Dv/Dh in (c) $D^2v/DLDh$.	117
7.1	Sinusoidna panelna plošča.	121

7.2	Prve štiri lastne funkcije K-L vrste stohastičnega polja spremembe amplitude.	122
7.3	Povprečna vrednost pomika na sredini panela $\bar{v}_m$ v odvisnosti od števila simulacij Monte Carlo.	126
7.4	Standardna deviacija pomika na sredini panela σ_{v_m} v odvisnosti od števila simulacij Monte Carlo.	127
7.5	Navpični pomik na sredini panela v_m , izračunan s perturbacijsko metodo različnih redov in simulacijami Monte Carlo.	128
7.7	Diagram cikličnega obremenjevanja epruvete.	128
7.6	Skica modela ciklično obremenjene jeklene epruvete.	129
7.8	Izračunane lastne vrednosti K-L dekompozicije stohastičnega polja geometrijske nepopolnosti.	130
7.9	Občutljivosti drugega reda $\frac{D^2 \bar{\epsilon}_{eq}}{D\xi_2^2}$, primarna analiza izvedena s paralelizacijo na procesorju s 4 jedri in 8 nitmi.	132
7.10	Vodoravni pomik (levo) in detajl diagrama vodoravnega pomika v točki A (desno) v odvisnosti od slučajnega parametra ξ_1 v primeru adaptivno izbranih časovnih korakov.	133
7.11	Diagram pomika $u_A(t)$ (a) ter občutljivosti: (b) $Du_A/D\xi_1$, (c) $D^2u_A/D\xi_1^2$ in (d) $D^2u_A/D\xi_2D\xi_3$ v odvisnosti od časa.	135
7.12	Akumulirane plastične deformacije $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ v točki T in občutljivosti $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ prvega in drugega reda na slučajne parametre (a) $\bar{\epsilon}_{eq}^p(t)$, (b) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3$, (c) $D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3^2$, (d) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_2D\xi_3$ (— ADB formulirana občutljivostna analiza, o metoda končnih diferenc).	136
7.13	Primerjava rezultatov perturbacijske metode drugega reda in 100 simulacij Monte Carlo za slučajna parametra ξ_1 in ξ_{25}	139
7.14	Skica plošče.	141
7.15	Model geometrijske nepopolnosti plošče.	142
7.16	Sledenje obtežne poti preko vodenega pomika.	144
7.17	Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina stanjšana enakomerno za pričakovano vrednost.	144
7.18	Obtežni faktor v odvisnosti od pomika in slučajne spremenljivke ξ_2	145
7.19	Diagram mejnega obtežnega faktorja v odvisnosti od debeline plošče.	147
7.20	Prva lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A	148

7.21	Četrta lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A	148
7.22	Naključno izbrana realizacija stohastičnega polja korozije plošče.	149
7.23	Deformirana plošča v trenutku, ko je dosežen mejni obtežni faktor (7-kratna povečava deformacij).	150
7.24	Prvih šest uklonskih oblik nosilca.	153
7.25	Model nepopolnosti nosilca.	154
7.26	Prva lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A	155
7.27	Četrta lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A	155
7.28	Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.	156
7.29	Naključno izbrana realizacija spremembe debeline nosilca.	156
7.30	Deformiran nosilec v trenutku definirane $\gamma = \gamma_{max}$ (10-kratna povečava deformacij).	157
7.31	Histograma kritične uklonske sile za kovariančni funkciji C_A in C_C	159
7.32	Mejni obtežni faktor $\gamma_{max}(\xi_1)$ in $\gamma_{max}(\xi_5)$, izračunan s perturbacijsko metodo drugega reda in 100 Monte-Carlo simulacijami.	159
7.33	Prvih šest uklonskih oblik nosilca.	161
7.34	Model nepopolnosti nosilca.	162
7.35	Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.	163
7.36	Primer, ko zaradi stohastične porazdelitve korozije nosilec odpove lokalno.	164
7.37	Primer, ko zaradi stohastične porazdelitve korozije nosilec odpove globalno.	164
7.38	Mejni obtežni faktor v odvisnosti od slučajnega parametra ξ_3 , izračunan z dejanskimi simulacijami.	165

LIST OF FIGURES

1.1	Stochastic finite element procedure.	13
2.1	First four eigenfunctions for one-dimensional stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function.	23
2.2	First ten eigenvalues for one-dimensional stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function for three different correlation lengths.	24
2.3	Comparison of realizations of stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function.	25
2.4	Procedure of primal analysis and higher-order sensitivity analysis.	33
2.5	Newton–Raphson solution procedure adjusted for power series solution to the system of nonlinear equations.	40
3.1	Simultaneous optimization of the expressions that is built in AceGen. . . .	45
3.2	Hybrid symbolic-numeric approach to automation of stochastic finite element method.	46
4.1	Procedure of automation of stochastic field discretization.	51
4.2	Discretization of physical domain D into n_D subdomains.	52
4.3	Discretization of twodimensional domain D and formulation of 2×4 -noded stochastic finite elements.	53
4.4	Discretization of two-dimensional domain D and formulation of 2×4 -noded stochastic finite elements on l_{eff} region with consideration of problem symmetry.	53
4.5	Isoparametric mapping from global to reference coordinate system for two-dimensional 2×4 -noded stochastic finite element.	54
4.6	Sketch of physical domain on which twodimensional stochastic field is defined for demonstration of AceFEM procedure.	58

4.7	First four eigenfunctions of numerical example for demonstration of stochastic field discretization procedure in AceFEM.	61
5.1	Exponential covariance function C_A for three different correlation lengths. .	64
5.2	Exponential covariance function and its modifications (C_A - exponential, C_B - truncated exponential, C_C - modification of truncated exponential). .	65
5.3	Convergence of first three negative eigenvalues of K-L decomposition as a function of the number of finite elements (n_{el}) along unit domain.	67
5.4	Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of truncated exponential covariance function for 1D, 2D and 3D domain.	69
5.5	Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of covariance function C_C for 1D, 2D and 3D domain.	71
5.6	Smooth (C_D) and modified smooth (C_E) covariance function.	72
5.7	Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of modified smooth covariance function for 1D, 2D and 3D domain.	74
5.8	Comparison of first eigenfunction for different correlation and effective lengths.	75
5.9	Comparison of fourth eigenfunction for different correlation and effective lengths.	76
5.10	Minimum eigenvalue for different covariance functions and $l_c = 0.05$	79
5.11	Comparison of global relative error in case of modified covariance function. .	80
6.1	Bending of cantilever beam.	112
6.2	Deformed cantilever beam.	115
6.3	Sensitivity of vertical displacement of cantilever beam in dependence of beam length and cross section height: (a) Dv/DL , (b) Dv/Dh in (c) $D^2v/DLDh$	117
7.1	Sinusoidal double skin cladding.	121
7.2	First four eigenfunctions of K-L decomposition of stochastic field of amplitude change.	122
7.3	Mean deflection in the middle of cladding $\bar{v}_m$ in dependence on the number of Monte Carlo simulations.	126

7.4	Standard deviation of the deflection in the middle of cladding σ_{v_m} in dependence on the number of Monte Carlo simulations.	127
7.5	Deflection in the middle of cladding, obtained with perturbation method of different orders and Monte Carlo simulations.	128
7.7	Diagram of cycling loading.	128
7.6	Numerical example of cyclic plasticity of circle bar.	129
7.8	Calculated eigenvalues of K-L decomposition of stochastic field of the geometric imperfections.	130
7.9	Second-order sensitivities $\frac{D^2 \bar{\epsilon}_{eq}^p}{D\xi_2^2}$, primal analysis performed with parallel computing on processor with 4 cores and 8 threads.	132
7.10	Horizontal displacement (left) and a detail of diagram of horizontal displacement (right) in point A in dependence on sensitivity parameter ξ_1 in case of adaptive time-stepping.	133
7.11	Diagram of displacement $u_A(t)$ (a) and diagrams of sensitivities: (b) $Du_A/D\xi_1$, (c) $D^2u_A/D\xi_1^2$ and (d) $D^2u_A/D\xi_2D\xi_3$ in dependence of time.	135
7.12	Accumulated plastic deformations and first- and second-order sensitivities of accumulated plastic deformations in point T with respect to random parameters: (a) $\bar{\epsilon}_{eq}^p(t)$, (b) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3$, (c) $D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3^2$, (d) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_2D\xi_3$ (— ADB formulated sensitivity analysis, $\circ$ finite difference method).	136
7.13	Comparison of the results obtained with second-order perturbation method and 100 Monte Carlo simulations for parameters ξ_1 and ξ_{25}	139
7.14	Sketch of the plate.	141
7.15	Geometrical imperfections of the plate.	142
7.16	A load-displacement curve.	144
7.17	A load-displacement curve for the case of expected value of plate thickness change.	144
7.18	Load factor in dependence on displacement and random variable ξ_2	145
7.19	Limit load factor in dependence of plate thickness.	147
7.20	First eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A	148
7.21	Fourth eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A	148
7.22	A random sample of stochastic field of corrosion.	149

7.23 Deformed plate in the moment of limit load factor (deformations are 7-times magnified).	150
7.24 First six buckling modes of the beam.	153
7.25 Imperfections of the beam.	154
7.26 First eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A	155
7.27 Fourth eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A	155
7.28 Load-displacement curve for the beam with uniformly reduced thickness. .	156
7.29 A random sample of beam thickness change.	156
7.30 Deformed beam in the moment of $\gamma = \gamma_{max}$ (deformations are 10-times magnified).	157
7.31 Histograms of critical buckling load for covariance functions C_A and C_C . .	159
7.32 Limit load factor $\gamma_{max}(\xi_1)$ and $\gamma_{max}(\xi_5)$, obtained with second-order perturbation method and 100 Monte Carlo simulations.	159
7.33 First six buckling modes of the beam.	161
7.34 Imperfections of the beam.	162
7.35 Load-displacement curve for the beam with uniformly reduced thickness. .	163
7.36 Local buckling of the beam due to stochastically distributed corrosion. . .	164
7.37 Global buckling of the beam due to stochastically distributed corrosion. . .	164
7.38 Limit load factor in dependence on parameter ξ_3 , obtained with simulations.	165

KAZALO PREGLEDNIC

3.1	Tipične izjeme avtomatskega odvajanja.	50
4.1	Parametri stohastičnega polja.	57
5.1	Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_B . . .	69
5.2	Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_C . . .	70
5.3	Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_E . . .	73
5.4	Relativna napaka prve lastne funkcije v temenu za različne korelacijske in efektivne dolžine.	77
5.5	Relativna napaka prve lastne funkcije na robu domene za različne korela- cijske in efektivne dolžine.	77
5.6	Povprečna relativna napaka prve lastne funkcije preko celotne domene za različne korelacijske in efektivne dolžine.	78
5.7	Povprečna relativna napaka prvega člena K-L dekompozicije za različne korelacijske in efektivne dolžine.	78
6.1	Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po para- metru ξ_{s_1}	95
6.2	Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po para- metru ξ_{s_2}	95
6.3	Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po para- metru ξ_{s_k} , $k < n$	96
6.4	Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po para- metru ξ_{s_n}	97
6.5	Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_1}	100
6.6	Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_2}	100

6.7	Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{sn}	101
6.8	Materialni in geometrijski parametri.	112
6.9	Primerjava rezultatov metode končnih elementov in Bernoullijeve grede. . .	116
7.1	Prve štiri lastne vrednosti K-L vrste stohastičnega polja spremembe amplitude.	122
7.2	Računski CPU čas, potreben za izračun razvoja odziva konstrukcije v vrsto.	124
7.3	Pričakovana vrednost ($\bar{v}_m$) in standardna deviacija (σ_{v_m}) navpičnega pomika v_m v cm ter skupni CPU čas, potreben za izračun odziva.	125
7.4	Materialni parametri epruvete.	127
7.5	Parametri stohastičnega polja geometrijske nepopolnosti.	130
7.6	Primerjava absolutnega računskega časa za perturbacijsko metodo drugega reda z ADB formulirano občutljivostno analizo in metodo končnih diferenc (elasto-plastičen material).	137
7.7	Primerjava absolutnega računskega časa za perturbacijsko metodo drugega reda z ADB formulirano občutljivostno analizo in metodo končnih diferenc hiperelastičen material).	138
7.8	Materialni parametri plošče.	141
7.9	Dimenzije plošče.	141
7.10	Parametri stohastičnega polja korozije.	146
7.11	Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi 2. reda (n_{odv}) in skupni računski CPU čas, potreben za posamezno metodo.	151
7.12	Materialni parametri nosilca.	152
7.13	Dimenzije nosilca.	152
7.14	Parametri stohastičnega polja korozije.	152
7.15	Potrebno število členov K-L vrste za 80 % natančnost, čas centralne procesne enote (CPU) za sestavo kovariančne matrike in gostota kovariančne matrike za različne kovariančne funkcije.	154

7.16 Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi (n_{odv}) in skupni CPU čas za različne metode.	158
7.17 Parametri stohastičnega polja korozije.	160
7.18 Potrebno število členov K-L vrste za 80 % natančnost variance, čas centralne procesne enote (CPU) za sestavo kovariančne matrike in gostota kovariančne matrike za različne kovariančne funkcije.	160
7.19 Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi (n_{odv}) in skupni CPU čas za različne metode.	163

“Ta stran je namenoma prazna.”

LIST OF TABLES

3.1	Typical automatic differentiation exceptions.	50
4.1	Parameters of stochastic field.	57
5.1	Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for co- variance function C_B	69
5.2	Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for co- variance function C_C	70
5.3	Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for co- variance function C_E	73
5.4	Relative error of first eigenfunction in its turning point for different corre- lation and effective lengths.	77
5.5	Relative error of first eigenfunction in boundary point of the domain for different correlation and effective lengths.	77
5.6	Average error of first eigenfunction, calculated over the whole domain for different correlation and effective lengths.	78
5.7	Average relative error of the first term in K-L decomposition for different correlation and effective lengths.	78
6.1	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with re- spect to parameter ξ_{s_1}	95
6.2	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with re- spect to parameter ξ_{s_2}	95
6.3	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with re- spect to parameter ξ_{s_k} , $k < n$	96
6.4	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with re- spect to parameter ξ_{s_n}	97
6.5	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with re- spect to parameter ξ_{s_1} in case of uncoupled and time-independent problem.	100

6.6	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_2} in case of uncoupled and time-independent problem.	100
6.7	Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_n} in case of uncoupled and time-independent problem.	101
6.8	Material parameters and geometry.	112
6.9	Comparison of the results of finite element method and Bernoulli beam.	116
7.1	First four eigenvalues of stochastic field of amplitude change.	122
7.2	CPU time needed for calculation of the response.	124
7.3	Expected value ($\bar{v}_m$) and standard deviation (σ_{v_m}) of the vertical displacement v_m in cm and total CPU time, needed to calculate the response of the cladding.	125
7.4	Material parameters of the circle bar.	127
7.5	Parameters for stochastic field of geometric imperfection.	130
7.6	Comparison of absolute calculation time needed to perform analysis with second-order perturbation method with ADB formulated sensitivity analysis and finite difference method (elasto-plastic material).	137
7.7	Comparison of absolute calculation time needed to perform analysis with second-order perturbation method with ADB formulated sensitivity analysis and finite difference method (hyperelastic material).	138
7.8	Material parameters of plate.	141
7.9	Plate dimensions.	141
7.10	Parameters for the stochastic field of corrosion.	146
7.11	Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the ultimate load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of second-order perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.	151
7.12	Material parameters of beam.	152
7.13	Beam dimensions.	152
7.14	Parameters of the stochastic field of corrosion.	152
7.15	Number of retained terms in K-L decomposition to attain 80 % accuracy, central processor unit (CPU) time to assemble covariance matrix and covariance matrix density for different covariance functions.	154

7.16 Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the limit load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.	158
7.17 Parameters for the stochastic field of corrosion.	160
7.18 Number of retained terms in K-L decomposition to attain 80 % accuracy of stochastic field variance, central processor unit (CPU) time to assemble covariance matrix and covariance matrix density for different covariance functions.	160
7.19 Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the ultimate load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.	163

1 Uvod

1.1 Predstavitev problema

V inženirskih problemih imamo opravka z naključnostjo pri skoraj vseh parametrih problema. Naključno se spreminjajo lastnosti materiala, obtežba, geometrijske nepopolnosti, proces korozije, poroznost in druge spremenljivke. To pomeni, da konkretna vrednost posameznih parametrov ni določljiva vnaprej, temveč je bolj ali manj naključna in se običajno naključno spreminja tudi preko območja problema.

Skozi zgodovino človeštva se je razvilo več različnih pristopov, kako reševati inženirske probleme. Najenostavnejša metoda, ki se je uporabljala v dolgem obdobju v zgodovini in se na manj razvitih območjih sveta uporablja še danes, je metoda poskušanja in napak. Na ta način so se konstrukcije spreminjale in izboljševale predvsem na podlagi preteklih izkušenj. Z razvojem analitičnih matematičnih metod in kasneje z razvojem računalnikov je bil narejen pomemben korak k novim pristopom in izboljševanju metod reševanja inženirskih problemov. Dandanes je, poleg uporabnosti in udobja, ki naj bi ga konstrukcija nudila uporabnikom, glavno vodilo pri načrtovanju konstrukcij varnost. Zahteva se, da je verjetnost porušitve manjša od predpisane. Kolikšna mora biti zanesljivost konstrukcije, je odvisno predvsem od namembnosti konstrukcije, od predvidenega števila uporabnikov v njej ter od velikosti škode, ki bi jo imela porušitev konstrukcije na okolje (npr. jedrske elektrarne in naftne ploščadi). V tem okviru sta se razvila dva pristopa: stohastični in deterministični. Zahtevnejši izmed njiju, ki probleme obravnava bolj realno, je stohastični pristop. Ta pristop upošteva, da vhodni parametri problema nimajo točno določenih vrednosti, temveč z neko verjetnostjo zavzamejo naključno vrednost na omejenem ali neomejenem območju. Nadalje obstajata v grobem dva načina stohastičnega pristopa: enostavnejši, ki privzame, da nek parameter zavzame sicer naključno vrednost, vendar je le-ta konstantna po celotnem območju problema. Drugi, zahtevnejši stohastični pristop, upošteva, da je vrednost stohastičnega parametra naključna in da se naključno spreminja tudi po domeni problema. Glavna težava stohastičnega pristopa je, da upoštevanje stohastičnosti pojavov bistveno poveča numerično zahtevnost in kompleksnost problema. Zaradi tega se v inženirski praksi večinoma uporablja enostavnejši, deterministični pristop. V tem primeru ima vsak vhodni parameter točno določeno (determinirano) vrednost, vse možne scenarije zaradi stohastične narave pojavov pa se poskuša zajeti z upoštevanjem ekstremov ali srednjih vrednosti stohastičnih parametrov.

Standardi, ki urejajo področje projektiranja gradbenih konstrukcij in k uporabi katerih

so inženirji v Sloveniji in večini preostalih evropskih držav zakonsko zavezani, se imenujejo Evrokodi in dovoljujejo uporabo obeh pristopov, stohastičnega in determinističnega. Vendar se pomanjkanje enostavnih in učinkovitih metod za stohastični pristop kaže tudi tu, saj predpisani standardi temeljijo predvsem na determinističnem pristopu, stohastični pristop pa se uporablja predvsem pri nadaljnjem razvoju Evrokodov, kar je v delu Evrokodov, ki obravnava osnove projektiranja konstrukcij (SIST EN 1990), tudi eksplicitno zapisano.

Primerjave rezultatov, dobljenih s stohastičnim in determinističnim pristopom, pokažejo, da determinističen pristop kljub uporabi ekstremnih vrednosti parametrov, ki so na videz na varni strani, ne zajamejo nujno najslabšega možnega scenarija, do katerega lahko pride zaradi naključne kombinacije posameznih parametrov. Poleg tega determinističen pristop ne vodi do optimalnih dimenzij inženirskih konstrukcij. Ob upoštevanju dejstva, da se zaradi konkurenčnega boja na svetovnem trgu išče vedno nove izboljšave in možnosti nižanja stroškov, je dolgoročno korak v smeri stohastičnega modeliranja neizogiben. Prav zaradi tega je stohastični pristop (kot najbolj realen približek opisa dejanskega problema) že od nekdaj deležen velike pozornosti, kljub temu pa je le redko uporabljen v praksi. Kot rečeno, so glavni razlogi, da je stohastični pristop tako redko uporabljen v praksi, nepoznavanje stohastičnih lastnosti inženirskih problemov, kompleksnost stohastičnega pristopa in dejstvo, da uporaba parametrov z verjetnostno porazdelitvijo enormno poveča velikost in numerično zahtevnost problema. Razvoj novih metod je tako pogojen z zmogljivostjo računalnikov. V zadnjih dveh desetletjih je, vzporedno z rastjo in napredkom v računalniški tehnologiji, raslo tudi zanimanje za stohastičen pristop in posledično je raslo število novo razvitih metod. Vendar potreba po enovitem pristopu, ki bi omogočal sintezo modeliranja stohastičnih pojavov ter mehanske analize inženirskih problemov, ostaja. Prav tako še vedno ostaja potreba po izboljšavah in razvoju novih metod, s katerimi bi bilo modeliranje stohastičnosti enostavnejše in učinkovitejše.

1.2 Predstavitev stanja na obravnavanem področju

Vrednost spremenljivk, ki se stohastično spreminjajo po prostoru in/ali času, se lahko opiše s stohastičnim poljem (prostor) ali procesom (čas). V doktorski disertaciji se omejimo na probleme, kjer se obravnavane količine stohastično spreminjajo po domeni problema, kar opišemo s stohastičnim poljem (Phoon et al., 2002, Ghanem in Spanos, 2003, Grigoriu, 2006). Kot je bilo že v uvodu omenjeno, se kljub velikemu interesu raziskave na tem področju intenzivneje opravljajo šele v zadnjih dveh desetletjih, saj upoštevanje stohastičnosti bistveno poveča numerično zahtevnost problema. Tendencia večine v zadnjem času razvitih metod je v smeri možnosti uporabe metode končnih elementov, ki se na ta način razširi v *metodo stohastičnih končnih elementov*. Metoda stohastičnih končnih elementov je v splošnem sestavljena iz dveh korakov. Prvi korak predstavlja reprezentacijo

in diskretizacijo stohastičnega polja, drugi korak pa izračun statistike odziva konstrukcije. Mreža končnih elementov je za posamezen korak lahko različna. V naslednjih treh podpoglavjih je predstavljeno obstoječe stanje in do danes razvite metode za vsakega izmed obeh korakov ter posebej za perturbacijsko metodo, ki je ena izmed metod za izračun statistike odziva konstrukcije. Tem trem podpoglavjem sledi še podpoglavje, v katerem so predstavljena pomembnejša do danes razvita programska okolja za metodo končnih elementov, ki omogočajo aplikacijo stohastičnega pristopa.

1.2.1 Diskretizacija stohastičnih polj

Stohastično polje je za implementacijo v metodo stohastičnih končnih elementov potrebno ustrezno diskretizirati. Diskretizacija stohastičnega polja pomeni, da se zvezno stohastično polje aproksimira s končnim številom stohastičnih spremenljivk. Metode diskretizacije na splošno razdelimo v dve skupini.

V prvo skupino lahko razvrstimo metode, po katerih se stohastično polje reprezentira tako, da se celotno domeno, na kateri je problem definiran, razdeli na več poddomen oziroma končne elemente. Na vsakem končnem elementu je stohastično polje diskretizirano z eno ali več slučajnimi spremenljivkami. Število slučajnih spremenljivk je tako proporcionalno številu končnih elementov. Koreliranost vrednosti stohastičnega polja preko roba elementa določa kovariančna funkcija. V splošnem je za višjo natančnost potrebnih več končnih elementov, vendar gostejša mreža pomeni višjo koreliranost končnih elementov in posledično korelacijsko matriko blizu singularnosti, kar lahko povzroči numerične nestabilnosti (Matthies et al., 1997, Liu, 1993, Keese 2003, Stefanou 2009, Schuëller 2006). Poleg tega z naraščanjem števila končnih elementov narašča število slučajnih spremenljivk. Število slučajnih spremenljivk določa dimenzijo stohastičnega prostora, numerična zahtevnost problema zato na splošno raste eksponentno s stohastično dimenzijo. Rešljivost je tako pogojena z velikostjo determinističnega problema, želeno natančnostjo rezultatov in hitrostjo računalnika. V to skupino lahko uvrstimo:

- *interpolacijsko metodo ali metodo oblikovnih funkcij* (Liu et al. 1986a,b), po kateri se slučajno polje interpolira z oblikovnimi funkcijami končnih elementov,
- *metodo središčne točke* (ang. *midpoint method*), pri kateri vrednost slučajne spremenljivke posameznega končnega elementa predstavlja vrednost stohastičnega polja v središčni točki tega elementa (Li in Kiureghian, 1993),
- *metodo lokalnega povprečenja* (Vanmarcke, 1983), pri kateri se stohastični proces preko končnega elementa predstavi s povprečno vrednostjo procesa na tem elementu ter
- *metodo utežnih ostankov* (ang. *weighted integral method*, Noh, 2005).

Korak naprej v smislu rešljivosti problema so naredile metode, ki stohastično polje reprezentirajo z vrsto. Prednost teh metod je redukcija velikega števila koreliranih stohastičnih spremenljivk na manjše število nekoreliranih stohastičnih spremenljivk. V to skupino metod spadajo:

- *Razvoj v Karhunen-Loèvovo vrsto* ali *Karhunen-Loèvova dekompozicija* (Ghanem in Spanos, 2003), ki predstavlja razvoj stohastičnega procesa v ortogonalno vrsto, v kateri so ortogonalne funkcije izbrane kot lastne funkcije homogene Fredholmove integralske enačbe druge vrste s kovariančno funkcijo kot jedrom.
- *Spektralna reprezentacija* (predstavljena npr. v Stefanou, 2007) stohastično polje razvije v trigonometrično vrsto z amplitudami in faznim zamikom kot stohastičnimi spremenljivkami problema.
- *Razvoj z linearnim optimalnim ocenjevanjem* (ang. *expansion optimal linear estimation method*, Li, 1993) stohastični proces izrazi kot linearno funkcijo vektorja voziščnih vrednosti v smislu njegove spektralne dekompozicije.

Učinkovitost zgoraj naštetih metod je pogojena z zahtevnostjo računanja determinističnih členov v vrsti ter odvisnostjo natančnosti rezultatov od števila členov v vrsti. Glede slednje zahteve je metoda razvoja v Karhunen-Loèvovo (v nadaljevanju K-L) vrsto optimalna, saj je napaka aproksimacije za izbrano število členov vrste minimalna v smislu srednje kvadratne napake (ang. *mean square error*). Zaradi tega v okviru doktorske disertacije za opis stohastičnega polja uporabljamo K-L vrsto in si je potrebno nekoliko natančneje pogledati stanje do danes razvitih metodologij za izračun členov K-L vrste.

Pri razvoju v K-L vrsto deterministične dele členov vrste predstavljajo lastne vrednosti in lastne funkcije, ki so rešitev homogene Fredholmove integralske enačbe druge vrste, pri kateri je jedro kovariančna funkcija. Šibka točka K-L vrste je prav v težavnosti reševanja te enačbe, saj analitične rešitve obstajajo le za določene tipe kovariančnih funkcij ter za enostavne in pravilne geometrijske domene problema (za tak enostaven primer so izpeljane analitične rešitve npr. v Ghanem in Spanos, 2003). V splošnem je to enačbo potrebno rešiti numerično. Razvitih je bilo več metod numeričnega reševanja, npr. uporaba diskretne kosinusne transformacije (Courmontagne, 1999), reševanje z uporabo različnih ortogonalnih baz (npr. triangularnih, Babolian et al., 2008, valčkov (ang. *wavelet*), Phoon et al., 2002, metoda mnogokratnih polov, Frauenfelder et al., 2005, in Galerkinova metoda, Ghanem in Spanos, 2003). Za implementacijo problema v okoljih za metodo končnih elementov je od naštetih najprimernejša Galerkinova metoda, ki Fredholmovo integralno enačbo prevede na posplošen problem lastnih vrednosti. Slabost te metode je, da je dobljena kovariančna matrika polna in zato zelo draga za reševanje. Da bi pocenili reševanje tega posplošenega problema lastnih vrednosti, je bila zato s strani nekaterih avtorjev (Phoon et al., 2002, Li et al., 2008, Stefanou et al., 2005, Stefanou, 2009) uporabljena poe-

nostavljena kovariančna funkcija, s katero je v primeru nizko koreliranih stohastičnih polj kovariančna matrika razpršena in je zato možna uporaba učinkovitejših algoritmov. Vendar imajo ti poskusi uporabe modificirane kovariančne funkcije tudi negativne posledice, saj le-ta lahko privede do numerične nestabilnosti postopka, ki pa je v obstoječih člankih večinoma prezrta. Vzroki in posledice numerične nestabilnosti so podrobneje predstavljeni v poglavju 5.

1.2.2 Izračun statistike odziva konstrukcije

Drugi del analize v metodi stohastičnih končnih elementov predstavlja izračun statistike odziva konstrukcije. Obstoječe metode za izračun statistik odziva lahko razdelimo na tri tipe:

- *simulacije Monte Carlo*. Pri tej metodi se vrednost stohastičnih spremenljivk v vsaki simulaciji določi naključno (z generatorji naključnih števil, ki so vgrajeni v večino programskih jezikov). S temi vrednostmi se nato rešuje deterministični problem. Izvede se želeno število simulacij, v vsaki simulaciji se beleži zelena količina (npr. pomik, kritična obtežba). Statistiko odziva se nato določi s standardnimi statističnimi metodami. Posledica tega je, da je natančnost rešitve odvisna od števila simulacij, kar omejuje uporabnost te metode predvsem pri problemih večjih dimenzij (determinističnih in/ali stohastičnih) ali ko nas zanimajo repne vrednosti odziva (npr. pri analizi zanesljivosti). Kljub temu ostaja metoda Monte Carlo ena najbolj uporabljenih, saj je zelo robustna, enostavna za implementacijo, računski čas pa je zaradi medsebojne neodvisnosti posameznih simulacij možno skrajšati tudi s paralelizacijo procesa.
- *Perturbacijska metoda* (Sudret, 2002, Stefanou, 2009, Lin et al., 2008) vektor odziva razvije v Taylorjevo vrsto okrog pričakovanih vrednosti in omogoča izračun statistik drugega reda. Za izračun posameznih členov Taylorjeve vrste je potrebno izračunati odvode odziva konstrukcije po slučajnih spremenljivkah. Analiza, s katero se odvode izračuna, se imenuje *občutljivostna analiza*. Obstaja več metod za izvedbo občutljivostne analize, ki bodo posebej predstavljene v poglavju 1.2.3. Natančnost perturbacijske metode je odvisna od zveznosti in nelinearnosti odziva, koeficienta variacije stohastičnega polja in reda, do katerega se Taylorjeva vrsta izračuna. Slabost te metode je, da je uporabna le za primere, ko je odziv v odvisnosti od spreminjajočih se vhodnih parametrov zvezen. V mehanskih problemih to pomeni, da lahko metoda dovolj natančno opiše le primere, pri katerih se porušni mehanizem v odvisnosti od spreminjajočih se vhodnih parametrov ne spreminja. Prednost perturbacijske metode je, da je ne glede na način izračuna členov Taylorjeve vrste praviloma numerično veliko učinkovitejša v primerjavi z Monte Carlo metodo.

- *Spektralna metoda stohastičnih končnih elementov* odziv konstrukcije aproksimira z ortogonalnimi Hermitovimi polinomi (polinomski kaos, Ghanem in Spanos, 2003, Field in Grigoriu, 2004, Gaignaire et al., 2006). Ob zahtevi, da je napaka zaradi uporabe končnega števila polinomov minimalna, se problem pretvori v razširjen sistem enačb, katerega rešitev omogoča neposreden izračun statistike odziva. Slabost te metode je, da je uporabna (numerično učinkovita) le za linearne probleme. Metoda je tudi omejena z zmogljivostjo današnjih računalnikov, saj je razširjeni sistem linearnih enačb neprimerno večji v primerjavi z determinističnim sistemom.

1.2.3 Občutljivostna analiza

Občutljivostna analiza je analiza, ki izračuna občutljivost (odvod) funkcije odziva glede na izbrani parameter. Glede na red iskanega odvoda je potrebno izvesti občutljivostno analizo tega reda. Odvod prvega reda se izračuna z občutljivostno analizo prvega reda, odvod drugega reda se izračuna z občutljivostno analizo drugega reda ali v splošnem: odvod i -tega reda se izračuna z občutljivostno analizo i -tega reda. V literaturi je zelo redko zaslediti uporabo občutljivostne analize višjega reda (Bebamzadeh in Haukaas, 2008, Rezaiee-Pajand in Kadkhodaye Bahre, 2011, Ozaki, Kimura in Berz 1995). Razlog je predvsem v zahtevnem in zamudnem ročnem izpeljevanju analitičnih izrazov za višje odvode ali na drugi strani velikem računskem času in akumuliranju numeričnih napak ob uporabi numeričnih metod.

Do danes se je razvilo več metod za izračun občutljivostne analize:

- *Metoda končnih diferenc* (glej npr. Haftka in Adelman, 1989) je približna metoda in najenostavnejša izmed metod za izračun občutljivostne analize. Metoda je izpeljana iz razvoja funkcije v Taylorjevo vrsto. Lahko so uporabljene “backward” (izbira diferenc nazaj), “forward” (izbira diferenc naprej) ali simetrične (ang. *central*) difference. Prednost metode končnih diferenc je, da je robustna in primerna za poljubne probleme. Glavna slabost te metode je, da je zaradi neodstranljivih napak nestabilna. Obstajata namreč dva vira napak: prvi vir je napaka zaradi zanemaritve višjih členov Taylorjeve vrste, iz katere je metoda končnih diferenc izpeljana. Drugi vir pa je zaokrožitvena napaka, ki nastane zaradi končne natančnosti zapisa števil v računalniku (t.i. formata plavajoče vejice), kar pomeni, da je računalniški zapis posameznega realnega števila omejen le na določeno število decimalnih mest natančno. Medtem ko se prva napaka z manjšanjem končne difference manjša, se druga napaka veča. Zato je potrebno biti zelo pazljiv pri izbiri ustrezne difference, pri čemer pri kompleksnejših primerih, med katere v tem okviru spada tudi metoda končnih elementov, izbira ustrezne difference ni tako enoznačna in je običajno potrebnih več iteracij, da se doseže ustrezno natančnost rezultata. Zato je metoda končnih diferenc v primeru velikega števila občutljivostnih parametrov in/ali kompleksnih

mehanskih problemov numerično zelo draga, pri posebnih, kompleksnejših primerih in občutljivostih, ki so znatno nižjega velikostnega reda, kot je odziv sam, pa dovolj natančne rešitve zaradi neodstranljivih napak sploh ni možno dobiti. V ta namen je bilo narejenih nekaj izboljšav, s katerimi je dosežena boljša stabilnost metode (npr. Voorhees, Millwater in Bagley 2011, Cho in Kim, 2006) ali izboljšana numerična učinkovitost (npr. Press et al. 1988). Uporabe končnih diferenc za izračun višjih odvodov v literaturi skorajda ni, saj je problem predvsem v dolgih računskih časih ter akumuliranju numeričnih napak, ki so v primeru odvodov višjega reda velikokrat neodstranljive (Voorhees, Millwater in Bagley, 2011).

- *Variacijska metoda občutljivostne analize* (ang. *continuum derivatives*). Po tej metodi se osnovne enačbe mehanskega problema (to so parcialne diferencialne enačbe ali integralska enačba, dobljena z uporabo principa o virtualnem delu) najprej odvaja, sledi diskretizacija enačb za uporabo v metodi končnih elementov (Akbari et. al, 2010). Običajno se uporabi enako diskretizacijo za mehansko in občutljivostno analizo, lahko pa sta tudi različni.
- *Diskretna metoda občutljivostne analize* (ang. *discrete derivatives*). Po tej metodi se osnovne enačbe problema najprej diskretizira in šele nato odvaja (Keulen et al., 2005, Choi in Kim, 2005, Akbari et. al, 2010).

Za slednji, variacijsko in diskretno občutljivostno analizo, se lahko uporabi pristop z direktnim odvajanjem (ang. *direct differentiation*) ali pridruženi pristop (ang. *adjoint approach*) (Choi in Twu 1989, Michaleris et al. 1994, Keulen et al. 2005). Oba pristopa vodita do istega rezultata, razlika pa je v numerični učinkovitosti. V primeru stacionarnih linearnih sistemov je direktno odvajanje primernejše, ko imamo majhno število občutljivostnih parametrov in veliko število funkcij odzivov, medtem ko je drugi pristop primernejši za primer, ko nas zanima manjše število funkcij odzivov in večje število občutljivostnih parametrov. Pri kompleksnejših, časovno odvisnih povezanih problemih ter iskanih višjih odvodih je izračun, po katerem pristopu je reševanje problema numerično učinkovitejše, bolj zapleten, razlika med numerično učinkovitostjo enega ali drugega pristopa pa je manjša (za konkretne izračune glej npr. Michaleris et al. 1994).

Enačbe, dobljene z diskretizacijo v okviru metode končnih elementov, se običajno implicitno rešuje z uporabo Newton-Raphsonove iterativne metode. Če se isti pristop uporabi tudi pri občutljivostni analizi, se dobi analitične vrednosti odvodov, zato sta variacijska in diskretna občutljivostna analiza analitični metodi. Kljub vsemu pa je, ne glede na uporabljeno variacijsko ali diskretno občutljivostno analizo, izpeljevanje odvodov osnovnih enačb in ročno vnašanje dobljenih izrazov v kodo končnega elementa zelo kompleksno in dolgotrajno delo, še posebej v primeru časovno odvisnih povezanih problemov in pri iskanih višjih odvodih. Zato se v praksi pogosto uporablja poenostavitev, ko se odvode na nivoju končnih elementov izračuna numerično z metodo končnih diferenc, nato pa se

globalni problem reši analitično. Tak pristop k variacijski ali diskretni analizi se imenuje semi-analitična občutljivostna analiza. Problem semi-analitične občutljivostne analize je enak, kot je opisan pri metodi končnih diferenc. Numerična nestabilnost postopka, posebno v primerih iskane občutljivosti na oblikovne parametre problema, lahko vodi do velikih napak. Temu problemu je pozornost posvetilo veliko študij, ki so natančnost semi-analitične občutljivostne analize poskušale izboljšati z uporabo diferenc višjega reda ali z bolj temeljnimi modifikacijami na nivoju končnih elementov (Keulen in Boer, 1998, Boer et al., 2002).

Napredek v računalniški znanosti je ponudil še dve možnosti: odvajanje z uporabo simbolnega in algebralnega sistema kot je npr. Mathematica (Mathematica 9.0) ter avtomatsko odvajanje (ang. *automatic differentiation* ali *computational differentiation*). Medtem ko odvajanje z uporabo splošnega algebralnega sistema lahko vodi do problema nenadzorovane rasti izrazov, pri avtomatskem odvajanju tega problema ni. Avtomatsko odvajanje je zasnovano na dejstvu, da vsak računalniški program izvaja zaporedje elementarnih aritmetičnih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje ...) in elementarnih funkcij (log, sin, cos ...). Posledično se odvodi lahko izračunajo avtomatsko s ponavljajočo uporabo verižnega pravila na te operacije, dobljene vrednosti pa so analitične, točne do natančnosti računalniškega zapisa števil (Griewank, 2000). Avtomatsko odvajanje je za izračun občutljivostne analize lahko uporabljeno na globalnem nivoju problema ali pa na nivoju končnih elementov. Slabost uporabe avtomatskega odvajanja na globalnem nivoju je, da je aplikacija te tehnike nepraktična in v primerih velikih komercialnih okolij za končne elemente celo neizvedljiva. Na drugi strani aplikacija avtomatskega odvajanja na nivoju posameznega končnega elementa prav tako ni enostavna, saj so lahko prisotne odvisnosti med posameznimi spremenljivkami, ki iz izrazov v programski kodi na nivoju končnega elementa niso eksplicitno razvidne. Ta problem je rešil Korelc (2009a), ki je razširil tehniko avtomatskega odvajanja z vpeljavo izjem in na ta način omogočil uporabo avtomatskega odvajanja tudi na nivoju končnih elementov. Formulacija inženirskih problemov, ki temelji na uporabi razširjene tehnike avtomatskega odvajanja, se imenuje *Automatic Differentiation Based formulation* (ali okrajšano ADB formulacija) in je podrobneje predstavljena v poglavju 3.2.

1.2.4 Programska okolja za metodo končnih elementov, ki omogočajo aplikacijo stohastičnega pristopa

V zadnjih dveh desetletjih se, skladno s povečevanjem zanimanja za stohastični pristop, po svetu razvija več programskih kod, ki omogočajo stohastični pristop. V večini predstavljenih programov se poleg možnosti ocene vpliva spremembe slučajnih parametrov na odziv konstrukcije (s čimer se ukvarjamo v disertaciji) veliko pozornost namenja predvsem analizi zanesljivosti konstrukcij, s katero se oceni verjetnost porušitve konstrukcije. Oceno zanesljivosti se sicer lahko določi tudi z uporabo simulacij Monte Carlo (ki jih omogočajo

praktično vsi predstavljeni programi) ali perturbacijske metode (oz. drugih podobnih "response surface" metod, ki odziv razvijejo v vrsto), obstajajo pa tudi aproksimativne metode za izračun verjetnosti odpovedi konstrukcije. Najbolj znani sta metoda zanesljivosti prvega reda (ang. *first-order reliability method* ali okrajšano FORM) in metoda zanesljivosti drugega reda (ang. *second-order reliability method* ali okrajšano SORM), ki jih ima implementiranih večina predstavljenih programov. Večina predstavljenih programov omogoča tudi izračun občutljivostne analize, pri čemer se občutljivosti razen izjemoma izračunajo z metodo končnih diferenc. Pomembnejše razlike med programi se pokažejo tudi pri tem, ali omogočajo tudi opis stohastičnega polja ali le slučajnih spremenljivk (ki se preko domene problema ne spreminjajo) ter v numerični učinkovitosti glede na število slučajnih parametrov, kompleksnost problema, želeno natančnost rezultatov itd.

NESSUS je programski paket, ki je bil prvotno zasnovan na Southwest Research inštitutu kot del Nasinega projekta (Thacker et al., 2006). NESSUS omogoča simulacijo slučajnih spremenljivk, in sicer obtežbe, geometrije, materialnih parametrov in drugih, definiranih s strani uporabnika. V program je vgrajenih več različnih probabilističnih metod, npr. simulacije Monte Carlo, FORM, SORM, Monte Carlo s prioritetnim vzorčenjem (ang. *importance sampling*) in druge. NESSUS omogoča tudi izvedbo občutljivostne analize z metodo končnih diferenc. Glavna prednost programa NESSUS je, da omogoča tako izvedbo analize s pripravljenimi analitičnimi modeli kot tudi povezavo z različnimi komercialnimi programskimi okolji (kot npr. ABAQUS, ANSYS, NASTRAN itd.).

COSSAN je programski paket, katerega razvoj se je začel leta 1992 na Inštitutu inženirske mehanike univerze Leopolda Franzensa v Innsbrucku (Avstrija). Avtorja programa sta Schuëller in Pradlwarter (2006). COSSAN sestavljata dve množici komponent in sicer "Stand Alone Tool Box" ter "Third Party Communication Tools". Prvi je zasnovan kot odprto splošno namensko programsko orodje, ima predpripravljenih več različnih modulov, razvrščenih v posamezne skupine, in omogoča reševanje različnih mehanskih problemov, kot so optimizacija, modeliranje širjenja razpok, naključne vibracije itd. Omogoča tudi modeliranje stohastičnih polj, vendar v predstavitvi programa ni podatka o načinu in uporabljeni metodi za modeliranje le-teh. Komponenta "Third Party Communication Tools" ponuja možnost komunikacije z zunanjimi kodami in omogoča stohastično analizo brez spreminjanja izvirne kode determinističnih končnih elementov. COSSAN omogoča tudi izvedbo občutljivostne analize z uporabo končnih diferenc.

Na Kalifornijski univerzi so bili v okviru raziskovalnega dela študentov na doktorskem študiju razviti trije programi za probabilistično analizo: CalREL, FERUM in OpenSees (Kiureghian, Haukaas in Fujimura, 2006). Vsi trije programi so brez grafičnih vmesnikov, značilnih za komercialne programe, temveč so razviti za namen raziskovanja in se kontinuirno razvijajo in dopolnjujejo. Prvi je bil razvit CalREL leta 1980, druga dva programa izhajata iz tega, zato imata večinoma iste lastnosti in možnosti. CalREL je namenjen predvsem analizi zanesljivosti konstrukcij in omogoča uporabo različnih metod,

npr. simulacije Monte Carlo, FORM, SORM, Monte Carlo s prioritetnim vzorčenjem itd. Pri tem omogoča modeliranje medsebojno neodvisnih ali določenih odvisnih slučajnih spremenljivk z več različnimi funkcijami gostote verjetnosti (ki jih CalREL avtomatično preslika v prostor standardnih normalnih slučajnih spremenljivk). Nadalje omogoča občutljivostno analizo, in sicer avtomatično s strani programa po metodi končnih diferenc, lahko pa izraze za odvode uporabnik v izvorni kodi implementira sam (pristop z direktnim odvajanjem). Največja razlika med vsemi tremi programi so programski jeziki, v katerih so kode napisane. CalREL je napisan v programskem jeziku FORTRAN, FERUM v Matlab skriptu (ang. *Matlab scripting*), OpenSees pa v C++. Prednost FERUM-a pred drugima dvema je tako predvsem v tem, da je napisan v programskem jeziku, ki je začetnim uporabnikom lažje razumljiv. Slabost je slabša numerična učinkovitost. Glavna razlika OpenSees-a v primerjavi z drugima dvema pa je predvsem ta, da uporablja objektno orientiran pristop k modeliranju mehanskih problemov, kar pomeni, da ima vnaprej predpripravljene standardizirane izmenljive komponente, ki uporabniku olajšajo branje in uporabo v primerjavi z akademskimi programi, pri katerih je opis problema stvar raziskovalca in je zato lahko napisan nekonsistentno in nepregledno. Po drugi strani je prednost tega pristopa tudi njegova slabost, saj je zaradi tega bolj omejen in veliko manj fleksibilen v primerjavi s sistemom, ki omogoča popolno svobodo pri opisu problema in izpeljavi podprogramov.

Sadcheva in Keane (2007) v svojem članku predstavita formulacijo projekcijske sheme z reducirano bazo (ang. *reduced basis projection schemes*) za reševanje linearnih stohastičnih problemov z razvojem v sistem linearnih enačb, ki je primerna za implementacijo v programska okolja za končne elemente. V tem pristopu se izhaja iz semi-diskretiziranih parcialnih diferencialnih enačb mehanskega problema. Rešitev problema se na ta način aproksimira z linearno kombinacijo neznanih koeficientov in stohastičnih baznih vektorjev, ki so izbrani z metodo stohastičnih Krylovih podprostorov ustreznih dimenzij (Nair, 2001). Metoda je uporabna za stohastično polje. Za diskretizacijo le-tega avtorja uporabita razvoj v K-L vrsto z uporabo Galerkinove metode, pri čemer ne predstavita podrobnosti modeliranja tega koraka. Omejitev predstavljene formulacije modeliranja stohastičnih procesov je, da je uporabna le za linearne mehanske probleme.

Reh et al. (2006) v članku predstavijo analizo probablističnih končnih elementov z uporabo programa ANSYS. Razviti sta dve komponenti, ki omogočata stohastični pristop: ANSYS Probabilistic Design System in ANSYS DesignXplorer. Prva komponenta ima enak grafični vmesnik kot ANSYS in je namenjena predvsem zahtevnejšim uporabnikom, medtem ko slednja temelji na objektno orientiranem pristopu in je namenjena predvsem parametričnim študijam. DesignXplorer omogoča le modeliranje stohastičnih spremenljivk, medtem ko Probabilistic Design System omogoča tudi modeliranje stohastičnega polja, vendar o podrobnostih o načinu in metodi modeliranja le-tega ni podatka. Prednost ANSYS-a v primerjavi z drugimi programi, ki omogočajo stohastični pristop, je možnost

izračuna odvodov z avtomatskim odvajanjem. ANSYS je po naših podatkih edini program s stohastičnim pristopom, ki omogoča razvoj odziva v Taylorjevo vrsto višjega reda (kar pomeni perturbacijsko metodo višjega reda) z uporabo tehnike avtomatskega odvajanja. Avtomatsko odvajanje je aplicirano brez možnosti uporabe izjem in podajanja podatka o implicitnih odvisnostih, ki iz kode končnega elementa niso razvidne, zaradi česar je izvedljivost odvajanja omejena z dostopnostjo programske kode in odvisna od tipa vhodne spremenljivke, katero se odreja, ter tipa parametra odziva, ki je predmet raziskave.

Allaix in Carbone (2012) v svojem članku predstavita numerično orodje za diskretizacijo stohastičnega polja v K-L vrsto. Program je napisan v jeziku FORTRAN 90. Za izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev avtorja uporabita Galerkinovo proceduro, pri čemer je izračun kovariančne matrike izveden s kombiniranjem dveh poddomen diskretizacijske mreže fizikalne domene na podoben način, kot je predstavljen v disertaciji (in smo ga premierno predstavili na konferenci ECCOMAS v Benetkah, Korelc in Melink, 2008). Program se v okviru diskretizacije stohastičnega polja posveča predvsem avtomatizaciji določitve ustrezno goste mreže, da je napaka variance zaradi diskretizacije polja zelena majhna. Poleg tega avtorja v članku predstavita prednosti opisa stohastičnega odziva konstrukcije z uporabo perturbacijske metode višjega reda, vendar ni podatka o uporabljeni metodi za izračun odvodov.

Shang in Yun (2013) predstavita možnost diskretizacije stohastičnih polj v K-L vrsto z uporabo splošnega programskega okolja za metodo končnih elementov ABAQUS. Članek je posvečen predvsem predstavitvi uporabe različno gostih mrež za diskretizacijo fizikalne domene za izračun lastnih vrednosti in lastnih funkcij K-L vrste z uporabo Galerkinove metode ter za izvedbo izračuna odziva konstrukcije. Nadalje je predstavljena splošna metoda preslikave in interpolacije izračunanega stohastičnega polja na mrežo za izvedbo izračuna odziva konstrukcije, ki je implementirana v predstavljeno programsko kodo.

1.3 Tema doktorske disertacije

Glavni cilj doktorske disertacije je bil razviti splošen simbolni pristop k avtomatizaciji modeliranja močno in srednje koreliranih stohastičnih procesov v okolju za končne elemente. Kot rečeno, je stohastični pristop k modeliranju inženirskih problemov zelo kompleksen za analizo. Zato je bilo glavno vodilo iskanje numeričnih algoritmov in izboljšav obstoječih razvitih metod, ki bi bile kompatibilne z obstoječimi numeričnimi postopki, ki se uporabljajo v metodi končnih elementov. Metoda končnih elementov je v inženirskih problemih zaradi svoje robustnosti namreč najpogosteje uporabljena metoda po svetu. Temu primerno je preizkušena, ustrezno prilagojena in potrjeno natančna za zelo širok spekter inženirskih problemov. Razvoj avtomatizacije modeliranja stohastičnih procesov, ki je kompatibilna za uporabo in analiziranje v okolju za končne elemente, se zato ponuja kot najboljša izbira, vkolikor želimo, da je razvita avtomatizacija doprinos k širši uporabnosti

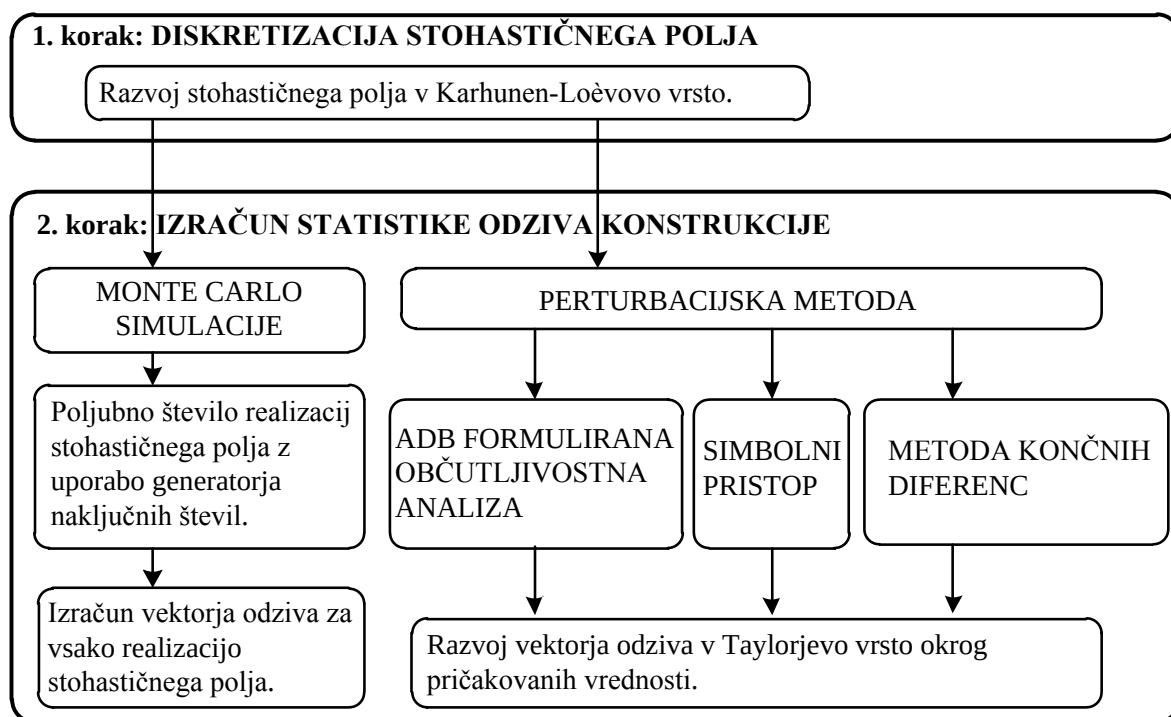
v inženirskih problemih. Razvoj takšne avtomatizacije ima posledično enake prednosti robustnosti in neomejenosti uporabe kot metoda končnih elementov sama, in sicer se jo da aplicirati na splošne geometrijsko in materialno nelinearne statične mehanske probleme.

Za razvoj avtomatizacije smo uporabili hibridni simbolno-numerični pristop, ki združuje program za simbolno računanje, avtomatski generator kode AceGen (Korelc, 2009b) z vgrajeno tehniko avtomatskega odvajanja in programski jezik za numerične operacije. Prednost tega pristopa je simbolni zapis enačb končnega elementa, ki jih avtomatski generator kode AceGen nato prevede v poljubni izbrani programski jezik. Razviti končni elementi so tako brez spreminjanja simbolnega zapisa uporabni v poljubnem izbranem programskem jeziku (npr. FORTRAN, C, Mathematica script, Matlab script itd.) in poljubnem okolju za metodo končnih elementov (npr. ABAQUS, AceFEM, FEAP itd.).

V okviru diskretizacije stohastičnega polja smo se posvetili razvoju formulacije stohastičnih končnih elementov, ki omogočajo operiranje s stohastičnimi polji za poljubne topologije in poljubno geometrijo problema. Cilj je bil razviti formulacijo, ki je robustna in ki jo je možno uporabiti v poljubnem splošnem okolju za metodo končnih elementov. Za diskretizacijo stohastičnega polja smo uporabili Karhunen-Loévo dekompozicijo, saj le-ta predstavlja optimalno redukcijo v smislu potrebnega števila členov vrste in je hkrati primerna za poljubno variabilne stohastične procese. Za izračun členov K-L dekompozicije smo zaradi njene aplikativnosti na metodo končnih elementov uporabili Galerkinovo metodo. Nadalje smo v okviru razvoja v K-L vrsto raziskovali možnost za numerično pocenitev tega postopka. Znotraj teh raziskav smo posebno pozornost posvetili poenostavljeni kovariančni funkciji, ki se z namenom pocenitve reševanja v primeru srednje koreliranih stohastičnih polj pogosto uporablja v literaturi. Dokazali smo, da poenostavljena kovariančna funkcija (predlagana v Phoon et al., 2002, Li et al., 2008, Stefanou et al., 2005 in Stefanou, 2009) ni pozitivno definitna. Posledično je problem numerično nestabilen. V doktorski disertaciji predstavimo dve alternativni modifikaciji kovariančne funkcije, ki pocenita numerično reševanje problema in hkrati zagotavljata boljšo numerično stabilnost.

Za realizacije stohastičnih problemov smo uporabili simulacije Monte Carlo in perturbacijsko metodo. V okviru slednje smo avtomatizacijo občutljivostne analize prvega reda, ki z uporabo avtomatskega odvajanja izračuna analitične vrednosti odvodov, razširili za občutljivostno analizo (poljubnega) višjega reda. Na ta način dobimo analitične vrednosti odvodov višjega reda, ki omogočajo razvoj odziva v Taylorjevo vrsto višjega reda, kar pomeni perturbacijsko metodo višjega reda. Razvito občutljivostno analizo višjega reda, ki temelji na avtomatskem odvajanju, odlikujejo natančnost, numerična učinkovitost ter zelo kratek in strnjen zapis kode končnega elementa. Metoda izračuna analitične vrednosti odvodov ob visoki numerični učinkovitosti. Posledično je možno izvesti občutljivostno analizo višjega reda za znatno večje število občutljivostnih parametrov, kot je bilo izvedljivo z drugimi metodami v preteklosti. Enako numerično učinkovitost in natančnost bi bilo možno doseči le še z ročnim izpeljevanjem izrazov za izračun odvodov znotraj

programske kode končnega elementa, vendar je ta postopek v primeru kompleksnejših problemov in višjega reda občutljivostne analize tako zamuden, da je vnos celotnih izrazov v kodo končnih elementov praktično neizvedljiv in se ga zato ne uporablja, temveč se za izračun odvodov uporablja druge metode, ki pa so numerično dražje in manj zanesljive. Celotna shema razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov je prikazana na sliki 1.1.



Slika 1.1: Procedura metode stohastičnih končnih elementov.

Figure 1.1: Stochastic finite element procedure.

1.4 Zasnova doktorske disertacije

Doktorska disertacija poleg uvodnega vsebuje še 8 poglavij:

- *2. poglavje:* Predstavitev teorije in temeljnih enačb metod, ki so v disertaciji uporabljene za numerično reševanje stohastičnih problemov.
- *3. poglavje:* Predstavitev hibridnega simbolno-numeričnega pristopa, uporabljenega v disertaciji.
- *4. poglavje:* Opis razvite avtomatizacije postopka diskretizacije stohastičnega polja v K-L vrsto.

- 5. *poglavje*: Predstavitev problema numerične nestabilnosti postopka ob uporabi aproksimirane K-L dekompozicije ter predlogi modifikacije aproksimacij za izboljšanje numerične stabilnosti postopka.
- 6. *poglavje*: Prikaz postopka izvedbe občutljivostne analize višjega reda po metodi direktnega odvajanja ter predstavitev postopka ob uporabi tehnike avtomatskega odvajanja.
- 7. *poglavje*: Predstavitev rezultatov in učinkovitosti predstavljene avtomatizacije diskretizacije stohastičnega polja in perturbacijske metode višjega reda z uporabo tehnike avtomatskega odvajanja na računskih primerih, v katerih sta stohastično modelirani geometrijska nepopolnost in korozija.
- 8. *poglavje*: Zaključki disertacije.
- 9. *poglavje*: Povzetek vsebine doktorske disertacije.
- 10. *poglavje*: Povzetek vsebine doktorske disertacije v angleščini.

2 Numerično reševanje stohastičnih problemov v mehaniki kontinuuma

V tem poglavju bomo podrobneje predstavili teorijo in temeljne enačbe za vsakega izmed korakov stohastičnega pristopa, ki smo ga privzeli v tej doktorski disertaciji in je prikazan na sliki 1.1. Predstavljene bodo tudi prednosti in slabosti ter obrazložitve odločitve za vsako izmed izbranih metod. Kot je zapisano že v uvodu, nam je bilo temeljno vodilo pri naboru ustreznih metod razvoj splošnega simbolnega pristopa k avtomatizaciji modeliranja stohastičnih procesov v okolju za končne elemente, ki se da aplicirati na splošne geometrijsko in materialno nelinearne statične mehanske probleme z močno in srednje koreliranimi stohastičnimi polji. Zaradi tega je bila morda prezrta katera izmed metod, ki za specifične probleme daje natančnejše rezultate ob morebitni višji numerični učinkovitosti. Vendar se ob uporabi ožje omejenih metod izgubi eleganca rešitev, ki so robustne in uporabne neodvisno od specifik in topologije problema. Vodilo k izboru primernih metod nam je bilo, da je na področju stohastike pomanjkanje predvsem v smeri uporabljenih aplikacij stohastičnih metod, ki bi omogočale reševanje problemov na podoben način kot se z metodo končnih elementov rešuje splošne mehanske probleme.

2.1 Diskretizacija stohastičnega polja

Stohastično polje je definirano v dveh različnih prostorih: fizikalnem prostoru ter prostoru slučajnih dogodkov. Narava prostora slučajnih dogodkov je takšna, da se v tem prostoru stohastičnega polja ne da diskretizirati z deljenjem na končno število poddomen, kot se to naredi pri fizikalni domeni v deterministični analizi končnih elementov. Zato je pristop k diskretizaciji stohastičnega polja drugačen kot pri običajni metodi končnih elementov. Razvoj teorij, ki so ponudile temeljne koncepte teorije predstavitve stohastičnih polj, sega v sredino prejšnjega stoletja. V tem obdobju se je razvilo več pristopov od katerih jih večina razvije slučajno polje v vrsto.

Naj bo $w(\mathbf{X}, \theta)$ stohastično polje, definirano na d -dimenzionalni fizikalni domeni $D \subset \mathbb{R}^d$, kjer je $\mathbf{X}$ vektor prostorskih koordinat in θ dogodek iz prostora slučajnih dogodkov Ω . Stohastično polje je določeno s pričakovano vrednostjo polja $\bar{w}(\mathbf{X})$ in kovariančno funkcijo $C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$. Kovariančna funkcija je funkcija, ki določa medsebojno koreliranost vrednosti preko stohastičnega polja.

Stohastično polje se lahko razvije v vrsto

$$w(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{k=1}^M N_k(\mathbf{X}) \xi_k(\theta) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\xi}(\theta), \quad (2.1)$$

kjer so ξ_k slučajne spremenljivke, N_k funkcije (najpogosteje so to oblikovne funkcije končnih elementov), ki jih združimo v vektorja $\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \{N_1(\mathbf{X}), N_2(\mathbf{X}), \dots, N_M(\mathbf{X})\}$ ter $\boldsymbol{\xi}(\theta) = \{\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_M(\theta)\}^T$.

Pričakovana vrednost in kovariančna funkcija aproksimiranega polja sta

$$\begin{aligned} \bar{w}(\mathbf{X}) &= \mathbf{N}(\mathbf{X})^T \bar{\mathbf{w}} \\ C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \mathbf{N}(\mathbf{X}_1)^T \mathbf{C} \mathbf{N}(\mathbf{X}_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

kjer je $\bar{\mathbf{w}} = E(\boldsymbol{\xi}(\theta))$ vektor pričakovanih vrednosti in $\mathbf{C}$ kovariančna matrika slučajnega vektorja $\boldsymbol{\xi}(\theta)$.

V preteklosti je bilo razvitih več metod, ki se razlikujejo v izbiri funkcij N_k in slučajnih spremenljivk ξ_k v enačbi (2.1). Nekatere izmed njih so predstavljene v naslednjih vrsticah (povzeto po Keese, 2003).

Interpolacijska metoda ali metoda oblikovnih funkcij (Liu et al., 1986a, 1986b) interpolira stohastično polje z oblikovnimi funkcijami končnih elementov $N_k(\mathbf{X})$ v vozliščih $\mathbf{X}_j$. Ker so oblikovne interpolacijske funkcije N_k običajno vzete tako, da so v vozlišču k enake 1, v preostalih vozliščih pa 0, iz tega sledi $\xi_k = \xi(\mathbf{X}_k)$. Pričakovana vrednost in kovariančna matrika iz izraza (2.2) sta v tem primeru

$$\begin{aligned} \bar{w}_k &= \bar{w}(\mathbf{X}_k) \\ C_{kj} &= C(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Metoda središčne točke je poseben primer metode oblikovnih funkcij, pri kateri so $N_k(\mathbf{X})$ odsekoma konstantne in kjer je $\mathbf{X}_k$ središčna točka končnega elementa.

Metoda lokalnega povprečenja (Vanmarcke, 1983) je metoda, pri kateri se prav tako uporabi odsekoma konstantne funkcije $N_k(\mathbf{X})$, le da se po tej metodi ξ_k izbere kot prostorsko povprečje stohastičnega polja $w(\mathbf{X}, \theta)$ preko domene k -tega končnega elementa (D_k) z volumnom $|V_k|$: $\xi_k(\theta) = \frac{1}{|V_k|} \int_{D_k} w(\mathbf{X}, \theta) d\mathbf{X}$. Pričakovana vrednost in kovariančna matrika se v tem primeru izračunata po izrazu

$$\begin{aligned} \bar{w}_k &= \frac{1}{|V_k|} \int_{D_k} \bar{w}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ C_{kj} &= \frac{1}{|V_k| |V_j|} \int_{D_k} \int_{D_j} C(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j) d\mathbf{X}_k d\mathbf{X}_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Zaradi povprečenja točne statistike metoda lokalnega povprečenja nekoliko podceni variabilnost stohastičnega polja.

Kot je bilo predstavljeno že v uvodnih poglavjih, je glavna slabost zgoraj naštetih metod ta, da je število slučajnih spremenljivk sorazmerno številu končnih elementov, s katerimi je diskretizirana fizikalna domena problema. Poleg tega so slučajne spremenljivke medsebojno korelirane. Z gostenjem mreže končnih elementov se koreliranost slučajnih spremenljivk viša, kar posledično pomeni kovariančno matriko blizu singularnosti. Ta problem je bil rešen z razvojem metod, ki so stohastično polje razvile v ortogonalno vrsto.

Metode razvoja v ortogonalno vrsto za funkcije N_k izberejo medsebojno ortogonalne funkcije. Posledično so slučajne spremenljivke medsebojno nekorelirane

$$\xi_k(\theta) = \frac{1}{||N_k||} \int_D w(\mathbf{X}, \theta) N_k(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Pričakovana vrednost in kovariančna matrika se v tem primeru izračunata po izrazih

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \int_D \bar{w}(\mathbf{X}) \mathbf{N}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ \mathbf{C} &= \int_D \int_D \mathbf{N}(\mathbf{X}_1) C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \mathbf{N}(\mathbf{X}_2)^T d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Glavna omejitev uporabnosti metod ortogonalnega razvoja v vrsto je, da so primerne le za stohastična polja z Gaussovo porazdelitvijo. Izmed metod razvoja v ortogonalno vrsto je v smislu srednje kvadratne napake (ang. *mean square error*) pri omejenem številu členov v vrsti ponudila najboljšo rešitev Karhunen-Loèveova (K-L) dekompozicija, ki so jo leta 1947 neodvisno razvili Karhunen ter Kac in Siegert ter leta 1948 Loève in je predstavljena v veliko literaturah, npr. Ghanem in Spanos, 2003, Huang, Quek in Phoon, 2001, Stefanou in Papadrakakis, 2007. K-L dekompozicija je spektralna reprezentacija stohastičnega polja, pri kateri so za funkcije N_k izbrane lastne funkcije homogene Fredholmove integralske enačbe drugega reda. Glavna omejitev uporabnosti K-L dekompozicije je, kot pri ostalih metodah razvoja v ortogonalno vrsto, da je primerna le za stohastična polja z Gaussovo porazdelitvijo. Za primere drugih, ne-Gaussovih porazdelitev, so bili sicer razviti pristopi, kako aplicirati razvoj teh procesov v K-L vrsto (npr. Schevenels et al., 2004), vendar se bomo v doktorski disertaciji omejili le na Gaussova stohastična polja in se bomo opisu teh pristopov zato na tem mestu izognili. Ker je zaradi svojih prednosti K-L vrsta izbrana za diskretizacijo stohastičnega polja v disertaciji, je podrobneje predstavljena v naslednjem poglavju.

2.1.1 Diskretizacija stohastičnega polja v Karhunen-Loèvovo vrsto

Stohastično polje $w(\mathbf{X}, \theta)$ se lahko razvije v K-L vrsto, ki se jo za potrebe aplikativnosti diskretizacije odreže in obdrži le prvih M členov vrste (Ghanem in Spanos, 2003)

$$w(\mathbf{X}, \theta) = \bar{w}(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{X}) \xi_k(\theta) \approx \bar{w}(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^M \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{X}) \xi_k(\theta), \quad (2.7)$$

kjer je $\bar{w}(\mathbf{X})$ pričakovana vrednost stohastičnega polja, λ_k in $f_k(\mathbf{X})$ so lastne vrednosti in lastne funkcije, θ je dogodek iz prostora slučajnih dogodkov Ω , $\xi_k(\theta)$ pa so normirane nekorelirane slučajne spremenljivke. V primeru Gaussovega stohastičnega polja, so $\xi_k(\theta)$ spremenljivke z Gaussovo porazdelitvijo z ničelno pričakovano vrednostjo ter enotsko varianco ali t. i. standardizirano normalno porazdelitvijo. λ_k in $f_k(\mathbf{X})$ so rešitev homogene Fredholmove integralske enačbe drugega reda v kateri je jedro kovariančna funkcija $C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$

$$\int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) f_k(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 = \lambda_k f_k(\mathbf{X}_2). \quad (2.8)$$

Integralske enačbe Fredholmovega tipa so podrobneje opisane v knjigi Mikhlina (1957). Enačba (2.8) se imenuje homogena, ker je t.i. prosti člen Fredholmove enačbe v tem primeru enak nič. Kovariančna funkcija je po definiciji omejena, simetrična in pozitivno definitna. λ_k v tej enačbi, ki odgovarjajo netrivialni rešitvi enačbe, so *karakteristične vrednosti* ali *lastne vrednosti*, f_k pa so *karakteristične funkcije* ali *lastne funkcije*. Lastne funkcije tvorijo kompletno množico ortonormiranih funkcij, tako da velja

$$\int_D f_k(\mathbf{X}) f_l(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \delta_{kl}, \quad (2.9)$$

kjer je δ_{kl} Kroneckerjev simbol. Lastne vrednosti predstavljajo magnitudo lastnih funkcij. Ker je kovariančna funkcija pozitivno definitna, so tudi lastne vrednosti pozitivne in če jih uredimo v padajočem redu $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$, ima vsak naslednji člen K-L vrste manjšo ali enako magnitudo in zato vpliv vsakega naslednjega člena na obnašanje stohastičnega polja v splošnem pada. Kot je znano iz funkcionalne analize, hitreje kot pada kovariančna funkcija proti nič (kar pomeni, da je stohastično polje manj korelirano), širša je odgovarjajoča spektralna gostota, kar pomeni da je za dovolj natančno predstavitev stohastičnega polja potrebnih več členov K-L dekompozicije. Ali obratno, bolj kot je stohastično polje korelirano, hitreje padajo vrednosti λ_i z naraščajočim indeksom i . Lastne vrednosti z višjim indeksom imajo zato v tem primeru bistveno manjše (do nekaj velikostnih redov) vrednosti v primerjavi z lastnimi vrednostmi z začetnimi indeksi in zato znatno manjši vpliv na odziv polja. Stohastično polje je zato v primeru visoke koreliranosti dovolj natančno opisano že z nekaj začetnimi členi K-L vrste. V skrajnem primeru, ko je $C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sigma^2$, zadostuje samo en člen vrste.

Iz (2.7) z upoštevanjem ortogonalnosti sledi spektralna dekompozicija kovariančne funkcije

$$C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\mathbf{X}_1) f_k(\mathbf{X}_2). \quad (2.10)$$

Kovariančna funkcija in njene lastnosti bodo podrobneje predstavljene v poglavju 5. V disertaciji se omejimo na stohastične procese drugega reda (ang. *second order random process*). Stohastični proces drugega reda je proces, za katerega velja, da je pričakovana vrednost $E(w^2) < +\infty$ za vsak slučajni dogodek iz prostora slučajnih dogodkov. To pomeni, da so pričakovana vrednost, korelacija in kovariančna funkcija tega procesa dobro definirane in končne. S to zahtevo ne izgubimo splošnosti, saj je velika večina fizikalno merljivih stohastičnih procesov, s katerimi se srečamo pri mehanskih problemih, drugega reda.

Za boljšo predstavo, kakšna je povezava med enačbama (2.8) in K-L dekompozicijo, si pogledjmo naslednjo izpeljavo. Zapišimo kovariančno funkcijo za stohastično polje $w(\mathbf{X}, \theta)$:

$$C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = E(w(\mathbf{X}_1, \theta)w(\mathbf{X}_2, \theta)) - E(w(\mathbf{X}_1, \theta))E(w(\mathbf{X}_2, \theta)) \quad (2.11)$$

Ob razvoju stohastičnega polja v vrsto (enačba (2.7)), sledi

$$\begin{aligned} C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= E \left(\left(\bar{w}(\mathbf{X}_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{X}_1) \xi_k(\theta) \right) \left(\bar{w}(\mathbf{X}_2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} f_m(\mathbf{X}_2) \xi_m(\theta) \right) \right) \\ &\quad - E \left(\bar{w}(\mathbf{X}_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{X}_1) \xi_k(\theta) \right) E \left(\bar{w}(\mathbf{X}_2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} f_m(\mathbf{X}_2) \xi_m(\theta) \right) \\ &= \bar{w}(\mathbf{X}_1) \bar{w}(\mathbf{X}_2) + E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{X}_1) \xi_k(\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} f_m(\mathbf{X}_2) \xi_m(\theta) \right) - \\ &\quad - \bar{w}(\mathbf{X}_1) \bar{w}(\mathbf{X}_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E(\xi_k(\theta) \xi_m(\theta)) \sqrt{\lambda_k \lambda_m} f_k(\mathbf{X}_1) f_m(\mathbf{X}_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ker sta $\xi_k(\theta)$ in $\xi_m(\theta)$ slučajni spremenljivki z Gaussovo porazdelitvijo z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko varianco, je bilo v izpeljavi upoštevano

$$E(\xi_k(\theta)) = 0. \quad (2.13)$$

Pričakovana vrednost produkta dveh slučajnih spremenljivk s standardizirano normalno

porazdelitvijo je

$$E(\xi_k(\theta)\xi_m(\theta)) = \delta_{km}. \quad (2.14)$$

Iz tega sledi

$$C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k \lambda_k} f_k(\mathbf{X}_1) f_k(\mathbf{X}_2). \quad (2.15)$$

Ker so lastne vrednosti pozitivna realna števila, velja $\sqrt{\lambda_k \lambda_k} = \lambda_k$. Sedaj pomnožimo obe strani enačbe (2.15) z $f_n(\mathbf{X}_2)$ in integriramo po domeni D . Če nato upoštevamo ortogonalnost lastnih funkcij (en. (2.9)), dobimo

$$\begin{aligned} \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) f_n(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2 &= \int_D \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\mathbf{X}_1) f_k(\mathbf{X}_2) f_n(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\mathbf{X}_1) \int_D f_k(\mathbf{X}_2) f_n(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2 \\ &= \lambda_n f_n(\mathbf{X}_1), \end{aligned} \quad (2.16)$$

kar je točno homogena Fredholmova integralska enačba druge vrste.

Poglejmo si še dokaz, da je posplošeni koordinatni sistem, ki ga definirajo lastne funkcije, optimalen v smislu srednje kvadratne napake, ki nastopi zaradi zanemaritve višjih členov K-L dekompozicije. Naj bo $h_k(\mathbf{X})$ kompletna ortonormalna množica funkcij. Stohastično polje $w(\mathbf{X}, \theta)$ z ničelno pričakovano vrednostjo $\bar{w}(\mathbf{X}) = 0$ aproksimiramo s konvergenčno vrsto oblike

$$w(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k(\mathbf{X}) \xi_k(\theta). \quad (2.17)$$

Odrežimo vrsto (2.17) po členu M . Napaka zaradi zanemaritve členov je

$$\epsilon_M = \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k h_k(\mathbf{X}) \xi_k(\theta). \quad (2.18)$$

Enačbo (2.17) pomnožimo s $h_l(\mathbf{X})$, integriramo po domeni D in upoštevamo ortogonalnost množice funkcij $h_k(\mathbf{X})$. Če enačbo preuredimo tako, da izrazimo $\xi(\theta)$, sledi

$$\xi_l(\theta) = \frac{1}{\lambda_l} \int_D w(\mathbf{X}, \theta) h_l(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \quad (2.19)$$

Sedaj člen $\xi_k(\theta)$ v (2.18) zamenjamo z (2.19) ter zapišemo srednjo kvadratno napako

$$\begin{aligned}\epsilon_M^2 &= \sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{l=M+1}^{\infty} h_k(\mathbf{X}) h_l(\mathbf{X}) \int_D \int_D E(w(\mathbf{X}_1, \theta) w(\mathbf{X}_2, \theta)) h_k(\mathbf{X}_1) h_l(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \\ &= \sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{l=M+1}^{\infty} h_k(\mathbf{X}) h_l(\mathbf{X}) \int_D \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) h_k(\mathbf{X}_1) h_l(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2.\end{aligned}\quad (2.20)$$

V naslednjem koraku integriramo enačbo (2.20) po domeni D . Ob upoštevanju ortogonalnosti množice $h_n(\mathbf{X})$ sledi

$$\int_D \epsilon_M^2 d\mathbf{X} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \int_D \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) h_k(\mathbf{X}_1) h_k(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2. \quad (2.21)$$

Da bo napaka minimizirana, zahtevamo da je ortogonalna na prostor, ki ga razpenjajo funkcije $h_n(\mathbf{X})$, kar pomeni da bo rešitev minimiziral funkcional

$$\begin{aligned}F(h_k(\mathbf{X})) &= \sum_{k=M+1}^{\infty} \int_D \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) h_k(\mathbf{X}_1) h_k(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \\ &\quad - \lambda_k \left(\int_D h_k(\mathbf{X}) h_k(\mathbf{X}) d\mathbf{X} - 1 \right).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Ker zahtevamo, da je funkcional minimiziran, ga odvajamo po $h_i(\mathbf{X})$ in iščemo rešitev, ko je odvod enak 0

$$\frac{\partial F(h_k(\mathbf{X}))}{\partial h_i(\mathbf{X})} = \int_D \left(\int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) h_i(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 - \lambda_i h_i(\mathbf{X}_2) \right) d\mathbf{X}_2 = 0, \quad (2.23)$$

kar je izpolnjeno v primeru, ko je

$$\int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) h_i(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 = \lambda_i h_i(\mathbf{X}_2). \quad (2.24)$$

2.1.2 Galerkinova procedura za numerično reševanje homogene Fredholmove integralske enačbe drugega reda

Fredholmova integralska enačba (2.8) je analitično rešljiva le za določene kovariančne funkcije in za enostavnejše oblike domen. Izpeljava rešitve za enega takih primerov je podana npr. v Ghanem in Spanos, 2003. V splošnem je Fredholmovo integralsko enačbo potrebno rešiti z numeričnim postopkom. Za aplikacijo metode stohastičnih končnih elementov znotraj standardnega okolja za metodo končnih elementov je za numerično reševanje Fredholmove enačbe najprimernejša Galerkinova procedura. Po tej proceduri se vsaka

izmed lastnih funkcij aproksimira z linearno kombinacijo J oblikovnih funkcij $N_j(\mathbf{X})$

$$f_k(\mathbf{X}) \approx \sum_{j=1}^J f_{jk} N_j(\mathbf{X}), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.25)$$

kjer so f_{jk} neznani koeficienti. Enačbo (2.25) ustavimo v (2.8) in zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja

$$\sum_{j=1}^J f_{jk} \left(\int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) N_j(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 - \lambda_k N_j(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2 \right) \approx 0. \quad (2.26)$$

Leva in desna stran enačbe (2.26) nista povsem enaki, zaradi aproksimacije lastnih funkcij (en. 2.25)). Z uporabo Galerkinovega pristopa, se zahteva, da je napaka zaradi aproksimacije ortogonalna na prostor, ki ga razpenjajo oblikovne funkcije. Sledi

$$\sum_{j=1}^J f_{jk} \left(\int_D \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) N_j(\mathbf{X}_1) N_i(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 - \lambda_k \int_D N_j(\mathbf{X}_2) N_i(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2 \right) = 0 \quad (2.27)$$

Ob uporabi oznak

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_D \int_D C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) N_j(\mathbf{X}_1) N_i(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2, \\ N_{ij} &= \int_D N_j(\mathbf{X}_2) N_i(\mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_2, \\ \Lambda_{lk} &= \delta_{lk} \lambda_k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

enačbo (2.27) lahko preoblikujemo v matrično obliko

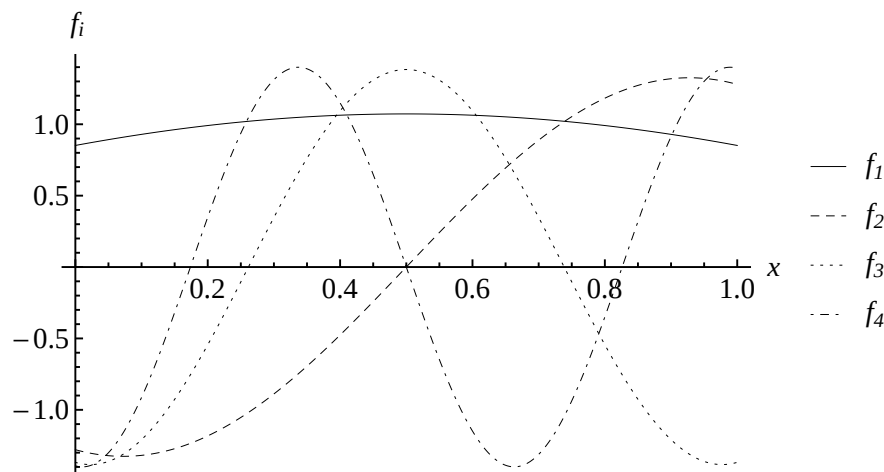
$$\mathbf{C}\mathbf{f} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{N}\mathbf{f}. \quad (2.29)$$

Enačba (2.29) predstavlja splošen problem lastnih vrednosti. Rešitev te enačbe so matrika lastnih vektorjev $\mathbf{f}$ in lastne vrednosti λ_k . Lastne funkcije je potrebno dodatno normirati skladno z enačbo (2.9).

Za boljšo predstavo, kako izgledajo lastne funkcije, so na sliki 2.1 prikazane prve štiri lastne funkcije za primer enodimenzionalnega stohastičnega polja, definirane na intervalu $[0, 1]$, s pričakovano vrednostjo 0, standardno deviacijo 1 ter eksponentno kovariančno funkcijo z enotsko korelacijsko dolžino l_c

$$C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sigma^2 e^{-\frac{\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|}{l_c}} = e^{-\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|}. \quad (2.30)$$

Kot je razvidno na sliki, se z vsakim višjim indeksom poveča število polvalov lastne funkcije.

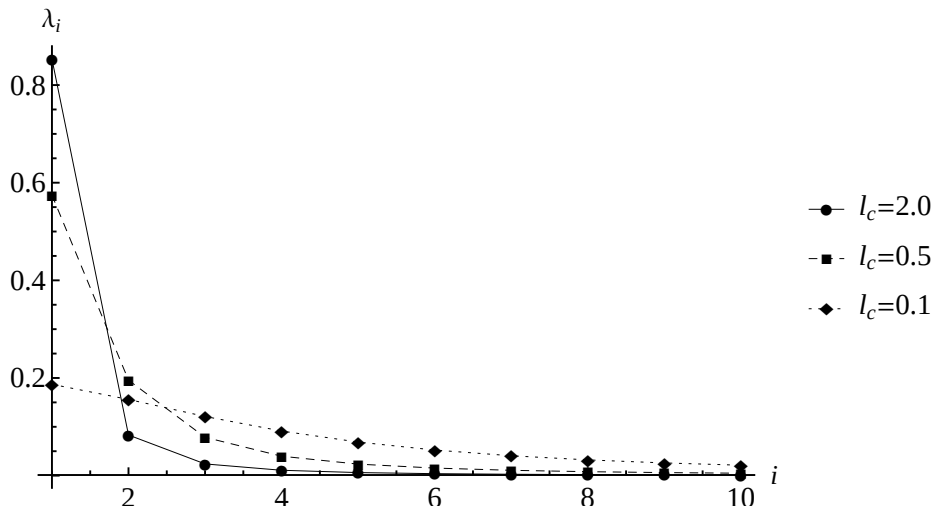


Slika 2.1: Prve štiri lastne funkcije za enodimenzionalno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo.
Figure 2.1: First four eigenfunctions for one-dimensional stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function.

Slika 2.2 pa prikazuje prvih 10 lastnih vrednosti $\lambda_k, k = 1, \dots, 10$ za enodimenzionalno stohastično polje, definirano na intervalu $[0, 1]$, s pričakovano vrednostjo 0, standardno deviacijo $\sigma = 1$ ter eksponentno kovariančno funkcijo za tri različno korelirana stohastična polja. Koreliranost stohastičnega polja je določena s korelacijsko dolžino l_c . Večja kot je korelacijska dolžina, bolj so vrednosti preko polja povezane in, kot je razvidno tudi na sliki 2.2, hitreje padajo lastne vrednosti.

Da bi bralec dobil boljši občutek, kaj pomeni koreliranost stohastičnega polja, so na sliki 2.3 prikazane štiri naključno izbrane realizacije dvodimenzionalnega stohastičnega polja z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko standardno deviacijo ter korelacijskimi dolžinami $l_c = 0.1; 0.5; 2.0$ in ∞ . Kot je razvidno s slike, je v primeru večje koreliranosti stohastično polje bolj gladko, medtem ko vrednosti stohastičnega polja pri nižji koreliranosti opazno bolj variirajo.

V nadaljevanju bomo namenili nekaj pozornosti izbiri gostote diskretizacijske mreže za uporabo Galerkinove procedure ter izbiri potrebnega števila členov, ki jih obdržimo v K-L dekompoziciji. V deterministični metodi končnih elementov se velikost končnih elementov običajno določa glede na pričakovani gradient napetosti in geometrijo problema. Pri diskretizaciji stohastičnega polja pa je gostota mreže odvisna predvsem od koreliranosti stohastičnega polja. Kot je razvidno na sliki 2.2, v splošnem velja: bolj kot je stohastično polje korelirano, hitreje padajo lastne vrednosti. Spomnimo se, da lastne vrednosti predstavljajo magnitudo oz. uteži lastnih funkcij. Ker v primeru visoko koreliranega polja vrednosti lastnih vrednosti z višanjem indeksa sorazmerno hitro padajo, to pomeni da imajo prvi členi K-L vrste sorazmerno večji vpliv v primerjavi s členi z višjimi indeksi. V primeru nizko koreliranih stohastičnih polj pa lastne vrednosti padajo zelo počasi, kar



Slika 2.2: Prvih deset lastnih vrednosti za enodimenzionalno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo s tremi različnimi korelacijskimi dolžinami.

Figure 2.2: First ten eigenvalues for one-dimensional stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function for three different correlation lengths.

pomeni, da imajo tudi členi K-L vrste z višjim indeksom še vedno pomemben doprinos k obnašanju polja, vrednosti stohastičnega polja pa preko domene močneje variirajo (slika 2.3 (a)). Zato mora biti v tem primeru mreža elementov gostejša, da lahko zajame bistvene značilnosti slučajnega polja. Narejenih je bilo že več študij, v katerih se je raziskovalo ustrezno gostoto mreže za opis stohastičnega polja, iz katerih lahko povlečemo splošno oceno, da mora biti velikost končnih elementov takšna, da sta vzdolž ene korelacijske dolžine vsaj 2 končna elementa. Natančnejša ocena je, da naj bi bila razdalja med vozlišči končnih elementov manjša od ene četrtilne vala lastne funkcije z najvišjim indeksom, pri kateri (glede na izbrano željeno natančnost) odrežemo K-L vrsto (povzeto po Matthies et al., 1997).

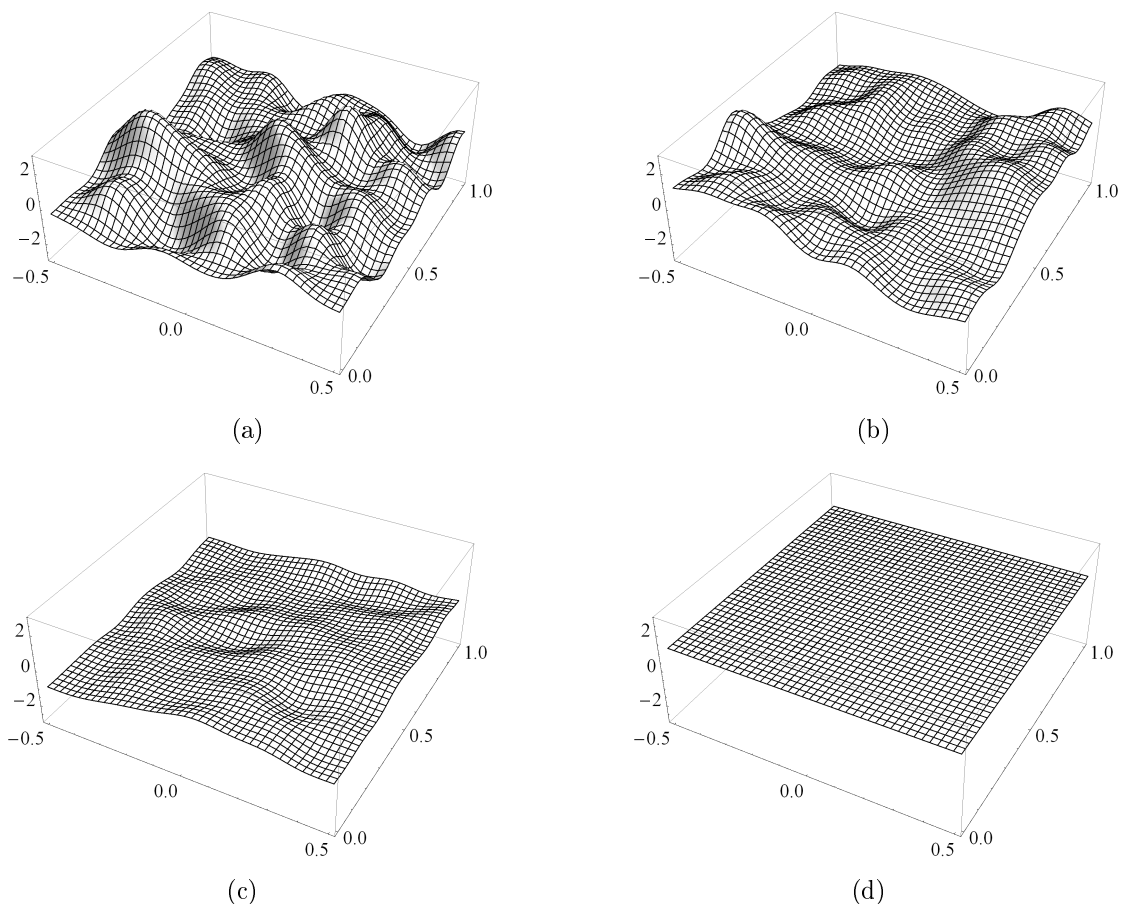
Natančnost diskretizacije stohastičnega polja se lahko oceni s pomočjo variance stohastičnega polja $w(\mathbf{X}, \theta)$, ki je definirana kot

$$\text{Var}(w(\mathbf{X}, \theta)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i^2(\mathbf{X}) \quad (2.31)$$

ter variance aproksimiranega stohastičnega polja, ki je definirana kot $\sum_{i=1}^M \lambda_i f_i^2(\mathbf{X})$. Lokalna napaka diskretizacije je tako

$$\text{err}_w(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i^2(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i f_i^2(\mathbf{X})}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i^2(\mathbf{X})}. \quad (2.32)$$

Ocena globalne diskretizacijske napake je formulirana v smislu povprečne napake stoha-



Slika 2.3: Primerjava realizacij dvodimenzionalnega stohastičnega polja z ničelno pričakovano vrednostjo, enotsko standardno deviacijo ter eksponentno kovariančno funkcijo za (a) $l_c = 0.1$, (b) $l_c = 0.5$, (c) $l_c = 2.0$ in (d) $l_c \rightarrow \infty$.

Figure 2.3: Comparison realizations of stochastic field with zero mean, unit variance and exponential covariance function with (a) $l_c = 0.1$, (b) $l_c = 0.5$, (c) $l_c = 2.0$ and (d) $l_c \rightarrow \infty$.

stičnega polja

$$\overline{err}_w = \frac{1}{V} \int_D err_w(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2.33)$$

kjer je V volumen (oz. v primeru dvodimenzionalnega problema površina, v primeru enodimenzionalnega problema pa dolžina) domene.

V praksi je pogosteje uporabljena numerično nekoliko cenejša ocena napake, ki zanemari, da se varianca stohastičnega polja, diskretiziranega s K-L vrsto, dejansko spreminja preko domene. V tem primeru je $\text{Var}(w(\mathbf{X}, \theta)) = \sigma^2$, kjer je σ^2 varianca stohastičnega polja. Ocena napake je tako

$$\overline{err}_w = \frac{1}{V} \int_D \frac{\sigma^2 - \sum_{i=1}^M \lambda_i f_i^2(\mathbf{X})}{\sigma^2} d\mathbf{X} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{V \sigma^2}. \quad (2.34)$$

Izraz za desnim enačajem sledi iz enačb (2.9) in (2.31).

Ker je Galerkinova procedura numerična metoda reševanja Fredholmovega integrala, je na tem mestu prav omeniti, da ima kot vse numerične metode tudi ta metoda diskretizacijsko napako. Dobljene lastne vrednosti so manjše ali enake analitičnim ter so točnejše lastne vrednosti kot lastne funkcije (Ghanem in Spanos, 2003). To pomeni, da aproksimacija K-L vrste, dobljena z Galerkinovo metodo, izgubi del natančnosti, zaradi katere je K-L vrsta sicer superiorna nad ostalimi razvoji v vrsto. Li in Kiureghian (1993) v članku, v katerem predstavita metodo razvoja v vrsto z linearnim optimalnim ocenjevanjem, trdita, da so aproksimacije, ki z vpeljavo oblikovnih funkcij rešujejo razvoj v vrsto preko diskretnega problema lastnih vrednosti, med katere spada tudi predstavljena Galerkinova procedura za reševanje Fredholmove enačbe, v smislu napake variance celo slabše od njune razvite metode, ki uporablja optimalne oblikovne funkcije. Omeniti velja še, da je napaka K-L vrste nekoliko večja v robnih območjih domene, kar je značilnost metod spektralne dekompozicije. Prav tako K-L vrsti ni v prid, da je homogenost stohastičnega polja, opisanega s K-L vrsto vprašljiva, saj se varianca preko domene nekoliko spreminja. Kljub navedenim slabostim metode, smo se v doktorski disertaciji odločili za K-L vrsto, saj je v primerjavi z drugimi razvitimi metodami še vedno največ argumentov v prid K-L vrsti. Najpomembnejša prednost je, da od vseh razvitih metod K-L vrsta najbolj reducira število dimenzij stohastičnega prostora ter je posplošeni koordinatni sistem, ki ga definirajo lastne funkcije, optimalen v smislu srednje kvadratne napake. Poleg tega Galerkinova procedura z gostenjem mreže konvergira k analitičnim rešitvam, kar z drugimi besedami pomeni, da se ob dovolj gosti mreži s to metodo še vedno lahko poljubno približamo optimalni rešitvi.

2.2 Diskretni sistemi v mehaniki kontinuuma

Za celoten vpogled v reševanje mehanskih problemov s perturbacijsko metodo je prav, da se na začetku najprej predstavi osnove reševanja problemov v mehaniki kontinuuma. Teorija kontinuuma zanemari, da je snov sestavljena iz delcev (npr. atomov na mikroskopski ravni ali diskontinuitet, vključkov, razpok itd. na makroskopski ravni), zato je natančna le za primere, ko so dimenzije mehanskih problemov veliko večje v primerjavi z razdaljami med temi delci. Mehanika kontinuuma se deli na mehaniko tekočin in mehaniko trdnih teles. V doktorski disertaciji se ukvarjamo s primeri, ki sodijo v mehaniko trdnih teles, vendar se ideja in pristop lahko prenese tudi na mehaniko tekočin. V disertaciji bomo osnove mehanike trdnin predstavili kolikor se da na kratko in zgoščeno. Za poglobljene študije naj se bralec obrne npr. na Wriggers 2008, Zienkiewicz in Taylor (1991) ali Crisfield (1996).

2.2.1 Osnovne enačbe v mehaniki kontinuuma

Trdno telo je definirano na nekem območju D , ki ga omejuje rob območja ∂D . Na posameznih delih roba območja so lahko predpisani pomiki ali obtežba. Zanima nas odziv telesa (pomik, deformacije, napetosti itd.), do katerega pride zaradi delovanja sil in predpisanih pomikov. Obnašanje teles se opiše s tremi sklopi enačb: kinematičnimi, konstitutivnimi in ravnotežnimi. Enačbe so lahko zapisane glede na začetno ali trenutno konfiguracijo teles. V spodnjih vrsticah je ob vsakem sklopu enačb zapisana močna oblika teh enačb za statičen problem in hiperelastičen material glede na začetno konfiguracijo. V tem primeru imamo več možnosti opisa mer napetosti, t. i. prve Piola-Kirchoffove napetosti ali druge Piola-Kirchoffove napetosti, kar vodi do dveh različnih formulacij (prva možnost je prikazana v levem, druga pa v desnem stolpcu):

- *Kinematične enačbe*, s katerimi se opiše deformacije in gibanje telesa, mere deformacij in časovne odvode kinematičnih količin

$$\mathbf{F} \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}),$$

kjer je $\mathbf{F}$ deformacijski gradient in $\mathbf{E}$ Green-Lagrangev deformacijski tenzor.

- *Konstitutivne enačbe*, s katerimi se opiše materialne lastnosti telesa (npr. odnos napetost-deformacija)

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \qquad \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}},$$

kjer je $\mathbf{P}$ prvi Piola-Kirchoffov napetostni tenzor, $\mathbf{S}$ drugi Piola-Kirchoffov napetostni tenzor in W funkcija, ki definira elastično energijo.

- *Ravnotežne enačbe*, s katerimi se zagotovijo zakoni ravnotežja (ravnotežje sil in momentov, ohranjanje mase, prvi zakon termodinamike)

$$\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \qquad \text{Div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0},$$

kjer $\rho_0 \bar{\mathbf{b}}$ definira volumsko silo.

Tako definiran problem, pri katerem moramo rešiti enačbe ob upoštevanju danih robnih pogojev (predpisanih pomikov in predpisane obtežbe), se imenuje robni problem. Nezanke problema, ki nas zanimajo, so običajno pomiki $\mathbf{u}$. V disertaciji se omejimo na mehanske probleme, pri katerih je temperatura konstantna in je termodinamsko ravnovesje

med telesi in okolico avtomatično izpolnjeno. Za rešitev robnega problema se kinematične enačbe in enačbe snovi vnese v ravnotežne enačbe. Rezultat je v splošnem sistem diferencialnih enačb, tak opis problema se imenuje močna oblika robnega problema.

Rešitev močne oblike robnega problema izpolnjuje pogoj ravnotežja v vsaki točki telesa. Ker so diferencialne enačbe v taki obliki rešljive le za določene enostavnejše oblike telesa in določene robne pogoje, so se v preteklosti razvile aproksimativne metode, npr. metoda končnih diferenc, Ritzova metoda, Galerkinova metoda in metoda končnih elementov, s katerimi se robne probleme rešuje aproksimativno z numeričnimi metodami (Zienkiewicz in Taylor, 1991).

Izmed numeričnih metod je zaradi svoje splošnosti in numerične stabilnosti v inženirskih problemih najpogostejše uporabljena metoda končnih elementov. Metoda končnih elementov prevede robni problem na variacijski problem. Po metodi končnih elementov se močno obliko enačb preoblikuje v šibko obliko, kar vodi v formulacijo minimiziranja napake, ki nastane zaradi aproksimacije s končnimi elementi.

Pri formulaciji šibke oblike ravnotežnih enačb dejanski pomik $\mathbf{u}$, ki predstavlja točno rešitev ravnotežnih enačb, aproksimiramo s pomikom $\mathbf{u}_h$.

$$\text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{u}_h) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_h, \quad (2.35)$$

kjer rezidual $\mathbf{R}_h$ predstavlja napako zaradi aproksimacije pomikov.

Z namenom minimizacije napake zaradi aproksimacije nato zahtevamo, da je napaka enaka 0 v šibkem smislu in sicer tako, da se rezidual skalarno pomnoži z utežno funkcijo $\boldsymbol{\eta}$ ter njun produkt integrira preko celotne domene. Funkcija $\boldsymbol{\eta}$ mora izpolnjevati predpisane robne pogoje pomikov in se imenuje virtualni pomik ali testna funkcija. Rešujemo torej enačbo

$$\int_D \mathbf{R}_h \cdot \boldsymbol{\eta} dV = 0 \quad \implies \quad \int_D \text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\eta} dV + \int_D \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV = 0. \quad (2.36)$$

Enačba (2.36) je izpolnjena tudi za točen pomik $\mathbf{u}$.

$$\int_D \text{Div} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta} dV + \int_D \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV = 0. \quad (2.37)$$

Z integracijo per partes prvega člena enačbe (2.37), z upoštevanjem divergenčnega izreka in vpeljavo robnega pogoja predpisane obtežbe se šibko obliko ravnotežne enačbe lahko zapiše kot

$$\int_D \mathbf{P} \cdot \text{Grad} \boldsymbol{\eta} dV - \int_D \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial D_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0. \quad (2.38)$$

Gradient testne funkcije $\text{Grad}\boldsymbol{\eta}$ se lahko interpretira kot smerni odvod deformacijskega gradienta $D\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}$, poznan kot variacija $\delta\mathbf{F}$ deformacijskega gradienta.

V enačbi (2.38) se prvi Piola-Kirchoffov napetostni tenzor ob upoštevanju povezave $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ lahko zamenja z drugim Piola-Kirchoffovim napetostnim tenzorjem, kar vodi v

$$\mathbf{P} \cdot \text{Grad}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \text{Grad}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \text{Grad}\boldsymbol{\eta} + \text{Grad}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}) = \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E}, \quad (2.39)$$

pri čemer je bilo upoštevano, da je skalarni produkt simetričnega tenzorja $\mathbf{S}$ z antisimetričnim delom tenzorja enak nič. $\delta\mathbf{E}$ predstavlja variacijo Green-Lagrangevega deformacijskega tenzorja. Ob upoštevanju enačbe (2.39), se enačbo (2.38) lahko preoblikuje v

$$\int_D \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E} dV - \int_D \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial D_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0. \quad (2.40)$$

Prvi člen v tej enačbi predstavlja virtualno delo notranjih sil, preostala dva člena pa virtualno delo zunanjih sil.

Enačba (2.40) je primerna za vse probleme. V primeru da ima problem potencial, lahko uporabimo enostavnejši pristop. Pristop se imenuje princip stacionarnega elastičnega potenciala. Za hiperelastični material obstaja funkcija W , ki definira elastično energijo, shranjeno v materialu. Pod predpostavko konservativne obtežbe (to pomeni, da je obtežba neodvisna od poti), lahko opišemo statični problem s funkcionalom

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}) = \int_D (W(\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})) - \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV - \int_{\partial D_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\varphi} dA \implies \text{STAT}, \quad (2.41)$$

kjer je $\mathbf{C}$ desni Cauchy-Greenov deformacijski tenzor.

Izmed vseh možnih deformacij $\boldsymbol{\varphi}$ je deformacija, ki zgotovi pogoje ravnotežja, tista deformacija, ki ima za posledico stacionarno vrednost potenciala Π . Stacionarna vrednost Π se lahko izračuna z variacijo Π glede na deformacije. V ta namen se uporabi smerni odvod

$$\delta\Pi = D\Pi(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \left. \frac{d}{d\alpha} \Pi(\boldsymbol{\varphi} + \alpha\boldsymbol{\eta}) \right|_{\alpha=0}, \quad (2.42)$$

kar vodi do

$$D\Pi(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_D \left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{\eta} - \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} \right) dV - \int_{\partial D_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0. \quad (2.43)$$

Definicija mehanskega problema z uporabo principa stacionarnega elastičnega potenciala ima več prednosti. Med drugim vodi (ob uporabi avtomatskega odvajanja) do numerično najbolj učinkovite formulacije končnih elementov.

2.2.2 Formulacija mehanskega problema z uporabo avtomatskega odvajanja

Kot je bilo predstavljeno, je šibka oblika ravnotežnih enačb mehanskega problema oblike $\int_D \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{b} dV + \dots = 0$, kjer sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ tenzorja poljubnega reda, $\delta \mathbf{b}$ pa je smerni odvod ali variacija tenzorja $\mathbf{b}$.

V naslednjem koraku se šibko obliko enačbe diskretizira. Variacijo tenzorja $\mathbf{b}$ se izračuna kot

$$\delta \mathbf{b}(\mathbf{p}) = D\mathbf{b}(\mathbf{p})\delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p}, \quad (2.44)$$

kjer je $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_{ps}}\}^T$ množica neznanih parametrov problema in $\delta \mathbf{p} = \{\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_{n_{ps}}\}^T$ variacije neznanih parametrov problema. Skalarni produkt $\mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{b}(\mathbf{p})$ se izrazi kot

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{b}(\mathbf{p}) = \mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} = \left(\mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta \mathbf{p}. \quad (2.45)$$

Izrazimo produkt $\mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$ po komponentah

$$\left(\mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right)_m = \mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial p_m} = \text{tr} \left(\mathbf{a}(\mathbf{p})^T \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial p_m} \right), \quad (2.46)$$

kjer tr pomeni sled matrike. Iz tega sledi diskretizirana oblika šibke oblike enačbe mehanskega problema

$$\int_D \mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{b}(\mathbf{p}) dV + \dots = \sum_{m=1}^{n_{ps}} \left(\int_D \mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial p_m} dV \right) \delta p_m + \dots = 0. \quad (2.47)$$

in se lahko formira v sistem n_{ps} algebrajskih enačb

$$\mathbf{R} = \int_D \mathbf{a}(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} dV + \dots = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

V primeru, da je mehanski problem definiran kot minimum potenciala $\Pi = \int_D W(\mathbf{p}) dV$, kjer je $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_{ps}}\}^T$ množica neznanih parametrov problema, se variacijo $\Pi(\mathbf{p})$ izračuna kot

$$\delta \Pi(\mathbf{p}) = \frac{\partial \Pi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} = \int_D \frac{\delta W(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} dV \delta \mathbf{p} = 0. \quad (2.49)$$

Enačba (2.49) se lahko formira v sistem nelinearnih algebrajskih enačb oblike

$$\mathbf{R} = \int_D \frac{\partial W(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} dV = \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

Rezultirajoč sistem algebraskih enačb imenujemo primarni problem. Enačbe so lahko linearne ali nelinearne, odvisno od narave mehanskega problema.

2.2.3 Klasifikacija mehanskih problemov in njihova formulacija v metodi končnih elementov

Mehanske probleme se najpogosteje klasificira glede na to ali so *časovno odvisni* ali *neodvisni* ter glede na to, kako so diskretizirane enačbe formirane, v *povezane* ali *nepovezane*.

V primeru najenostavnejših izmed mehanskih problemov, t.j. nepovezanih in časovno neodvisnih problemov rešujemo sistem algebraskih enačb

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.51)$$

Kot rečeno, se v metodi končnih elementov domeno problema razdeli na poddomene ali končne elemente. Nato se na nivoju posameznega končnega elementa izračuna prispevek tega elementa $\mathbf{R}_e$ k globalnemu rezidualu. Prispevke vseh končnih elementov se nato s proceduro združevanja končnih elementov sešteje v globalno matriko konstrukcije

$$\mathbf{R} = \sum_e \mathbf{A} \mathbf{R}_e, \quad (2.52)$$

pri čemer je potrebno upoštevati tudi kinematične kompatibilnosti med elementi. Ker je rezidual $\mathbf{R}$ definiran z integracijo preko celotne domene problema, je tudi prispevek končnega elementa $\mathbf{R}_e$ formiran z integracijo preko domene elementa. Za integriranje se najpogosteje uporabi numerična integracija in sicer Gaussova kvadratura. Gaussova kvadratura je numerična metoda integracije, pri kateri se integral izračuna tako, da se v določenih točkah g domene izračuna vrednosti funkcije in jih pomnoži z ustreznimi utežmi ter produkte sešteje

$$\mathbf{R}_e = \sum_{g=1}^{N_g} w_g \mathbf{R}_g \quad (2.53)$$

Enačbe (2.51) so, odvisno od mehanskega problema, lahko linearne ali nelinearne. Nelinearnost lahko izvira iz različnih vzrokov in sicer je nelinearnost lahko posledica npr. geometrije problema ali nelinearnih konstitutivnih enačb. Metoda, ki je najpogosteje uporabljena za reševanje nelinearnih sistemov algebraskih enačb in ki jo bomo uporabljali tudi v disertaciji je Newton-Raphsonov iterativni postopek. Newton-Raphsonov postopek namreč odlikuje kvadratična konvergenca v bližini pravilne rešitve.

Do tu je bil v grobem predstavljen postopek reševanja najenostavnejšega izmed razredov mehanskih problemov - časovno neodvisnega in nepovezanega. V doktorski disertaciji bomo predstavili in izpeljali formulacijo perturbacijske metode za najzahtevnejši razred

mehanskih problemov: *časovno odvisne povezane probleme*, saj je aplikacija na ostale nato enostavna, pri čemer se iz enačb le črta odvečne člene. V skupino časovno odvisnih povezanih problemov spadajo npr. elasto-plastični problemi. Za primerjavo, kako izgleda perturbacijska metoda za enostavnejše primere, bo na koncu podano tudi poglavje, v katerem bojo predstavljeni izrazi za časovno neodvisne in nepovezane probleme, kot so npr. elastični ali hiperelastični problemi.

V primeru časovno odvisnih povezanih problemov se znotraj Newton-Raphsonove zanke (ki se izvaja na globalnem nivoju problema) uporabi še eno Newton-Raphsonovo zanko v kateri se iterativno linearizira ta dodatni sistem nelinearnih enačb. Povezan problem torej sestavljata *odvisen* in *neodvisen problem*, ki sta izražena z reziduali

$$\mathbf{Q}_g = \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g \quad (2.54)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

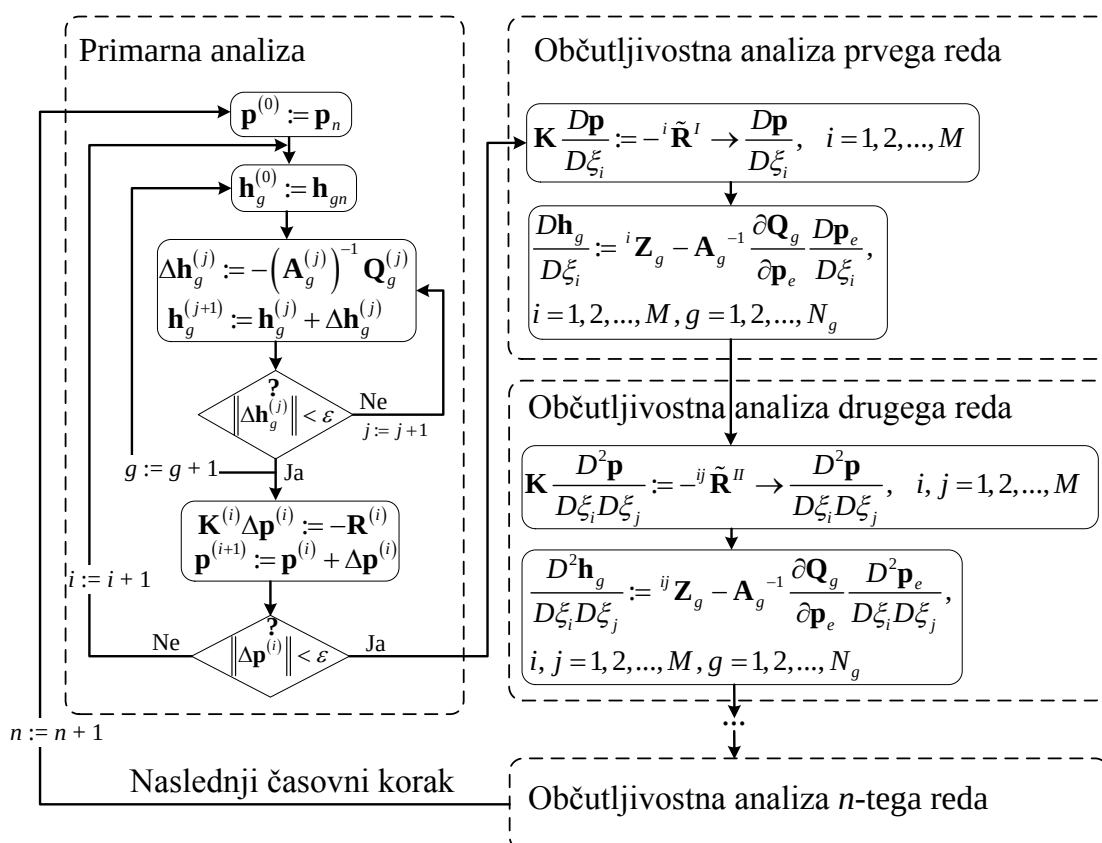
kjer je $\mathbf{R}$ neodvisni rezidual, definiran in formiran na globalnem nivoju problema, $\mathbf{Q}_g$ pa je g -ti odvisni rezidual, običajno definiran v Gaussovi integracijski točki g in rešen na nivoju končnega elementa z vgnezdno Newton-Raphsonovo iteracijsko zanko. Rešitve enačb (2.54) so odvisni vektorji rešitve $\mathbf{h}_g$, rešitev enačbe (2.55) pa neodvisni vektor rešitve $\mathbf{p}$. Pri časovno odvisnih povezanih problemih, se časovna domena (psevdo ali realnega časa) razdeli v n_{kor} časovnih korakov. Vsakemu časovnemu koraku pripada neodvisni vektor rešitve $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1}, \dots, \mathbf{p}_{n_{kor}}$ in odvisni vektorji rešitve $\mathbf{h}_{g,0}, \mathbf{h}_{g,1}, \dots, \mathbf{h}_{g,n-1}, \mathbf{h}_{g,n}, \mathbf{h}_{g,n+1}, \dots, \mathbf{h}_{g,n_{kor}}, g = 1, 2, \dots, N_g$. V splošnem je rešitev v trenutnem časovnem koraku odvisna od rešitev v vseh prejšnjih korakih, vendar so v procesu avtomatizacije pomembni le tisti vektorji rešitve, ki se v formulaciji končnih elementov pojavijo eksplicitno. V doktorski disertaciji bomo tako privzeli najenostavnejšo možnost, pri kateri so časovni odvodi aproksimirani s končnimi diferencami prvega reda. V tem primeru je problem eksplicitno odvisen le od vektorjev rešitve v prejšnjem ($\mathbf{p}_n$ in $\mathbf{h}_{g,n}$) in trenutnem časovnem koraku ($\mathbf{p}_{n+1}$ in $\mathbf{h}_{g,n+1}$, ki jih bomo, z namenom boljše preglednosti, pisali brez indeksov: $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$). V primeru, da je rešitev odvisna od več predhodnih korakov, ostaja proces avtomatizacije enak, le da je v posamezne enačbe potrebno dodati še vektorje rešitve iz predhodnih korakov, od katerih je rešitev odvisna.

Na podlagi privzete formulacije se povezan časovno odvisen problem lahko zapiše kot

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{h}, \mathbf{p}_n, \mathbf{h}_n) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q}_g(\mathbf{p}_e, \mathbf{h}_g, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_{g,n}) &= \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Za izračun prispevka $\mathbf{R}_e$ je potrebno poznati tudi vektorje rešitve povezanega problema $\mathbf{h}_g$ in $\mathbf{h}_{g,n}$. Zato je v vsaki Newton-Raphsonovi iteraciji potrebno rešiti najprej sisteme enačb $\mathbf{Q}_g = \mathbf{0}$, ki se jih definira in reši v vsaki Gaussovi integracijski točki končnega

elementa. Odvisen rezidual $\mathbf{Q}_g$ je eksplicitno odvisen le od $\mathbf{h}_g$, $\mathbf{h}_{g,n}$ in podmnožic $\mathbf{p}_e$ in $\mathbf{p}_{e,n}$ globalnega neodvisnega vektorja rešitve $\mathbf{p}$. V primeru elasto-plastičnih problemov je $\mathbf{h}_g$ vektor spremenljivk stanja za g -to integracijsko točko in vsebuje komponente plastičnega deformacijskega tenzorja in plastičnega množitelja, enačbe $\mathbf{Q}_g = \mathbf{0}$ pa predstavljajo nelinearni sistem evolucijskih enačb. Vektor $\mathbf{p}$ predstavlja prostostne stopnje problema, ki so običajno pomiki in zasuki v vozliščih končnih elementov. Rezultirajoč povezani sistem enačb (2.56) predstavlja enačbe primarnega problema in se običajno reši z uporabo Newton-Raphsonovega iterativnega postopka, ki je prikazan v levem okvirju na sliki 2.4. Ko vektorji rešitve $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$ skonvergirajo, kar pomeni da je norma razlike rešitve v trenutni iteraciji od rešitve v prejšnji iteraciji manjša od izbrane natančnosti, se primarna analiza zaključuje.



Slika 2.4: Procedura primarne analize in občutljivostne analize višjega reda.
Figure 2.4: Procedure of primal analysis and higher-order sensitivity analysis.

2.3 Perturbacijska metoda

Perturbacijska metoda za izračun statistike odziva konstrukcije v mehaniki konstrukcij je direktno povezana z matematično formulacijo perturbacije. Bistvo perturbacijske metode

je, da se izhaja iz enostavnejšega (v stohastičnem pristopu to pomeni determinističnega oz. primarnega) sistema, za katerega je rešitev enostavno izračunljiva. Nato se v ta enostavnejši sistem vnese motnjo (perturbacijo). Na ta način se fizikalne količine (npr. vektor rešitve primarnega problema $\mathbf{p}$, ki v mehaniki trdnin običajno predstavlja prostostne stopnje - pomike in zasuke vozlišč končnih elementov) ob predpostavki zveznosti sistema lahko izrazijo kot popravki enostavnega sistema. V perturbacijski metodi se popravke izrazi z metodo aproksimacije z razvojem odziva v Taylorjevo vrsto.

Pri perturbacijski metodi nas torej ne zanima le deterministična rešitev vektorjev $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$, temveč iščemo razvoj vektorjev rešitve v Taylorjevo vrsto okrog pričakovanih vrednosti spremenljivk, katerih vpliv na odziv sistema nas zanima. V metodi stohastičnih končnih elementov so to slučajne spremenljivke $\boldsymbol{\xi}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) &= \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \frac{1}{l_1! l_2! \dots l_M!} \cdot \\ &\cdot \left. \frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{p}}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}} \right|_{\xi_i = {}^0\xi_i, i=1, \dots, M} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) &= \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \frac{1}{l_1! l_2! \dots l_M!} \cdot \\ &\cdot \left. \frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{h}_g}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}} \right|_{\xi_i = {}^0\xi_i, i=1, \dots, M} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

kjer je s_i red razvoja v vrsto za i -ti parameter in M število parametrov, za katere nas zanima odziv konstrukcije oz. sistema v odvisnosti od tega parametra. V okviru metode stohastičnih končnih elementov predstavlja M število členov K-L dekompozicije. V primeru Gaussovega stohastičnega polja, ki smo ga privzeli v disertaciji, je ${}^0\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ in bi se zato iz zgornjih izrazov lahko odstranili, vendar smo jih kljub temu pustili v izrazih z namenom, da je postopek primeren tudi za druge verjetnostne porazdelitve ali nestohastične spremenljivke. Enačbe (2.57) in (2.58) namreč veljajo tudi za splošen, determinističen mehanski problem - v tem primeru so $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ poljubni parametri, za katere nas zanima vpliv spremembe teh parametrov na odziv konstrukcije. Zaradi boljše

preglednosti, zapišimo izraza (2.57) in (2.58) v bolj splošni obliki

$$\mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) = \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{h}_g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) = \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \mathbf{h}_{g, l_1 l_2 \dots l_M} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \quad (2.60)$$

kjer so $\mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}$ in $\mathbf{h}_{g, l_1 l_2 \dots l_M}$ koeficienti razvoja v Taylorjevo vrsto. Priporočilo o izbiri ustreznega reda, do katerega se vrsto razvije, je odvisno predvsem od nelinearnosti problema. V splošnem velja, višji je red Taylorjeve vrste, večje je območje okolice odziva, na katerem je odziv dovolj natančno opisan. Zato je red, do katerega bi bilo potrebno razviti Taylorjevo vrsto za izpolnitev želene natančnosti, odvisen od narave in nelinearnosti posameznega problema. Bolj kot je problem nelinearen, več členov vrste je potrebnih.

Prednosti razvoja odziva v vrsto, izraženo kot funkcijo slučajnih spremenljivk, sta predvsem dve. Prva je, da je metoda, ne glede na uporabljen tehniko izračuna koeficientov vrste, znatno cenejša v primerjavi z metodo Monte Carlo. Druga pomembna prednost pa je, da je rezultat polinom, pri katerem so slučajne spremenljivke izražene simbolno, kar omogoča enostavno analizo narave polinoma. Glavna slabost perturbacijske metode je, da je primerna le za zvezen odziv sistema in ne zmore zajeti diskretnih dogodkov. Kar pomeni, da če je npr. v primeru uklonske analize rezultat determinističnega sistema globalni uklon konstrukcije, bo perturbacijska metoda opisala odziv konstrukcije za spremembe slučajnih spremenljivk v smislu globalnega uklona, v resnici pa bi pri določenih vrednostih slučajnih spremenljivk lahko prišlo prej do lokalnega uklona kot globalnega. Druga slabost je, da nam tudi ob predpostavki zveznega odziva sistema da odgovor o obnašanju odziva dovolj natančno le na določenem območju v okolici točke, okrog katere smo razvili Taylorjevo vrsto, medtem ko se iz dobljene vrste ne da z gotovostjo oceniti odziva za vrednosti stohastičnih spremenljivk, ki so daleč od pričakovanih. Vendar, kljub navedenim slabostim metode, ostaja perturbacijska metoda ena bolj priljubljenih in pogosto uporabljenih metod. Ob upoštevanju njenih omejitev so rezultati te metode dokaj natančni (pričakovane vrednosti in variance odziva) in numerično učinkoviti.

V naslednjih poglavjih so predstavljene tri možnosti za izračun koeficientov $\mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}$: *simbolna občutljivostna analiza*, *analitična občutljivostna analiza* in *metoda končnih diferenc*. Simbolna občutljivostna analiza spada v kategorijo semi-analitičnih rešitev primarnega problema (Iokamidis, 1992, Iokamidis, 1993, Zhiming in Jianming, 1998, Pavlović, 2003, Korelc, 2011). Ta metoda uporabi programsko okolje, ki omogoča simbolno računanje. Na ta način se razvoj v vrsto izračuna med samim reševanjem problema po metodi končnih elementov in sicer tekom izvajanja programa znotraj Newton-Raphsonovih iteracij. Zato

je metoda lahko direktno aplicirana za poljuben red vrste.

Analitična občutljivostna analiza računa odvode $\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{p}}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}}$ in $\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{h}_g}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}}$ (enačbe (2.57) in (2.58)). Dobljene odvode je nato za izračun členov vrste potrebno pomnožiti z $\frac{1}{l_1! l_2! \dots l_M!}$. Pri tej metodi je, za razliko od simbolne občutljivostne analize, kot je prikazano v naslednjem poglavju, potrebno predhodno izpeljati ustrezne izraze in jih vnesti v kodo za končne elemente. Metodo odlikuje visoka numerična učinkovitost.

Metoda končnih diferenc je numerična metoda, ki izračuna odvode $\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{p}}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}}$ in $\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M} \mathbf{h}_g}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}}$ in je popolnoma splošna, vendar nestabilna in zato nezanesljiva metoda. Njena slabost je tudi numerična neučinkovitost.

2.3.1 Analitična občutljivostna analiza

Občutljivostna analiza išče odvode (poljubnega reda) vektorjev rešitve po izbranih občutljivostnih parametrih $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, M$. Za iskane odvode se uporablja tudi izraz *občutljivosti*. V splošnem je lahko predmet proučevanja občutljivosti lahko poljuben funkcional odziva, npr. napetosti, deformacije, prostornina, pomiki ipd. Ker so funkcionali odziva odvisni od vektorjev rešitve $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$, je zato potrebno najprej izračunati občutljivosti vektorjev rešitve.

Za izračun odvodov vektorjev rešitve je potrebno odvajati osnovne enačbe (2.56) po $\frac{\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M}}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \dots \partial \xi_M^{l_M}}$. Ker želimo, da je avtomatizacija občutljivostne analize uporabna za poljubne primere, privzamemo da občutljivostni parametri v enačbah rezidualov lahko nastopajo eksplicitno in/ali implicitno, zato osnovne rezidualne enačbe časovno odvisnega povezanega problema zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{p}_n(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}_n(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q}_g(\mathbf{p}_e(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}_g(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{p}_{e,n}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}_{g,n}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Enačne nato odvajamo po enem ali več parametrih $\xi_i, \xi_j, \dots$. Po preureditvi dobimo linearen sistem enačb za izračun občutljivosti vektorja $\mathbf{p}$, ki je analogen lineariziranemu sistemu enačb za primarni problem. Sledi izračun občutljivosti vektorjev $\mathbf{h}_g$, ki se izvede na nivoju posameznega končnega elementa. Celoten postopek občutljivostne analize višjega reda in pristop z avtomatskim odvajanjem, razvit v okviru doktorske disertacije, je predstavljen v poglavju 6.

2.3.2 Simbolna občutljivostna analiza

Pri simbolni občutljivostni analizi se spremenljivke, okrog katerih želimo razviti odziv konstrukcije v Taylorjevo vrsto, pusti v simbolni obliki. Zaradi tega je ta način reševanja

stohastičnih problemov možen le ob uporabi programskih okolij, ki omogočajo simbolno računanje, to je npr. Mathematica. Prednost uporabe simbolnega sistema je, da je za uporabnika vložek, ki ga mora v primerjavi z opisom problema za primarno analizo dodati v opis problema, da dobi razvoj rešitve v Taylorjevo vrsto, zanemarljiv, dobljena rešitev pa je analitična. Glavna slabost simbolne občutljivostne analize je, da je uporaba simbolnega sistema časovno zelo potratna in običajni mehanski problemi zelo hitro prerastejo zahtevnost, ki bi bila še sprejemljiva za izračun problema v doglednem času.

Bistvena razlika med analitično in simbolno občutljivostno analizo je, da se pri prvi odvaja le rezidual za konvergirano rešitev, medtem ko se pri slednji odvaja vse korake Newton-Raphsonove iterativne zanke in je zato potrebno razviti v vrsto tudi tangentno matriko $\mathbf{K}$. Zato se bomo pri aplikaciji simbolne občutljivostne analize omejili na najenostavnejše, numerično najcenejše mehanske probleme: časovno-neodvisne in nepovezane. Uporaba simbolne občutljivostne analize nam bo služila predvsem za kontrolo izpeljane ADB formulirane občutljivostne analize.

Pri časovno neodvisnih in nepovezanih problemih v rezidualni enačbi nastopa le iskani vektor rešitve $\mathbf{p}$

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.62)$$

V splošnem je časovno-neodvisni nepovezani problem lahko nelinearen, bodisi zaradi geometrije problema ali zaradi materialnega modela. Zato se za reševanje lahko uporabi Newton-Raphsonova metoda. Pri simbolni občutljivostni analizi se vektor rešitve v i -ti Newton-Raphsonovi iteraciji $\mathbf{p}^{(i)}$, tangentni operator $\mathbf{K}^{(i)}$ ter rezidual $\mathbf{R}^{(i)}$ izrazi v odvisnosti od spremenljivk ξ

$$\mathbf{K}^{(i)}(\xi) \Delta \mathbf{p}^{(i)}(\xi) + \mathbf{R}^{(i)}(\xi) = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{K}^{(i)}(\xi) = \frac{\partial \mathbf{R}^{(i)}(\xi)}{\partial \mathbf{p}^{(i)}(\xi)} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{p}^{(i+1)}(\xi) = \mathbf{p}^{(i)}(\xi) + \Delta \mathbf{p}^{(i)}(\xi), \quad (2.65)$$

kjer je $\Delta \mathbf{p}^{(i)}$ inkrement vektorja rešitve $\mathbf{p}$ v i -ti Newton-Raphsonovi iteraciji. Ker se pri simbolni občutljivostni analizi odvaja celotno Newton-Raphsonovo zanko, je potrebno

razviti v vrsto vse količine, ki v Newton-Raphsonovi zanki nastopajo

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) &= \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \mathbf{K}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \\ \mathbf{R}^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) &= \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \mathbf{R}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}, \\ \Delta \mathbf{p}^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) &= \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \dots \sum_{l_M=0}^{s_M} \Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} (\xi_1 - {}^0\xi_1)^{l_1} (\xi_2 - {}^0\xi_2)^{l_2} \dots (\xi_M - {}^0\xi_M)^{l_M}.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Newton-Raphsonove iteracije se izvajajo dokler ni dosežena konvergenca vseh členov $\Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$.

$$\left\| \Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}, l_k = 1, \dots, s_k \right\| < \varepsilon_2. \quad (2.67)$$

V Mathematici sta $\mathbf{K}_g^{(i)}$ in $\mathbf{R}_g^{(i)}$ izražena z vrsto avtomatično, čim je kateri od vhodnih parametrov izražen z vrsto. Koeficienti $\mathbf{K}_{g, l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ in $\mathbf{R}_{g, l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ so izračunani v Gaussovih točkah in se po pravilih Gaussove kvadrature pomnožijo z ustreznimi utežmi ter seštejejo v prispevek končnega elementa $\mathbf{K}_{e, l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ in $\mathbf{R}_{e, l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$. Prispevki posameznih končnih elementov se nato s standardno proceduro formiranja seštejejo v globalne matrike in vektorje koeficientov $\mathbf{K}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ and $\mathbf{R}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$. Ker sta $\mathbf{K}^{(i)}$ in $\mathbf{R}^{(i)}$ v obliki vrste, je tudi izračunani $\Delta \mathbf{p}^{(i)}$ v obliki vrste.

Zaradi uporabe simbolnega algebrskega sistema za računanje z vrstami je za izvedbo simbolna občutljivostna analiza reševanja linearnega sistema enačb potrebno veliko število operacij, zaradi česar so računski časi zelo dolgi. Obstaja tudi drugačen pristop, ki število operacij zmanjša in s tem skrajša računski čas. Po tem postopku se koeficiente $\Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ izračuna z rekurzivno formulo

$$\mathbf{K}_{00 \dots 0}^{(i)} \Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} = -\mathbf{R}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} - \sum_{\substack{r_1=0 \dots r_M=0 \\ \text{except: } r_1=r_2=\dots=r_M=0}}^{l_1} \sum_{r_2=0}^{l_2} \dots \sum_{r_M=0}^{l_M} \mathbf{K}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)} \Delta \mathbf{p}_{(l_1-r_1)(l_2-r_2)\dots(l_M-r_M)}^{(i)}, \quad (2.68)$$

$$l_k = 0, 1, \dots, s_k.$$

Ob tem velja opozoriti, da imajo koeficienti matrik $\mathbf{K}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ enako strukturo razpršenosti kot matrika $\mathbf{K}^{(i)}$ ter da je v tem primeru potrebno izračunati le razcep (ki je draga numerična operacija) matrike $\mathbf{K}_{00 \dots 0}^{(i)}$. Iz enačbe (2.68) je tudi razvidno, da koeficienti višjih redov $\Delta \mathbf{p}_{l_1 l_2 \dots l_M}^{(i)}$ nimajo vpliva na koeficiente nižjih redov. Na podlagi te ugotovitve, se lahko numerično učinkovitost še poveča, kot je prikazano na sliki 2.5, pri čemer se Newton-

Raphsonovo zanko razdeli na dva dela. V prvem delu se išče rešitve ničelnih koeficientov $\mathbf{p}_{00\dots 0}$. Ta del Newton-Raphsonove zanke je popolnoma numeričen in predstavlja rešitev determinističnega primarnega problema za pričakovane vrednosti slučajnih parametrov $^0\xi$. Za rešitev tega dela se torej lahko uporabi povsem numerične programe, kot je npr. *CDriver* (ki je napisan v programskem jeziku C).

Po doseženi konvergenci Newton-Raphsonovih iteracij za nični člen $\mathbf{p}_{00\dots 0}$ se prične drugi del Newton-Raphsonove zanke. V tem delu se izvaja rekurzivno računanje preostalih koeficientov vrste, kot prikazuje slika (2.5). V tem delu je potrebno uporabiti simbolni algebrski sistem, ki omogoča simbolno operiranje z vrstami. V ta namen se lahko uporabi *MDriver*, ki je komplementaren modul *CDriver*ju. *MDriver* je v celoti zapisan v simbolnem jeziku programskega okolja Mathematica in ima enak input, strukturo podatkov in ukazni jezik kot *CDriver*. Avtomatski generator kode *AceGen* izvede avtomatsko generacijo podprogramov za končne elemente za *MDriver* in *CDriver* iz istega simbolnega opisa končnega elementa (podrobnejši opis *AceGen*-a in simbolno-numeričnega pristopa je v poglavju 3.1). Ko je dosežena konvergenca vseh koeficientov, se prične izračun za naslednji časovni korak.

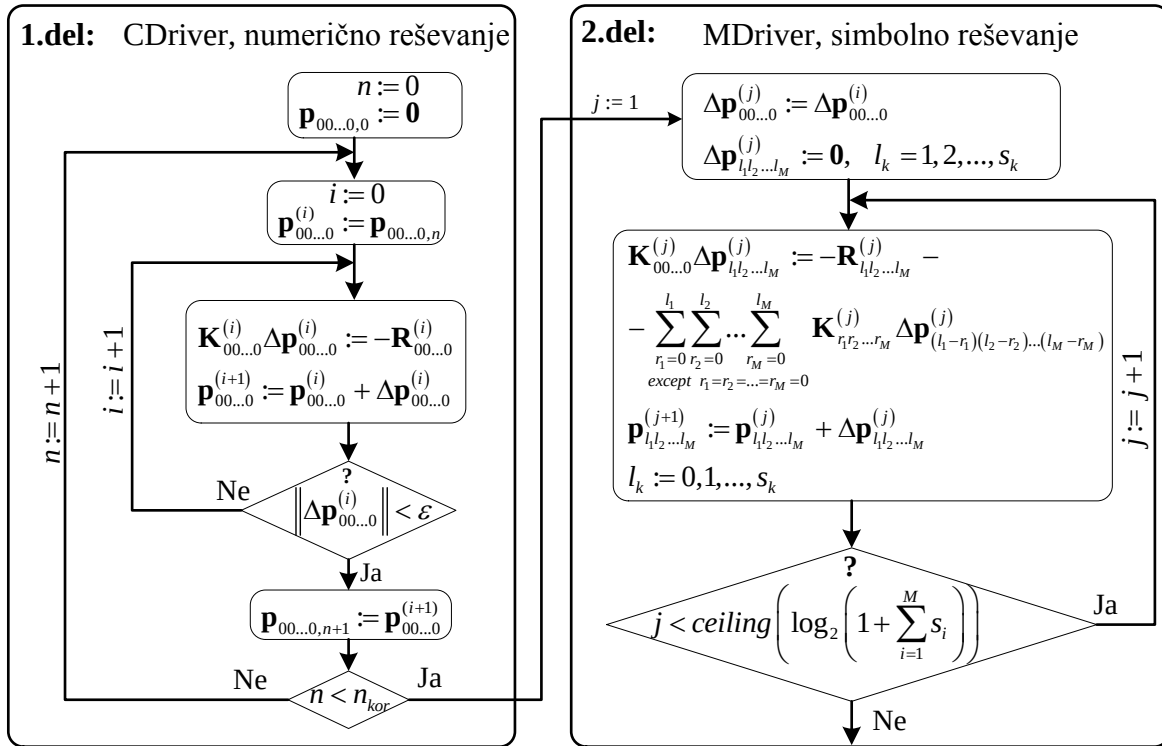
Lastnost Newton-Raphsonove procedure, da je kvadratično konvergentna, velja tudi za koeficiente razvoja v vrsto. To pomeni, da ko je enkrat dosežena konvergenca ničelnega koeficienta $\mathbf{p}_{00\dots 0}$, se število pravilno izračunanih koeficientov vrste z vsako iteracijo podvoji. Kar pomeni, da je potrebno največ $\lceil \log_2 \left(1 + \sum_{i=1}^M s_i \right) \rceil$ iteracij. Funkcija $\text{ceiling}(x) = \min \{m \in \mathbb{Z} | m \geq x\}$ izračuna najmanjše celo število večje ali enako vrednosti x .

2.3.3 Metoda končnih diferenc

Tudi tretja predstavljena metoda, metoda končnih diferenc, služi v doktorski disertaciji predvsem za kontrolo pravilnosti rezultatov in primerjavo numerične učinkovitosti. Zato bo v tem poglavju predstavljena metoda končnih diferenc kolikor je mogoče strnjeno. Osnovne enačbe metode končnih diferenc so izpeljane iz razvoja funkcije v Taylorjevo vrsto. Prvi in drugi odvodi funkcije več spremenljivk $f(x, y)$ se po tej metodi izračunajo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}, & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x - h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y - h_2) + f(x - h_1, y - h_2)}{4h_1 h_2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Največja slabost metode končnih diferenc je, da metoda ni stabilna. Razlog temu je, da ima dva izvora napak: napaka metode zaradi zanemaritve višjih členov Taylorjeve vrste in zaokrožitvena napaka, ki je posledica računalniškega zapisa števil na omejeno



Slika 2.5: Newton-Raphsonova procedura reševanja, prilagojena za reševanje razvoja vektorja rešitve v vrsto za časovno neodvisne mehanske probleme.

Figure 2.5: Newton–Raphson solution procedure adjusted for power series solution to the system of nonlinear equations.

natančnost v t.i. formatu plavajoče vejice. Medtem ko napaka zaradi zanemaritve členov pada z manjšanjem h , se zaokrožitvena napaka z manjšanjem h povečuje. Posledično je ustrezen h potrebno izbrati zelo previdno, da se skupna napaka minimizira. Vendar pa izbira optimalnega h , še posebej pri kompleksnejših funkcijah, ni tako preprosta in jo je nemogoče določiti vnaprej. Zato je običajno potrebnih nekaj iteracij, da se oceni ustrezen h in doseže želeno natančnost. Če ob tem upoštevamo, da v metodi končnih elementov vsak klic funkcije $f(x, y)$ v izrazih (2.69) pomeni izvedbo celotne primarne analize, to pomeni, da je v vsaki iteraciji potrebno izvesti 2 do 4 primarne analize ter to število pomnožiti s številom iteracij, potrebnih da se oceni ustrezen h . Hitro postane jasno, da je metoda, predvsem v primeru kompleksnih mehanskih problemov, zelo draga. Za pocenitev računskega postopka metode končnih diferenc v disertaciji uporabljamo izboljšano metodo končnih diferenc. V tej metodi se uporabi Riddersova implementacija Richardsonove ekstrapolacije $h \rightarrow 0$ ter Nevillovega algoritma, po katerem je vsak izračun končne difference uporabljen hkrati za ekstrapolacijo višjega reda in ekstrapolacijo predhodno izračunanih končnih diferenc, vendar tokrat z manjšim h . h se v vsaki iteraciji manjša. Z uporabo ekstrapolacije, ki je neprimerljivo numerično učinkovitejša od celotne primarne analize, se število potrebnih iteracij in posledično numerična učinkovitost

postopka praviloma izboljša. Podrobnosti algoritma so podane v Press et al. (1988-92).

2.4 Metoda Monte Carlo za izračun statistike odziva konstrukcije

Metoda Monte Carlo je metoda, pri kateri se izvede večje (poljubno) število simulacij. V vsaki simulaciji se skladno z verjetnostno porazdelitvijo naključnih spremenljivk generirajo naključne vrednosti teh spremenljivk. Nato se z uporabo teh vrednosti reši (deterministični) primarni problem in beleži želeni funkcional odziva (npr. pomik, plastične deformacije, porabljen energijo itd.). Iz množice rešitev se nato s standardnimi statističnimi metodami določi statistiko odziva. Prednost metode Monte Carlo je v tem, da je zelo splošna in uporabna ne glede na naravo problema. Tudi natančnost vseh novo razvitih metod za izračun verjetnosti se zaradi tega običajno preverja prav z metodo Monte Carlo. Slabost metode je, da rezultat, ne glede na to, koliko simulacij izvedemo, vedno vsebuje nekaj negotovosti, saj zaradi naključne izbire parametrov ne moremo vedeti ali je bila izbrana tipična množica možnih vrednosti slučajnih parametrov. V splošnem velja groba ocena, da je natančnost metode Monte Carlo za večje število simulacij proporcionalna $1/\sqrt{n}$, kjer je n število simulacij.

Za generiranje naključnih števil se običajno uporablja psevdo-naključen generator naključnih števil (ang. *pseudorandom number generator*). Večina programskih jezikov ima generatorje naključnih spremenljivk že vgrajene. Vrednosti, ki jih dobimo na ta način niso povsem naključne, temveč se po določenem algoritmu iz relativno majhne množice začetnih vrednosti generira zaporedje števil, ki aproksimirajo lastnosti slučajnih spremenljivk. Obstajajo tudi algoritmi, pri katerih so generirane spremenljivke še bližje slučajnim, vendar so numerično bolj zahtevni. Za oceno ustreznosti generatorjev naključnih števil obstajajo posebni testi. Eni najbolj znanih so naprimer t.i. "diehard testi", ki jih je razvil G. Marsaglia, 1995.

V splošnem so za simulacije Monte Carlo dovolj natančni tudi generatorji psevdo-naključnih števil, ki so numerično učinkovitejši in še vedno dovolj dober približek povsem naključnim spremenljivkam. V disertaciji so naključne spremenljivke za simulacije Monte Carlo generirane po metodi "extended cellular automata", ki je ena od vgrajenih metod za generiranje psevdo-naključnih števil v Mathematici in jo odlikuje visoka kvaliteta generiranih števil. Po tej metodi se generira vektor stanja dolžine 5120, ki ga skladno z determinističnim pravilom sestavljajo ničle in enice. Nov vektor stanja se nato določi na podlagi vrednosti določenih sosednjih celic v prejšnjem vektorju stanja. Podmnožice celic predstavljajo naključne bite, iz katerih se generirajo psevdonaključna števila. Na ta način obstaja določena korelacija med trenutno in petimi predhodnimi celicami. V praksi se izkaže, da se ob sestavljanju psevdonaključnih števil na način, da se v vektorju stanja preskakuje po 4 celice (kar smo uporabili tudi pri generiranju naključnih števil v disertaciji), doseže visoko stopnjo kvalitete naključnosti generiranih števil, ki izpolnijo tudi zelo

stroge teste naključnosti.

Za metodo Monte Carlo v splošnem velja: večje kot je število simulacij, večja bo natančnost izračunane statistike odziva. Kar pomeni, da je metoda numerično precej draga, saj n simulacij Monte Carlo pomeni izvedbo n primarnih analiz. Dobra stran pri tem je, da so posamezne simulacije med seboj neodvisne in se računski čas zato lahko skrajša s paralelnim izvajanjem analiz na več procesorjih. Ob tem je potrebno biti pozoren le na to, kakšen algoritem uporablja program za generiranje naključnih števil oz. za generiranje semen, iz katerih se prične generiranje psevdo naključnih števil. V primeru, da bi se pri paralelnih izračunih osnovnih števil, uporabilo isto seme, bi se namreč v teh izračunih generirala identično ista števila, kar bi posledično pomenilo korelacijo med generiranimi števili in rezultat ne bi imel želene naključnosti.

3 Hibridni simbolno-numerični pristop

Kot pove ime, simbolno-numerični pristop predstavlja kombinacijo različnih pristopov in metod k reševanju numeričnih problemov. Cilj kombiniranja različnih metod je, da se uporabi prednosti vsake izmed kombiniranih metod, medtem ko se na področju, na katerem je posamezna metoda šibka, aplicira drugo metodo. Končni rezultat je zato boljši kot če bi uporabili le eno izmed njih. V uporabljenem simbolno-numeričnem pristopu v doktorski disertaciji smo kombinirali

- program za simbolno računanje Mathematica,
- avtomatski generator programske kode z vgrajeno tehniko avtomatskega odvajanja AceGen in
- okolje za numerično modeliranje po metodi končnih elementov AceFEM.

Program za simbolno računanje (ang. *computer algebra system*) omogoča operiranje z izrazi na simbolni ravni. V disertaciji je izbran program za simbolno računanje Mathematica (Mathematica 9.0). Glavna prednost programov za simbolno računanje je, da omogočajo simbolno izpeljavo in poenostavitev izrazov. Uporaba programa za simbolno računanje v metodi končnih elementov tako omogoča zapis enačb in algoritma končnega elementa v zelo strnjeni in splošni obliki. Prednost tako kratkega in preglednega zapisa enačb je tudi v tem, da je iskanje morebitnih napak zato veliko lažje. Slabost programov za simbolno računanje je, da so zaradi simbolnega zapisa funkcij izračuni v teh programih zelo zahtevni, velikost izrazov pa eksponentno narašča z naraščajočim številom matematičnih operacij (kot so npr. odvajanje, različne transformacije) in številom prostostnih stopenj. Zaradi tega so računski časi analiz lahko zelo dolgi in je izvedljivost analize mehanskih problemov na simbolni ravni zato omejena le na matematično enostavnejše probleme z majhnim številom končnih elementov. Programi za simbolno računanje sicer omogočajo tudi numerične operacije, vendar so kljub temu numerično manj učinkoviti v primerjavi s programskimi jeziki kot sta na primer FORTRAN ali C. Na tem mestu se pokaže prednost hibridnega pristopa, ki s prevedbo simbolnega zapisa v poljubni programski jezik omogoča, da se izkoristi prednosti obeh pristopov - simbolnega in numeričnega.

Povezavo med simbolno izpeljanimi enačbami in prevedbo enačb v izbrani programski jezik omogoča *avtomatski generator kode* končnih elementov AceGen (Korelc, 2009b). AceGen je programski paket, združljiv s programom Mathematica. Uporabnik enačbe zapiše v simbolni obliki. AceGen enačbe nato prevede v izbran *programski jezik*. Tu se

pokaže še ena prednost AceGena, ki omogoča prevedbo simbolnega zapisa enačb v mnoge programske jezike (C, C++, FORTRAN, Mathematica, Matlab), ne da bi bilo potrebno v izvirnem simbolnem zapisu karkoli spreminjati. Pri tem sta za numerično učinkovitost izpeljane kode pomembni predvsem dve tehniki, ki sta vgrajeni v AceGen: avtomatsko odvajanje in simultana stohastična poenostavitev numeričnih kod. *Avtomatsko odvajanje* je numerično zelo učinkovita tehnika odvajanja, ki temelji na uporabi verižnega pravila in je podrobneje predstavljena v poglavju 3.2. *Simultana stohastična poenostavitev numeričnih kod* je alternativa običajnemu pristopu optimiranja izrazov, po katerem se izraze optimira, tik preden se jih prevede v numerični jezik in sicer tako, da se išče morebitne enake člene ali dele členov v izrazih. Tak pristop se pri splošnem nelinearnem mehanskem problemu namreč izkaže kot neučinkovit.

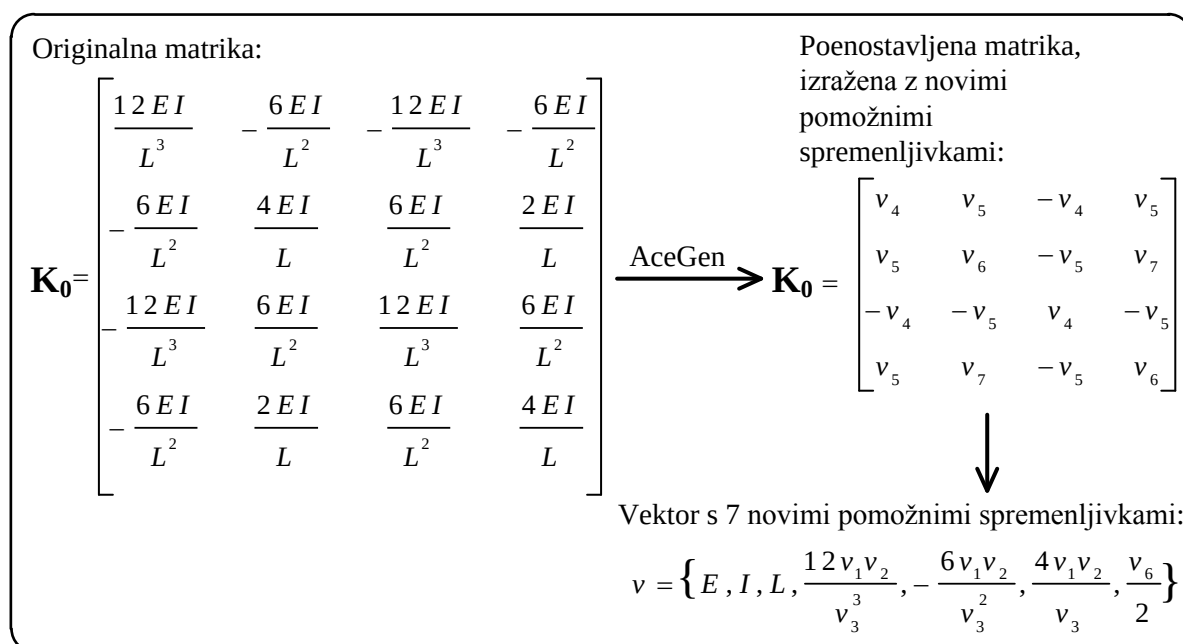
S tehniko simultane stohastične poenostavitve izrazov se enakost izrazov išče z izvrednotenjem le-teh z uporabo naključnih vrednosti posameznih spremenljivk med samo izpeljavo izrazov (Korelc, 1997). Delom izrazov, ki se v različnih izrazih ponavljajo, se nato avtomatsko dodeli nove pomožne spremenljivke, kot je prikazano na sliki 3.1. Izkaže se, da je simultana stohastična poenostavitev numeričnih kod učinkovita in primerna tudi za bolj kompleksne, nelinearne probleme. Po končani optimizaciji izraza ima uporabnik omogočeno svobodno manipuliranje z optimiranim izrazom, ki ga izpelje AceGen. Rezultat vseh omenjenih tehnik, vgrajenih v AceGen, je uspešno manjšanje problema rasti programske kode in izboljšanje numerične učinkovitosti izpeljane in prevedene programske kode. Shema uporabljenega hibridno simbolno-numeričnega pristopa k avtomatizaciji stohastične metode končnih elementov je predstavljena na sliki 3.2.

Podoben pristop, ki je v praksi pogosto uporabljen, je hibridni objektno-orientiran pristop (Eyheramendy in Zimmermann, 1999, Beall in Shephard, 1999, Logg, 2007).

3.1 Uporaba AceGen-a v metodi končnih elementov.

V splošnem so inženirski problemi opisani s skupkom diferencialnih ali integralnih enačb. Ob predpostavki poljubnih domen je direktna analitična rešitev le-teh celo ob enostavnejših konstitutivnih zakonih materialov neizračunljiva. Zato se za reševanje enačb, ki opisujejo inženirske probleme, običajno uporablja numerične metode. Najpogosteje uporabljena metoda v reševanju inženirskih problemov je metoda končnih elementov. Metoda končnih elementov je variacijska metoda, po kateri se zvezni problem diskretizira in nato z ustreznimi matematičnimi postopki pretvori v sistem nelinearnih algebraskih enačb, ki se jih lahko nato reši s standardnimi metodami, npr. Newton-Raphsonovo metodo. Opis metode končnih elementov za analizo mehanskih problemov je bil podan v poglavju 2.2.

AceGen je zasnovan tako, da je primeren tako za generiranje poljubnih programskih kod, definiranih s strani uporabnika, kot za generiranje kode za uporabo v metodi končnih

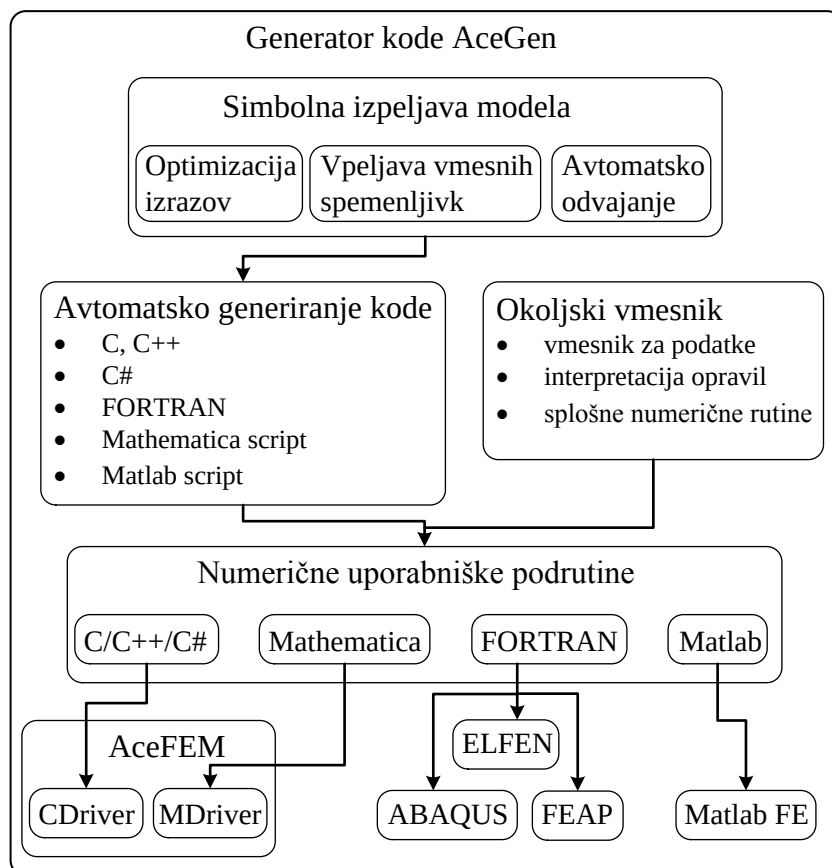


Slika 3.1: Simultana stohastična poenostavitev izrazov, vgrajena v AceGen.
Figure 3.1: Simultaneous optimization of the expressions that is built in AceGen.

elementov. V primeru, da se kodo generira za uporabo v metodi končnih elementov, AceGen izpeljano kodo končnega elementa prilagodi zahtevam okolja za končne elemente, v katerem bo generirana koda končnega elementa uporabljena (npr. AceFEM (Korelc, 2009c), ABAQUS, ELFEN, FEAP). Ob tem ni potrebno v izvorni simbolni kodi končnega elementa ničesar spreminjati.

Za reševanje problemov z metodo končnih elementov ima AceGen pripravljene standardne podprograme s privzetimi imeni in argumenti. To so npr. podprogram za izračun tangentne matrike in reziduala, podprogram za postprocesiranje, podprograma za izračun občutljivosti neodvisnega in odvisnih vektorjev rešitve, podprogram za izvedbo poljubne naloge, ki zahteva izvedbo standardne procedure sestavljanja matrik na globalnem nivoju (ang. *assembly procedure*) itd. V doktorski disertaciji smo za diskretizacijo stohastičnega polja uporabili zadnjo možnost. Za izračun statistike odziva konstrukcije, smo za simulacije Monte Carlo, kjer je bilo to potrebno, ustrezno razširili oz. prilagodili podprogram za izračun tangentne matrike in reziduala. Za perturbacijsko metodo smo morali ustrezno definirati podprograma, ki sta prilagojena za izračun občutljivostne analize.

Ker je AceGen uporabljen za definiranje in generiranje programskih kod, ki so razvite v okviru te disertacije in so deli posameznih kod v kasnejših poglavjih tudi predstavljeni, je prav, da se predstavi standardno proceduro za generiranje kode v AceGenu. AceGen je dodatni programski paket Mathematice, zato uporablja jezik Mathematice, razširjen z dodatnimi ukazi, ki imajo predpono *SMS* ter dodatnimi operatorji ($\vdash$, $\neg$, $\models$ in $\Rightarrow$),



Slika 3.2: Hibridni simbolno-numerični pristop k avtomatizaciji metode stohastičnih končnih elementov.

Figure 3.2: Hybrid symbolic-numeric approach to automation of stochastic finite element method.

ki spremenljivki priredijo vrednost in nadomeščajo standardni operator Mathematice =. Standardna procedura za generiranje kode končnega elementa v AceGenu je sestavljena iz naslednjih korakov

- *SMSInitialize* - znotraj tega ukaza se poda ime kode generiranega končnega elementa, v katerem jeziku naj bo generiran in za katero programsko okolje.
- *SMSTemplate* - tu se poda glavne karakteristike končnega elementa (število vozlišč, topologija, katere vhodne parametre je potrebno podati in njihove privzete vrednosti ipd.) ter pravila za simbolno-numerični vmesnik.
- *SMSStandardModule* - definira začetek standardnega podprograma s privzetim standardnim imenom in argumenti. Posamezen element ima lahko več različnih standardnih podprogramov, ki se jih poda enega za drugim, v poljubnem vrstnem redu.
- *SMSWrite* - ukaz, ki AceGenu sporoči, da je vhodna datoteka za končni element zaključena in začne generiranje datoteke s kodo končnega elementa.

Posamezni deli procedure si morajo slediti v vrstnem redu, kot je predstavljen v zgornjih alinejah.

3.2 Avtomatsko odvajanje

Avtomatsko odvajanje je alternativa numeričnemu in simbolnemu odvajanju. Avtomatsko odvajanje je zasnovano na dejstvu, da vsak računalniški program izvaja zaporedje elementarnih aritmetičnih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje...) in elementarnih funkcij (log, sin, cos...). Posledično se odvodi izračunajo avtomatsko, s ponavljajočo uporabo verižnega pravila na te operacije, dobljene vrednosti pa so analitične, točne do natančnosti računalniškega zapisa števil (Griewank, 2000). Da se tehniko avtomatskega odvajanja lahko uporabi za izpeljavo končnih elementov, jo je potrebno razširiti z dodatnimi operatorji, ki jih imenujemo *izjeme avtomatskega odvajanja*. Pristop, kjer bomo probleme opisali z uporabo avtomatskega odvajanja bomo imenovali *na avtomatskem odvajanju baziran opis problema*. Zanj bomo v nadaljevanju uporabljali okrajšavo ADB opis, ki izhaja iz angleškega izraza “automatic differentiation based”. Na tem mestu bomo predstavili kratek povzetek ADB pristopa, podrobnejši opis je podal Korelc (2009a).

Odvajanje poljubne funkcije f po množici medsebojno neodvisnih spremenljivk $\mathbf{a}$ z uporabo tehnike avtomatskega odvajanja označimo z

$$\nabla f := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a})}{\hat{\delta}(\mathbf{a})}. \quad (3.1)$$

Z operatorjem $\hat{\delta}(\bullet)/\hat{\delta}(\bullet)$ opišemo, da je za odvajanje funkcije f po spremenljivkah $\mathbf{a}$ uporabljena tehnika avtomatskega odvajanja.

Obstajata dve možnosti avtomatskega odvajanja: “forward” in “backward” način. Prikaz obeh možnosti avtomatskega odvajanja si pogledjmo na naslednjem primeru (povzeto po zapisnikih semi-plenarnega predavanja Korelc, 2012). Imamo funkcijo f

$$f = b c, \quad (3.2)$$

$$b = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{in} \quad (3.3)$$

$$c = \sin(b), \quad (3.4)$$

kjer so a_i neodvisne spremenljivke. “Forward” način akumulira odvode vmesnih spremen-

ljivk po neodvisnih spremenljivkah

$$\nabla b = \left\{ \frac{db}{da_i} \right\} = \{2a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$\nabla c = \left\{ \frac{dc}{da_i} \right\} = \{\cos(b)\nabla b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\nabla f = \left\{ \frac{df}{da_i} \right\} = \{\nabla b_i c + b\nabla c_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

“Backward” način avtomatskega odvajanja propagira pridružene spremenljivke $\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, ki so odvodi končnih vrednosti po vmesnih spremenljivkah

$$\bar{f} = \frac{df}{df} = 1, \quad 1, \quad (3.8)$$

$$\bar{c} = \frac{df}{dc} = \frac{\partial f}{\partial c} \bar{f} = b \bar{f}, \quad 1, \quad (3.9)$$

$$\bar{b} = \frac{df}{db} = \frac{\partial f}{\partial b} \bar{f} + \frac{\partial c}{\partial b} \bar{c} = c \bar{f} + \cos(b) \bar{c}, \quad 1, \quad (3.10)$$

$$\nabla f = \{\bar{a}_i\} = \left\{ \frac{db}{da_i} \bar{b} \right\} = \{2a_i \bar{b}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Pri odvajanju N skalarnih funkcij $\mathbf{F} = \{f_i, i = 1, \dots, N\}$ po M neodvisnih spremenljivkah $\mathbf{a} = \{a_j, j = 1, \dots, M\}$ je numerična učinkovitost “forward” načina v splošnem sorazmerna s številom neodvisnih spremenljivk M , medtem ko je “backward” način sorazmeren s številom funkcij N . V primerih, ko je število funkcij majhno, je “backward” način superioren nad “forward” načinom. Njegova slabost je le, da potrebuje potencialno več prostora za shranjevanje vmesnih podatkov med izvrednotenjem funkcije, ki je lahko enako številu izvedenih numeričnih operacij. Za učinkovito uporabo avtomatskega odvajanja je zaželeno, da je možna uporaba obeh načinov. AceGen omogoča uporabo obeh načinov, pri čemer v posameznem klicu procedure avtomatskega odvajanja samodejno izbere način odvajanja glede na razmerje števila funkcij in spremenljivk.

Kot je bilo že predstavljeno, je tehniko avtomatskega odvajanja za uporabo v metodi končnih elementov potrebno razširiti z dodatnimi operatorji, ki jih imenujemo *izjeme avtomatskega odvajanja*. V nadaljevanju so predstavljeni formalizmi za vpeljavo različnih tipov izjem in različnih načinov vpeljave izjem, lokalno in globalno definiranih (povzeto po Korelc, 2009a). Vpeljavo lokalno definirane izjeme k proceduri avtomatskega odvajanja označimo z

$$\nabla f := \left. \frac{\hat{\delta} f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \right|_{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}}, \quad (3.12)$$

kjer je f poljubna funkcija, $\mathbf{a}$ je množica medsebojno neodvisnih spremenljivk, $\mathbf{b}$ je množica medsebojno neodvisnih vmesnih spremenljivk, ki so del izvrednotenja funkcije f , $\mathbf{G}$ je

množica poljubnih funkcij, odvisnih od $\mathbf{a}$, tako da je $\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a})$, in $\mathbf{M}$ je poljubna matrika. Izjema $\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}$ definira, da je odvod poljubne množice medsebojno neodvisnih vmesnih spremenljivk $\mathbf{b}$ po neodvisnih spremenljivkah $\mathbf{a}$ (ne glede na dejansko medsebojno odvisnost ali neodvisnost teh spremenljivk) enak matriki $\mathbf{M}$.

V primeru, da za odvajanje funkcije f po $\mathbf{a}$ ni definirana nobena izjema, je rezultat procedure avtomatskega odvajanja enak parcialnemu odvodu f po $\mathbf{a}$

$$\frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a})}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial(\mathbf{a})}. \quad (3.13)$$

Ločimo štiri osnovne tipe izjem avtomatskega odvajanja, ki so prikazane v preglednici 3.1. Tip A je predstavljen že v enačbi (3.12). Uporaba tega tipa izjeme avtomatskega odvajanja je lahko numerično ugodna tudi v primeru, ko odvisnost $\mathbf{b}$ od $\mathbf{a}$ dejansko obstaja, vendar se na ta način izognemo računanju odvodov $\mathbf{b}$ po $\mathbf{a}$ preko verižnega pravila. Tipi izjem B, C in D predstavljajo posebne primere izjeme tipa A. Tip izjeme B se uporabi, ko v algoritmu programske kode sicer obstaja odvisnost $\mathbf{b}$ od $\mathbf{a}$, vendar se zahteva, da se med proceduro avtomatskega odvajanja te odvisnosti ne upošteva. Ta tip izjeme pride v mehanskih problemih v poštev npr. ko je namesto totalne variacije potrebno iz vrednotiti poljubno variacijo obravnavane količine. Tip izjeme C pride v poštev, ko v algoritmu ne obstaja odvisnost $\mathbf{b}$ od $\mathbf{a}$, vendar iz formulacije problema sledi, da obstajajo (običajno implicitne) odvisnosti, ki jih je pri odvajanju potrebno upoštevati. Izjemo tipa A se lahko tudi posploši. Naj bo $\mathbf{c}$ množica vmesnih spremenljivk, ki so del iz vrednotenja funkcije f , tako da je $\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{c})$ in $\mathbf{H}$ množica poljubnih funkcij, odvisnih od $\mathbf{a}$, tako da je $\mathbf{c} := \mathbf{H}(\mathbf{a})$. Na ta način se v verižnem pravilu lahko naredi most, ki premosti vmesno pot med $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$. Verižno pravilo, ki povezuje $\mathbf{c}$ z $\mathbf{a}$ se nato propagira avtomatsko s proceduro avtomatskega odvajanja.

Izjema avtomatskega odvajanja, ki se tiče množice vmesnih spremenljivk $\mathbf{b}$ je lahko vpeljana na dva načina:

- *Lokalna definicija izjeme:* izjema (ena ali več) je definirana neposredno na mestu, kjer se pokliče procedura avtomatskega odvajanja, kot je prikazano v (3.12) in v srednjem stolpcu v preglednici 3.1.
- *Globalna definicija izjeme:* podatek o izjemi avtomatskega odvajanja, ki se tiče množice vmesnih spremenljivk $\mathbf{b}$ se poda v algoritmu na mestu, kjer je množica vmesnih spremenljivk $\mathbf{b}$ vpeljana, kar za splošen primer lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &:= \mathbf{G}(\mathbf{a}) \mid_{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{M}} \\ \nabla f &:= \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

in je za posamezne tipe izjem prikazana v desnem stolpcu v preglednici 3.1.

Preglednica 3.1: Tipične izjeme avtomatskega odvajanja.

Table 3.1: Typical automatic differentiation exceptions.

tip izjeme	Lokalna definicija izjeme	Globalna definicija izjeme
A	$\nabla f_A := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}}$ $\nabla f_A := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})}$
B	$\nabla f_B := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{0}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{0}}$ $\nabla f_B := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})}$
C	$\nabla f_C := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})} = \mathbf{M}}$ $\nabla f_C := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})}$
D	$\nabla f_D := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{c}(\mathbf{a})))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{c})} = \mathbf{M}}$	$\mathbf{c} := \mathbf{H}(\mathbf{a})$ $\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{c}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{c})} = \mathbf{M}}$ $\nabla f_D := \frac{\hat{\delta}f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{c}(\mathbf{a})))}{\hat{\delta}(\mathbf{a})}$

Izbira med enim in drugim načinom vpeljave izjem je odvisna od posameznega primera. V splošnem je bolj prikladna uporaba globalnih definicij izjem, še posebej, ko imamo opravka s kompleksnejšimi računskimi modeli, v katerih je med izvajanjem algoritma potrebno večkrat računati odvode.

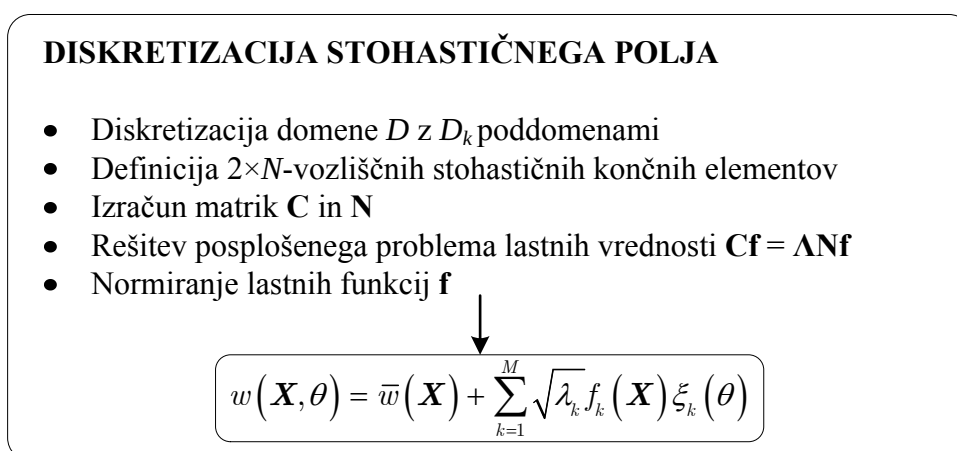
4 Avtomatizacija diskretizacije stohastičnega polja

4.1 Stohastični končni elementi

V okviru doktorske disertacije je bila razvita avtomatizacija postopka diskretizacije stohastičnega polja v K-L vrsto, predstavljenega v poglavju 2.1. V ta namen smo razvili stohastične končne elemente. Koda stohastičnega končnega elementa je sestavljena iz treh podprogramov:

- *podprogram za izračun prispevka posameznega stohastičnega končnega elementa h globalni matriki oblikovnih funkcij $\mathbf{N}$*
- *podprogram za izračun prispevka posameznega stohastičnega končnega elementa h globalni kovariančni matriki $\mathbf{C}$*
- *podprogram za izračun integrala produkta dveh lastnih funkcij (leva stran enačbe (2.9))*

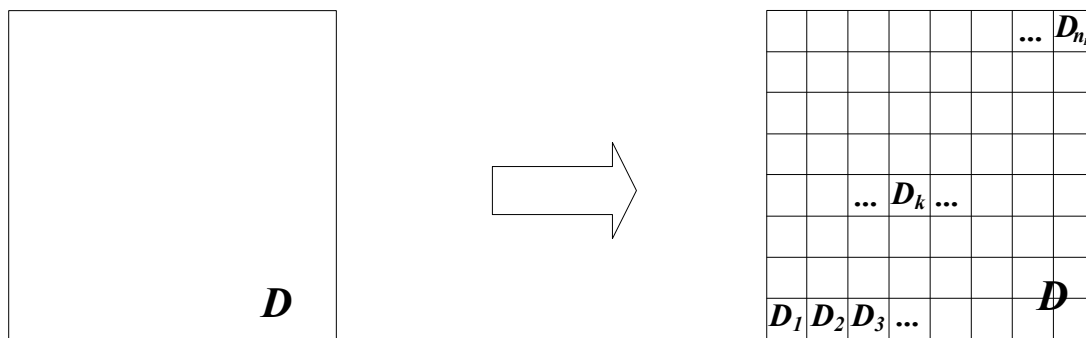
Procedura avtomatizacije diskretizacije stohastičnega polja v KL vrsto je prikazana na sliki 4.1.



Slika 4.1: Procedura avtomatizacije diskretizacije stohastičnega polja.
Figure 4.1: Procedure of automation of stochastic field discretization.

Glavni problem, ki ga je bilo potrebno rešiti v procesu formulacije stohastičnih končnih elementov je izračun prispevka posameznega stohastičnega končnega elementa h kovariančni matriki $\mathbf{C}$, saj je v tem izračunu potrebno poznati razdaljo med posameznimi elementi. Klasično formulirani končni elementi informacije o koordinatah preostalih elementov ne vsebujejo, zato bi, če bi želeli rešiti problem na ta način, morali izvesti temeljne posege v okolje za končne elemente. Temu smo se želeli izogniti in problem rešiti tako, da je rešitev primerna in uporabna v poljubnem standardnem okolju za končne elemente, ki omogoča odprto kodo končnih elementov. Tako se nam je porodila ideja definicije novih končnih elementov po naslednjem postopku. Najprej smo fizikalno domeno D razdelili na n_D poddomen, kot je prikazano na sliki 4.2

$$D = \bigcup_{k=1}^{n_D} D_k \quad (4.1)$$

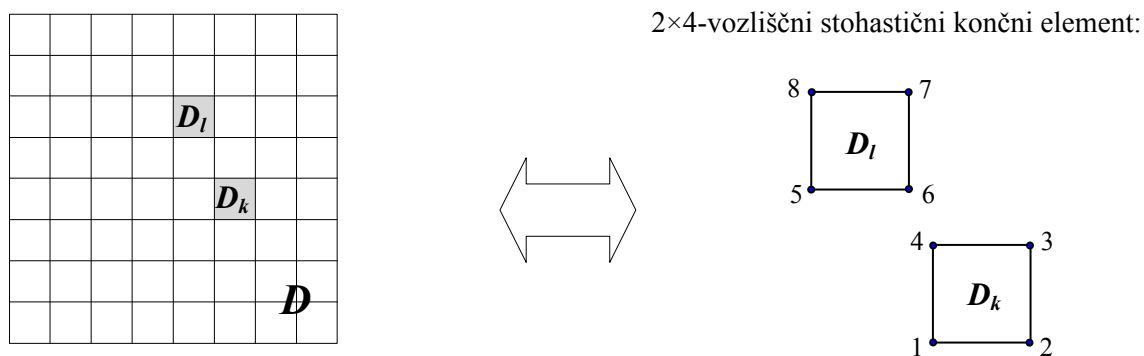


Slika 4.2: Razdelitev fizikalne domene D na n_D poddomen.
Figure 4.2: Discretization of physical domain D into n_D subdomains.

V naslednjem koraku se vsaka poddomena $D_k, k = 1, 2, \dots, n_D$ kombinira z vsako posamezno poddomeno $D_l \in D, l = k, k+1, \dots, n_D$, vključno s samo sabo. Vsaka izmed kombinacij dveh poddomen predstavlja $2 \times N$ -vozliščni stohastični končni element. Primer takega stohastičnega končnega elementa za dvodimenzionalno domeno D , diskretizirano z linearnimi štirivozliščnimi elementi je prikazan na sliki 4.3.

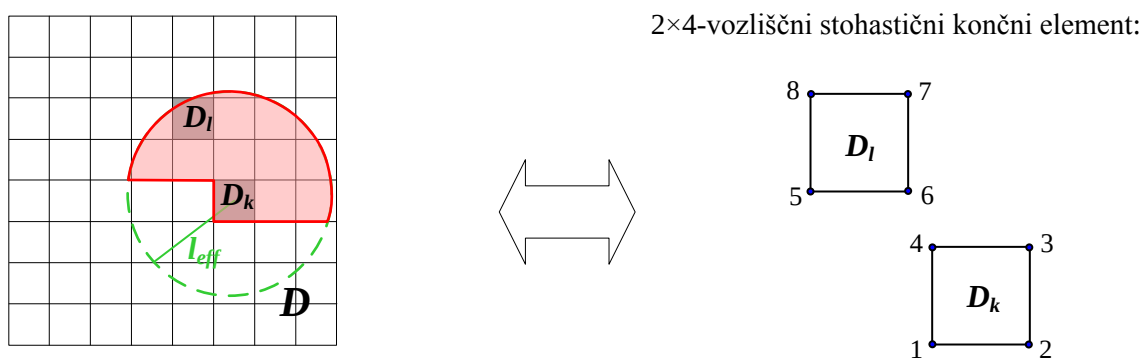
V primeru, da je polje nizko korelirano in se kovariančna funkcija poenostavi tako da se upošteva le do neke omejene razdalje med elementi, ki jo označimo z l_{eff} (kar je podrobneje razloženo kasneje v poglavju 5), se vsako izmed poddomen kombinira le s poddomenami, ki so od domene D_k oddaljene manj ali enako od l_{eff} , kot je prikazano na sliki 4.4.

Po običajnem postopku, ki se uporablja v metodi končnih elementov, se nato količine oz. prispevki posameznih stohastičnih končnih elementov izračunajo na referenčnih končnih elementih. Referenčna končna elementa, na katerih se izračuna prispevke, sta oblike kvadrata z dolžino stranice 2, kot je prikazano na sliki 4.5. Za preračunavanje količin med globalnim in referenčnim koordinatnim sistemom se uporabi izoparametrična preslikava.



Slika 4.3: Diskretizacija dvodimenzionalne domene D in formulacija 2×4-vozliščnih stohastičnih končnih elementov.

Figure 4.3: Discretization of twodimensional domain D and formulation of 2×4-noded stochastic finite elements.



Slika 4.4: Diskretizacija dvodimenzionalne domene D in formulacija 2×4-vozliščnih stohastičnih končnih elementov na razdalji l_{eff} , z upoštevanjem simetrije problema.

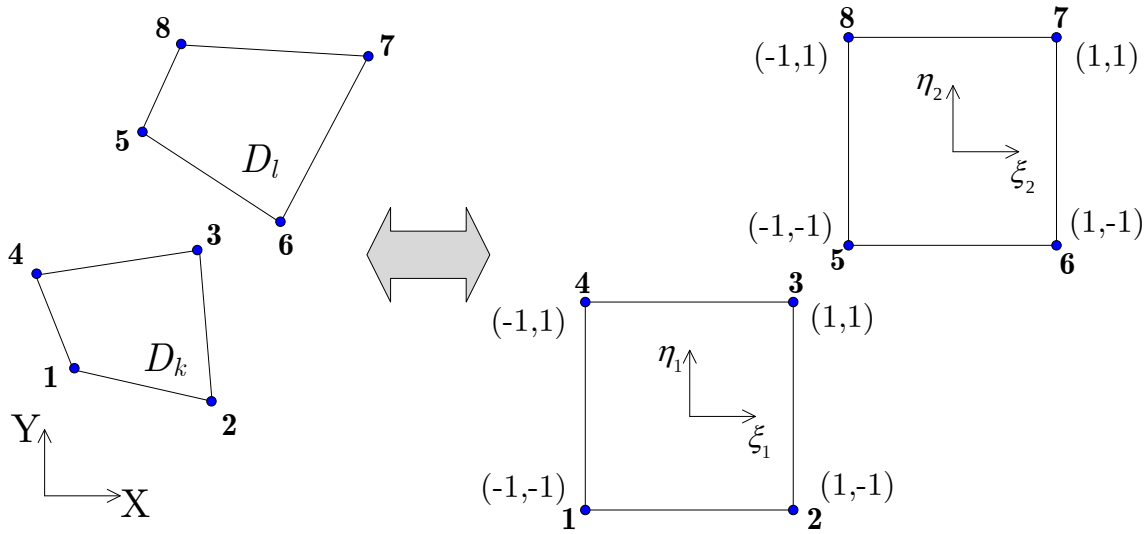
Figure 4.4: Discretization of two-dimensional domain D and formulation of 2×4-noded stochastic finite elements on l_{eff} region with consideration of problem symmetry.

Ker originalni in referenčni končni element v splošnem nista enake oblike in dimenzij, je potrebno količine, izračunane v referenčnem koordinatnem sistemu, pri prevedbi v globalni koordinatni sistem pomnožiti z determinanto Jakobijeve matrike preslikave.

Prispevek posameznega stohastičnega končnega elementa h globalni kovariančni matriki $\mathbf{C}$ in matriki oblikovnih funkcij $\mathbf{N}$ se znotraj stohastičnega končnega elementa izračuna z uporabo numerične integracije

$$C_{ij}^e = \sum_{g=1}^{N_g} \sum_{h=1}^{N_g} w_g w_h C_{ij}^{gh}, \quad (4.2)$$

$$N_{ij}^e = \sum_{g=1}^{N_g} w_g N_{ij}^g, \quad (4.3)$$



Slika 4.5: Izoparametrična preslikava iz globalnega v referenčni koordinatni sistem za primer dvodimenzionalnega, 2×4 -vozliščnega stohastičnega končnega elementa.

Figure 4.5: Isoparametric mapping from global to reference coordinate system for two-dimensional 2×4 -noded stochastic finite element.

kjer je N_g število integracijskih točk, w_g in w_h sta uteži Gaussovih integracijskih točk g in h ter C_{ij}^{gh} in N_{ij}^g sta prispevka k matrikama $\mathbf{C}$ in $\mathbf{N}$, izračunana v Gaussovih točkah po enačbi

$$\begin{aligned} C_{ij}^{gh} &= J_g J_h \sigma^2 C(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h) N_j(\mathbf{X}_g) N_i(\mathbf{X}_h), \\ N_{ij}^g &= J_g N_i(\mathbf{X}_g) N_j(\mathbf{X}_g), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kjer sta J_g in J_h determinanti Jacobijeve matrike preslikave referenčnih koordinat ξ_1, η_1 oz. ξ_2, η_2 v globalni koordinatni sistem. Računanje prispevka C_{ij}^{gh} se izvede po vseh stohastičnih končnih elementih, medtem ko se izračun prispevka N_{ij}^g izvede le, če sta indeksa k -te in l -te domene, ki sta kombinirani v stohastičnem končnem elementu (D_k in D_l), enaka. Razlog je v tem, da je za izračun matrike $\mathbf{N}$ potrebno izračunati le enojni integral produktov oblikovnih funkcij. Integral je sicer potrebno izvesti preko celotne domene, vendar so oblikovne funkcije v metodi končnih elementov definirane tako, da so le lokalno različne od nič (npr. oblikovna funkcija N_i je različna od nič le v poddomenah, ki se stikujejo v vozlišču i), zato je produkt dveh oblikovnih funkcij $N_i(\mathbf{X}_g)$ in $N_j(\mathbf{X}_g)$ različen od nič le v primeru, da vozlišči i in j pripadata isti poddomeni. Potrebno je torej narediti zanko, ki gre le po vsaki poddomeni enkrat. Zato se, da se izognemo večkratnemu integriranju po isti domeni, izračun prispevka N_{ij}^g izvede le, če sta v stohastičnem elementu kombinirani isti poddomeni ($D_k = D_l$).

Globalni matriki $\mathbf{C}$ in $\mathbf{N}$ sta nato formirani s standardno proceduro sestavljanja po končnih elementih

$$\mathbf{C} = \bigcup_e \mathbf{C}^e, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{N} = \bigcup_e \mathbf{N}^e. \quad (4.6)$$

Ob tem je potrebno dodati še eno opombo. Lastnost, da je matrika $\mathbf{C}$ simetrična, smo izkoristili za izboljšanje numerične učinkovitosti, se pravi da se sestavi le zgornja trikotna matrika $\mathbf{C}$ in $\mathbf{N}$. Ker so domene D_k in D_l kombinirane po vnaprej določenem zaporedju ($k = 1, 2, \dots, n_D$, $l = k, k + 1, n_D$), je bilo v okviru formulacije kode za proceduro sestavljanja prispevkov C_{ij}^e posameznih stohastičnih elementov v globalno matriko potrebno upoštevati, da se ob upoštevanju simetričnosti matrike sestavlja le zgornji trikotnik matrike. Indeks i naredi namreč zanko po vozliščih domene D_k , indeks j pa po vozliščih domene D_l . Izračunani prispevek C_{ij}^e se v tem primeru namesto po izrazu (4.2) izračunajo po izrazu

$$C_{ij}^e = \sum_{g=1}^{N_g} \sum_{h=1}^{N_g} w_g w_h a C_{ij}^{gh}; \quad a = \begin{cases} 2 & i = j \wedge k \neq l \\ 1 & \text{sicer} \end{cases} \quad (4.7)$$

Če $(j < i) \wedge (k \neq l)$, shrani C_{ij}^e na mesto C_{ji}^e

Izračunani prispevek C_{ij}^{gh} je zaradi vnaprej določenega vrstnega reda domen D_k in D_l potrebno prišteti k C_{ji}^e v primeru da je indeks j manjši od indeksa i in da domeni D_k in D_l nista isti ($k \neq l$), saj se pri simetrični tangenti sestavlja le zgornji trikotnik tangentne matrike in se tega prispevka sicer ne bi upoštevalo. Druga posebnost, ki jo je potrebno upoštevati ob simetrični tangenti, pa je, da v primeru, ko domeni D_k in D_l nista isti ($k \neq l$), imata pa skupno vozlišče (v tem primeru $i = j$), je prispevek (zopet zaradi vnaprej določenega vrstnega reda indeksov kombinacij domen D_k in D_l , ker se indeksa ne zamenjata) potrebno upoštevati dvakrat, saj bi se sicer izgubil del prispevka, ki bi ga imela kombinacija domene $D_l - D_k$ (in je zaradi $i = j$ enak, od tu faktor 2).

Ko sta globalni matriki $\mathbf{N}$ in $\mathbf{C}$ sestavljeni, sledi izračun lastnih vrednosti in lastnih funkcij. Ta izračun je opravljen v Mathematici, ki ima vgrajen algoritem računanja problema lastnih vrednosti in vektorjev in omogoča tudi nekaj dodatnih opcij za izboljšanje numerične učinkovitosti in natančnosti, npr. Arnoldijev algoritem, ki v primeru, da nas zanima le majhno število členov K-L vrste in je matrika $\mathbf{C}$ razpršena in pozitivno definitna, reševanje problema lastnih vrednosti občutno poceni. Na tem mestu morda ni odveč opomniti, da so vrednosti dobljenih lastnih vektorjev zaradi narave oblikovnih funkcij, ki imajo vrednost 1 v enem vozlišču in 0 v vseh ostalih, ravno vrednosti (sicer še nenormiranih) lastnih

funkcij v vozliščih (enačba (2.25)).

Izračunani lastni vektorji oz. lastne funkcije so v splošnem nenormirane, saj je njihova norma izbrana avtomatično s strani numerične knjižnice. Lastne funkcije je zato potrebno normirati skladno z enačbo (2.9). Tretji podprogram stohastičnega končnega elementa izračuna prispevek posameznih elementov k izračunu integrala

$$I_{fk} = \int_D f_k(\mathbf{X}) f_k(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \quad (4.8)$$

Zaradi ortogonalnosti lastnih funkcij je potrebno kombinirati le produkt lastnih funkcij z istim indeksom.

Za integriranje kot običajno v metodi končnih elementov uporabimo Gaussovo numerično integracijo, po kateri izračunamo vrednost izraza, ki ga integriramo, v točno določenih točkah. Te vrednosti nato pomnožimo z ustreznimi utežmi

$$\begin{aligned} I_{fk}^e &= \sum_{g=1}^{N_g} w_g I_{fk}^g, \\ I_{fk}^g &= J_g \left(\sum_{j=1}^J f_{jk, nenorm} N_j(\mathbf{X}_g) \right)^2, \\ I_{fk} &= \bigcup_e I_{fk}^e. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Prispevek I_{fk}^g se izračuna le v tistih stohastičnih končnih elementih, pri katerih sta kombinirani dve domeni z istim indeksom ($k=l$). Razlog je enak kot pri izračunu matrike $\mathbf{N}$ in sicer se na ta način izognemo večkratnemu integriranju po isti domeni. Skladno z enačbo (2.9) se lastne funkcije nato normira po izrazu

$$f_k = \frac{f_{k, nenorm}}{\sqrt{I_{fk}}}. \quad (4.10)$$

Algoritem 1 ADB formulacija stohastičnega končnega elementa ($D_k \cup D_l$)

```

if  $task = \text{"Nij"}$  and  $k = l$  then
   $N^e := 0$ 
  for  $g := 1, \dots, n_g$  do ▷ Zanka po integracijskih točkah
     $J_g := \det \left( \frac{\delta \mathbf{X}_g}{\delta \boldsymbol{\Xi}_g} \right)$  ▷ Jacobijeva determinanta
    for  $i := 1, \dots, J; j := i, \dots, J$  do
       $N_{ij}^g := J_g N_i(\mathbf{X}_g) N_j(\mathbf{X}_g); \quad N_{ij}^e := N_{ij}^e + w_g N_{ij}^g$ 
    end for
  end for
end if
if  $task = \text{"Cij"}$  then
   $C^e := 0$ 
  for  $g := 1, \dots, n_g; h := 1, \dots, n_g$  do ▷ Zanki po integracijskih točkah na  $D_k$  in  $D_l$ 
     $J_g := \det \left( \frac{\delta \mathbf{X}_g}{\delta \boldsymbol{\Xi}_g} \right); J_h := \det \left( \frac{\delta \mathbf{X}_h}{\delta \boldsymbol{\Xi}_h} \right)$ 
    for  $\forall i, j \in [1, 2, \dots, J]$  do
       $C_{ij}^{gh} := J_g J_h \sigma^2 C(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h) N_j(\mathbf{X}_g) N_i(\mathbf{X}_h)$  ▷ Prispevek Gaussove točke k  $C_{ij}$ 
       $a := \text{If}(i = j \wedge k < l), \text{ then } 2, \text{ else } 1$ 
      If  $(j < i \wedge k \neq l), \text{ then } C_{ji}^e := C_{ji}^e + w_g w_h C_{ji}^{gh}, \text{ else } C_{ij}^e := C_{ij}^e + w_g w_h a C_{ij}^{gh}$ 
    end for
  end for
end if
if  $task = \text{"Ifk"}$  and  $k = l$  then
   $I_{fk}^e := 0$ 
  for  $g := 1, \dots, n_g$  do
     $J_g := \det \left( \frac{\delta \mathbf{X}_g}{\delta \boldsymbol{\Xi}_g} \right); \quad I_{fk}^g := \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_k J_g; \quad I_{fk}^e := I_{fk}^e + w_g I_{fk}^g$  ▷ Prispevek Gaussove točke k  $I_{fk}$ 
  end for
end if

```

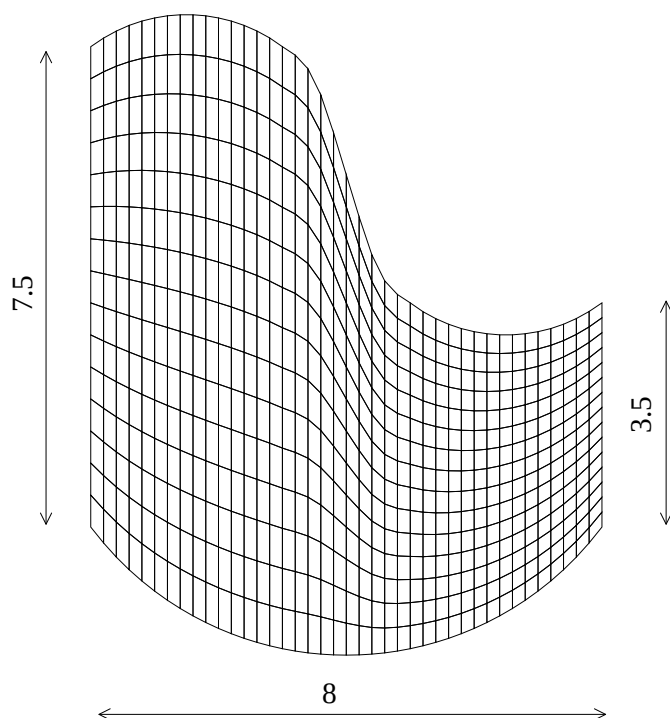
4.2 Izvedba diskretizacije stohastičnega polja v okolju za končne elemente Ace-FEM

V tem poglavju je prikazan primer vhodne datoteke za izvedbo diskretizacije dvodimenzionalnega stohastičnega polja. Na sliki 4.6 je prikazana oblika domene problema, preko katere je definirano stohastično polje. Podatki stohastičnega polja so podani v preglednici 4.1. Fizikalna domena problema je v prvem koraku diskretizirana s 600 poddomenami (15 razdelkov v navpični smeri in 40 razdelkov v vodoravni smeri).

Preglednica 4.1: Parametri stohastičnega polja.

Table 4.1: Parameters of stochastic field.

Pričakovana vrednost ($\bar{w}$)	0
Standardna deviacija (σ_w)	1
Korelacijska dolžina (l_c)	0.5
Kovariančna funkcija	$C_C, l_{eff} = 3l_c$



Slika 4.6: Skica fizikalne domene, preko katere je definirano stohastično polje za prikaz izvedbe diskretizacije v AceFEM-u.

Figure 4.6: Sketch of physical domain on which twodimensional stochastic field is defined for demonstration of AceFEM procedure.

Generiranje mreže pomožnih generičnih 4-vozliščnih Q1 elementov

```
<< AceFEM`;
L = 10.; R1 = L / 4; R2 = L / 2; h = 2.5;
m1 = Flatten[
  MapThread[Table, {{{x + L / 4, h / 2 + sqrt[R1^2 - x^2]}, {x + 3 L / 4, h / 2 - sqrt[R1^2 - x^2]}},
    {{x, -L / 4 + L / 10, L / 4, L / 20}, {x, -L / 4 + L / 20, L / 4 - L / 10, L / 20}}], 1];
m3 = Table[{x + L / 2, -h / 2 - sqrt[R2^2 - x^2]}, {x, -L / 2 + L / 10, L / 2 - L / 10, L / 20};
m2 = Transpose[{m1[[All, 1]], (m1[[All, 2]] + m3[[All, 2]]) / 2}];
mastermesh = {m3, m2, m1};
SMTInputData[];
SMTAddDomain["D", "Q1", {}];
SMTMesh["D", "Q1", {40, 15}, mastermesh];
SMTAnalysis[];
```

Generično 4-vozliščno mrežo potrebujemo zato, da bomo v naslednjem koraku domene kombinirali v 2×4 -vozliščne stohastične končne elemente. V prvih dveh vrsticah vhodnih

podatkov za AceFEM se naloži AceFEM in definirajo vhodni parametri. SMTInputData definira, da gre za začetek novega problema. Z SMTAddDomain se definira ime domene in ime končnega elementa, s katerim se domena diskretizira. Sledi SMTMesh, kjer se določi generična 4-vozliščna mreža.

Definiranje parov poddomen, ki bodo tvorile 2×4-vozliščne stohastične končne elemente

```
wexp = 0; ow = 1; lc = 0.5; leff = 3 lc;
elem = SMTElementData["Nodes"];
nodeCoor = Join[{Range[SMTNoNodes]}, SMTNodeData["X"]^T];
TeziscaEL = Map[Total[nodeCoor[#[{2, 3}]]] / Length[#] &, elem];
NoElements = SMTIData["NoElements"];
VozliscaElementovDoLeff =
  Partition[Flatten[Table[If[Norm[TeziscaEL[[i]] - TeziscaEL[[j]]] <= leff,
    {elem[[i]], elem[[j]]}, {}],
    {i, 1, SMTNoElements}, {j, i, SMTNoElements}]], 8];
elementi = SMTElementData["ElemIndex"];
IndeksiElementov =
  Flatten[Table[If[Norm[TeziscaEL[[i]] - TeziscaEL[[j]]] <= leff,
    {elementi[[i]], elementi[[j]]}, Sequence@@{}],
    {i, 1, Length[elementi]}, {j, i, Length[elementi]}], 1];
```

Tu se izračunajo težišča posameznih domen, s katero je diskretizirana fizikalna domena, ter na podlagi razdalj med težišči določi, katere domene so med seboj oddaljene za manj kot l_{eff} . Nato se v vektor VozliscaElementovDoLeff shranijo vozlišča, ki bojo tvorila stohastične končne elemente, v vektor IndeksiElementov pa indeksa obeh poddomen, ki tvorita posamezen stohastičen končni element.

Generiranje dejanske mreže 2×4-vozliščnih stohastičnih končnih elementov in rešitev Fredholmove integralske enačbe

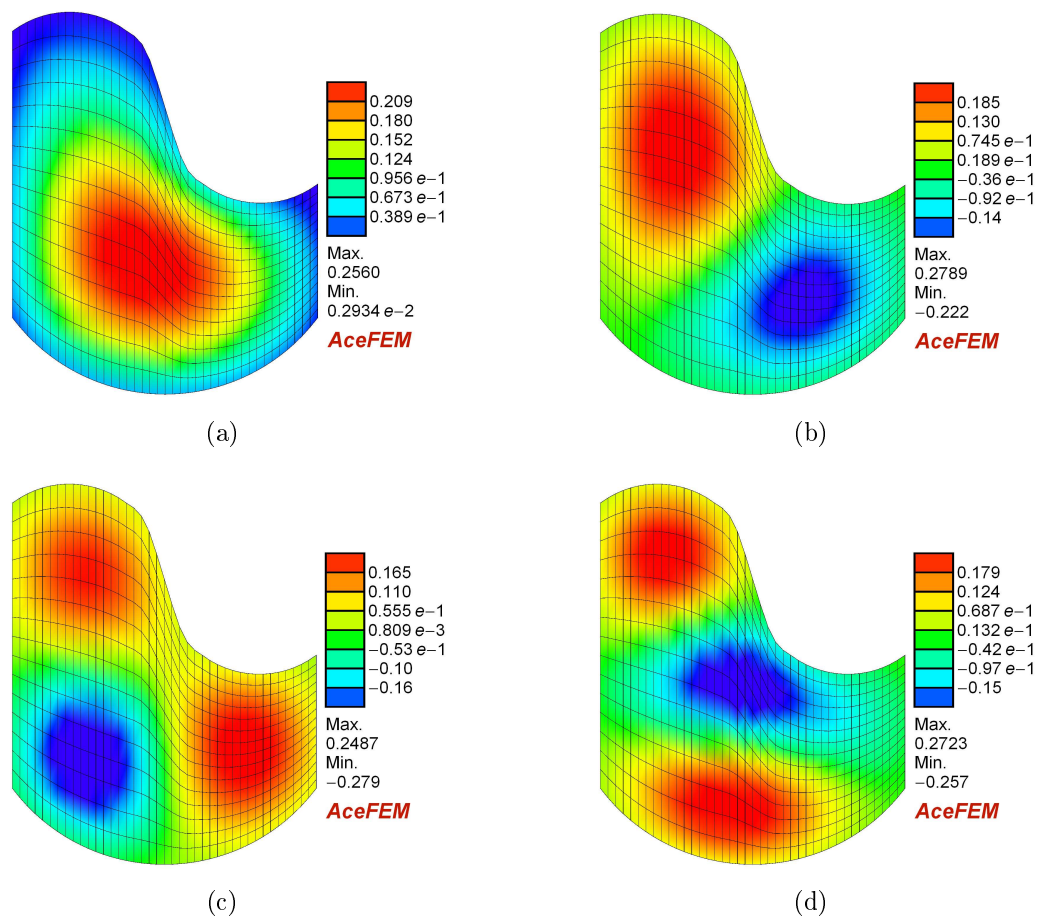
```
SMTInputData[];
SMTAddDomain["A", "StohasticniEL_2x4v_Q1_modExpLinTang",
  {"σ*" -> ow, "lc*" -> lc, "leff*" -> leff}];
SMTAddMesh["A", nodeCoor, VozliscaElementovDoLeff];
SMTAnalysis["NodeReordering" -> False];
SMTElementData["Data", IndeksiElementov];
Nij = SMTTask["Nij"];
Cij = SMTTask["Cij"];
{λ, fknenorm} = Eigensystem[{Cij, Nij}];
```

V prvih vrsticah se definirajo vhodni parametri za stohastične končne elemente. Z `SMTElementData` se poda podatek o indeksih obeh poddomen, ki tvorita posamezen stohastični končni element. Sledi klic podprogramov `"Ni j"` in `"Ci j"`, s katerima se sestavita matriki $\mathbf{N}$ in $\mathbf{C}$. Nato se v Mathematici opravi izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev kot rešitev posplošenega problema lastnih vrednosti. V prikazanem primeru se izračunajo vse lastne vrednosti in vsi lastni vektorji (število le-teh je enako številu vozlišč domene, v tem primeru 656). Vkolikor bi nas zanimalo le manjše število lastnih vrednosti, kar je v diskretizaciji stohastičnega polja običajno, bi tu lahko dodali opcijo, naj se reši problem lastnih vrednosti po Arnoldijevi metodi, ki je v tem primeru numerično bolj učinkovita.

Normiranje lastnih funkcij

```
Ifk = Table[SMTNodeData["at", Partition[fknenorm[[i]], 1]];
      SMTTask["Ifk"], {i, 1, Length[fknenorm]};
fk =  $\frac{fknenorm}{\text{Sqrt}[Ifk]}$ ;
```

V zadnji fazi diskretizacije stohastičnega polja se izvede še normiranje lastnih funkcij. Prve štiri izračunane lastne funkcije so prikazane na sliki 4.7



Slika 4.7: Prve štiri lastne funkcije za prikazani primer postopka diskretizacije stohastičnega polja v AceFEM-u: (a) f_1 , (b) f_2 , (c) f_3 in (d) f_4 .

Figure 4.7: First four eigenfunctions of numerical example for demonstration of stochastic field discretization procedure in AceFEM: (a) f_1 , (b) f_2 , (c) f_3 in (d) f_4 .

5 Problem stabilnosti Karhunen-Loèvove dekompozicije

Jedro Fredholmove integralske enačbe, ki jo je potrebno rešiti za določitev K-L dekompozicije stohastičnega polja, je kovariančna funkcija. Kovariančna funkcija predstavlja mero, kako se spreminja povezanost (korelacija) vrednosti stohastičnega polja glede na položaj in medsebojno oddaljenost opazovanih točk na polju. Pri homogenem stohastičnem polju je koreliranost stohastičnega polja v dveh poljubnih točkah odvisna izključno od razdalje med tema dvema točkama, medtem ko je pri nehomogenem odvisna tudi od položaja točk in se lahko v različne smeri različno spreminja. V tem poglavju se bomo omejili na homogena stohastična polja. Kovariančna funkcija je po definiciji omejena, simetrična in pozitivno definitna.

Oblika kovariančne funkcije določa koreliranost stohastičnega polja. Kovariančna funkcija stohastičnega polja se z oddaljenostjo od izhodišča spreminja, njena vrednost običajno pada. V primeru, da bi bila konstantna, bi namreč imeli opravka s popolnoma koreliranim stohastičnim poljem, kar pomeni da je stohastično poljo preko celotne domene konstantno, kar pomeni stohastično spremenljivko in ne polje in K-L dekompozicija ne bi bila potrebna. Možnost, da bi kovariančna funkcija monotono naraščala ne ustreza pogoju, da je kovariančna funkcija po definiciji omejena. Obstajajo sicer posebni primeri, ko lahko kovariančna funkcija na nekem omejenem delu narašča (npr. kovariančna funkcija za opis koreliranosti geometrijskih nepopolnosti cilindra v radialni smeri), vendar je tudi v tem primeru še vedno omejena.

Na tem mestu je prav omeniti, da se v praksi zelo redko opravijo eksperimentalne meritve porazdelitve določenega parametra po domeni, iz česar bi se lahko izračunalo dejansko obliko kovariančne funkcije. Razlogov za to je več. Eden od pomembnejših je izvedljivost takšnih meritev, saj je za določene parametre (npr. elastični modul, Poissonov količnik, meja plastičnega tečenja itd.) izvedba meritev preko celotne domene problema nepraktična. V literaturi se običajno privzame, da koreliranost večine fizikalnih parametrov preko domene pada eksponentno, kar se opiše z eksponentno kovariančno funkcijo. Zato si bomo v naslednjih podpoglavjih to funkcijo natančneje pogledali in se seznanili z nekatereimi njenimi aproksimacijami ter numeričnimi problemi, ki ob tem nastanejo. Pri nizko in srednje koreliranih stohastičnih poljih namreč kovariančna funkcija z oddaljenostjo od izhodišča (t.j. z večanjem razdalje med dvema točkama) hitro pada. V okviru Galerkinove metode to pomeni, da red velikosti členov kovariačne matrike z oddaljevanjem od diago-

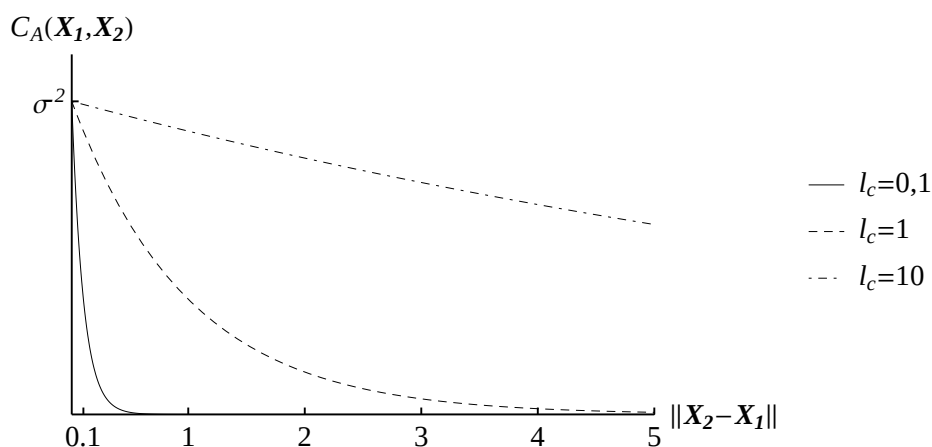
nale hitro pada, kar ponuja možnost, da se dovolj majhne člene zanemari in na ta način dobi razpršeno matriko. Vendar se izkaže da ta pristop vodi do numerično nestabilnega problema, kar je podrobneje predstavljeno v naslednjih poglavjih.

5.1 Eksponentna kovariančna funkcija

Kot je bilo predstavljeno v uvodnem odstavku tega poglavja, se za stohastična polja za opis mehanskih količin najpogosteje uporablja eksponentna kovariančna funkcija

$$C_A(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sigma^2 e^{-\frac{\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|}{l_c}}, \quad (5.1)$$

kjer je σ^2 varianca stohastičnega polja in l_c korelacijska dolžina. Korelacijska dolžina je parameter, ki določa koreliranost polja ali z drugimi besedami opisuje stopnjo fluktuacije slučajnega polja. Večja kot je vrednost l_c , počasneje pada graf kovariančne funkcije, kar pomeni, da je stohastično polje bolj korelirano. Eksponentna kovariančna funkcija in vpliv korelacijske dolžine na obliko kovariančne funkcije prikazuje slika 5.1. Vpliv korelacijske dolžine na obliko stohastičnega polja je bil prikazan v poglavju 2.1.2, na sliki 2.3. V zvezi z eksponentno kovariančno funkcijo je potrebno opozoriti na dve stvari. Prvič, kljub temu, da se z večanjem razdalje med dvema točkama (določenima s pozicijskima vektorjema $\mathbf{X}_1$ in $\mathbf{X}_2$), C_A asimptotično približuje ničli, te vrednosti nikoli ne doseže. Zaradi tega je kovariančna matrika (en. (2.28)) polna. Drugič, eksponentna kovariančna funkcija je v izhodišču (ko je $\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| = 0$) neodvedljiva. Nezveznost prvega odvoda v izhodišču ima za posledico slabo konvergenco K-L vrste v bližini te točke (Huang et al., 2001). Obe naštetosti lastnosti eksponentne kovariančne funkcije kažeta smeri, v katerih se lahko iščejo rešitve za izboljšave numerične učinkovitosti K-L dekompozicije.



Slika 5.1: Eksponentna kovariančna funkcija C_A za tri različne korelacijske dolžine.
Figure 5.1: Exponential covariance function C_A for three different correlation lengths.

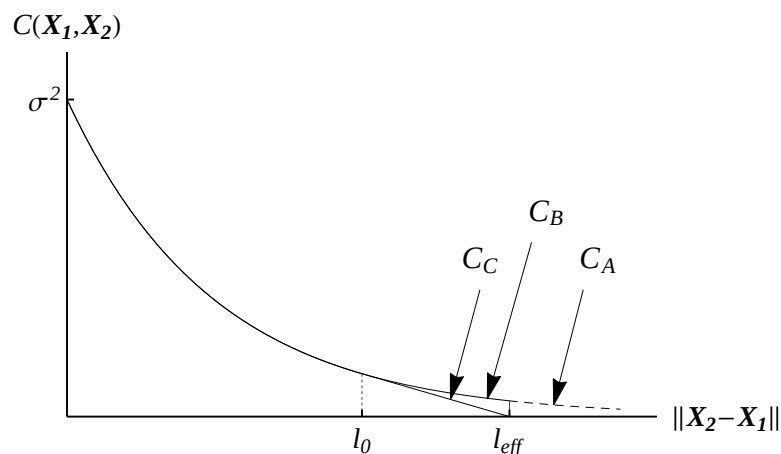
5.2 Okrnjena eksponentna kovariančna funkcija

V literaturi je moč najti dva pristopa, ki vodita do razpršene kovariančne matrike. Oba pristopa na nek način enako pristopata k modifikaciji kovariančne funkcije. Phoon et al. (2002) v svojem članku predstavijo pristop k izračunu razpršene kovariančne matrike z uporabo sheme, ki je kombinacija valčkov in Galerkinove metode (ang. “wavelete-Galerkin scheme”). Uporaba valčkov za bazo prostora ima to prednost, da “dekorelira” koeficiente razvoja v vrsto in posledično oslabi vpliv globalne povezanosti. Uporaba valčkov in Galerkinove metode zato vodi do razpršene matrike. Po priporočilu avtorjev omenjenega članka, se stopnjo razpršenosti lahko še poveča z zanemaritvijo tistih členov kovariančne matrike, katerih vrednost je nižja od izbrane mejne vrednosti (ang. *threshold value*). V članku Li et al. (2008), avtorji predstavijo Fourier-Karhunen-Loévo diskretizacijsko shemo in definirajo aproksimacijo eksponentne kovariančne funkcije tako, da privzamejo da je njena vrednost od neke izbrane razdalje naprej enaka nič.

Poimenujmo razdaljo, od katere naprej je kovariančna funkcija enaka 0, *efektivna dolžina* in označimo z l_{eff} . Kovariančno funkcijo, ki jo dobimo na ta način, poimenujmo *okrnjena eksponentna kovariančna funkcija* in označimo s C_B

$$C_B = \begin{cases} \sigma^2 e^{-\frac{\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|}{l_c}} & \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \leq l_{eff} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (5.2)$$

Okrnjena eksponentna kovariančna funkcija je prikazana na sliki 5.2. Aproksimacija ek-



Slika 5.2: Eksponentna kovariančna funkcija in njene modifikacije (C_A - eksponentna, C_B - okrnjena eksponentna, C_C - modificirana okrnjena eksponentna kovariančna funkcija).
Figure 5.2: Exponential covariance function and its modifications (C_A - exponential, C_B - truncated exponential, C_C - modification of truncated exponential).

ponentne kovariančne funkcije s funkcijo, ki je od neke izbrane razdalje naprej, pri kateri je vrednost relativno majhna v primerjavi z vrednostjo v izhodišču ($C_A(l_{eff}) \ll C_A(0)$),

enaka nič je vsekakor razumna odločitev. Vendar se izkaže, da tako aproksimirana kovariančna funkcija ni pozitivno definitna.

Posledica izgube pozitivne definitnosti je numerična nestabilnost postopka, ki se lahko odrazi v negativnih lastnih vrednostih. V literaturi je dejstvo, da tako aproksimirana kovariančna funkcija in dobljena kovariančna matrika nista pozitivno definitni, preprosto spregledano. O problemih z dobljenimi negativnimi lastnimi vrednostmi so Stefanou et. al (2005) sicer poročali v svojem prispevku na konferenci ICCOSAR, vendar so negativne lastne vrednosti pripisali izključno slabi pogojenosti matrik.

5.2.1 Dokaz, da okrnjena eksponentna kovariančna matrika ni pozitivno definitna

Dokaz, da aproksimirana kovariančna funkcija C_B ni pozitivno definitna si pogledjmo na enostavnem enodimenzionalnem primeru. Po definiciji je pozitivno definitna funkcija taka funkcija, pri kateri je matrika $\mathbf{A}$ dimenzij $n \times n$, katere členi so dobljeni kot $A_{ij} = C_B(x_i, x_j)$, pozitivno definitna za poljubno izbrano množico realnih števil $x_1, x_2, \dots, x_n$. Izberimo si tri točke, za katere izračunamo vrednost $C_B(x_i, x_j)$: $x_1 = 0, x_2 = l_{eff} - \epsilon$ in $x_3 = l_{eff} + \epsilon$, kjer je ϵ poljubno pozitivno realno število in velja $\epsilon < l_{eff}/2$. Brez zmanjšanja veljavnosti dokaza, privzemimo da je $\sigma = 1$. Matrika $\mathbf{A}$ za izbrane tri točke je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-(l_{eff}-\epsilon)/l_c} & 0 \\ e^{-(l_{eff}-\epsilon)/l_c} & 1 & e^{-2\epsilon/l_c} \\ 0 & e^{-2\epsilon/l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$ so

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + e^{-2(l_{eff}+2\epsilon)/l_c} \sqrt{e^{4(l_{eff}+\epsilon)/l_c} + e^{2(l_{eff}+5\epsilon)/l_c}}, \\ \lambda_2 &= 1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

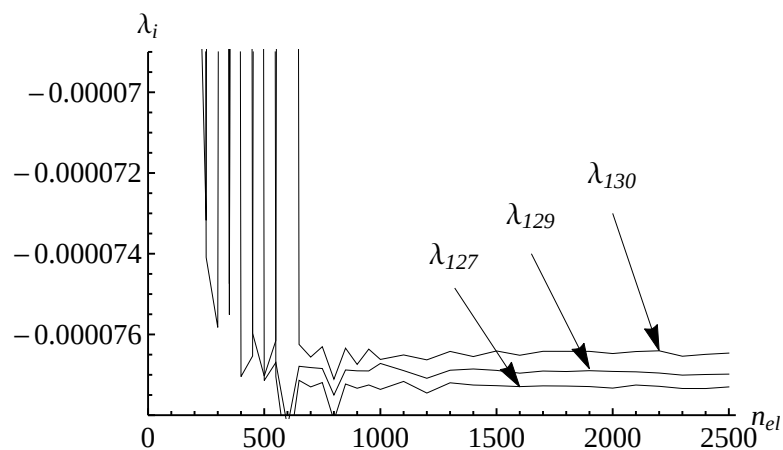
$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1 - e^{-2(l_{eff}+2\epsilon)/l_c} \sqrt{e^{4(l_{eff}+\epsilon)/l_c} + e^{2(l_{eff}+5\epsilon)/l_c}} \\ &\quad . \end{aligned} \quad (5.5)$$

λ_1 in λ_2 sta v vsakem primeru pozitivni. Za dokaz, da je λ_3 negativna ne glede na vrednosti l_{eff} in l_c izračunajmo limito lastne vrednosti λ_3 , ko gre ϵ proti 0

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_3 = 1 - \sqrt{e^{-2l_{eff}/l_c} + 1}. \quad (5.6)$$

Izraz pod korenem $e^{-2l_{eff}/l_c} + 1$ je večji od 1 za poljubna l_{eff} in l_c kar pomeni da je λ_3 , za izbrane tri razdalje x_1, x_2, x_3 ko gre $\epsilon \rightarrow 0$ v vsakem primeru negativen. Kar pomeni, da matrika $\mathbf{A}$ ni pozitivno definitna.

Kljub temu pa se ob uporabi Galerkinove metode za rešitev Fredholmove integralske enačbe dejstvo, da C_B ni pozitivno definitna matrika zlahka spregleda. Mreža končnih elementov in lokacija Gaussovih točk je namreč lahko taka, da je rezultirajoča kovariacijska matrika pozitivno definitna. Vendar lahko na numeričnem primeru pokažemo, da se negativne lastne vrednosti pojavijo, čim je mreža končnih elementov dovolj gosta in z nadaljnjim gostenjem mreže konvergirajo k fiksnim vrednostim. Na sliki 5.3 je prikazana konvergenca prvih treh negativnih lastnih vrednosti K-L vrste (λ_{127} , λ_{129} in λ_{130}) za primer enodimenzionalnega Gaussovega stohastičnega polja z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko varianco, definiranega na enotski domeni $[-0.5, 0.5]$. Uporabljena je kovariacijska funkcija C_B z $l_{eff} = 3l_c$ in korelacijsko dolžino $l_c = 0.25$. Rezultati so izračunani s standardno Galerkinovo proceduro, predstavljeno v poglavju 2.1.2.



Slika 5.3: Konvergenca prvih treh negativnih lastnih vrednosti K-L vrste kot funkcije števila končnih elementov (n_{el}) vzdolž enotske domene.

Figure 5.3: Convergence of first three negative eigenvalues of K-L decomposition as a function of the number of finite elements (n_{el}) along unit domain.

V okviru študije vpliva izbora oblikovnih funkcij, uporabljenih v Galerkinovi proceduri, so bili narejeni tudi primeri z Lagrangevimi polinomi višjega reda. Razen pričakovanih razlik v primeru redke mreže končnih elementov, so bili rezultati za gostejše mreže enaki. Dodatno smo preverili tudi vpliv uporabljene Gaussove numerične integracije in v ta namen za nekaj primerov izvedli tudi analitično integriranje. Negativne lastne vrednosti so bile dobljene tudi z analitičnim integranjem.

Ker so dobljene negativne lastne vrednosti višjega reda in po velikosti majhne, na sam rezultat razvoja v K-L vrsto ne vplivajo bistveno. Pomemben pa je vpliv negativnih lastnih vrednosti na numerično učinkovitost reševanja problema lastnih vrednosti. Učinkovitih algoritmov, kot je Arnoldi, v primeru izgube pozitivne definitnosti ni možno uporabiti.

5.2.2 Priporočilo o izbiri minimalne efektivne dolžine, da je kovariančna matrika pozitivno definitna

V okviru doktorske disertacije smo z namenom, da bi izkoristili prednosti okrnjene kovariančne funkcije in se hkrati izognili problemu izgube pozitivne definitnosti kovariančne matrike, naredili parametrično študijo pri kateri smo variirali

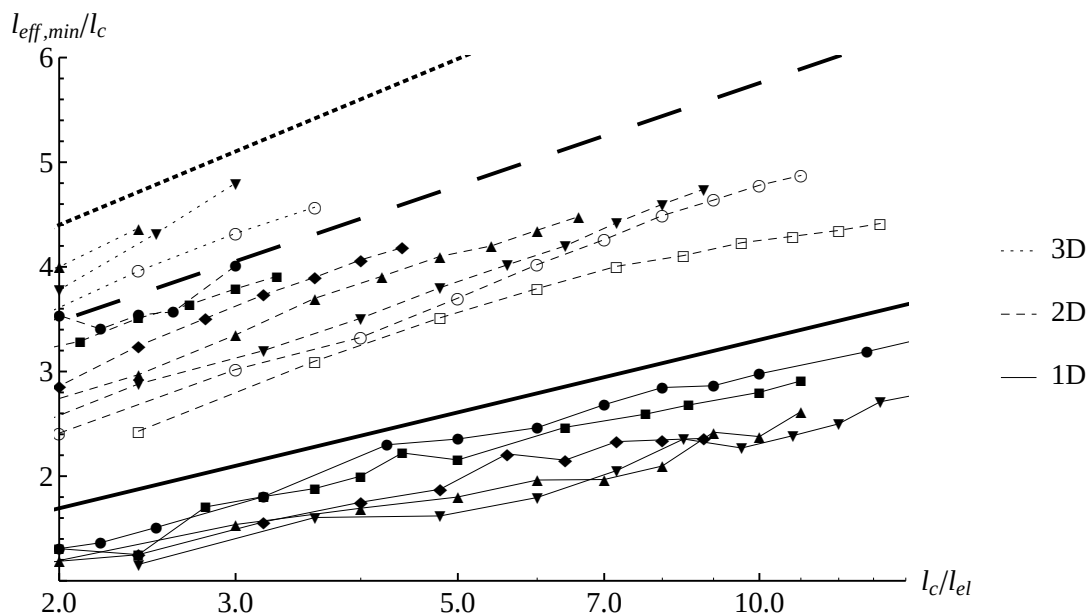
- efektivno dolžino l_{eff} ,
- korelacijsko dolžino l_c in
- gostoto mreže.

Rezultati študije so pokazali, da je moč priporočiti smernice v pomoč pri izbiri ustreznega razmerja med l_{eff} in gostoto mreže končnih elementov, tako da je dobljena kovariančna matrika pozitivno definitna. Študija je bila izvedena na pravilnih eno- $[-0.5, 0.5]$, dvo- $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ in trodimenzionalnih $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ domenah, diskretiziranih s pravilnimi mrežami N , $N \times N$ in $N \times N \times N$ končnih elementov. Za l_c so bile izbrane vrednosti od 0.05 do 0.3 glede na reprezentativno dimenzijo fizikalne domene. Mero gostote mreže končnih elementov določa velikost elementa $l_{el} = 1/N$. Rezultati so pokazali, da manjši kot je l_{el} , večji mora biti l_{eff} , da je dobljena kovariančna matrika pozitivno definitna.

Imenujmo najmanjšo možno dolžino l_{eff} , pri kateri je kovariančna matrika še pozitivno definitna, *minimalna efektivna dolžina* in jo označimo z $l_{eff,min}$. Na sliki 5.4 je prikazana $l_{eff,min}$, normirana z l_c v odvisnosti od razmerja l_c/l_{el} za eno-, dvo- in tridimenzionalne domene ter različne korelacijske dolžine l_c . Za abscisno os je izbrano logaritmčno merilo. Izmed krivulj, ki pripadajo domeni iste dimenzije, so nižje krivulje dobljene za stohastična polja z večjo l_c . Razlog, da so za trodimenzionalno domeno prikazane le tri krivulje je, da velikost 3D problemov z naraščanjem števila končnih elementov zelo hitro narašča in posledično hitro preraste zmožnosti računalniškega spomina. Na sliki 5.4 opazimo, da je v logaritmčnem merilu odvisnost med $l_{eff,min}/l_c$ in l_c/l_{el} približno linearna in da obstaja neka povezava med različnimi dimenzijami. Na podlagi izračunanih krivulj lahko podamo empirično oceno za enačbo ovojnic $l_{eff,min}/l_c$ za vsako izmed treh dimenzij problema

$$l_{eff,min}/l_c = \alpha \ln(l_c/l_{el}) + \beta. \quad (5.7)$$

Parametra α in β , ki določata enačbo ovojnice $l_{eff,min}/l_c$ za kovariančno funkcijo C_B sta podana v preglednici 5.1 Ovojnice, določene po enačbi (5.7) s parametri kot so prikazani v preglednici 5.1 so na sliki 5.4 narisane z debelejšo črto. Enačba (5.7) je sicer ocenjena na podlagi specifičnih računskih primerov, predstavljenih v tem poglavju, vendar se lahko uporabi kot enostavna smernica za določitev $l_{eff,min}$ tudi za probleme z nepravilnimi domenami. Seveda pa je v vsakem primeru, še posebej ko imamo opravka s poljubnimi



Slika 5.4: Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_B pozitivno definitna.

Figure 5.4: Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of truncated exponential covariance function for 1D, 2D and 3D domain.

Preglednica 5.1: Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_B .
Table 5.1: Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for covariance function C_B .

dimenzija domene	α	β
1D	1.0	1.0
2D	1.4	2.5
3D	1.7	3.2

oblikami domen in končnih elementov, potrebno verificirati ustrezno izbiro l_{eff} s samim izračunom lastnih vrednosti. V primeru, da so dobljene lastne vrednosti negativne, je potrebno povečati l_{eff} .

5.3 Modificirana okrnjena eksponentna kovariančna funkcija

Na podlagi rezultatov študije v poglavju 5.2.2 je razvidno, da gostejša kot je mreža končnih elementov, večji mora biti $l_{eff,min}$, če želimo dobiti pozitivno definitno kovariančno funkcijo. Po drugi strani je znano, da je v primeru šibko koreliranega stohastičnega polja potrebno večje število členov K-L vrste in s tem večje število lastnih vrednosti za sprejemljivo natančnost predstavitev stohastičnega polja. To pomeni, da je v primeru aplikacije

Galerkinove procedure potrebna gostejša mreža končnih elementov. Če združimo ti dve opažanji, je možnost zmanjšanja števila numeričnih operacij z uporabo C_B namesto C_A omejena z ustrezno izbiro $l_{eff,min}$. Kar pomeni, da je v primeru šibko koreliranega stohastičnega lahko $l_{eff,min}$ znatno večji v primerjavi z l_{eff} , ki bi bil potreben da bi bila dosežena zadovoljiva natančnost. Posledica je nepotrebno večja numerična zahtevnost izračuna. V izogib temu problemu predlagamo manjšo modifikacijo okrnjene eksponentne kovariančne funkcije, ki znatno zmanjša $l_{eff,min}$. V tej modifikaciji je kovariačna funkcija do izbrane dolžine l_0 enaka funkciji C_A . Od te točke naprej pa je kovariančna funkcija aproksimirana s tangento do točke, ko tangenta seka absciso, kot je prikazano na sliki 5.2. Od te točke dalje je privzeto, da je vrednost kovariančne funkcije enaka 0. Splošna lastnost eksponentne funkcije je, da je $l_{eff} = l_0 + l_c$. Dobljeno modificirano kovariančno funkcijo označimo s C_C

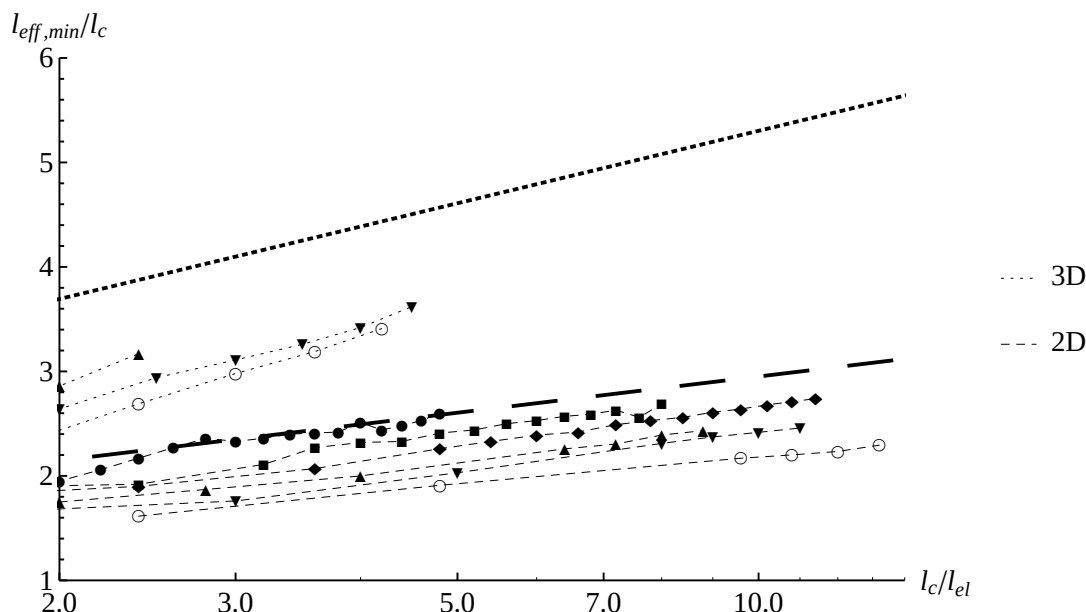
$$C_C(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-\frac{\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|}{l_c}} & \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \leq l_{eff} - l_c \\ \frac{\sigma^2}{l_c} \left(l_{eff} e^{-\frac{(l_{eff} - l_c)}{l_c}} - e^{-\frac{(l_{eff} - l_c)}{l_c}} \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \right) & l_{eff} - l_c < \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \leq l_{eff} \\ 0 & \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| > l_{eff} \end{cases} \quad (5.8)$$

Za oceno minimalne efektivne dolžine $l_{eff,min}$, pri kateri je kovariančna matrika pozitivno definitna je bila narejena obsežna parametrična študija za parametre, kot v primeru okrnjene eksponentne kovariančne funkcije. V primeru enodimenzionalne domene so bile dobljene lastne vrednosti za vse uporabljene kombinacije parametrov vedno pozitivne. V primeru dvo- in trodimenzionalnih domen je dobljen $l_{eff,min}$ znatno manjši za kovariančno funkcijo C_C kot pri C_B . Na sliki 5.5 so prikazane dobljene krivulje za $l_{eff,min}/l_c$ v odvisnosti od l_c/l_{el} . Parametra α in β za določitev ovojnice po enačbi (5.7) ocenjena iz teh parametričnih študij, sta podana v preglednici 5.2.

Preglednica 5.2: Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_C .
Table 5.2: Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for covariance function C_C .

dimenzija domene	α	β
1D	0.0	0.0
2D	0.5	1.8
3D	1.0	3.0

Primerjava parametrov α in β za kovariančni funkciji C_B in C_C pokaže, da poleg tega, da je minimalna efektivna dolžina $l_{eff,min}$ za C_C občutno manjša, z gostenjem mreže končnih elementov tudi počasneje narašča. Vpliv obeh modifikacij kovariančnih funkcij C_B in C_C na rezultate K-L vrste je raziskan v poglavju 5.6.



Slika 5.5: Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_C pozitivno definitna.

Figure 5.5: Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of covariance function C_C for 1D, 2D and 3D domain.

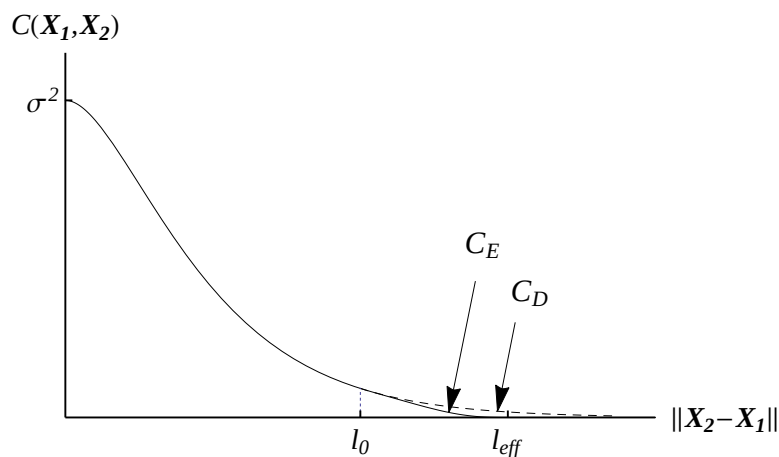
5.4 Gladka kovariančna funkcija

Kot je bilo predstavljeno v poglavju 5.1, je druga možnost izboljšanja numerične učinkovitosti v iskanju rešitve za odpravo neodvedljivosti eksponentne kovariančne funkcije v njenem izvoru ($\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| = 0$). Spanos, Beer in Red-Horse (2007) so predlagali naslednjo modifikacijo eksponentne funkcije

$$C_D(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sigma^2 e^{-a \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|} (1 + a \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|), \quad (5.9)$$

kjer je a poljubna konstanta. Priporočilo, podano s strani avtorjev članka je, da se vrednost parametra a izbere tako, da se dobljena funkcija čim boljše ujema s krivuljo originalne eksponentne kovariančne funkcije. To se lahko izračuna tako, da je povprečen kvadrat odstopanja na obravnavani domeni najmanjši možen. Kovariančna funkcija C_D je prikazana na sliki 5.6. Prednost kovariančne funkcije C_D je, da je zaradi zveznosti prvega odvoda število členov K-L vrste, s katerim je dosežena izbrana natančnost opisa stohastičnega polja, znatno manjše v primerjavi s potrebnim številom členov K-L vrste ob uporabi originalne eksponentne kovariančne funkcije. Podrobnejša matematična razlaga o vplivu gladkosti jedra na stopnjo konvergence povezane z razvojem v vrsto je opisana v članku Nashed in Wahba (1974). Drugo dejstvo, ki lahko govori v prid gladki kovariančni funkciji je, da je na voljo zelo malo eksperimentalnih raziskav, ki bi dale odgovor o tem,

katere kovariančne funkcije so v naravi dejansko najprimernejše za opis koreliranosti posameznega parametra preko domene. Zdi se, da je neodvedljivost kovariančne funkcije v njenem izhodišču nefizikalna lastnost in tudi ni nujno diktirana iz eksperimentalnih rezultatov (Spanos et al., 2007). Vendar pa je, kljub temu da je število potrebnih členov K-L vrste znatno manjše, kovariančna matrika, dobljena s kovariančno funkcijo C_D , še vedno polna in zato draga za reševanje.



Slika 5.6: Gladka kovariančna funkcija (C_D) in modificirana gladka kovariančna funkcija (C_E).

Figure 5.6: Smooth (C_D) and modified smooth (C_E) covariance function.

5.5 Modificirana gladka kovariančna funkcija

Z namenom, da bi obdržali višjo kovergenco, doseženo s kovariančno funkcijo C_D in hkrati izboljšali numerično učinkovitost postopka na račun razpršenosti kovariančne matrike, smo funkcijo C_D dodatno modificirali. V naši modifikaciji smo za parameter a izbrali vrednost $2/l_c$. Pri tej vrednosti parametra a sta namreč ploščini eksponentne (C_A) in gladke (C_D) kovariančne funkcije na neskončni domeni enaki. Predlagana modifikacija kovariančne funkcije je do dolžine $l_0 = l_{eff} - l_c$ enaka funkciji C_D . Na intervalu med l_0 in l_{eff} je določena s polinomom 5. stopnje. Polinom je v točki l_0 enak funkciji C_D v prvem in drugem odvodu, v točki l_{eff} pa je njegova vrednost enaka 0, prav tako sta prvi in drugi odvod polinoma v tej točki enaka 0. Dobljeno funkcijo bomo imenovali *modificirana*

gladka kovariančna funkcija in označili s C_E .

$$C_E(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-2\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|/l_c} (1 + 2\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|/l_c) & \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \leq l_{eff} - l_c \\ \frac{e^{\left(2 - \frac{2l_{eff}}{l_c}\right)} \sigma^2}{l_c^6} (l_{eff} - \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|)^3 (4l_{eff}(l_{eff} - \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|)^2 + 10l_cl_{eff}(-l_{eff} + \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|) + \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| + l_c^2(7l_{eff} + \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|)) & l_{eff} - l_c < \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| \leq l_{eff} \\ 0 & \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| > l_{eff} \end{cases} \quad (5.10)$$

Modificirana gladka kovariančna funkcija C_E je prikazana na sliki 5.6. Prav tako je bila za modificirano gladko kovariančno funkcijo izvedena parametrična študija, v kateri so bili parametri l_c , l_{eff} in l_{el} kot pri okrnjeni kovariančni funkciji (C_B) in modificirani okrnjeni kovariančni funkciji (C_C) variirani za različne dimenzije domen. Rezultirajoče krivulje $l_{eff,min}$ so prikazane na sliki 5.7. Ocena parametrov α in β za določitev enačbe ovojnice $l_{eff,min}$ (en. (5.7)) je za prikazane krivulje podana v preglednici 5.3. V primerjavi z okrnjeno kovariančno funkcijo (C_B), je $l_{eff,min}$ za C_E v vsakem primeru manjši. V primerjavi z rezultati, dobljenimi z modificirano okrnjeno kovariančno funkcijo (C_C) je $l_{eff,min}$ za redkejšo mrežo (manjše razmerje l_c/l_{el}) nekoliko večji, vendar z gostenjem mreže narašča znatno počasneje. Izbira med C_C in C_E je tako odvisna od relativne gostote mreže končnih elementov. Vendar ob premisleku, da je za l_{eff} smiselno vzeti vrednost $3l_c$ ali več (primerjave lastnih vrednosti in lastnih funkcij za različne izbire l_{eff} so prikazane kasneje v poglavju 5.6), pomeni, da je izbira kovariančne funkcije v smislu čimmanjše potrebne dolžine l_{eff} praviloma vedno bolj naklonjena funkciji C_E .

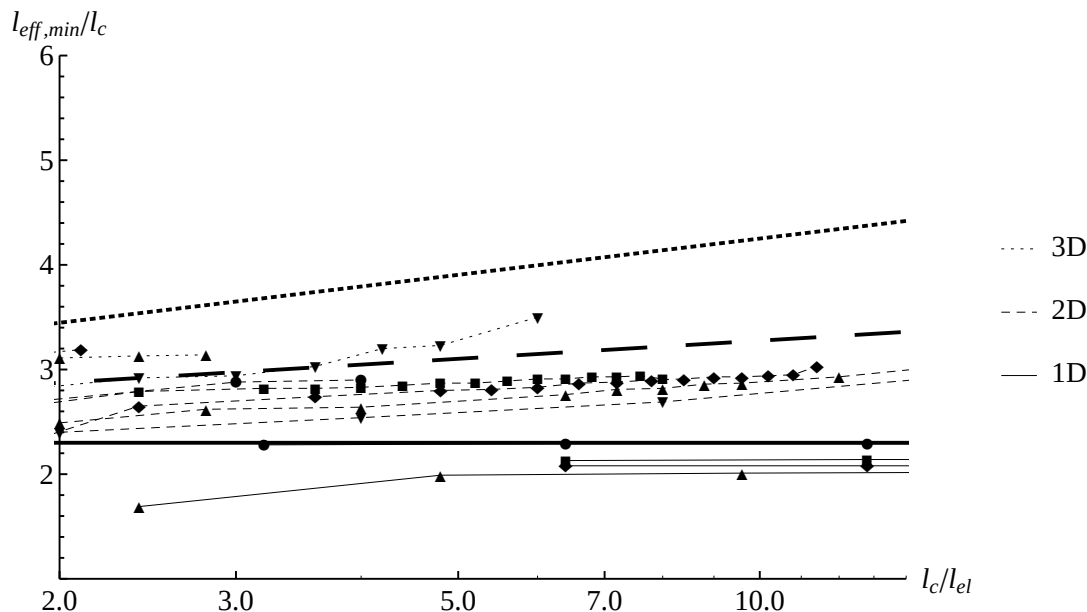
Preglednica 5.3: Ocena parametrov α in β za ovojnico $l_{eff,min}$ in kovariančno funkcijo C_E .
Table 5.3: Parameters α and β that define envelopes for estimation of $l_{eff,min}$ for covariance function C_E .

dimenzija domene	α	β
1D	0.0	2.3
2D	0.25	2.7
3D	0.5	3.1

5.6 Vpliv efektivne dolžine na rezultirajočo Karhunen-Loèevovo vrsto

V tem poglavju bo raziskan vpliv izbire različnih efektivnih dolžin na rešitev Fredholmove integralske enačbe.

Za primerjavo je izbrano enodimenzionalno stohastično polje, definirano na enotski domeni $[-0.5, 0.5]$ z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko varianco. Za primerjavo so



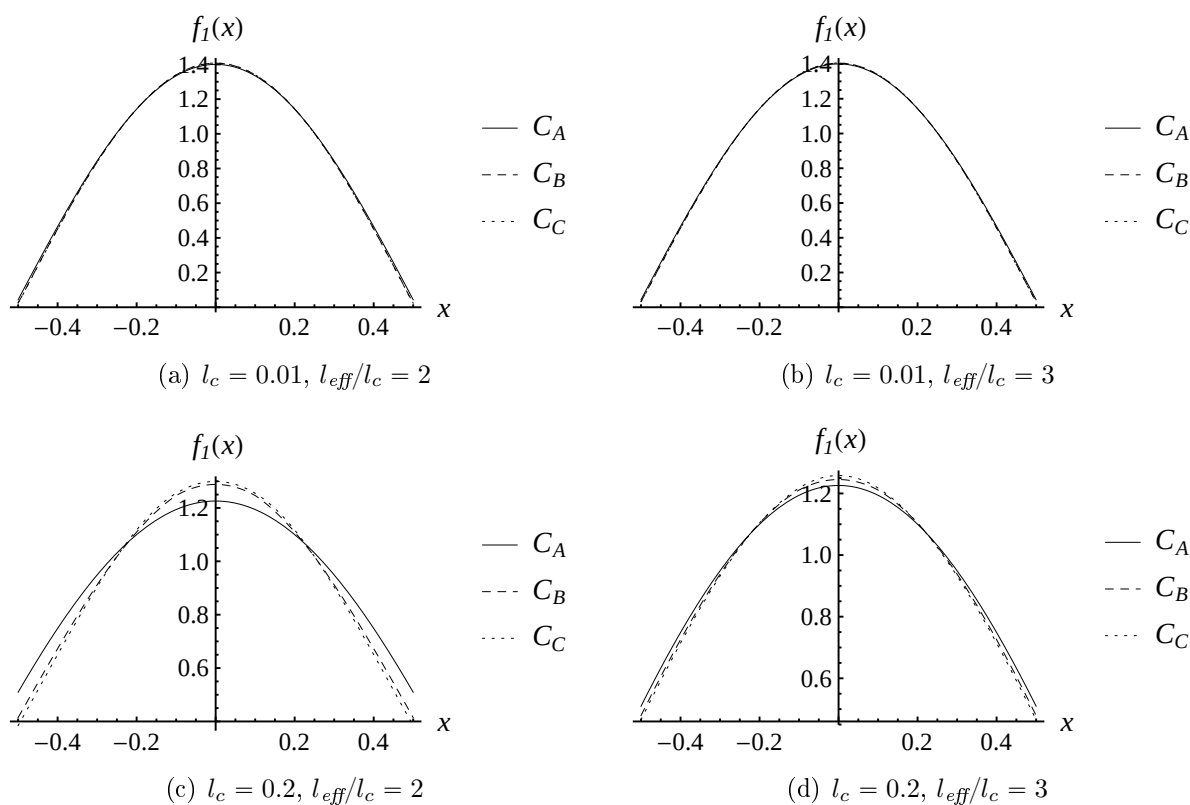
Slika 5.7: Minimalna efektivna dolžina za eno-, dvo- in tridimenzionalno domeno, ki je potrebna, da je kovariančna matrika ob uporabi kovariančne funkcije C_E pozitivno definitna.

Figure 5.7: Minimum effective length to obtain positive eigenvalues in the case of modified smooth covariance function for 1D, 2D and 3D domain.

izbrane naslednje korelacijske in efektivne dolžine: $l_c = 0.01; 0.025; 0.05; 0.1; \text{ in } 0.2$ ter $l_{eff}/l_c = 2; 3; 4 \text{ in } 5$. Da se minimizira diskretizacijsko napako, je uporabljena gosta mreža z 1024 končnimi elementi. Ker za izbrano domeno in kovariačno funkcijo C_A obstaja analitična rešitev problema, smo natančnost uporabljene diskretizacije preverili na prvih petih lastnih funkcijah in lastnih vrednostih. Dobljene numerične rešitve lastnih funkcij po Galerkinovi metodi so se po celotni domeni povsem prekrivale z analitično izračunanimi lastnimi funkcijami. Prav tako so se lastne vrednosti po Galerkinovi metodi z analitičnimi ujemale na vsaj 5 decimalnih mest natančno.

V študiji se primerja rezultate originalne eksponentne kovariančne funkcije (C_A) z rezultati okrnjene kovariančne funkcije (C_B) in modificirane okrnjene eksponentne kovariančne funkcije (C_C). Razlike v lastnih funkcijah zaradi uporabe modificiranih kovariančnih funkcij so prikazane na slikah 5.8 in 5.9 in sicer je prikazana primerjava prvih in četrtyh lastnih funkcij za vse tri kovariančne funkcije ter izbrani razmerji l_{eff}/l_c 2 in 3 ter korelacijski dolžini l_c 0.01 in 0.2. Kot je razvidno iz diagramov in kar potrjujejo tudi rezultati, ki bodo predstavljeni kasneje v tem poglavju, se opazno razlikujejo le lastne funkcije v primeru izbrane efektivne dolžine $l_{eff}/l_c=2$, pri čemer razlike naraščajo z naraščanjem l_c .

Ker sta funkciji C_B in C_C aproksimaciji funkcije C_A , so pričakovane določene razlike v primerjavi z originalno kovariančno funkcijo. Z večanjem l_{eff} se razlika med aproksimirano in originalno funkcijo manjša, zato se manjša tudi razlika v rezultatih. Pri konstantnem



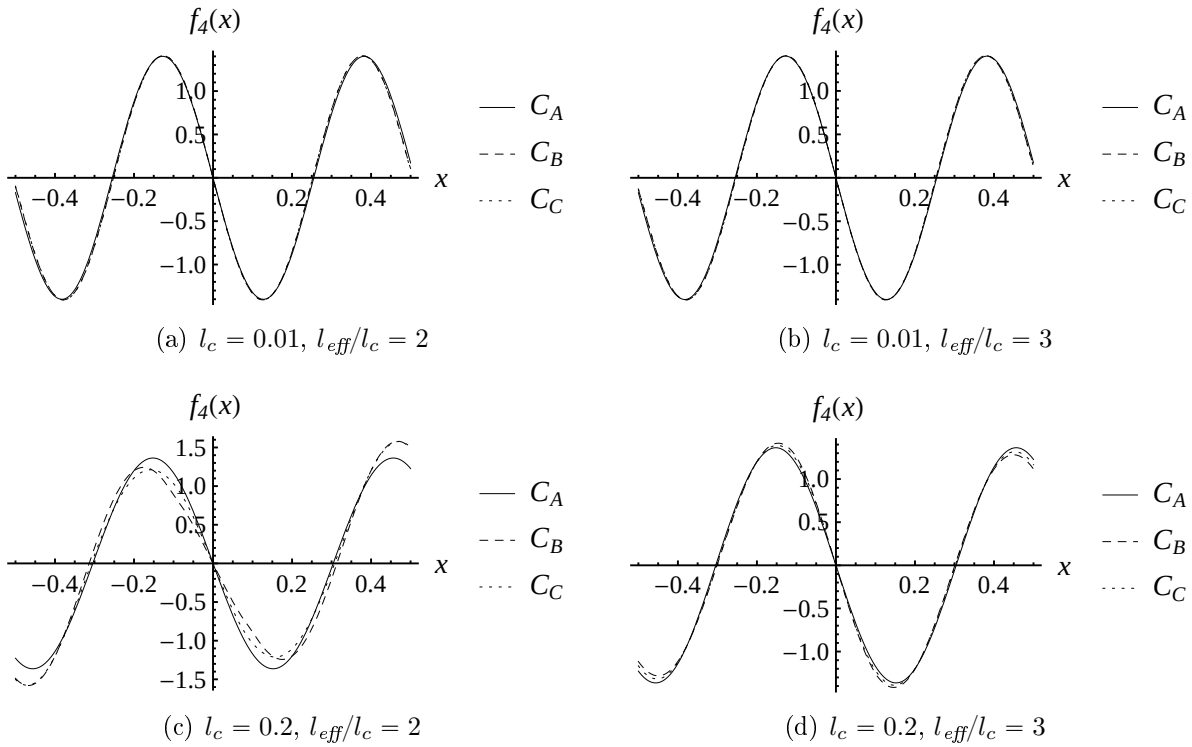
Slika 5.8: Primerjava prve lastne funkcije za različne korelacijske in efektivne dolžine.
Figure 5.8: Comparison of first eigenfunction for different correlation and effective lengths.

l_{eff}/l_c pa določitev razlik v odvisnosti od l_c ni tako enoznačna in se razlikuje tudi preko domene. Naslednjih nekaj vrstic je namenjenih primerjavi napake prve lastne funkcije ob uporabi aproksimirane kovariančne funkcije. Glede na obliko prve lastne funkcije, je za primerjavo napak v posameznih točkah domene najprimernejša primerjava relativne napake aproksimirane funkcije pri maksimumu in na robu domene. Vrednost relativne napake je izračunana po enačbi

$$err_{rel}(f_1^j(\mathbf{X})) = \left| \frac{f_1^j(\mathbf{X}) - f_1^A(\mathbf{X})}{f_1^A(\mathbf{X})} \right|_{\mathbf{X}=T}, \quad j = B, C; \quad T = 0; 0.5 \quad (5.11)$$

kjer so $f_1^A(\mathbf{X})$, $f_1^B(\mathbf{X})$ in $f_1^C(\mathbf{X})$ prve lastne funkcije, dobljene s kovariančnimi funkcijami C_A , C_B in C_C . Relativna napaka v temenu je prikazana v preglednici 5.4, relativna napaka na robu domene pa v preglednici 5.5.

Iz primerjave relativnih napak v preglednicah 5.4 in 5.5 vidimo, da relativna napaka funkcije v temenu z naraščanjem l_c narašča (razen v primeru, ko se l_{eff} približuje dolžini celotne domene, ko napaka pričakovano pada), medtem ko je pri napaki na robu domene ravno obratno, napaka pada z naraščanjem l_c . Poleg tega so napake na robu domene, kjer je sicer tudi napaka spektralne dekompozicije največja, neprimerno večje kot napake v temenu. Ker se iz primerjave preglednic 5.4 in 5.5 še ne da potegniti nekih smotrnih



Slika 5.9: Primerjava četrte lastne funkcije za različne korelacijske in efektivne dolžine.

Figure 5.9: Comparison of fourth eigenfunction for different correlation and effective lengths.

zaključkov, je smiselno narediti še dodatno primerjavo, ki bo opisala razliko med lastno funkcijo originalne in aproksimirane kovariančne funkcije na celotni domeni problema. Povprečna relativna napaka na celotni domeni, ki je izračunana kot

$$err_{rel} \left(\int f_1^j(\mathbf{X}) \right) = \left| \frac{\int_{-0.5}^{0.5} (f_1^j(\mathbf{X}) - f_1^A(\mathbf{X})) d\mathbf{X}}{\int_{-0.5}^{0.5} f_1^A(\mathbf{X}) d\mathbf{X}} \right|, \quad j = B, C; \quad (5.12)$$

je prikazana v preglednici 5.6. Primerjava povprečne napake pokaže zelo podobno sliko kot primerjava napake funkcij v temenu. Napaka se z večanjem l_c povečuje vse do točke, ko je l_{eff} že dovolj blizu celotne domene in je napaka posledično manjša.

Do tu smo primerjali lastne funkcije. Ker diskretizacija stohastičnega polja ni odvisna le od lastnih funkcij, temveč tudi od lastnih vrednosti, ki predstavljajo magnitudo lastnih funkcij, je za objektivno oceno vpliva aproksimacije kovariančnih funkcij potrebno oceniti predvsem skupni vpliv razlik v lastnih funkcijah in lastnih vrednostih. Spomnimo se, da se natančnost diskretizacije stohastičnega polja oceni v smislu povprečne napake stohastičnega polja z enačbama (2.33) ali (2.34). Lokalno relativno napako variance stohastičnega polja zaradi uporabe aproksimirane funkcije v primerjavi z uporabo originalne

Preglednica 5.4: Relativna napaka prve lastne funkcije v temenu za različne korelacijske in efektivne dolžine.

Table 5.4: Relative error of first eigenfunction in its turning point for different correlation and effective lengths.

	C_B				C_C			
	l_{eff}/l_c				l_{eff}/l_c			
l_c	2	3	4	5	2	3	4	5
0.01	0.005	0.003	0.002	0.001	0.005	0.004	0.002	0.001
0.025	0.012	0.008	0.005	0.003	0.013	0.009	0.006	0.003
0.05	0.023	0.014	0.009	0.005	0.025	0.016	0.010	0.006
0.1	0.039	0.022	0.012	0.006	0.044	0.026	0.014	0.007
0.2	0.051	0.016	0.001	0.000	0.060	0.026	0.004	0.000

Preglednica 5.5: Relativna napaka prve lastne funkcije na robu domene za različne korelacijske in efektivne dolžine.

Table 5.5: Relative error of first eigenfunction in boundary point of the domain for different correlation and effective lengths.

	C_B				C_C			
	l_{eff}/l_c				l_{eff}/l_c			
l_c	2	3	4	5	2	3	4	5
0.01	0.377	0.215	0.115	0.058	0.438	0.252	0.137	0.071
0.025	0.364	0.200	0.104	0.051	0.424	0.239	0.127	0.064
0.05	0.337	0.178	0.088	0.041	0.398	0.215	0.109	0.052
0.1	0.285	0.133	0.056	0.022	0.345	0.167	0.074	0.029
0.2	0.186	0.059	0.012	0.000	0.246	0.086	0.022	0.002

kovariančne funkcije ocenimo z

$$err_{rel}(\mathbf{X}, M) = \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i (f_i^A(\mathbf{X}, \theta))^2 - \sum_{i=1}^M \lambda_i (f_i^j(\mathbf{X}, \theta))^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (f_i^A(\mathbf{X}, \theta))^2}, \quad (5.13)$$

Ocena globalne relativne napake variance stohastičnega polja zaradi uporabe aproksimirane funkcije je tako

$$\overline{err}_{rel}(M) = \frac{1}{V} \int_D err_{rel}(\mathbf{X}, M) d\mathbf{X}, \quad (5.14)$$

kjer je V prostornina (oz. v primeru dvodimenzionalnega problema ploščina, v primeru enodimenzionalnega problema pa dolžina) domene, na kateri je stohastično polje definirano. V preglednici 5.7 je prikazana relativna razlika prvega člena K-L dekompozicije za različne l_{eff} in l_c . Izračunana je po enačbi (5.14), pri čemer je število členov K-L vrste $M = 1$.

Preglednica 5.6: Povprečna relativna napaka prve lastne funkcije preko celotne domene za različne korelacijske in efektivne dolžine.

Table 5.6: Average error of first eigenfunction, calculated over the whole domain for different correlation and effective lengths.

l_c	C_B				C_C			
	l_{eff}/l_c				l_{eff}/l_c			
	2	3	4	5	2	3	4	5
0.01	0.009	0.006	0.004	0.002	0.010	0.006	0.004	0.002
0.025	0.020	0.013	0.008	0.004	0.022	0.015	0.009	0.005
0.05	0.034	0.021	0.012	0.006	0.038	0.024	0.014	0.008
0.1	0.050	0.028	0.013	0.005	0.058	0.033	0.016	0.007
0.2	0.052	0.016	0.002	0.000	0.065	0.024	0.005	0.000

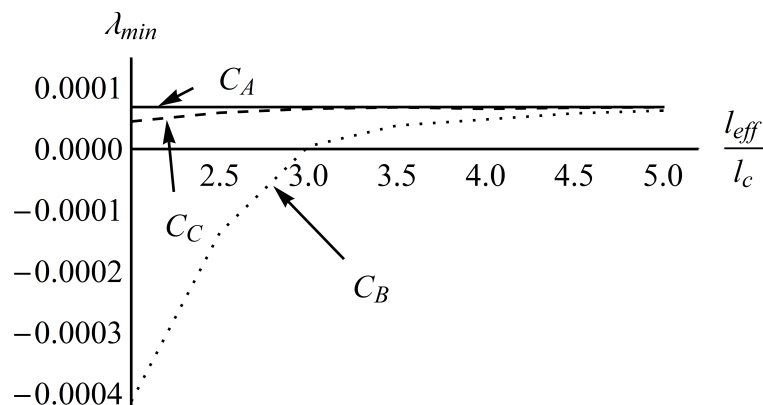
Preglednica 5.7: Povprečna relativna napaka prvega člena K-L dekompozicije za različne korelacijske in efektivne dolžine.

Table 5.7: Average relative error of the first term in K-L decomposition for different correlation and effective lengths.

l_c	C_B				C_C			
	l_{eff}/l_c				l_{eff}/l_c			
	2	3	4	5	2	3	4	5
0.01	0.172	0.078	0.036	0.016	0.222	0.097	0.044	0.020
0.025	0.191	0.089	0.042	0.020	0.242	0.111	0.053	0.025
0.05	0.197	0.091	0.043	0.021	0.249	0.115	0.053	0.026
0.1	0.177	0.077	0.035	0.014	0.230	0.097	0.045	0.019
0.2	0.125	0.038	0.005	0.000	0.161	0.058	0.011	0.000

Ker je pomembnost prvega člena K-L dekompozicije v primerjavi z naslednjimi členi odvisna od koreliranosti polja, je za oceno skupne relativne napake variance stohastičnega polja najbolj primerna primerjava, kako se napaka $\overline{err}_{rel}(M)$ spreminja glede na število uporabljenih členov v K-L vrsti. Na sliki 5.11 je prikazana globalna relativna napaka v odvisnosti od števila členov K-L vrste M za prvih 150 členov ter stohastična polja s korelacijskimi dolžinami $l_c = 0.025$ in 0.2 ter razmerji $l_{eff}/l_c = 2; 3; 4$. Primerjava pokaže, da napaka v primeru kovariančne funkcije C_C v vseh primerih pada. Obnašanje napake v primeru kovariančne funkcije C_B ni tako predvidljivo. V vseh primerjanih korelacijskih dolžinah in razmerjih l_{eff}/l_c napaka do nekega člena M najprej narašča, nato pa začne padati proti nič. V vseh primerih napaka C_B počasneje pada proti nič kot napaka C_C , kar pomeni da K-L vrsta s kovariančno funkcijo C_C bolje konvergira k originalni eksponentni kovariančni funkciji.

Če torej povzamemo izsledke vseh zgornjih primerjav, lahko zaključimo, da sta obe mo-

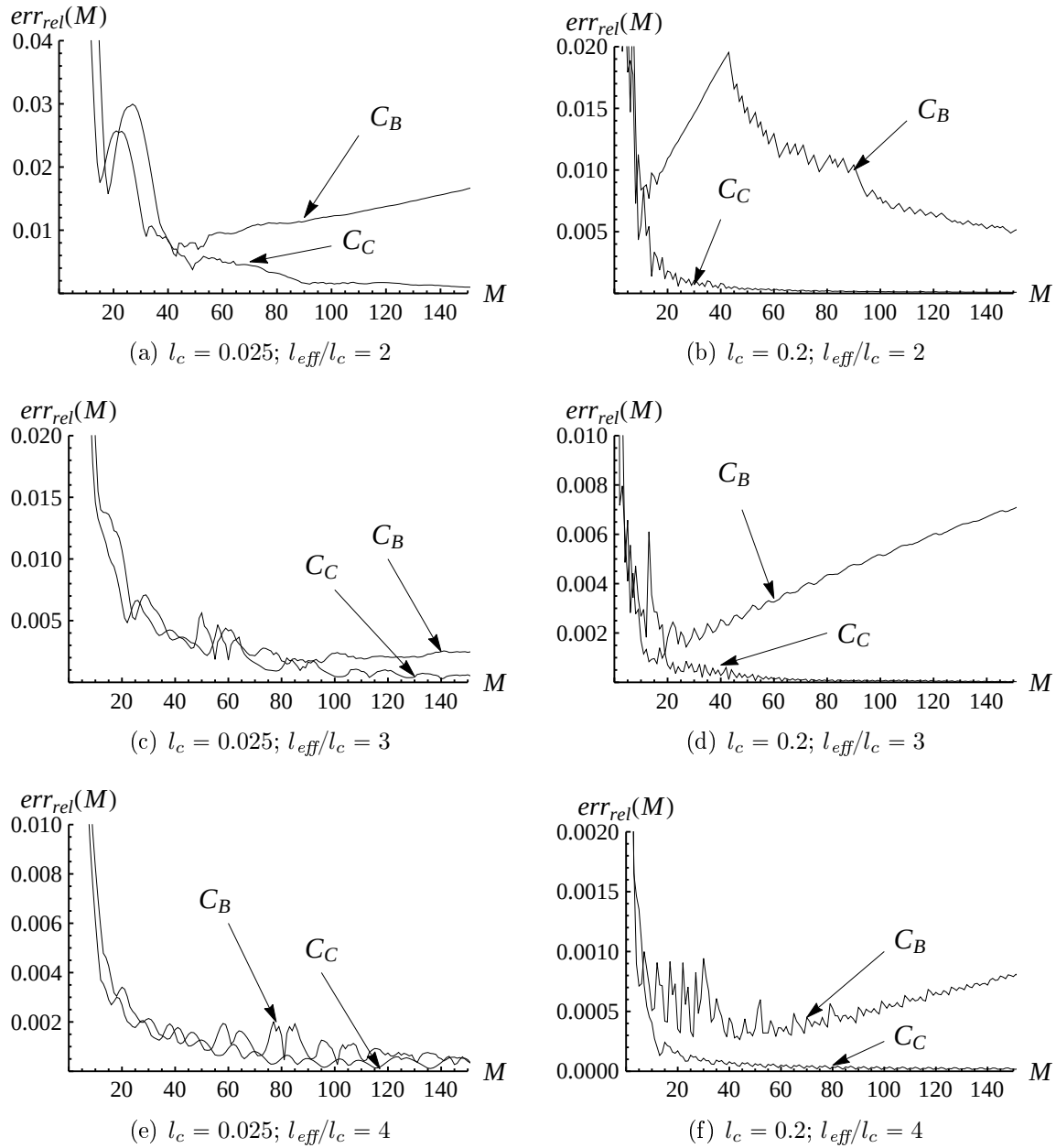


Slika 5.10: Najmanjša lastna vrednost za različne kovariančne funkcije in $l_c = 0.05$.

Figure 5.10: Minimum eigenvalue for different covariance functions and $l_c = 0.05$.

difikaciji eksponentne kovariančne funkcije ob izbiri ustreznega l_{eff} upravičeni in razlike lastnih funkcij in lastnih vrednosti v primerjavi s tistimi pri uporabi originalne eksponentne funkcije majhni. Glede na primerjave bi lahko podali priporočilo izbire $3l_c \leq l_{eff} \leq 5l_c$. Izbira znotraj teh vrednosti je odvisna predvsem od velikosti problema in želene natančnosti. Nadalje lahko iz primerjav zaključimo, da je globalna napaka variance diskretiziranega stohastičnega polja v primeru, ko v K-L dekompoziciji obdržimo le nekaj začetnih členov, nekoliko bolj v prid modifikaciji C_B , medtem ko z naraščanjem ohranjenih členov v K-L dekompoziciji napaka v primeru C_B na nekem območju celo narašča, medtem ko ob uporabi C_C vedno pada. Ker je napaka modifikacije C_C tudi ob manjšem M le za nekaj promilov večja od C_B in ob upoštevanju dejstva, da ima uporaba funkcije C_C znatno boljšo numerično stabilnost, je izbira med C_B in C_C praviloma v prid C_C .

Na koncu je v okviru presoje aproksimacije kovariančne funkcije narejena še ocena vpliva l_{eff} na stabilnost procedure za C_B in C_C . Na sliki 5.10 so prikazane najmanjše izračunane lastne vrednosti v odvisnosti od izbire l_{eff} za $l_c = 0.05$ in 250 končnih elementov vzdolž domene. Iz slike je razvidno, da je najmanjša lastna vrednost, dobljena s kovariančno funkcijo C_B v primeru manjše l_{eff} negativna, medtem ko je v primeru C_C najmanjša lastna vrednost vedno pozitivna, ne glede na l_{eff} . Ocena najmanjše efektivne dolžine $l_{eff,min}$ po predlagani enačbi (5.7) je za C_B $l_{eff,min}/l_c = 3.5$, za C_C pa $l_{eff,min}/l_c = 0$. Obe oceni ustrezata rezultatom, predstavljenim na sliki 5.10.



Slika 5.11: Primerjava globalne relativne napake variance stohastičnega polja za aproksimirano kovariančno funkcijo.

Figure 5.11: Comparison of global relative error in case of modified covariance function.

6 Analitična občutljivostna analiza višjega reda

Kot je bilo predstavljeno v uvodnih poglavjih, občutljivostna analiza izračuna odvode poljubnega funkcionala odziva po izbranih občutljivostnih parametrih $\xi = \{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, M$, za kar je v splošnem potrebno poznati odvode vektorjev rešitve primarnega problema $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$ po teh parametrih. V nadaljevanju je predstavljen postopek analitične občutljivostne analize višjega reda za izračun odvodov po stohastičnih spremenljivkah ξ . Na tem mestu je prav omeniti, da predstavljeni postopek velja tudi za občutljivostno analizo glede na poljubne parametre, v tem primeru velja oznaka ξ za poljuben občutljivostni parameter, razlike nastopijo le pri podajanju izjem k avtomatskem odvajanju.

Postopek analitične občutljivostne analize je prikazan za časovno odvisne povezane mehanske probleme. V tem primeru se z izvajanjem občutljivostne analize prične, ko je primarna analiza v posameznem časovnem koraku zaključena. Občutljivostna analiza višjega reda se lahko izvede šele, ko so vse občutljivostne analize nižjih redov zaključene. Račun občutljivosti istega reda je medsebojno neodvisen, zato se na tem mestu lahko uporabi paralelizacija, ki reševanje problema pospeši. Celoten potek primarne in občutljivostne analize je prikazan na sliki 2.4. Podrobnejša izpeljava in razlaga posameznih korakov je predstavljena v naslednjih poglavjih.

6.1 Definicija občutljivostnega problema

Pri občutljivostni analizi iščemo odvode (poljubnega reda) vektorjev rešitve po izbranih parametrih ξ . Parametri ξ v enačbah rezidualov v splošnem lahko nastopajo eksplicitno in/ali implicitno, zato osnovne rezidualne enačbe napišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{p}(\xi), \mathbf{h}(\xi), \mathbf{p}_n(\xi), \mathbf{h}_n(\xi), \xi) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q}_g(\mathbf{p}_e(\xi), \mathbf{h}_g(\xi), \mathbf{p}_{e,n}(\xi), \mathbf{h}_{g,n}(\xi), \xi) &= \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Enačbe (6.1) se nato odvajajo po enem ali več parametrih ξ_i , ξ_j , odvisno od reda odvoda, katerega iščemo.

Ob uporabi metode končnih elementov, se domeno problema razdeli na poddomene ali končne elemente. Nato se na nivoju posameznega končnega elementa z indeksom e izračuna prispevek tega elementa $\mathbf{R}_e$ k globalnemu rezidualu. Prispevke vseh končnih elemen-

tov se nato s standardno proceduro sestavljanja sešteje $\mathbf{R} = A \mathbf{R}_e$, pri čemer je potrebno upoštevati tudi kinematične kompatibilnosti med elementi. Ker je rezidual $\mathbf{R}$ definiran z integracijo preko celotne domene problema, je tudi prispevek končnega elementa $\mathbf{R}_e$ formiran z integracijo preko domene elementa. Za integriranje se najpogosteje uporabi numerična integracija in sicer Gaussova kvadratura. Gaussova kvadratura je numerična metoda integracije, pri kateri se integral izračuna tako, da se v določenih točkah domene g izračuna vrednosti funkcije in jih pomnoži z ustreznimi utežmi ter produkte sešteje

$$\mathbf{R}_e = \sum_{g=1}^{N_g} w_g \mathbf{R}_g. \quad (6.2)$$

Za izvedbo občutljivostne analize v metodi končnih elementov uporabimo enak postopek in sicer na nivoju končnega elementa izračunamo odvode reziduala v Gaussovih točkah $(\frac{D^n \mathbf{R}_g}{D\xi_i D\xi_j \dots D\xi_n})$, dobljene vrednosti pomnožimo z ustreznimi utežmi ter produkte seštejemo. Rezultat je prispevek končnega elementa k odvodu globalne rezidualne enačbe $(\frac{D^n \mathbf{R}_e}{D\xi_i D\xi_j \dots D\xi_n})$. Prispevke posameznih končnih elementov se nato sešteje po standardni proceduri sestavljanja. Postopek odvajanja enačb rezidualov glede na red iskanega odvoda je prikazan v naslednjih poglavjih.

6.2 Občutljivostna analiza prvega reda

Pri občutljivostni analizi prvega reda se išče odvode prvega reda $\frac{D\mathbf{p}}{D\xi_i}$ in $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ odziva. Potrebno je torej odvajati enačbe rezidualov po ξ_i . Na nivoju končnih elementov se izračuna odvode v Gaussovih točkah $\mathbf{R}_g(\mathbf{p}_e(\xi), \mathbf{h}_g(\xi), \mathbf{p}_{e,n}(\xi), \mathbf{h}_{g,n}(\xi), \xi)$, in $\mathbf{Q}_g(\mathbf{p}_e(\xi), \mathbf{h}_g(\xi), \mathbf{p}_{e,n}(\xi), \mathbf{h}_{g,n}(\xi), \xi)$,

$$\frac{D\mathbf{R}_g}{D\xi_i} = \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i}, \quad (6.3)$$

$$\frac{D\mathbf{Q}_g}{D\xi_i} = \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i} = \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g. \quad (6.4)$$

Iz enačbe (6.4) se izrazi $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ in ustavi v (6.3). Enačbo (6.3) se nato preuredi tako, da se člene, ki vsebujejo neznano občutljivost $\frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i}$ prestavi na levo stran enačaja, ostale člene pa na desno. Rezultat seštevka prispevkov po končnih elementih je sistem linearnih algebrskih enačb, podoben lineariziranemu sistemu enačb primarnega problema (ki se rešuje znotraj vsake Newton-Raphsonove iteracije primarnega problema),

$$\mathbf{K} \frac{D\mathbf{p}}{D\xi_i} = -\mathbf{R}^I, \quad (6.5)$$

kjer je $\mathbf{K}$ neodvisni tangenti operator, dobljen iz prispevkov elementov

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{K}_e = \sum_{g=1}^{N_g} w_g \left(\frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \right). \quad (6.6)$$

$\mathbf{A}_g$ v tem izrazu je kovergirani odvisni tangenti operator $\partial \mathbf{Q}_g / \partial \mathbf{h}_g$. Matrika $\mathbf{K}$ je že LU razcepljena in shranjena iz primarnega problema. Zato je za izračun občutljivostne analize potrebno izračunati le vektor ${}^i \tilde{\mathbf{R}}^I$ na desni strani enačbe (6.5). Vektor ${}^i \tilde{\mathbf{R}}^I$ vsebuje člene iz enačb (6.3) in (6.4), ki vsebujejo neznano občutljivost pomikov in se ga po metodi končnih elementov izračuna s seštevkom prispevkov po posameznih končnih elementih

$${}^i \tilde{\mathbf{R}}^I = \sum_e {}^i \tilde{\mathbf{R}}_e^I$$

$${}^i \tilde{\mathbf{R}}_e^I = \sum_{g=1}^{N_g} w_g {}^i \tilde{\mathbf{R}}_g^I, \quad (6.7)$$

kjer je ${}^i \tilde{\mathbf{R}}_g^I$

$${}^i \tilde{\mathbf{R}}_g^I = \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i} \right), \quad (6.8)$$

Zaradi analogije sistema enačb (6.5) z lineariziranim sistemom enačb primarnega problema, kjer vektor na desni strani sistema enačb predstavlja obtežni vektor, se pri občutljivostni analizi vektor ${}^i \tilde{\mathbf{R}}^I$ poimenuje *neodvisni občutljivostni pseudo-obtežni vektor prvega reda*.

Rešitev sistema enačb (6.5) je občutljivost neodvisnega vektorja rešitve $\frac{D \mathbf{p}}{D \xi_i}$. To občutljivost se nato vstavi v enačbo (6.4). Nakar se lahko izračuna še občutljivosti spremenljivk odvisnega problema $\frac{D \mathbf{h}_g}{D \xi_i}$, $g = 1, 2, \dots, N_g$.

Ko so znane občutljivosti $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}_g$ se lahko izračuna občutljivost funkcionala odziva. Ker je funkcional odziva v splošnem lahko poljuben, ni smiselno podajati strogih pravil za izračun in avtomatizacijo funkcionala odziva. Razvoj avtomatizacije, ki bi bil uporaben le za določen tip funkcionala odziva bi uporabnost avtomatizacije le omejil in zato od njega ne bi bilo posebne koristi. Na tem mestu je splošen simbolni sistem Mathematica prikladno okolje za izračun občutljivosti poljubnega funkcionala odziva. V primeru, da je funkcional odziva odvisen le od vektorjev rešitve v zadnjem časovnem koraku ($F(\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$), se

občutljivost funkcionala odziva izračuna po enačbi

$$\frac{DF}{D\xi_i} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{D\mathbf{p}}{D\xi_i} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}} \frac{D\mathbf{h}}{D\xi_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_i}. \quad (6.9)$$

6.2.1 Avtomatizacija občutljivostne analize prvega reda

Kot je bilo uvodoma na kratko predstavljeno, je za izvajanje občutljivostne analize v programski kodi končnega elementa potrebno definirati ustrezne podprograme za izračun občutljivosti. Ker je matrika $\mathbf{K}$ izračunana in shranjena že iz primarne analize, je za postavitev sistema linearnih enačb (6.5), potrebno izračunati le še prispevke posameznega končnega elementa ${}^i\tilde{\mathbf{R}}_e^I$ h globalnemu psevdo-obtežnemu vektorju prvega reda ${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I$. V ta namen smo uporabili ADB pristop, s katerim smo se izognili zamudnemu ročnemu izpeljevanju in vnašanju celotnega izraza (6.8) v kodo končnega elementa, temveč se v tem primeru izračun prispevkov ${}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I$ izvede le z dvema klicema avtomatskega odvajanja. Ob tem je potrebno le podati ustrezne izjeme k avtomatskemu odvajanju, za spremenljivke (npr. pomike v prejšnjem časovnem koraku), za katere odvisnost od parametra, po katerem odvajamo, sicer ni eksplicitno vidna iz programske kode samega končnega elementa. Te odvisnosti so implicitno vsebovane v vhodnih parametrih podprogramov. Z uporabo izjem pri odvajanju enačbo (6.8) zapišemo kot

$${}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I := \frac{\hat{\delta}\mathbf{R}_g}{\hat{\delta}\xi_i} \left| \begin{array}{l} \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{p}_{e,n}; \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{h}_{g,n}; \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} = {}^i\mathbf{Z}_g; \frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i}f_i; \end{array} \right. \quad (6.10)$$

kjer sta $D_{\xi_i}\mathbf{p}_{e,n}$ in $D_{\xi_i}\mathbf{h}_{g,n}$ občutljivosti prvega reda vektorjev rešitve, izračunani v predhodnem časovnem koraku, w pa predstavlja parameter, ki je v stohastičnem pristopu opisan s stohastičnim poljem. Odvod stohastičnega polja w po slučajnih spremenljivki ξ_i se opiše s hitrostnim poljem, ki ga dobimo z odvajanjem enačbe (2.7) po ξ_i . Beseda hitrostno izhaja iz tega, da predstavlja mero za spreminjanje stohastičnega polja v odvisnosti od hitrosti spreminjanja slučajnega parametra ξ_i

$$\frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i}f_i(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\lambda_i} \sum_{j=1}^J f_{ji} N_j(\hat{\mathbf{X}}) \quad (6.11)$$

Odvodi višjega reda stohastičnega polja po ξ_i so zaradi narave K-L vrste enaki 0.

Posebno pozornost velja nameniti količini ${}^i\mathbf{Z}_g$, ki je vpeljana v enačbi (6.10)

$${}^i\mathbf{Z}_g = -\mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i} \right). \quad (6.12)$$

Količina ${}^i\mathbf{Z}_g$ je vpeljana iz dveh razlogov. Prvi je, da se z vpeljavo ${}^i\mathbf{Z}_g$ doseže zelo abstraktno in jasno formulacijo za izračun psevdo-obtežnega vektorja. ${}^i\mathbf{Z}_g$ namreč predstavlja del zadnjega člena v izrazu za psevdo obtežni vektor v enačbi (6.8), ki vsebuje odvajanje obeh rezidualov $\mathbf{R}_g$ in $\mathbf{Q}_g$ ter zato ne more biti izračunan s samo enim klicem procedure avtomatskega odvajanja. Opozoriti velja, da je dejanska vrednost odvoda $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ enaka

$$\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} = {}^i\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i}, \quad (6.13)$$

vendar pa samo vpeljana izjema avtomatskega odvajanja $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} = {}^i\mathbf{Z}_g$ vodi do matematično pravilne formulacije vektorja ${}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I$. Drugi razlog za vpeljavo ${}^i\mathbf{Z}_g$ je, da se to količino lahko uporabi za izboljšanje numerične učinkovitosti. V ${}^i\mathbf{Z}_g$ je namreč zajet že velik del izraza za izračun občutljivosti $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ (en. (6.12) in (6.13)). Zato se lahko dejstvi, da se neodvisni problem pri občutljivostni analizi rešuje pred odvisnim in da je ${}^i\mathbf{Z}_g$ enakih dimenzij kot $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ izkoristi na ta način, da se med potekom reševanja neodvisnega problema količino ${}^i\mathbf{Z}_g$ začasno shrani v spomin, na mesto ki je pripravljeno za shranjevanje $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$. Med izvajanjem izračuna občutljivosti odvisnega vektorja $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ je tako ${}^i\mathbf{Z}_g$ že na voljo in je potrebno le odšteti preostali člen $\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i}$, izračunane občutljivosti $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$ pa se nato preprosto shrani preko ${}^i\mathbf{Z}_g$. Na tem mestu je prav opozoriti, da se količino ${}^i\mathbf{Z}_g$ z namenom izboljšanja numerične učinkovitosti lahko, kot je prikazano na sliki 2.4, vpelje tudi v tradicionalni izpeljavi občutljivostne analize, predstavljeni v poglavju 6.2.

V avtomatizaciji se količina ${}^i\mathbf{Z}_g$ izračuna z avtomatskim odvajanjem in ustreznimi izjemami

$${}^i\mathbf{Z}_g := -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}\mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}\xi_i} \left| \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} = D\xi_i \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} = D\xi_i \mathbf{h}_{g,n}; \frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i; \right. \quad (6.14)$$

Prispevke Gaussovih točk se sešteje na nivoju posameznega končnega elementa. Prispevke po končnih elementih se (ob upoštevanju kinematične kompatibilnosti med elementi) sešteje po končnih elementih in tako formira globalni psevdo-obtežni občutljivostni vektor prvega reda

$${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I = A_e {}^i\tilde{\mathbf{R}}_e^I = A_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g {}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I \right). \quad (6.15)$$

Sledi reševanje sistema linearnih algebraskih enačb (6.5), katerega rešitev so občutljivosti $\frac{D\mathbf{p}}{D\xi_i}$.

Nato se izvede še izračun občutljivosti vektorja rešitve odvisnega problema po enačbi (6.13), za kar je znotraj končnega elementa generiran poseben podprogram. V tem koraku se v ADB formulaciji občutljivostne analize uporabi le en klic procedure avtomatskega

odvajanja

$$\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} := {}^i\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\hat{\delta}\mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}\xi_i} \left| \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{p}_e \right. \right). \quad (6.16)$$

Avtomatizacija do tu je bila predstavljena z uporabo lokalno definiranih izjem avtomatskega odvajanja. Ker se kar nekaj izjem v zgornjih izrazih večkrat ponovi, je morda ustreznejša globalna definicija izjem. Enačbe (6.10) do (6.14) se na ta način lahko zapiše kot

$$w := w \left| \frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i \right.; \quad (6.17)$$

$$\mathbf{p}_{e,n} := \mathbf{p}_{e,n} \left| \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{p}_{e,n} \right.; \quad (6.18)$$

$$\mathbf{h}_{g,n} := \mathbf{h}_{g,n} \left| \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{h}_{g,n} \right.; \quad (6.19)$$

$${}^i\mathbf{Z}_g := -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}\mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}\xi_i}; \quad (6.20)$$

$${}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I := \frac{\hat{\delta}\mathbf{R}_g}{\hat{\delta}\xi_i} \left| \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} = {}^i\mathbf{Z}_g \right.; \quad (6.21)$$

Enačbo (6.16) pa se lahko zapiše kot

$$\mathbf{p}_e := \mathbf{p}_e \left| \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i} = D_{\xi_i}\mathbf{p}_e \right.; \quad (6.22)$$

$$\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} := {}^i\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}\mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}\xi_i}. \quad (6.23)$$

Enačbe (6.21) in (6.23) predstavljajo ADB formulacijo občutljivostne analize prvega reda.

6.3 Občutljivostna analiza drugega reda

Za izračun občutljivosti drugega reda $\frac{D^2\mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j}$ in $\frac{D^2\mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$, je potrebno rezidualne $\mathbf{R}_g$ in $\mathbf{Q}_g$ odvajati dvakrat in sicer po občutljivostnih parametrih ξ_i in ξ_j . ξ_i in ξ_j lahko predstavljata isti občutljivostni parameter (v tem primeru $i=j$) ali pa gre za dva različna občutljivostna parametra.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^2 \mathbf{p}_e}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D^2 \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D^2 \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}^2} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}^2} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} \quad (6.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^2 \mathbf{p}_e}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D^2 \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D^2 \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \\
& + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \dots = \mathbf{0}, \quad g = 1, 2, \dots, N_g. \quad (6.25)
\end{aligned}$$

V enačbi (6.25) je zaradi velike dolžine enačb izpisanih le nekaj členov. Celotna oblika in dolžina enačbe se lahko zapiše s pomočjo enačbe (6.24), v kateri se $\mathbf{R}_g$ zamenja s $\mathbf{Q}_g$.

Iz enačb (6.24) in (6.25) je razvidno, da je za izračun $\frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j}$ in $\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$ potrebno poznati občutljivosti prvega reda v trenutnem in predhodnem časovnem koraku ($\frac{D \mathbf{p}}{D\xi_k}$, $\frac{D \mathbf{p}_n}{D\xi_k}$, $\frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_k}$ in $\frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_k}$, $k = i, j$). Zato je pred izvedbo občutljivostne analize drugega reda potrebno izvesti občutljivostno analizo prvega reda. Za kompletno občutljivostno analizo drugega reda za M občutljivostnih parametrov (ki jih je v primeru stohastičnega polja toliko, kolikor je ohranjenih členov K-L dekompozicije) je torej potrebno izračunati $\frac{1}{2}M(M+3)$ odvodov vektorjev rešitve, od tega M odvodov prvega reda in $\frac{1}{2}M(M+1)$ odvodov drugega reda. Odvodi istega reda so medsebojno neodvisni, kar pomeni da se lahko račun posameznega reda občutljivostne analize paralelizira. To pomeni, da se račun občutljivosti po posameznih občutljivostnih parametrih izvaja v istem času na več procesorjih, s čimer se računski čas skrajša sorazmerno s številom uporabljenih procesorjev. V primeru, da nas izmed M občutljivostnih parametrov zanima občutljivost drugega reda le za omejeno število občutljivostnih parametrov, se število občutljivostnih analiz drugega reda lahko temu primerno zmanjša.

Podobno kot pri občutljivostni analizi prvega reda, se iz enačb (6.25) izrazi občutljivosti $\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$ in jih ustavi v (6.24). Po preureditvi, ko se na levo stran enačaja združi člene, ki vsebujejo neznane občutljivosti $\frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j}$, preostale člene pa da na desno stran enačaja. Z uporabo pravil Gaussove kvadrature in formiranjem globalnih matrik in vektorjev iz prispevkov posameznih končnih elementov, je rezultat zopet sistem linearnih enačb

$$\mathbf{K} \frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j} = -{}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}^{II}. \quad (6.26)$$

${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}^{II}$ v tem sistemu predstavlja *neodvisni občutljivostni pseudo-obtežni vektor drugega reda*. Prispevki posameznega končnega elementa k temu vektorju se izračunajo v Gaussovih točkah in sestavijo v globalni vektor

$${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}^{II} = A_e {}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_e^{II} = A_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g {}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} \right), \quad (6.27)$$

kjer je

$$\begin{aligned}
 {}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} = & \left(\frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \right) \frac{D^2 \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \right) \frac{D^2 \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i \partial \xi_j} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \left. \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \left. \right) \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_i} \right) \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{p}_{e,n}} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{p}_{e,n}} \left. \right) \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} \right) \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_i} \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \left. \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \right) \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_{g,n}} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_{g,n}} \left. \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_i} \right) \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_j} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_j} \left. \right) \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}^2} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}^2} \right) \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_g} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_g} \right) \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} - \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \left. \right) \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \right) \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \right) \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j}.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Rešitev sistema enačb (6.26) je občutljivost drugega reda $\frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j}$. Le-to se nato vstavi v enačbo (6.25), nakar se lahko izračuna še občutljivosti $\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$, $g = 1, 2, \dots, N_g$.

Izračun občutljivosti drugega reda funkcionala odziva $\frac{D^2 F}{D\xi_i D\xi_j}$, v primeru da je le-ta odvisen

le od vektorjev rešitve v zadnjem časovnem koraku ($F(\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$), nato sledi kot

$$\begin{aligned} \frac{D^2 F}{D\xi_i D\xi_j} = & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}} \frac{D^2 \mathbf{h}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{p} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{p} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_i} + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{h} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{h} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{h}^2} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_i} + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{h}} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{h}} \frac{D \mathbf{h}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

6.3.1 Avtomatizacija občutljivostne analize drugega reda

Procedura avtomatskega odvajanja, vgrajena v AceGen je razvita za izračun odvodov prvega reda. Izračun odvodov drugega reda se zato izvede z dvema zaporednima klicema avtomatskega odvajanja za odvode prvega reda. Formulacija izjem avtomatskega odvajanja mora biti temu primerna. Pri avtomatizaciji občutljivostne analize drugega reda se prispevki k neodvisnemu psevdo-obtežnemu občutljivostnemu vektorju drugega reda izračunajo v Gaussovih točkah, s proceduro avtomatskega odvajanja in z ustreznimi izjemami kot

$${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} := \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_j}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta}_{\xi_i}} \left| \begin{array}{l} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D \xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D \mathbf{p}_e}{D \xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_e; \\ \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D \xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n}; \frac{D \mathbf{h}_g}{D \xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_g; \\ \frac{D w}{D \xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i; \end{array} \right. \right) \left| \begin{array}{l} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D \xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{p}_n)}{D \xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D \mathbf{p}_e}{D \xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_e; \\ \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D \xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n})}{D \xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \\ \frac{D \mathbf{h}_g}{D \xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_g; \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{h}_g)}{D \xi_j} = {}^{ij} \mathbf{Z}_g; \\ \frac{D w}{D \xi_j} = \sqrt{\lambda_j} f_j; \end{array} \right. \quad (6.30)$$

kjer so $D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{p}_{e,n}$ in $D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{h}_{g,n}$ občutljivosti drugega reda vektorjev rešitev v predhodnem časovnem koraku in $D_{\xi_i} \mathbf{p}_e$, $D_{\xi_i} \mathbf{h}_g$, $D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n}$ ter $D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n}$ so občutljivosti prvega reda vektorjev rešitev v trenutnem in predhodnem časovnem koraku. Na tem mestu morda velja opozoriti na dejstvo, ki je bilo sicer omenjeno že v prejšnjem poglavju, da zaradi narave K-L vrste, da je linearna glede na slučajne parametre ξ , izjeme, ki bi definirala drugi odvod stohastičnega polja po parametrih ξ_i in ξ_j ni potrebno definirati, saj so drugi odvodi, ne glede na to ali sta indeksa i in j enaka ali različna, enaki nič. Na enak način kot pri občutljivostni

analizi prvega reda, tudi tu vpeljemo pomožno količino $^{ij}\mathbf{Z}_g$

$$\begin{aligned}
 ^{ij}\mathbf{Z}_g = & -\mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D^2 \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D^2 \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g^2} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n}^2} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n}^2} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_{e,n} \partial \mathbf{h}_g} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{p}_{e,n}} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} - \\
 & + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \mathbf{h}_{g,n}} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} \right), \quad g = 1, 2, \dots, N_g.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Razlogi za vpeljavo $^{ij}\mathbf{Z}_g$ so enaki kot so razloženi v poglavju 6.2.1. Programska koda je na ta način krajša in preglednejša, hkrati se poveča numerična učinkovitost, saj je dimenzija $^{ij}\mathbf{Z}_g$ tudi v tem primeru enaka kot $\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$ in zato med proceduro formiranja globalnih enačb lahko začasno shranjena na mesto, ki je sicer pripravljeno za $\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$. V okviru avtomatizacije se $^{ij}\mathbf{Z}_g$ izračuna z dvema klicema procedure avtomatskega odvajanja in ustreznimi izjemami.

$$^{ij}\mathbf{Z}_g := -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_j}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}_{\xi_i}} \left| \begin{array}{l} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_e; \\ \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n}; \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_g; \\ \frac{D w}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i; \end{array} \right. \right) \left| \begin{array}{l} \frac{D \mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n})}{D\xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \\ \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_e; \frac{D \mathbf{h}_g}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_g; \\ \frac{D \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n})}{D\xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \\ \frac{D w}{D\xi_j} = \sqrt{\lambda_j} f_j; \end{array} \right. \tag{6.32}$$

Kot pri občutljivostni analizi prvega reda, se prispevke posameznih končnih elementov (ob upoštevanju kinematične kompatibilnosti med elementi) sešteje in se tako formira globalni psevdo-obtežni občutljivostni vektor drugega reda

$$^{ij}\tilde{\mathbf{R}}^{II} = \mathbf{A}_e^{ij} \tilde{\mathbf{R}}_e^{II} = \mathbf{A}_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g ^{ij} \tilde{\mathbf{R}}_g^{II} \right) \tag{6.33}$$

Sledi reševanje sistema linearnih algebraskih enačb (6.26), katerega rešitev so občutljivosti $\frac{D^2 \mathbf{p}}{D\xi_i D\xi_j}$. Nato se prične izvajati podprogram končnega elementa za izračun občutljivosti vektorja rešitve odvisnega problema, v kateri se izvede en klic procedure avtomatskega odvajanja

$$\frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j} := {}^{ij}\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta} \xi_{ij}} \middle| \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{ij}} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{p}_e \right). \quad (6.34)$$

Na tem mestu je prav opozoriti še na eno pomembno ugotovitev. Naj spomnimo, da so vse izjeme, ki se razlikujejo glede na red občutljivostne analize, zajete v količini ${}^{ij}\mathbf{Z}_g$ in da je edina izjema, ki jo je potrebno podati pri izračunu odvisnih občutljivosti ta, kakšna je vrednost odvoda neodvisnega vektorja rešitve po trenutnem občutljivostnem parametru (ali trenutnih občutljivostnih parametrih). Ob pazljivem premisleku navedenih dejstev ugotovimo, da je način, kako to podati v programski kodi neodvisen od reda trenutnega iskanega odvoda (zato je v enačbi (6.34) uporabljen zapis $\hat{\delta} \xi_{ij}$). Na tem mestu se torej pokaže še ena prednost vpeljave ${}^{ij}\mathbf{Z}_g$, saj je podprogram za izračun odvisnih občutljivosti na ta način enak ne glede na red občutljivostne analize, občutljivosti odvisnih vektorjev rešitve pa ne glede na red izračunane s samo enim klicem procedure avtomatskega odvajanja.

Z uporabo globalno definiranih izjem se avtomatizacija občutljivostne analize drugega reda, predstavljena v enačbah (6.30) in (6.32), zapiše kot

$$w := w \mid \frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i; \frac{Dw}{D\xi_j} = \sqrt{\lambda_j} f_j; \quad (6.35)$$

$$\mathbf{p}_e := \mathbf{p}_e \mid \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_e; \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_e; \quad (6.36)$$

$$D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n} := D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n} \mid \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n})}{D\xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \quad (6.37)$$

$$\mathbf{p}_{e,n} := \mathbf{p}_{e,n} \mid \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_{e,n}; \frac{D\mathbf{p}_{e,n}}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_{e,n}; \quad (6.38)$$

$$\mathbf{h}_g := \mathbf{h}_g \mid \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_g; \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_g; \quad (6.39)$$

$$D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n} := D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n} \mid \frac{D(D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n})}{D\xi_j} = D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \quad (6.40)$$

$$\mathbf{h}_{g,n} := \mathbf{h}_{g,n} \mid \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n}; \frac{D\mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{h}_{g,n}; \quad (6.41)$$

$${}^{ij}\mathbf{Z}_g := -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} \xi_j} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta} \xi_i} \right); \quad (6.42)$$

$${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} := \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}\xi_j} \left(\frac{\hat{\delta}\mathbf{R}_g}{\hat{\delta}\xi_i} \right) \bigg|_{\frac{D(D\xi_i \mathbf{h}_g)}{D\xi_j} = {}^{ij}\mathbf{Z}_g} \quad (6.43)$$

in enačbo (6.34) se lahko preuredi v

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e &:= \mathbf{p}_e \big|_{\frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{ij}} = D\xi_i \xi_j \mathbf{p}_e} ; \\ \frac{D^2 \mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j} &:= {}^{ij}\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}\mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}\xi_{ij}}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

6.4 Občutljivostna analiza višjih redov

V tem poglavju bomo podali enačbe za izračun občutljivosti poljubnega n -tega reda. Število indeksov je v tem primeru poljubno veliko. Označimo indeks občutljivostnega parametra s s_i : $s_i \in \{1, 2, \dots, M\}$. Iskane občutljivosti n -tega reda tako označimo s $\frac{D^n \mathbf{p}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}}$ in $\frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}}$. Ob tem velja opomniti, da dva različna indeksa občutljivostnega parametra, npr. ξ_{s_1} in ξ_{s_2} lahko predstavljata dva ista ali dva različna občutljivostna parametra, saj je s_i indeks poljubnega člena K-L dekompozicije.

Za izračun kompletne občutljivostne analize n -tega reda je ob upoštevanju komutativnosti odvodov in dejstva, da moramo poznati tudi odvode nižjih redov, potrebno izvesti n_{OA} izračunov odvodov

$$n_{OA} = \sum_{i=1}^n \binom{M+i-1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{(M+i-1)!}{(M-1)! i!}, \quad (6.45)$$

od tega $\frac{(M+i-1)!}{(M-1)! i!}$ odvodov i -tega reda.

Postopek izpeljave občutljivostne analize n -tega reda je podoben kot za občutljivostno analizo prvega in drugega reda. Najprej odvajamo osnovne enačbe rezidualov

$$\begin{aligned} \frac{D^n \mathbf{R}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^n \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_{s_n}} \frac{D^{n-1} \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_{n-1}}} + \dots + \frac{\partial^n \mathbf{R}_g}{\partial \xi_{s_1} \partial \xi_{s_2} \dots \partial \xi_{s_n}}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^n \mathbf{Q}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}} &= \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^n \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}} + \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_g} \frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{h}_{g,n} \partial \xi_{s_n}} \frac{D^{n-1} \mathbf{h}_{g,n}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_{n-1}}} + \cdots + \frac{\partial^n \mathbf{Q}_g}{\partial \xi_{s_1} \partial \xi_{s_2} \cdots \partial \xi_{s_n}}, \quad (6.47) \\ g &= 1, 2, \dots, N_g. \end{aligned}$$

Iz enačbe (6.47) se izrazijo občutljivosti $\frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}}$ in vstavijo v (6.46). Na enak način kot v primeru prvega in drugega reda se enačbo preuredi in po proceduri sestavljanja dobi sistem linearnih enačb

$$\mathbf{K} \frac{D^n \mathbf{p}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}} = -_{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}^{(n)}, \quad (6.48)$$

kjer je $_{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}^{(n)}$ neodvisni občutljivostni psevdo-obtežni vektor n -tega reda. Rešitev sistema enačb (6.48) je občutljivost $\frac{D^n \mathbf{p}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}}$, ki se jo nato vnese v (6.47). Na ta način se lahko izračunajo še občutljivosti $\frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}}$. Sledi izračun občutljivosti funkcionala odziva $\frac{D^n F}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}}$.

6.4.1 Avtomatizacija občutljivostne analize višjega reda

Z vgrajeno proceduro avtomatskega odvajanja se izračun odvoda n -tega reda izvede z n zaporednimi klici avtomatskega odvajanja. Pri avtomatizaciji občutljivostne analize n -tega reda se prispevki k neodvisnemu psevdo-obtežnemu občutljivostnemu vektorju n -tega reda izračunajo v Gaussovih točkah, s proceduro avtomatskega odvajanja in ustreznimi izjemami

$$_{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}_g^{(n)} := \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_n}}} \left(\cdots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_k}}} \left(\cdots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_2}}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta}_{\xi_{s_1}}} \right) \right) \right) \quad (6.49)$$

izjeme
za
odvod
po ξ_{s_1}

izjeme
za
odvod
po ξ_{s_2}

izjeme
za
odvod
po ξ_{s_k}

izjeme
za
odvod
po ξ_{s_n}

Izjeme za prvi in drugi red so podane v preglednicah 6.1 in 6.2. Izjeme, ki jih je potrebno podati za k -ti red, $k < n$, so podane v preglednici 6.3. Izjeme, ki jih je potrebno podati pri klicu avtomatskega odvajanja po ξ_{s_n} , pa so podane v preglednici 6.4.

Na enak način kot pri občutljivostni analizi prvega in drugega reda, tudi tu vpeljemo količino $_{s_1 s_2 \dots s_n} \mathbf{Z}_g^{(n)}$, ki jo nato prav tako shranimo na mesto, pripravljeno za $\frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \cdots D\xi_{s_n}}$. V okviru avtomatizacije se $_{s_1 s_2 \dots s_n} \mathbf{Z}_g^{(n)}$ izračuna z n klici procedure avtomatskega odvajanja

Preglednica 6.1: Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_1} .

Table 6.1: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_1} .

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_1}} = \sqrt{\lambda_{s_1}} f_{s_1};$	1
a	$\frac{Da}{D\xi_{s_1}} = D_{\xi_{s_1}} a;$	4
$a = \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}$		

Preglednica 6.2: Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_2} .

Table 6.2: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_2} .

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_2}} = \sqrt{\lambda_{s_2}} f_{s_2};$	1
a	$\frac{Da}{D\xi_{s_2}} = D_{\xi_{s_2}} a;$	4
$D_{\xi_{s_1}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_1}} a)}{D\xi_{s_2}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2}} a;$	4
$a = \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}$		

in ustreznimi izjemami.

$${}_{s_1 s_2 \dots s_n} \mathbf{Z}_g^{(n)} := -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} \xi_{s_n}} \left(\dots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} \xi_{s_k}} \left(\dots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} \xi_{s_2}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta} \xi_{s_1}} \right) \right) \right) \quad (6.50)$$

$\left. \begin{array}{c} \text{izjeme} \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_1} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{c} \text{izjeme} \dots \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_2} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{c} \text{izjeme} \dots \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_k} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{c} \text{izjeme} \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_n} \end{array} \right|$

Izjeme za prvi, drugi, k -ti in n -ti red so enake kot so podane v preglednicah 6.1, 6.2, 6.3 in 6.4, razlika je le pri izjemi $\frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} \mathbf{h}_g)}{D\xi_{s_n}} = {}_{s_1 s_2 \dots s_n} \mathbf{Z}_g^{(n)}$, ki se je v tem primeru ne poda.

Ob upoštevanju kinematične kompatibilnosti med končnimi elementi se nato formira globalni psevdo-obtežni občutljivostni vektor n -tega reda

Preglednica 6.3: Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_k} , $k < n$.

Table 6.3: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_k} , $k < n$.

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_k}} = \sqrt{\lambda_{s_k}} f_{s_k};$	1
a	$\frac{Da}{D\xi_{s_k}} = D_{\xi_{s_k}} a;$	4
$D_{\xi_{s_o}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o}} a)}{D\xi_{s_k}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_k}} a; \quad o = 1, 2, \dots, k-1$	$4(k-1)$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a)}{D\xi_{s_k}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_k}} a;$ $o = 1, \dots, k-2; \quad p = o+1, \dots, k-1;$	$4 \times \binom{k-1}{2}$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a)}{D\xi_{s_k}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q} \xi_{s_k}} a;$ $o = 1, \dots, k-3; \quad p = o+1, \dots, k-2;$ $q = p+1, \dots, k-1;$	$4 \times \binom{k-1}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a = \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}$		

$${}^{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}^{(n)} = A_e({}^{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}_e^{(n)}) = A_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g ({}^{s_1 s_2 \dots s_n} \tilde{\mathbf{R}}_g^{(n)}) \right) \quad (6.51)$$

Sledi reševanje sistema linearnih algebraskih enačb (6.48), katerega rešitev so občutljivosti $\frac{D^n \mathbf{p}}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}}$. Sledi izvajanje podprograma v končnem elementu za izračun občutljivosti vektorja rešitve odvisnega problema. V tem koraku se za izračun uporabi en klic procedure avtomatskega odvajanja

$$\frac{D^n \mathbf{h}_g}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}} := \mathbf{Z}_g^{(n)} - \mathbf{A}_g^{-1} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta} \xi_{i_1 \dots i_n}} \middle| \frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{i_1 \dots i_n}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \dots \xi_{s_n}} \mathbf{p}_e \right). \quad (6.52)$$

Z uporabo globalno definiranih izjem se avtomatizacija občutljivostne analize drugega

Preglednica 6.4: Izjeme, ki jih je potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_n} .

Table 6.4: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_n} .

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_n}} = \sqrt{\lambda_{s_n}} f_{s_n};$	1
a	$\frac{Da}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_n}} a;$	4
$D_{\xi_{s_o}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o}} a)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_n}} a; \quad o = 1, 2, \dots, n-1$	$4(n-1)$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_n}} a;$ $o = 1, \dots, n-2; \quad p = o+1, \dots, n-1;$	$4 \times \binom{n-1}{2}$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q} \xi_{s_n}} a;$ $o = 1, \dots, n-3; \quad p = o+1, \dots, n-2;$ $q = p+1, \dots, n-1;$	$4 \times \binom{n-1}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} b$	$\frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} b)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}} \xi_{s_n}} b;$	2
$D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} \mathbf{h}_g$	$\frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} \mathbf{h}_g)}{D\xi_{s_n}} = s_1 s_2 \dots s_n \mathbf{Z}_g^{(n)};$	1
$a = \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}$		
$b = \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_{g,n}$		

reda, predstavljena v enačbah (6.49) in (6.50) zapiše kot

$$\begin{aligned}
 w &:= w \mid \frac{Dw}{D\xi_{s_1}} = \sqrt{\lambda_{s_1}} f_{s_1}; \frac{Dw}{D\xi_{s_2}} = \sqrt{\lambda_{s_2}} f_{s_2}, \dots, \frac{Dw}{D\xi_{s_n}} = \sqrt{\lambda_{s_n}} f_{s_n} \quad ; \\
 D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} b &:= D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} b \mid \frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} b)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}} \xi_{s_n}} b \quad ; \\
 &\vdots \\
 D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a &:= D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a \mid \frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a)}{D\xi_{s_r}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q} \xi_{s_r}} a; \quad ; \\
 &\quad o = 1, \dots, n-3; \quad p = o+1, \dots, n-2; \quad q = p+1, \dots, n-1, \quad r = q+1, \dots, n; \\
 D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a &:= D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a \mid \frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a)}{D\xi_{s_q}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} a, \\
 &\quad o = 1, \dots, n-2; \quad p = o+1, \dots, n-1, \quad q = p+1, \dots, n; \\
 D_{\xi_{s_o}} a &:= D_{\xi_{s_o}} a \mid \frac{D_{\xi_{s_o}} a}{D\xi_{s_p}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} a, \quad o=1, 2, \dots, n-1, \quad p=o+1, \dots, n; \\
 a &:= a \mid \frac{Da}{D\xi_{s_o}} = D_{\xi_{s_o}} a; \forall o \in \{1, 2, \dots, n\} \quad ;
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

kjer oznaki a in b stojita za $a = \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}$ in $b = \mathbf{p}_{e,n}, \mathbf{h}_{g,n}$.

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \dots s_n \mathbf{Z}_g^{(n)} &:= -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_n}}} \left(\frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_{n-1}}}} \left(\dots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_2}}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}_{\xi_{s_1}}} \right) \right) \right); \\ s_1 s_2 \dots s_n \tilde{\mathbf{R}}_g^{(n)} &:= \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_n}}} \left(\frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_{n-1}}}} \left(\dots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_2}}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta}_{\xi_{s_1}}} \right) \right) \right) \Big|_{\frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}} \mathbf{h}_g})}{D_{\xi_{s_n}}} = s_1 s_2 \dots s_n \mathbf{Z}_g^{(n)}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

in enačbo (6.52) se z globalno definirano izjemo preuredi v

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e &:= \mathbf{p}_e \Big|_{\frac{D\mathbf{p}_e}{D_{\xi_{ij\dots n}}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \dots \xi_{s_n}} \mathbf{p}_e}; \\ \frac{D^n \mathbf{h}_g}{D_{\xi_{s_1}} D_{\xi_{s_2}} \dots D_{\xi_{s_n}}} &:= s_1 s_2 \dots s_n \mathbf{Z}_g^{(n)} - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta}_{\xi_{ij\dots n}}}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

6.5 Avtomatizacija občutljivostne analize za časovno neodvisen nepovezan problem

Kot je bilo v disertaciji že predstavljeno, je časovno neodvisen nepovezan problem najenostavnejši med različnimi tipi mehanskih problemov. Primarni problem je v tem primeru definiran le z neodvisnim rezidualom, ki je zaradi časovne neodvisnosti odvisen le od vektorja rešitve $\mathbf{p}$ v trenutnem časovnem koraku

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}(\xi), \xi) = \mathbf{0}. \quad (6.56)$$

V primeru, da je problem nelinearen, je konstrukcijo sicer lahko potrebno obremenjevati postopoma, da rešitev konvergira in sledi obtežni poti do končne podane obremenitve. Ker pa je končni rezultat neodvisen od rezultatov prejšnjih korakov analize, je občutljivostno analizo potrebno izvesti le po zaključeni primarni analizi v zadnjem časovnem koraku.

$$\frac{D\mathbf{R}_g}{D_{\xi_i}} = \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D\mathbf{p}_e}{D_{\xi_i}} + \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i}, \quad (6.57)$$

Preuredimo enačbo tako, da prestavimo člen z neznano občutljivostjo $\frac{D\mathbf{p}_e}{D_{\xi_i}}$ na levo stran, preostale pa na desno. Seštejemo prispevke končnih elementov v globalne matrike in vektorje in dobimo zopet sistem linearnih algebrajskih enačb, oblike kot v en. (6.5). V primeru časovno neodvisnih nepovezanih mehanskih problemov se občutljivostni psevdo-

obtežni vektor prvega reda ${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I$ izračuna kot

$${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I = {}^A_e {}^i\tilde{\mathbf{R}}_e^I = {}^A_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g {}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I \right) = {}^A_e \left(\sum_{g=1}^{N_g} w_g \frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i} \right). \quad (6.58)$$

V ADB formulaciji ga izračunamo z enim klicem procedure avtomatskega odvajanja

$${}^i\tilde{\mathbf{R}}_g^I := \left. \frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta} \xi_i} \right|_{\frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i}; \quad (6.59)$$

Za izračun občutljivosti drugega reda odvajamo rezidual po ξ_i in ξ_j in v primeru časovno neodvisnega nepovezanega problema dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^2 \mathbf{p}_e}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (6.60)$$

Preuredimo enačbe tako, da prestavimo člen z neznano občutljivostjo $\frac{D^2 \mathbf{p}_e}{D\xi_i D\xi_j}$ na levo stran enačbe, preostale člene pa na desno stran enačbe. Po seštevanju prispevkov po končnih elementih dobimo zopet sistem linearnih algebrskih enačb, oblike kot v en. (6.26). Prispevek k občutljivostnemu psevdo-obtežnem vektorju drugega reda, izračunan v Gaussovi točki (${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II}$) je v tem primeru

$${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_i} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e^2} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (6.61)$$

in ga z uporabo avtomatskega odvajanja izračunamo z

$${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II} := \left. \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} \xi_j} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta} \xi_i} \right) \right|_{\substack{\frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_i} = D_{\xi_i} \mathbf{p}_e; \\ \frac{Dw}{D\xi_i} = \sqrt{\lambda_i} f_i; \\ \frac{D \mathbf{p}_e}{D\xi_j} = D_{\xi_j} \mathbf{p}_e; \\ \frac{Dw}{D\xi_j} = \sqrt{\lambda_j} f_j;}} \quad (6.62)$$

Za občutljivost višjega reda zaradi boljše razumljivosti zopet uporabimo zapis, predstavljen v poglavju 6.4. Izraz za občutljivosti n -tega reda dobimo tako, da odvajamo rezidual po $\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \dots, \xi_{s_n}$, $s_i \in \{1, 2, \dots, M\}$ in v primeru časovno neodvisnega nepovezanega problema dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e} \frac{D^n \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_{s_1}} \frac{D^{(n-1)} \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_2} D\xi_{s_3} \dots D\xi_{s_n}} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_g}{\partial \mathbf{p}_e \partial \xi_{s_2}} \frac{D^{(n-1)} \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_3} \dots D\xi_{s_n}} + \dots \quad (6.63)$$

Po zdaj že znanem postopku se prvi člen enačbe (6.63), ki vsebuje neznano občutljivost

$\frac{D^n \mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1} D\xi_{s_2} \dots D\xi_{s_n}}$ prestavi na levo stran enačbe, preostali členi pa predstavljajo prispevek v Gaussovi točki k občutljivostnemu psevdo-obtežnemu vektorju n -tega reda. Ob uporabi ADB formulacije občutljivostne analize se te prispevke lahko izračuna z n zaporednimi klici procedure avtomatskega odvajanja.

$$s_1 s_2 \dots s_n \tilde{\mathbf{R}}_g^{(n)} := \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_n}}} \left(\dots \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta}_{\xi_{s_2}}} \left(\frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta}_{\xi_{s_1}}} \right) \right) \begin{matrix} \text{izjeme} \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_1} \end{matrix} \begin{matrix} \text{izjeme} \dots \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_2} \end{matrix} \begin{matrix} \text{izjeme} \\ \text{za} \\ \text{odvod} \\ \text{po } \xi_{s_n} \end{matrix} \quad (6.64)$$

Izjeme, ki jih je tokrat potrebno podati so le hitrostna polja $\frac{Dw}{D\xi_k}$ ter podatki o občutljivostih nižjih redov. Izjeme za prvi, drugi in n -ti red so podane v preglednicah 6.5, 6.6 in 6.7.

Preglednica 6.5: Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_1} .

Table 6.5: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_1} in case of uncoupled and time-independent problem.

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_1}} = \sqrt{\lambda_{s_1}} f_{s_1}$	1
$\mathbf{p}_e$	$\frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{s_1}} = D_{\xi_{s_1}} \mathbf{p}_e$	1

Preglednica 6.6: Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_2} .

Table 6.6: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_2} in case of uncoupled and time-independent problem.

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_2}} = \sqrt{\lambda_{s_2}} f_{s_2}$	1
$\mathbf{p}_e$	$\frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{s_2}} = D_{\xi_{s_2}} \mathbf{p}_e$	1
$D_{\xi_{s_1}} \mathbf{p}_e$	$\frac{D(D_{\xi_{s_1}} \mathbf{p}_e)}{D\xi_{s_2}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2}} \mathbf{p}_e$	1

Preglednica 6.7: Izjeme, ki jih je v primeru nepovezanega in časovno-neodvisnega problema potrebno podati h klicu avtomatskega odvajanja po parametru ξ_{s_n} .

Table 6.7: Exceptions that need to be defined for automatic differentiation with respect to parameter ξ_{s_n} in case of uncoupled and time-independent problem.

Odvajanje spremenljivke	Izjeme	Število izjem
w	$\frac{Dw}{D\xi_{s_n}} = \sqrt{\lambda_{s_n}} f_{s_n}$	1
$\mathbf{p}_e$	$\frac{D\mathbf{p}_e}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_n}} \mathbf{p}_e$	1
$D_{\xi_{s_o}} \mathbf{p}_e$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o}} \mathbf{p}_e)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_n}} \mathbf{p}_e; \quad o = 1, 2, \dots, n-1$	$(n-1)$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} \mathbf{p}_e$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p}} \mathbf{p}_e)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_n}} \mathbf{p}_e;$ $o = 1, \dots, n-2; \quad p = o+1, \dots, n-1;$	$\binom{n-1}{2}$
$D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} \mathbf{p}_e$	$\frac{D(D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q}} \mathbf{p}_e)}{D\xi_{s_n}} = D_{\xi_{s_o} \xi_{s_p} \xi_{s_q} \xi_{s_n}} \mathbf{p}_e;$ $o = 1, \dots, n-3; \quad p = o+1, \dots, n-2;$ $q = p+1, \dots, n-1;$	$\binom{n-1}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-2}}} \mathbf{p}_e$	$\frac{D(D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-2}}} \mathbf{p}_e)}{D\xi_{s_{n-1}}} = D_{\xi_{s_1} \xi_{s_2} \xi_{s_3} \dots \xi_{s_{n-1}}} \mathbf{p}_e$	1

6.6 Elasto-plastični končni element z vgrajeno občutljivostno analizo drugega reda

V tem poglavju je prikazana koda končnega elementa za avtomatizacijo analitične občutljivostne analize prvega in drugega reda za primer elasto-plastičnih problemov z izotropnim utrjevanjem. Končni element je zasnovan za probleme velikih deformacij.

Elasto-plastični problemi spadajo v razred časovno odvisnih povezanih problemov in so v splošnem definirani s funkcijo W , ki definira plastično energijo, funkcijo tečenja f ter enačbami, ki določajo evolucijo plastičnih deformacij $\mathbf{Q}_g$, ki morajo biti v primeru, ko je material v plastičnem stanju, izpolnjene v Gaussovi integracijski točki. V naslednjih vrsticah je na kratko predstavljen diskretizacijski postopek reševanja elasto-plastičnih problemov, za podrobnejši opis primarne analize in avtomatizacije primarne analize elasto-plastičnih problemov, glej Zienkiewicz, 1991, Michaleris, 1994 in Korelc, 2009a.

Kot običajno v mehanskih problemih, tudi pri elasto-plastičnih problemih izhajamo iz standardne šibke oblike ravnotežnih enačb, ki predstavljajo princip virtualnega dela in so

opisane v poglavju 2.2.

$$\int_D \mathbf{P} \delta \mathbf{F} dV - \int_{\partial D} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA = \mathbf{0}. \quad (6.65)$$

Po diskretizaciji enačb po metodi končnih elementov in diskretizaciji časovne domene konstitutivnih enačb dobimo množico povezanih nelinearnih enačb, ki jih moramo rešiti za trenutni časovni korak

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{h}, \mathbf{h}_n) = \mathbf{0} \quad (6.66)$$

$$\mathbf{Q}_g(\mathbf{F}(\mathbf{p}_e), \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}) = \mathbf{0}, \quad (6.67)$$

kjer je $\mathbf{p}$ vektor neznanih posplošenih pomikov v trenutnem časovnem koraku in $\mathbf{h}_g$ vektor spremenljivk stanja materiala v Gaussovi točki v trenutnem časovnem koraku in sicer vsebuje komponente inverza desnega plastičnega Cauchy-Greenovega deformacijskega tenzorja $\mathbf{C}_p^{-1}$ ter akumulirano plastično deformacijo γ : $\mathbf{h}_g = \{C_{p,11}^{-1} - 1, C_{p,22}^{-1} - 1, C_{p,33}^{-1} - 1, C_{p,12}^{-1}, C_{p,13}^{-1}, C_{p,23}^{-1}, \gamma\}$, indeks n pa pomeni, da gre za vektor v prejšnjem časovnem koraku. Kot je razvidno iz enačb (6.66) in (6.67), je glavna razlika v primerjavi z enačbo (2.56) za splošni časovno odvisni povezan problem, da je v primeru elasto-plastičnega problema odziv v trenutnem časovnem koraku neodvisen od neodvisnega vektorja rešitve v prejšnjem časovnem koraku ($\mathbf{p}_n$). Nadalje je pri elasto-plastičnih problemih odvisni residual $\mathbf{Q}_g$ od $\mathbf{p}_e$ odvisen le posredno, preko deformacijskega gradienta $\mathbf{F}$.

Enačba $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{h}, \mathbf{h}_n) = \mathbf{0}$ predstavlja diskretno obliko enačbe (6.65), medtem ko predstavljajo enačbe $\mathbf{Q}_g(\mathbf{F}(\mathbf{p}_e), \mathbf{h}_g, \mathbf{h}_{g,n}) = \mathbf{0}$ množico inkrementnih konstitutivnih enačb v Gaussovi točki z indeksom g , $\mathbf{p}_e$ pa je vektor posplošenih pomikov končnega elementa z indeksom e . Enačbe (6.67) se reši za $\mathbf{h}_g$ ob fiksnem $\mathbf{p}_e$ z uporabo Newton-Raphsonove metode

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_p &:= \mathbf{C}_p(\mathbf{h}_g); \quad \mathbf{b}_e := \mathbf{F} \mathbf{C}_p \mathbf{F}^T; \\ I_1 &:= \text{tr} \mathbf{b}_e; \quad I_3 := \det \mathbf{b}_e; \quad W := \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3 - \ln I_3) + \frac{1}{4} \lambda (I_3 - 1 - \ln I_3); \\ \boldsymbol{\tau} &:= 2 \mathbf{b}_e \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}_e}; \quad \boldsymbol{\tau}' := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} (\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \mathbf{I}; \\ f &:= \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}' \right)^{1/2} - \sigma_y(\gamma); \quad \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}; \\ \mathcal{Z} &:= \mathbf{F} \mathbf{C}_p^{-1} - \exp(-2(\gamma - \gamma_n) \mathbf{n}) \mathbf{F} \mathbf{C}_{p,n}^{-1}; \\ \mathbf{h}_g^{(j)} &= \{C_{p,11}^{-1} - 1, C_{p,22}^{-1} - 1, C_{p,33}^{-1} - 1, C_{p,12}^{-1}, C_{p,13}^{-1}, C_{p,23}^{-1}, \gamma\}; \\ \mathbf{Q}_g^{(j)} &:= \{\mathcal{Z}_{11}, \mathcal{Z}_{22}, \mathcal{Z}_{33}, \mathcal{Z}_{12}, \mathcal{Z}_{13}, \mathcal{Z}_{23}, f\}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

kjer je j indeks trenutne iteracije, $\mathbf{F}$ deformacijski gradient, $\mathbf{C}_p$ in $\mathbf{b}_e$ sta plastični in elastični Cauchy-Greenov tenzor, I_1 in I_3 sta invarianti elastičnega Cauchy-Greenovega tenzorja, μ in λ sta Laméjevi konstanti, $\boldsymbol{\tau}$ je Kirchoffova napetost, $\mathbf{I}$ je enotska matrika, σ_y je napetost na meji tečenja, ki je odvisna od akumulirane plastične deformacije γ , $\mathbf{n}$

je normala na ploskev tečenja v trenutni konfiguraciji, J_g pa je determinanta Jakobijeve matrike preslikave iz referenčnega koordinatnega sistema v globalni koordinatni sistem.

Prav tako se z Newton-Raphsonovo metodo rešuje globalno ravnotežno enačbo (6.66), ki se jo definira v zunanji zanki. Reševanje elasto-plastičnega problema torej poteka z vgnezdjeno iterativno-subiterativno zanko za neznana $\mathbf{p}$ in $\mathbf{h}$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{F} := \mathbf{F}(\mathbf{p}_e); \\
 & f^{trial} := f(\mathbf{F}, \mathbf{h}_{g,n}) \\
 & \text{if } f^{trial} \leq 0 \\
 & \quad \mathbf{h}_g := \mathbf{h}_{g,n} \\
 & \text{else} \\
 & \quad j := 0 \\
 & \quad \mathbf{h}_g^{(0)} := \mathbf{h}_{g,n} \\
 & \quad \text{repeat} \\
 & \quad \quad j := j + 1 \\
 & \quad \quad \text{solve equations (6.68)} \\
 & \quad \quad \mathbf{A}_g^{(j)} := \frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g^{(j)}}{\hat{\delta} \mathbf{h}_g^{(j)}}; \\
 & \quad \quad \Delta \mathbf{h}_g^{(j)} := (\mathbf{A}_g^{(j)})^{-1} \mathbf{Q}_g^{(j)}; \\
 & \quad \quad \mathbf{h}_g^{(j+1)} := \mathbf{h}_g^{(j)} + \Delta \mathbf{h}_g^{(j)}; \\
 & \quad \quad \text{until } \|\Delta \mathbf{h}_g^{(j)}\| < TOL \\
 & \quad \quad \mathbf{h}_g := \mathbf{h}_g \mid \frac{D\mathbf{h}_g}{D\mathbf{F}} = (\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\hat{\delta} \mathbf{Q}_g}{\hat{\delta} \mathbf{F}}); \\
 & \quad \text{end if} \\
 & \mathbf{R}_g := J_g \frac{\hat{\delta} W}{\hat{\delta} \mathbf{p}_e} \bigg|_{\frac{D\mathbf{h}_g}{D\mathbf{F}}=0}; \quad \mathbf{K}_g := \frac{\hat{\delta} \mathbf{R}_g}{\hat{\delta} \mathbf{p}_e}, \tag{6.69}
 \end{aligned}$$

Ko je dosežena konvergenca primarnega problema, se prične z izvajanjem občutljivostne analize prvega reda, kot je predstavljeno v enačbah (6.21), (6.5) in (6.23). Razlika je le v izračunu ${}^i\mathbf{Z}_g$ in $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$, ki se ju z namenom pocenitve postopka reševanja v tem primeru lahko definira glede na to ali je material v trenutnem časovnem koraku v elastičnem ($f^{trial} \leq 0$; v tem primeru gre za nepovezan problem) ali plastičnem stanju ($f^{trial} > 0$). V primeru, ko je material trenutno v elastičnem stanju se občutljivostim odvisnih vektorjev rešitve

$\mathbf{h}_g$ le pripiše občutljivosti iz prejšnjega časovnega koraka.

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{Z}_g &:= \begin{cases} D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n} & f^{trial} \leq 0 \\ -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\delta \mathbf{Q}_g}{\delta \xi_i} & f^{trial} > 0 \end{cases}; \\ \frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i} &:= \begin{cases} {}^i\mathbf{Z}_g & f^{trial} \leq 0 \\ {}^i\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\delta \mathbf{Q}_g}{\delta \xi_i} & f^{trial} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Kot opombo velja zapisati, da se količina ${}^i\mathbf{Z}_g$ v obeh primerih ($f^{trial} > 0$ in $f^{trial} \leq 0$) shrani na mesto, ki je v spominu pripravljeno za občutljivosti $\frac{D\mathbf{h}_g}{D\xi_i}$. V primeru, ko je material v elastičnem stanju, se zato podprogram za izračun občutljivosti odvisnih vektorjev prekine takoj na začetku, ko se prebere podatek o trenutnem stanju materiala in na ta način prihrani nekaj nepotrebnega računanja.

Ko so izračunane vse občutljivosti prvega reda, se lahko prične z izračunom občutljivosti drugega reda, skladno z enačbami predstavljenimi v (6.43), (6.26) in (6.44). Podobno kot pri občutljivostih prvega reda, se tudi tu razlikuje le način izračuna ${}^{ij}\mathbf{Z}_g$ in $\frac{D^2\mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j}$

$$\begin{aligned} {}^{ij}\mathbf{Z}_g &:= \begin{cases} D_{\xi_i \xi_j} \mathbf{h}_{g,n} & f^{trial} \leq 0 \\ -\mathbf{A}_g^{-1} \frac{\delta}{\delta \xi_i} \left(\frac{\delta \mathbf{Q}_g}{\delta \xi_j} \right) & f^{trial} > 0 \end{cases}; \\ \frac{D^2\mathbf{h}_g}{D\xi_i D\xi_j} &:= \begin{cases} {}^{ij}\mathbf{Z}_g & f^{trial} \leq 0 \\ {}^{ij}\mathbf{Z}_g - \mathbf{A}_g^{-1} \frac{\delta \mathbf{Q}_g}{\delta \xi_{ij}} & f^{trial} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.71)$$

6.6.1 Simbolni opis končnega elementa za elasto-plastično občutljivostno analizo drugega reda

V tem poglavju je prikazan simbolni opis končnega elementa, ki omogoča izračun občutljivostne analize drugega reda za elasto-plastičen problem. Opis je napisan za uporabo v programskem sistemu AceGen, ki je bil podrobneje predstavljen v poglavju 3.1. Izbran je 4-vozliščni elasto-plastični končni element, pri katerem je elasto-plastičnost formulirana kot je predstavljeno v poglavju 6.6. Predstavljeni končni element je napisan za primer, ko je s stohastičnim poljem opisana oblika fizikalnega problema, t.j. ko stohastično polje vpliva na koordinate mreže končnih elementov (npr. geometrijska nepopolnost). V primeru, ko je stohastično polje ena izmed spremenljivk, ki se v kodi elementa pojavi eksplicitno (npr. elastični modul, debelina, Poissonov količnik itd.), bi se simbolni opis od prikazanega nekoliko razlikoval v smislu mesta, kjer je stohastično polje povezano s podatkom o odvodu stohastičnega polja po slučajnih spremenljivkah. Naj na tem mestu omenimo, da je možen tudi simbolni zapis končnega elementa, ki bi hkrati omogočal izračun občutljivosti tako za stohastično polje oblike kot za stohastično polje eksplicitnega parametra, vendar je bila za prikaz v disertaciji namenoma izbrana možnost, ko je izračun

občutljivosti prilagojen izključno za stohastično polje oblike. Razlog za takšno odločitev je, da je koda bralcu lažje razumljiva. Razširitev uporabe na preostale tipe spremenljivk pa je ob razumevanju predstavljenega simbolnega zapisa dokaj enostavna. Velikost kode končnega elementa, generiranega v programskem jeziku C, ki ga AceGen avtomatsko generira iz spodaj napisanega simbolnega opisa, je 138 kB.

Podprogram končnega elementa za izračun prispevka k neodvisnemu psevdo-obtežnemu občutljivostnemu vektorju prvega reda

```
<< AceGen`;
SMSInitialize["Q1FiniteStrainSensitivity2Order1",
  "VectorLength" → 10 000, "Environment" → "AceFEM"];
ngh = 5; lgh = ngh + 1 + ngh idata$$["NoSensParameters"];
leh = lgh * es$$["id", "NoIntPoints"];
SMSTemplate["SMSTopology" → "Q1",
  "SMSSymmetricTangent" → False,
  "SMSNoTimeStorage" → leh,
  "SMSPostIterationCall" → True,
  "SMSGroupDataNames" → {"E -elastic modulus", "ν -poisson ration",
    "t -thickness", "σy -initial yield stress", "Kh -hardening coefficient",
    "σyInf -residual flow stress", "δ -saturation exponent", "ρ0 -density",
    "bX -force per unit mass X", "bY -force per unit mass Y"},
  "SMSShapeSensitivity" → True,
  "SMSDefaultData" → {21 000, 0.3, 1, 24, 0, 24, 0, 1, 0, 0},
  "SMSIntSwitch" → Table[0, {maxSensPar (maxSensPar + 3)}]
];
SMSSensitivityNames = SMSGroupDataNames;
```

V SMSInitialize in SMSTemplate se poda ime generiranega končnega elementa, v kakšnem jeziku naj bo generiran in za katero okolje. Nadalje se poda osnovne lastnosti končnega elementa, koliko vozlišč ima, kakšna je topologija elementa, število integracijskih točk za Gaussovo integracijo itd.

```
SMSSStandardModule["Sensitivity pseudo-load"];
ξi ← SMSFictive[]; ξj ← SMSFictive[];
SIndex ← SMSInteger[idata$$["SensIndex"]];
SOrder ← SMSIf[SMSInteger[es$$["IntSwitch", (SIndex - 1) * 2 + 2]] == 0, 1, 2];
{Em, ν, tξ, σy0, Kh, σyInf, δ, ρ0, bX, bY} ←
  Table[SMSReal[es$$["Data", i]], {i, Length[SMSGroupDataNames]};
NoIP ← SMSInteger[es$$["id", "NoIntPoints"]];

SMSDo[Ig, 1, NoIP];
Igh ← SMSInteger[(Ig - 1) lgh];
IgS ← SMSInteger[Igh + ngh + 1 + (SIndex - 1) ngh];
staten ← SMSInteger[ed$$["hp", Igh + ngh + 1]];
state ← SMSInteger[ed$$["ht", Igh + ngh + 1]];
```

Na tem mestu se prične definicija podprograma za izračun ${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I$ ali ${}^{ij}\tilde{\mathbf{R}}^{II}$. Podprogram se bo ob izvajanju kompletne občutljivostne analize (ki se jo v AceFEM-u pokliče z `SMTSensitivity[]`) izvedel tolikokrat, kolikor je vseh odvodov, ki jih želimo izračunati (en. (6.45)). Slučajni spremenljivki ξ_i in ξ_j , po katerih se bodo izrazi odvajali sta podani kot fiktivni spremenljivki, saj služita le za definicijo odvoda po njiju. Preberejo se indeks trenutnega odvoda (`SIndex`, na podlagi indeksa posameznega odvoda se locirajo, shranjujejo in preberejo podatki posamezne občutljivostne analize), trenutni red občutljivostne analize (`SOrder`), eksplicitni parametri (`Em`, ν , $\tau\zeta$...) ter število integracijskih točk končnega elementa (`NoIP`). Trenutni red občutljivostne analize se poda kot vhodni podatek. Z `SMSDo` se prične zanka po integracijskih točkah. Za vsako od integracijskih točk se locira, kje v elementu se v predpripravljenem spominu nahajajo vektorji $\mathbf{h}_g$ in trenutni iskani odvod (`Igh` in `IgS`) ter ali je integracijska točka v elastičnem ali plastičnem stanju.

```

SMSIf[SOrder == 1];
  DKLDξi = Table[SMSReal[nd$$[i, "sX", SIndex, j]],
    {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];
  DhgnDξi = Table[SMSReal[ed$$["hp", IgS + i]], {i, ngh}];

  (*en. (6.17)*)
  Xh = Table[SMSReal[nd$$[i, "X", j], "Dependency" -> {ξi, DKLDξi[[i, j]]},
    {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];
  pe = SMSReal[Table[nd$$[i, "at", j], {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}]];

  (*en. (6.19)*)
  hgn = Table[SMSReal[ed$$["hp", IgS + i],
    "Dependency" -> {ξi, DhgnDξi[[i]]}], {i, ngh}];
  hg = Table[SMSReal[ed$$["ht", IgS + i]], {i, ngh}];
  FuncFEeq[];
  SMSIf[state == 0];
    Zgi = DhgnDξi;
  SMSElse[];
    Ag = SMSD[Qg, hg];
    LU = SMSLUFactor[Ag];

    (*en. (6.20)*)
    Zgi = SMSLUSolve[LU, -SMSD[Qg, ξi]];
  SMSEndIf[Zgi];
  SMSExport[Zgi, Table[ed$$["ht", IgS + i], {i, ngh}]];
  SMSDo[
    Rg = Jgd tζ SMSD[W - ρ0 u.bb, peF, k, "Constant" -> hg];

    (*en. (6.21)*)
    Rgti = SMSD[Rg, ξi, "Dependency" -> {{hg, ξi, Zgi}}];
    SMSExport[wgp Rgti, p$$[k], "AddIn" -> True];
    , {k, 1, 8}];

```

Prikazani del zanke "If" se izvede v primeru, da je trenutni iskani odvod prvega reda. V tem delu programske kode se iz vrednoti prispevek končnega elementa k globalnemu neodvisnemu psevdo-obtežnemu občutljivostnemu vektorju prvega reda ${}^i\tilde{\mathbf{R}}^I$. Komentarji, v katerih so podane povezave enačb v prikazanem simbolnem opisu z enačbami, zapisanimi v disertaciji, so podani v oklepajih z zvezdicami (**komentar**).

V začetnih vrsticah se prebereta podatek o odvodu stohastičnega polja po ξ_i ($\text{DKLD}\xi_i \equiv \sqrt{\lambda_i} f_i$) ter odvod vektorja $\mathbf{h}_{g,n}$ po ξ_i ($\text{DhgnD}\xi_i \equiv D_{\xi_i} \mathbf{h}_{g,n}$). Nato se preberejo prostorske koordinate vozlišč končnega elementa (Xh), vektorji $\mathbf{p}_e$ (pe), $\mathbf{h}_{g,n}$ (hgn) in $\mathbf{h}_g$ (hg). Ob tem so z opcijo "Dependency" podane morebitne izjeme, ki naj se jih upošteva ob avtomatskem odvajanju teh spremenljivk. Sledi klic funkcije `FuncFEeq`, v kateri so definirane interpolacijske funkcije ter konstitutivne in kinematične enačbe, predstavljene v (6.68) in (6.69). Ta del kode je enak ne glede na red občutljivostne analize in zato prikazan posebej kasneje. Sledi izračun količine ${}^i\mathbf{Z}_g$ (Zgi), eksportiranje ${}^i\mathbf{Z}_g$ na mesto, predpripravljeno za $D\mathbf{h}_g/D\xi_i$ ("ht"). Na koncu se z zanko po vseh prostostnih stopnjah izračunajo posamezni prispevki k občutljivostnemu psevdo-obtežnemu vektorju prvega reda (Rgti), ki se jih z `SMSExport` shrani oz. prišteje na ustrezno mesto.

```

SMSElse[];
  SIndexi ← Join[Table[
    SMSInteger[es$$["IntSwitch", (SIndex - 1) * 2 + i]], {i, 2}], {SIndex}];
  IgSi ← Table[SMSInteger[Igh + ngh + 1 + (SIndexi[[i]] - 1) ngh], {i, 2}];
  DKLDξiξj ← Table[SMSReal[nd$$[i, "sX", SIndexi[[k]], j]], {k, 2},
    {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];
  DpeDξiξj ← Table[SMSReal[nd$$[i, "st", SIndexi[[k]], j]], {k, 2},
    {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];

  (*vektor, ki vsebuje tudi en. (6.40)*)
  DhgnDξiξj ← FoldList[Table[SMSReal[ed$$["hp", IgSi[[#2]] + i],
    If[#2 == 1, "Dependency" → {ξj, #1[[i]]}, Sequence@@{}]], {i, ngh}] &,
    Table[SMSReal[ed$$["hp", IgS + i]], {i, ngh}], {1, 2}];
  DhgDξiξj ← Table[SMSReal[ed$$["ht", IgSi[[j]] + i]], {j, 2}, {i, ngh}];

  (*en. (6.35)*)
  Xh ← Table[SMSReal[nd$$[i, "X", j], "Dependency" → {{ξi, DKLDξiξj[[1, i, j]]},
    {ξj, DKLDξiξj[[2, i, j]]}}, {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];

  (*en. (6.36)*)
  pe ← Table[SMSReal[nd$$[i, "at", j], "Dependency" → {{ξi, DpeDξiξj[[1, i, j]]},
    {ξj, DpeDξiξj[[2, i, j]]}}, {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];

  (*en. (6.41)*)
  hgn ← Table[SMSReal[ed$$["hp", Igh + i], "Dependency" →
    {{ξi, DhgnDξiξj[[2, i]]}, {ξj, DhgnDξiξj[[3, i]]}}, {i, ngh}];

  (*en. (6.39)*)
  hg ← Table[SMSReal[ed$$["ht", Igh + i], "Dependency" →
    {{ξi, DhgDξiξj[[1, i]]}, {ξj, DhgDξiξj[[2, i]]}}, {i, ngh}];
  FuncFEeq[];
  SMSIf[state == 0];
    Zgij ← DhgnDξiξj[[1]];
  SMSElse[];
    Ag ← SMSD[Qg, hg];
    LU ← SMSLUFactor[Ag];
    DQgDξi ← SMSD[Qg, ξi];

    (*en. (6.42)*)
    Zgij ← SMSLUSolve[LU, -SMSD[DQgDξi, ξj]];
  SMSEndIf[Zgij];
  SMSExport[Zgij, Table[ed$$["ht", IgS + i], {i, ngh}]];
  SMSDo[
    Rg ← Jgd tξ SMSD[W - ρ0 u.bb, peF, k, "Constant" -> hg];

    (* en. (6.43) *)
    Rgti ← SMSD[SMSD[Rg, ξi], ξj, "Dependency" → {{DhgDξiξj[[1]], ξj, Zgij}}];
    SMSExport[wgp Rgti, p$$[k], "AddIn" -> True];
    , {k, 1, 8}];
  SMSEndIf[];
  SMSEndDo[];

```

Sledi drugi del zanke "If" (SMSElse), ki se izvede v primeru, da je trenutni iskani odvod drugega reda. Tu se v prvih vrsticah prebere indeksa odvodov prvega reda slučajnih spremenljivk ξ_i in ξ_j (SIndexi), ki sta zajeti v trenutnem drugem odvodu ter lokacija rezultatov za občutljivosti prvega reda po teh dveh slučajnih spremenljivkah (IgSi). Nato se preberejo podatki o odvodih stohastičnega polja po ξ_i in ξ_j ($\text{DKLD}\xi_i\xi_j \equiv \{\sqrt{\lambda_i}f_i, \sqrt{\lambda_j}f_j\}$), občutljivosti prvega reda vektorja $\mathbf{p}$ po ξ_i in ξ_j ($\text{DpeD}\xi_i\xi_j \equiv \{D_{\xi_i}\mathbf{p}_e, D_{\xi_j}\mathbf{p}_e\}$), prvi in drugi odvodi vektorja $\mathbf{h}_{g,n}$ po ξ_i in ξ_j ($\text{DhgnD}\xi_i\xi_j \equiv \{D_{\xi_i\xi_i}\mathbf{h}_{g,n}, D_{\xi_i\xi_j}\mathbf{h}_{g,n}, D_{\xi_j\xi_j}\mathbf{h}_{g,n}\}$) ter občutljivosti prvega reda vektorja $\mathbf{h}_g$ po ξ_i in ξ_j ($\text{DhgD}\xi_i\xi_j \equiv \{D_{\xi_i}\mathbf{h}_g, D_{\xi_j}\mathbf{h}_g\}$). Ob tem velja opozoriti, da se v $\text{DhgnD}\xi_i\xi_j$ na mestu, kjer se poda $D_{\xi_i}\mathbf{h}_{g,n}$, z opcijo "Dependency" poda tudi izjema avtomatskega odvajanja $\frac{D(D_{\xi_i}\mathbf{h}_{g,n})}{\xi_j} = D_{\xi_i\xi_j}\mathbf{h}_{g,n}$. Sledi branje prostorskih koordinat vozlišč končnega elementa, vektorjev $\mathbf{p}_e$, $\mathbf{h}_{g,n}$ in $\mathbf{h}_g$, ob čemer se podajo ustrezne izjeme za odvajanje po ξ_i in ξ_j . Sledi definicija konstitutivnih in kinematičnih enačb (FuncFEeq[]) in nato izračun količine $^{ij}\mathbf{Z}_g$ (Zgi j) in prispevka k občutljivostnemu psevdo-obtežnemu vektorju drugega reda $^{ij}\tilde{\mathbf{R}}_g^{II}$ (Rgti), podobno kot pri občutljivostni analizi prvega reda, le da se tu izvede po dve proceduri avtomatskega odvajanja in, kot je predstavljeno v poglavju 6.3, poda ustrezne izjeme.

Podprogram končnega elementa za izračun občutljivosti vektorja rešitve odvisnega problema

```

SMSStandardModule["Dependent sensitivity"];
\xij \+ SMSFictive[];
SIndex \+ SMSInteger[idata$$["SensIndex"]];
NoIP \+ SMSInteger[es$$["id", "NoIntPoints"]];

SMSDo[Ig, 1, NoIP];
Igh \+ SMSInteger[(Ig - 1) lgh];
staten \+ SMSInteger[ed$$["hp", Igh + ngh + 1]];
state \+ SMSInteger[ed$$["ht", Igh + ngh + 1]];
SMSIf[state != 0];
  Xh \+ Table[SMSReal[nd$$[i, "X", j]], {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}];
  pe \+ SMSReal[Table[nd$$[i, "at", j], {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}]];
  {Em, \nu, t\xi, \sigma y0, Kh, \sigma yInf, \delta, \rho0, bX, bY} = Table[
    SMSReal[es$$["Data", i]], {i, Length[SMSGROUPDataNames]};
  hgn \+ Table[SMSReal[ed$$["hp", Igh + i]], {i, ngh}];
  hg \+ Table[SMSReal[ed$$["ht", Igh + i]], {i, ngh}];
  FuncFEeq[];

```

Enako kot podprogram za izračun občutljivosti neodvisnega vektorja rešitve, se tudi podprogram za izračun občutljivosti odvisnega vektorja rešitve med izvajanjem analize pokliče tolikokrat, kolikor je vseh odvodov, ki jih želimo izračunati in sicer se za vsak iskani odvod pokliče najprej podprogram za izračun občutljivosti neodvisnih vektorjev rešitve in nato

še podprogram za izračun občutljivosti odvisnih vektorjev rešitve. Znotraj podprograma se izvede zanka po Gaussovih integracijskih točkah. V primeru da se posamezna točka nahaja v elastičnem stanju, se občutljivostim $D\mathbf{h}_g/D\xi_i$ and $D^2\mathbf{h}_g/D\xi_i D\xi_j$ pripiše vrednost $D\mathbf{h}_{g,n}/D\xi_i$ in $D^2\mathbf{h}_{g,n}/D\xi_i D\xi_j$ v podprogramu za izračun neodvisnih občutljivosti (preko definicije ${}^i\mathbf{Z}_g$ oz. ${}^{ij}\mathbf{Z}_g$) in se zanka za trenutno Gaussovo točko prekine. V nasprotnem primeru se izračun nadaljuje. Oznake, uporabljene na tem delu, so predstavljene pri opisu podprograma za izračun občutljivosti neodvisnega vektorja rešitve.

```

IgS = SMSInteger[Igh + ngh + 1 + (SIndex - 1) ngh];
Ag = SMSD[Qg, hg];
LU = SMSLUFactor[Ag];
Zg = Table[SMSReal[ed$$["ht", IgS + i]], {i, ngh}];
DpeDxi j = Flatten[Table[SMSReal[nd$$[i, "st", SIndex, j]],
  {i, SMSNoNodes}, {j, SMSDOFGlobal[[i]]}]];

(*en. (6.16) oz. (6.34)*)
DhgDxi j = SMSLUSolve[LU,
  -SMSD[Qg, xi j, "Dependency" -> {{Flatten[pe], xi j, DpeDxi j}}]] + Zg;
SMSExport[DhgDxi j, Table[ed$$["ht", IgS + i], {i, ngh}]];
SMSEndIf[];
SMSEndDo[];

```

Prebere se količina $\mathbf{Z}_g$ (ki je bila shranjena v podprogramu za izračun občutljivosti $\mathbf{p}$ in, kot je predstavljeno v prvih treh podpoglavjih tega poglavja, je edina izjema, ki jo je potrebno še podati za izračun občutljivosti vektorja $\mathbf{h}_g$), podatek o odvodu vektorja $\mathbf{p}_e$ po trenutnem občutljivostnem parametru (ali trenutnih občutljivostnih parametrih v primeru drugega reda), ki se je izračunal v prvem delu občutljivostne analize ($DpeDxi j$). Podprogram je, kot je bilo predstavljeno že predhodno, neodvisen od reda odvoda, ki se trenutno računa.

Del programske kode za izračun osnovnih enačb problema

Za popolno sliko o delu kode končnega elementa, v kateri se izvaja občutljivostna analiza, je prav da se prikaže tudi funkcijo `FuncFEeq`, v kateri se izračunajo vse osnovne enačbe problema. V prikazanem končnem elementu so uporabljene enačbe, predstavljene v (6.68) in (6.69), v splošnem pa se na tem mestu lahko poda poljubne materialne zakone, modele utrjevanja itd.

```

FuncFEeq[] := (
  E = {ξ, η, ζ} ⊢ Table[SMSReal[es$$["IntPoints", i, Ig]], {i, 3}];
  bb = {bX, bY, 0};
  Nh = 1 / 4 {(1 - ξ) (1 - η), (1 + ξ) (1 - η), (1 + ξ) (1 + η), (1 - ξ) (1 + η)};
  X ⊢ SMSFreeze[Append[Nh.Xh, ζ]];
  Jg = SMSD[X, E]; Jgd = Det[Jg];
  peF = Flatten[pe]; u = Append[Nh.pe, 0];
  Dg = SMSD[u, X, "Dependency" → {E, X, SMSInverse[Jg]}];
  SMSFreeze[F, IdentityMatrix[3] + Dg, "Ignore" → NumberQ];
  {λ, μ} = SMSHookeToLame[Em, ν];
  wgp ⊢ SMSReal[es$$["IntPoints", 4, Ig]];

  Cgpi = IdentityMatrix[3] +


|         |         |         |
|---------|---------|---------|
| hg[[1]] | hg[[4]] | 0       |
| hg[[4]] | hg[[2]] | 0       |
| 0       | 0       | hg[[3]] |

;

  γ = hg[[5]];
  SMSFreeze[be, F.Cgpi.Transpose[F], "Ignore" → NumberQ, "Symmetric" → True];
  Jbe = Det[be];
  W =  $\frac{1}{2} \mu (\text{Tr}[be] - 3) - \frac{1}{2} \mu \text{Log}[Jbe] + \frac{1}{4} \lambda (Jbe - 1 - \text{Log}[Jbe])$ ;
  SMSFreeze[τ,
    Simplify[2 be.SMSD[W, be, "Ignore" → NumberQ, "Symmetric" → True],
      "Symmetric" → True, "Ignore" → NumberQ];
  s = τ -  $\frac{1}{3}$  IdentityMatrix[3] Tr[τ];
  σγ = (σγ0 + Kh γ + (σγInf - σγ0) (1 - Exp[-δ γ]));
  σMises = SMS.Sqrt[ $\frac{3}{2}$  Total[s s, 2]];
  F = σMises - σγ;



|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| hgn[[1]] | hgn[[4]] | 0        |
| hgn[[4]] | hgn[[2]] | 0        |
| 0        | 0        | hgn[[3]] |

;

  Cgpin = IdentityMatrix[3] +


|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| hgn[[1]] | hgn[[4]] | 0        |
| hgn[[4]] | hgn[[2]] | 0        |
| 0        | 0        | hgn[[3]] |

;

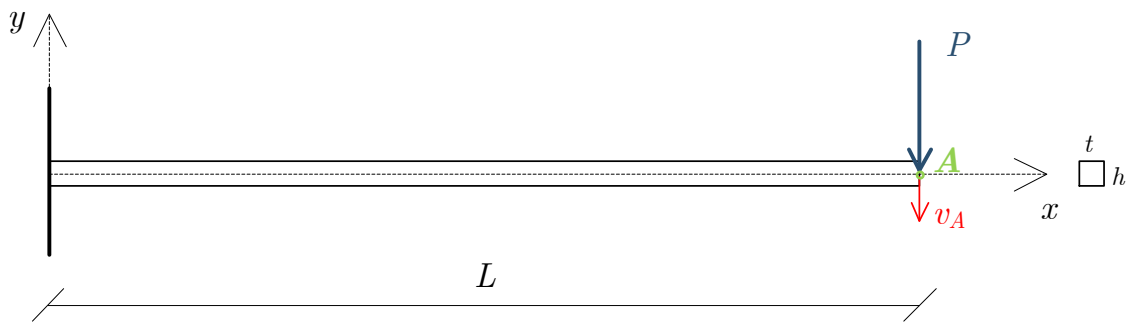
  γn = hgn[[5]];
  A = SMSD[F, τ, "Ignore" → NumberQ, "Symmetric" → True];
  M = -2 (γ - γn) A;
  Z = Simplify[F.Cgpi - SMSMatrixExp[M, "Order" → 4].F.Cgpin];
  Qg = {Z[[1, 1]], Z[[2, 2]], Z[[3, 3]], Z[[1, 2]], F};
)

```

6.7 Izvedba občutljivostne analize v okolju za končne elemente AceFEM

V tem poglavju je predstavljena procedura za izvedbo občutljivostne analize v okolju za končne elemente AceFEM. Za prikaz procedure je izbran primer elastičnega upogiba konzole. Skica primera je prikazana na sliki 6.1, materialni in geometrijski podatki pa so

podani v preglednici 6.8. Izbran je linearno elastičen materialni model. Išče se navpični pomik na prostem robu konzole v_A ter občutljivost pomika v_A na dolžino konzole L ter na višino prečnega prereza konzole h . Zaradi lažjega razumevanja predstavljene procedure računanja občutljivostne analize, parametra L in h nista stohastične narave.



Slika 6.1: Upogib konzole.

Figure 6.1: Bending of cantilever beam.

Preglednica 6.8: Materialni in geometrijski parametri.

Table 6.8: Material parameters and geometry.

E	1000 GPa
ν	0.0
L	1000 mm
h	10 mm
t	10 mm
P	1 kN

Definicija domene, robnih pogojev ter občutljivostnih parametrov

```
<< AceFEM`;
L = 1000; h = 10; t = 10; P = -1; Em = 1000; ν = 0.0;
nx = 25; ny = 1;

SMTInputData[];
SMTAddDomain["Cantilever", "HookeQ2", {"E *" → Em, "ν *" → ν, "t *" → t}];
SMTMesh["Cantilever", "Q2", {nx, ny},
  {{{{0, -h/2}, {L, -h/2}}, {{0, h/2}, {L, h/2}}}}];
SMTAddNaturalBoundary[
  {{Line[{{L, -h/2}, {L, h/2}}], 2 → Line[{P/h]}],
   {Line[{{0, -h/2}, {0, h/2}}], 2 → Line[{-P/h}]}}];
SMTAddEssentialBoundary[{"X" == 0 &, 1 -> 0.}, {"X" == 0 && "Y" == 0 &, 2 -> 0.}];
SMTAddSensitivity[{
  {"L", 0, _ → {2, 1}},
  {"h", 0, _ → {2, 2}},
  {"LL", 0, _ → {1, 0}},
  {"Lh", 0, _ → {1, 0}},
  {"hh", 0, _ → {1, 0}}];
SMTAnalysis[];
SMTDomainData["IntSwitch", dataSensitivityCombinations];
SMTNodeData["sX", δXδξi];
```

V prvih vrsticah se pokliče programski paket AceFEM ter poda vhodne parametre. Domena konzole je diskretizirana z 25 devetvozišničnimi linearno-elastičnimi končnimi elementi. Sledi vnos vhodnih podatkov za primarno in občutljivostno analizo upogiba konzole (SMTAddDomain): ime domene ("Cantilever"), ki ga uporabnik izbere poljubno, končni element ("HookeQ2") in eksplicitni parametri za domeno konzole. Nato se z SMTMesh določi, kako naj bo domena diskretizirana s končnimi elementi. Sledi podatek o obtežbi (SMTAddNaturalBoundary) ter podatek o bistvenih robnih pogojih (SMTAddEssentialBoundary). Seznam občutljivostnih parametrov se poda znotraj ukaza SMTAddSensitivity. Za kompletno občutljivostno analizo drugega reda za 2 občutljivostna parametra je potrebno izračunati skupno 5 odvodov prvega in drugega reda: $\frac{D\mathbf{p}}{DL}$, $\frac{D\mathbf{p}}{Dh}$, $\frac{D^2\mathbf{p}}{DL^2}$, $\frac{D^2\mathbf{p}}{DL Dh}$ in $\frac{D^2\mathbf{p}}{Dh^2}$. Ime za posamezni odvod po občutljivostnih parametrih (v tem primeru "L", "h", "LL"...) izbere uporabnik sam. Z SMTAnalysis se zaključi faza podajanja vhodnih podatkov, v AceFEM-u se pripravijo ustrezne podatkovne strukture in prične se faza analize. Ko so podatkovne strukture pripravljene, je za odvode višjega reda potrebno podati še podatek o lokaciji odvodov nižjega reda (vektor dataSensitivityCombinations) ter podatek o hitrostnem oblikovnem polju ($\delta X \delta \xi_i$). V izbranem računskem primeru predstavlja hitrostno polje odvod prostorskih koordinat po L in odvod prostorskih koordinat po h . Npr. koordinate točke A so $(L, 0)$. Odvod prostorskih koordinat po L je v točki A torej $(1, 0)$, odvod po h pa $(0, 0)$. Na enak

način se izračuna tudi vrednosti odvodov po občutljivostnih parametrih v vseh ostalih vozliščih končnih elementov, pri čemer si z uporabo simbolnega sistema Mathematice zelo olajšamo delo.

Izvedba primarne analize

```
SMTNextStep[1, 1];
While[SMTConvergence[10^-12, 20], SMTNewtonIteration[]];
```

V fazi analize se najprej izvede primarna analiza, v kateri se zahteva natančnost rezultata na 12 decimalk. Za konvergenco primarne analize so potrebne 3 Newton-Raphsonove iteracije.

Izvedba občutljivostne analize

```
SMTNewtonIteration[];
SMTSensitivity[];
```

Nato se izvede še eno Newton-Raphsonovo iteracijo (`SMTNewtonIteration`), da se v njej izvede in razcepi tangentna matrika, ki pripada končnemu vektorju rešitve primarne analize in je torej zahtevane natančnosti. Sledi izvedba občutljivostne analize (`SMTSensitivity`).

Prikaz rezultatov primarne in občutljivostne analize

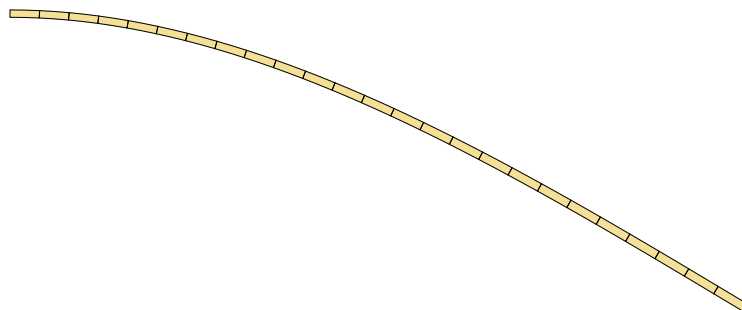
```
vPrimal = SMTNodeData["X" == L && "Y" == 0. &, "at"][[1, 2]]
-399.922

vSens = Partition[SMTNodeData["X" == L && "Y" == 0 &, "st"][[1]], 2][[All, 2]]
{-1.19965, 119.965, -0.00239907, 0.359871, -47.9836}
```

V zgornjih dveh vrsticah se prebere rezultat primarne in občutljivostne analize. `vPrimal` je navpični pomik v točki A, `vSens` pa je seznam občutljivosti, v vrstnem redu kot so podane v vhodnih podatkih s strani uporabnika: $\frac{Dv_A}{DL}$, $\frac{Dv_A}{Dh}$, $\frac{D^2v_A}{DL^2}$, $\frac{D^2v_A}{DL Dh}$ in $\frac{D^2v_A}{Dh^2}$. Na sliki 6.2 je prikazana deformirana konzola. Slika 6.3 prikazuje konture občutljivosti

navpičnega pomika preko celotne konzole v odvisnosti od dolžine konzole (L) in višine prečnega prereza (h).

SMTShowMesh["DeformedMesh" → True]



Slika 6.2: Skica deformirane konzole.
Figure 6.2: Deformed cantilever beam.

Primerjava rezultatov s hipotezo Bernoullijeve grede

Na tem mestu je zanimivo podati primerjavo rezultatov analize, izvedene z metodo končnih elementov ter rezultatov, ki bi jih dobili analitično ob predpostavkah Bernoullijeve grede, ter še nekaterih poenostavitvah. Ob predpostavki Bernoullijeve grede je pomik v_A v točki A za dani primer enak $\frac{PL^3}{3EI}$. Ob tem so upoštevane naslednje predpostavke in poenostavitve:

- material je idealno elastičen
- obtežba deluje v ravnini okvirja,
- geometrija prereza je simetrična glede na ravnino okvirja
- preprečene so lokalne nestabilnosti prereza
- prečni prerezi ostanejo ravni tudi po deformiranju
- deformacije in zasuki so majhni
- upogibna togost (EI) je konstantna vzdolž prereza

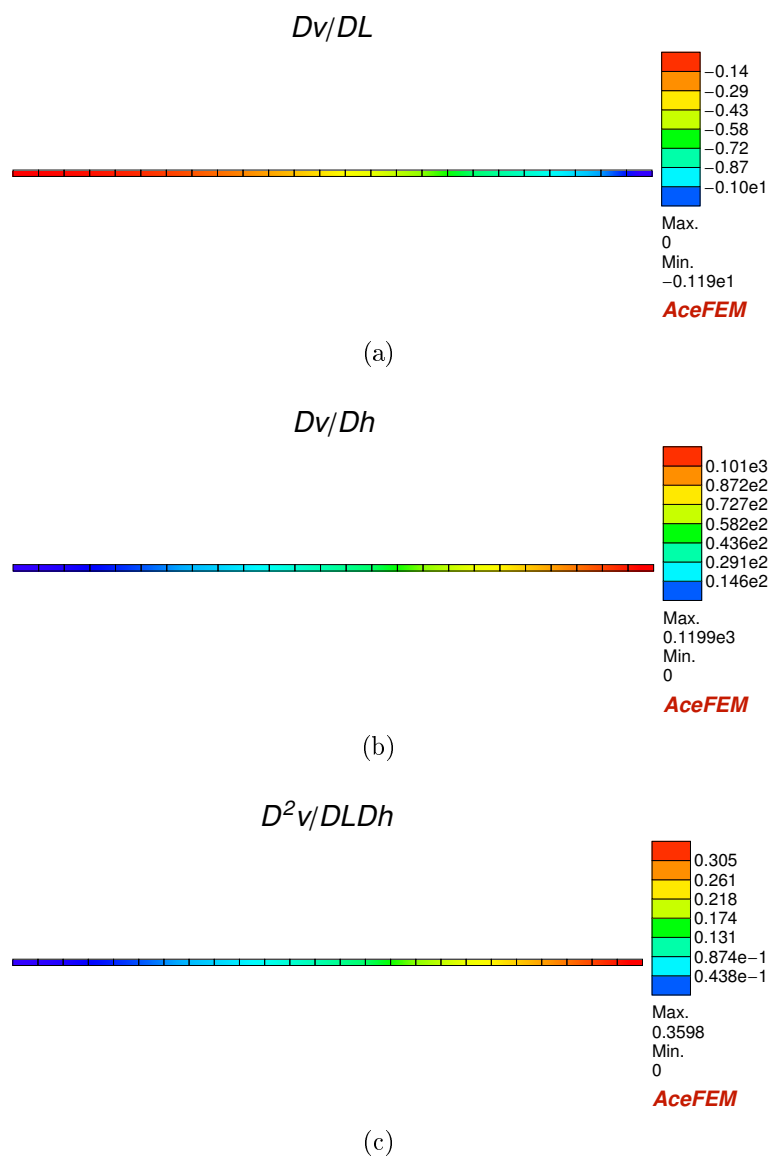
Primerjava rezultatov za Bernoullijevo gredo ob uporabi metode končnih elementov je prikazana v preglednici 6.9. Konstitutivne in kinematične enačbe končnih elementov, uporabljenih v prikazani analizi z metodo končnih elementov, so taki, da so v njih upoštevane vse predpostavke, ki veljajo za Bernoullijevo gredo, edina razlika je ta, da je Bernoullijeva greda izpeljana ob predpostavki, da prerez tudi po deformiranju ostane

raven, medtem ko je v metodi končnih elementov prerez po defomiranju dejansko približno raven zaradi narave problema. Druga razlika je, da je v metodi končnih elementov problem dvodimenzionalen, medtem ko so enačbe Bernoullijeve grede izpeljane za enodimenzionalen problem. Da zaradi tega ne pride do razlik, je v modelu nosilca v AceFEM-u potrebno podati ustrezne robne pogoje (bistvene in naravne) ter privzeti da je Poissonov količnik enak 0. Točnost rezultatov metode končnih elementov je ob uporabi ustreznega materialnega in kinematičnega modela odvisna predvsem od diskretizacije problema. Zaradi tega so med analitičnimi rezultati za Bernoullijevo gredo in rezultati, dobljenimi z metodo končnih elementov, majhne razlike. Vendar se kljub relativno redki mreži končnih elementov rezultati ujemajo vsaj na tri decimalna mesta. Razlika bi se z gostenjem mreže končnih elementov še zmanjšala.

Preglednica 6.9: Primerjava rezultatov metode končnih elementov (MKE) in Bernoullijeve grede.

Table 6.9: Comparison of the results of finite element method (MKE) and Bernoulli beam.

	Bernoullijeve grede	MKE
v	−400 mm	−399.92 mm
$\frac{Dv}{DL}$	−1.2	−1.1997
$\frac{Dh}{Dv}$	120	119.97
$\frac{D^2v}{DL^2}$	$−2.4 \times 10^{-3}$	$−2.3991 \times 10^{-3}$
$\frac{D^2v}{DL^2}$	0.36	0.35987
$\frac{D^2v}{Dh^2}$	−48	−47.98



Slika 6.3: Občutljivost navpičnega pomika konzole v odvisnosti od dolžine konzole in višine prečnega prereza konzole: (a) Dv/DL , (b) Dv/Dh in (c) $D^2v/DLDh$.

Figure 6.3: Sensitivity of vertical displacement of cantilever beam in dependence of beam length and cross section height: (a) Dv/DL , (b) Dv/Dh in (c) $D^2v/DLDh$.

7 Računski primeri

7.1 Nelinearna analiza z upoštevanjem stohastične začetne geometrijske nepopolnosti.

7.1.1 Začetna geometrijska nepopolnost

Kot je znano, idealne, geometrijsko popolne konstrukcije v naravi ne obstajajo. Vedno je prisotna neka nepravilnost, ki nastane bodisi med procesom proizvodnje (npr. hladno ali vroče valjanje jeklenih profilov), bodisi je prisotna v materialu samem (npr. razpoke) ali pa se pojavi zaradi različnih zunanjih vplivov (npr. neenakomernosti v nanosu obtežbe). V računskih primerih v nadaljevanju se bomo omejili na geometrijsko nepopolnost v smislu začetne neravnosti elementov. Takšne geometrijske nepopolnosti imajo velik vpliv predvsem na stabilnost tankostenskih konstrukcij. Obstajata dve možnosti determinističnega pristopa določitve vpliva nepopolnosti in sicer da se direktno določi najbolj neugodna oblika nepopolnosti (Kristanič, 2008) ali kot predlagajo evropski standardi (Evrokodi), da se za vsak primer smiselno razišče prostor možnih nepopolnosti in znotraj tega poišče najbolj neugodno nepopolnost. Prva metoda lahko da zelo konservativne rezultate, ki niso realni, saj so nepopolnosti omejene tudi v tehnoloških procesih, verjetnost ekstremne nepopolnosti pa je majhna. Drugi pristop pa je zaradi subjektivne izbire oblike nepopolnosti nezanesljiv, saj se na ta način vpliv nepopolnosti lahko podceni. Zaradi tega je stohastični pristop k modeliranju geometrijskih nepopolnosti bolj primeren. V literaturi mu je bilo posvečenih že veliko študij, npr. Schenk in Schuëller, 2003, Kala, 2007, Papadopoulos in Lagaros, 2009. Zaradi narave reševanja stabilnostnega problema (npr. s problemom začetne nestabilnosti ali nelinearno stabilnostno analizo) je implementacija poenostavitvev (npr. z uporabo polinomskega kaosa ali perturbacijske metode) precej zahtevnejša in študije na tem področju večinoma uporabljajo simulacije Monte Carlo.

7.1.2 Upogib sinusoidnega panela

V tem poglavju je predstavljen računski primer obojestransko vpetega sinusoidnega strešnega panela s stohastičnimi geometrijskimi nepopolnostmi. Panel je na zgornji in spodnji strani obdan z jekleno pločevino, na sredini pa zapolnjen z izolacijsko peno. Za modeliranje panela smo izbrali dvodimenzionalne 4-vozlíščne končne elemente, ki omogočajo velike deformacije. Za interpolacijo pomikov in geometrije so uporabljene izoparametrične funkcije. Globalne neznanke problema so pomiki v vozlíščih končnih elementov in sicer

ima vsako vozlišče dve prostostni stopnji (pomika v smeri globalnih koordinatnih osi). Podroben opis modeliranja takšnih končnih elementov je npr. v Zienkiewicz in Taylor (1991). Privzet je hiperelastični materialni model, definiran z Neo-Hookovo potencialno energijo

$$W = \int_D \left(\frac{\lambda}{2} (\det(\mathbf{F}) - 1)^2 + \mu \left[\frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) - 3) - \log(\det(\mathbf{F})) \right] \right) dV, \quad (7.1)$$

kjer sta λ in μ Lamjevi elastični konstanti, $\mathbf{F}$ je deformacijski gradient in D fizikalna domena problema.

Izolacijska pena v sredini panela je diskretizirana z mrežo 120×4 končnih elementov, za vsako izmed pločevin na obodu panela pa je uporabljena diskretizacijska mreža 120×2 končnih elementov.

Geometrijsko idealen panel ima vzdolž abscisne osi obliko sinusoidne funkcije

$$f_p(x) = \frac{\bar{h}_{val}}{2} \sin\left(n_{val} \frac{\pi x}{L}\right), \quad (7.2)$$

kjer je $\bar{h}_{val}$ pričakovana vrednost amplitude vala, L je dolžina panela in n_{val} število polvalov vzdolž dolžine L . V modelu je privzeto, da oblika panela v resnici ni idealna, temveč se amplituda valov stohastično spreminja. Ker je sprememba amplitude valov naključna, je modelirana z enodimenzionalnim stohastičnim poljem vzdolž osi x . Izbrana je kovariančna funkcija C_A . Stohastično polje je diskretizirano s štirimi členi K-L vrste $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$

$$h_{val}(x, \theta) = \bar{h}_{val}(x) + \sum_{k=1}^4 \sqrt{\lambda_k} f_k(x) \xi_k(\theta). \quad (7.3)$$

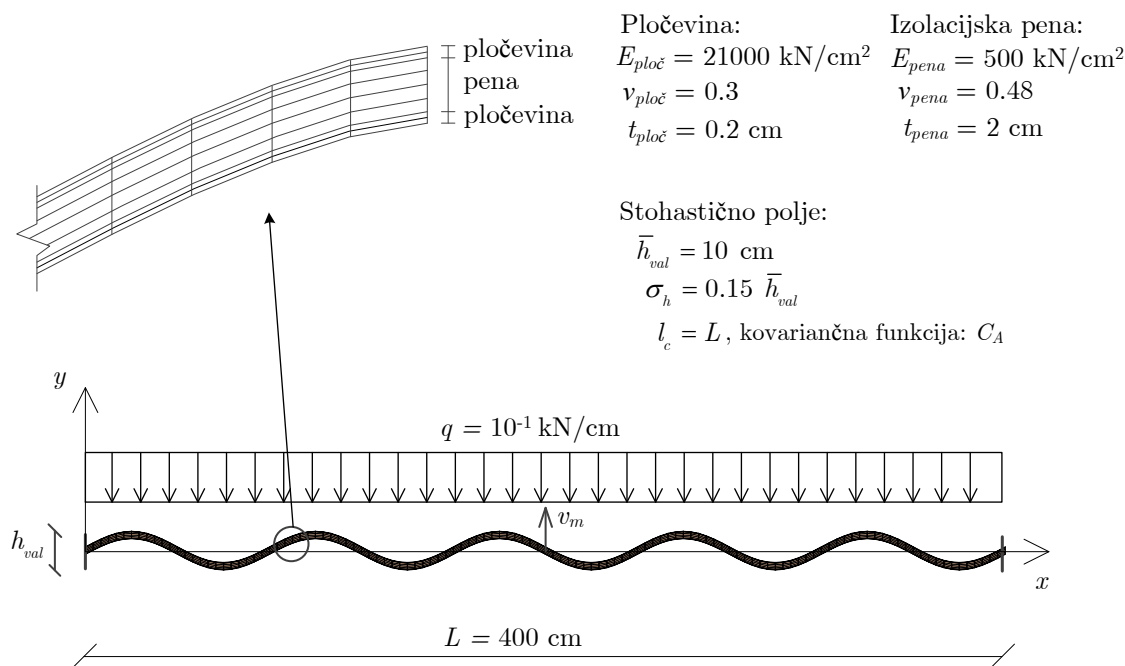
Zanima nas navpični pomik v_m v sredini panela v odvisnosti od stohastičnega polja. Odziv konstrukcije je izračunan s

- *perturbacijsko metodo 1., 2., 3. in 4. reda*, odvodi v Taylorjevi vrsti so izračunani z
 - *ADB formulirano analitično občutljivostno analizo*,
 - *simbolno občutljivostno analizo* in
 - *metodo končnih diferenc* ter
- *simulacijami Monte Carlo*, v okviru katere je bilo izvedenih 1000 in 50000 simulacij.

Rezultat analize je razvoj navpičnega pomika v_m v sredini panela v Taylorjevo vrsto j -tega reda, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Razvoj v Taylorjevo vrsto j -tega reda pomeni, da je potrebno izračunati tiste člene v enačbi (2.57), pri katerih je vsota eksponentov $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ manjša ali enaka j .

$$v_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_4) = \sum_{l_1=0}^{s_1} \sum_{l_2=0}^{s_2} \sum_{l_3=0}^{s_3} \sum_{l_4=0}^{s_4} \frac{1}{l_1!l_2!l_3!l_4!} \cdot \left. \frac{\partial^{l_1+l_2+l_3+l_4} p_m}{\partial \xi_1^{l_1} \partial \xi_2^{l_2} \partial \xi_3^{l_3} \partial \xi_4^{l_4}} \right|_{\xi_i = 0, \dots, \xi_i, i=1, \dots, 4} \cdot \xi_1^{l_1} \cdot \xi_2^{l_2} \cdot \xi_3^{l_3} \cdot \xi_4^{l_4} \quad (7.4)$$

kjer je p_m komponenta vektorja $\mathbf{p}$ in sicer prostostna stopnja na mestu in v smeri v_m . Skica modela, geometrijske in materialne karakteristike panela, obtežba panela ter lastnosti stohastičnega polja so prikazane na sliki 7.1.



Slika 7.1: Sinusoidna panelna plošča.
Figure 7.1: Sinusoidal double skin cladding.

Diskretizacija stohastičnega polja v K-L vrsto

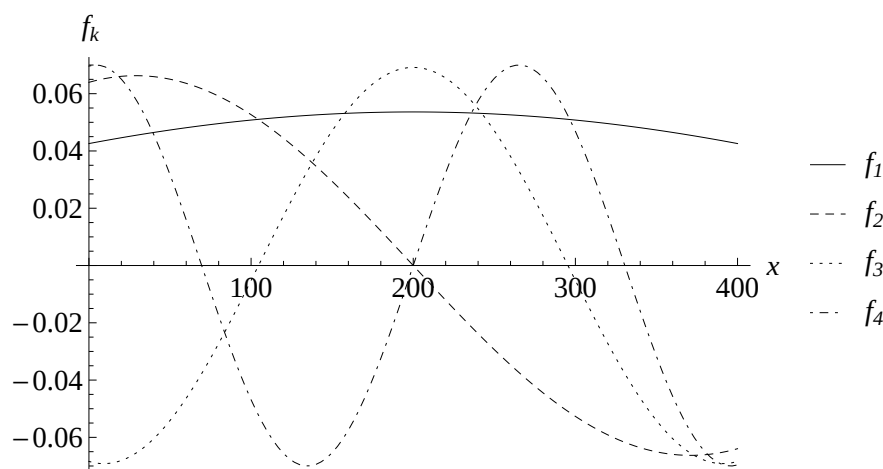
Za izračun lastnih vrednosti in lastnih funkcij za opis stohastičnega polja spremembe amplitude valov je enodimenzionalna domena dolžine $L = 400 \text{ cm}$ razdeljena na 120 poddomen, tako da se koordinate vozlišč ujemajo s koordinatami panela v vzdolžni smeri. Poddome ne so nato, kot je opisano v poglavju 4.1, kombinirane v 7260 2×2 -vozliščnih stohastičnih končnih elementov. V podprogramih stohastičnih končnih elementov se izračunata in sestavita matriki $\mathbf{N}$ in $\mathbf{C}$ ter integral produkta lastnih funkcij I_{fk} . Izračun lastnih vrednosti in lastnih vektorjev posplošenega problema lastnih vrednosti je izveden v Mathematici. Velikost sistema je v danem računskem primeru dovolj majhna, da uporaba posebnih algoritmov (npr. Arnoldijevega) za rešitev sistema nima posebnega ugodnega učinka na računski čas. Dobljene lastne vrednosti so zapisane v preglednici 7.1, lastne funkcije pa so prikazane na sliki 7.2. Varianca diskretiziranega stohastičnega polja

z upoštevanimi 4 členi K-L vrste doseže, izračunano po enačbi (2.34), 94,3 % dejanske variance.

Preglednica 7.1: Prve štiri lastne vrednosti K-L vrste stohastičnega polja spremembe amplitude.

Table 7.1: First four eigenvalues of stochastic field of amplitude change.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
664.9	124.2	40.6	19.2



Slika 7.2: Prve štiri lastne funkcije K-L vrste stohastičnega polja spremembe amplitude.

Figure 7.2: First four eigenfunctions of K-L decomposition of stochastic field of amplitude change.

Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode

Kot je razloženo v poglavju 2.3, vsaka izmed treh primerjanih metod, simbolna občutljivostna analiza, ADB formulacija občutljivostne analize in metoda končnih diferenc vodi teoretično do istega rezultata, različen je le način, kako se do tega rezultata pride in numerična natančnost rezultata zaradi zaokrožitvenih napak. Obravnavani hiperelastični problem upogiba panela sodi v razred nepovezanih in časovno neodvisnih problemov. Ker je problem nelinearen (hiperelastičen material, geometrijska nelinearnost), izberemo naj se konstrukcija obremenjuje postopoma, v 4 korakih, v katerih se obtežba enakomerno dodaja na konstrukcijo.

Postopek izračuna analitične občutljivostne analize za nepovezane in časovno neodvisne problemov je opisan v poglavju 6.5. Najprej je potrebno izvesti celotno primarno analizo. Sledi dodatna Newton-Raphsonova iteracija, v kateri se iz vrednoti in razcepi tangenta matrika, ki pripada končnemu vektorju rešitve primarne analize in je torej zahtevane natančnosti. Na koncu se izvede še občutljivostna analiza, v kateri se za vsak iskani odvod pokliče podprogram za izračun občutljivosti vektorja rešitve.

Simbolna občutljivostna analiza se rešuje po postopku, predstavljenem v poglavju 2.3.2. Najprej se izvede celotno primarno analizo (za izračun se uporabi CDriver). Rezultat primarne analize se označi s $\mathbf{p}_{0000}$. V drugem delu se K-L vrsto za stohastično polje amplitude valov (enačba (7.3)) kot vhodni podatek vnese v simbolni obliki. Konvergirana rešitev ničelnih koeficientov $\mathbf{p}_{0000}$ se nato uporabi v rekurzivni enačbi izračuna členov vrste. Pri tem je uporabljen modul MDriver, ki omogoča simbolno računanje. Da dobimo koeficiente Taylorjeve vrste želene natančnosti, so v primeru Taylorjeve vrste 1. reda potrebne 3 iteracije, v primeru Taylorjevih vrst 2., 3. in 4. reda pa 4 iteracije.

Tretja primerjana metoda za izračun koeficientov $(\partial^{l_1+l_2+\dots+l_M}\mathbf{p})/(\partial\xi_1^{l_1}\partial\xi_2^{l_2}\dots\partial\xi_M^{l_M})$ je metoda končnih diferenc. Uporabljen je bil algoritem za izboljšanje numerične učinkovitosti metode, predlagan v Press et al. 1988. S to metodo so bile za izračun vsakega koeficienta potrebne 3 do 4 iteracije.

Ker so rezultati občutljivostne analize in metode končnih diferenc vrednosti odvodov, je za izračun koeficientov Taylorjeve vrste le-te nato potrebno še faktorirati skladno z enačbo (2.57). Končni rezultat vseh treh metod je navpični pomik v_m v sredini panela, razvit v Taylorjevo vrsto. V primeru perturbacijske metode 4. reda je le-ta

$$\begin{aligned}
 v_m = & -4.1374 - 0.0475\xi_1 + 0.0258\xi_2 - 7.33571 \cdot 10^{-4}\xi_3 + 0.0123928\xi_4 - 0.0044\xi_1\xi_2 \\
 & - 4.1046 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_3 - 0.0021\xi_1\xi_4 + 0.0107\xi_1^2 + 2.6483 \cdot 10^{-4}\xi_2^2 + 9.9333 \cdot 10^{-5}\xi_3^2 \\
 & + 8.2655 \cdot 10^{-6}\xi_2\xi_3 + 6.4607 \cdot 10^{-4}\xi_2\xi_4 + 1.5595 \cdot 10^{-5}\xi_3\xi_4 + 4.4429 \cdot 10^{-4}\xi_1^2\xi_2 \\
 & + 6.11575 \cdot 10^{-5}\xi_1^2\xi_3 + 2.1704 \cdot 10^{-4}\xi_1^2\xi_4 + 3.7587 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_2^2 + 4.0418 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2\xi_3 \\
 & + 3.13935 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_2\xi_4 + 1.5326 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_3^2 + 3.1572 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_3\xi_4 + 5.8069 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_4^2 \\
 & - 6.0855 \cdot 10^{-5}\xi_2^3 - 3.7925 \cdot 10^{-5}\xi_2^2\xi_3 - 3.7396 \cdot 10^{-5}\xi_2^2\xi_4 - 2.1958 \cdot 10^{-5}\xi_2\xi_3^2 \\
 & - 3.0418 \cdot 10^{-5}\xi_2\xi_3\xi_4 - 1.4887 \cdot 10^{-5}\xi_2\xi_4^2 - 1.8606 \cdot 10^{-6}\xi_3^3 - 1.16568 \cdot 10^{-5}\xi_3^2\xi_4 \\
 & - 3.3519 \cdot 10^{-6}\xi_3\xi_4^2 - 4.6682 \cdot 10^{-6}\xi_4^3 + 4.4610 \cdot 10^{-5}\xi_1^4 - 3.6040 \cdot 10^{-5}\xi_1^3\xi_2 \\
 & - 1.0521 \cdot 10^{-5}\xi_1^3\xi_3 - 1.7849 \cdot 10^{-5}\xi_1^3\xi_4 - 7.0517 \cdot 10^{-5}\xi_1^2\xi_2^2 + 2.0131 \cdot 10^{-6}\xi_1^2\xi_2\xi_3 \\
 & - 2.6807 \cdot 10^{-6}\xi_1^2\xi_2\xi_4 - 2.3347 \cdot 10^{-5}\xi_1^2\xi_3^2 + 7.2403 \cdot 10^{-7}\xi_1^2\xi_3\xi_4 - 1.0922 \cdot 10^{-5}\xi_1^2\xi_4^2 \\
 & + 1.7933 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_2^3 + 6.0802 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2^2\xi_3 + 8.1962 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2^2\xi_4 + 5.1016 \cdot 10^{-7}\xi_1\xi_3^3 \\
 & + 5.2757 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2\xi_3^2 - 8.4714 \cdot 10^{-7}\xi_2^3\xi_4 + 2.5493 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2\xi_4^2 + 8.7293 \cdot 10^{-8}\xi_3^4 \\
 & + 2.5529 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_3^2\xi_4 + 6.5148 \cdot 10^{-7}\xi_1\xi_3\xi_4^2 + 1.3467 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_4^3 + 9.7453 \cdot 10^{-7}\xi_2^4 \\
 & + 3.7407 \cdot 10^{-7}\xi_2^3\xi_3 + 8.6596 \cdot 10^{-5}\xi_4^2 - 4.6377 \cdot 10^{-4}\xi_1^3 + 4.3179 \cdot 10^{-6}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 \\
 & + 3.9264 \cdot 10^{-8}\xi_2^2\xi_3^2 + 6.5061 \cdot 10^{-7}\xi_2^2\xi_3\xi_4 - 5.7785 \cdot 10^{-8}\xi_2^2\xi_4^2 + 1.2579 \cdot 10^{-7}\xi_2\xi_3^3 \\
 & - 7.8429 \cdot 10^{-7}\xi_2\xi_3^2\xi_4 + 2.8047 \cdot 10^{-7}\xi_2\xi_3\xi_4^2 - 1.3763 \cdot 10^{-7}\xi_2\xi_4^3 + 2.7094 \cdot 10^{-8}\xi_3^3\xi_4 \\
 & - 5.6309 \cdot 10^{-8}\xi_3^2\xi_4^2 + 4.3562 \cdot 10^{-8}\xi_3\xi_4^3 + 1.5761 \cdot 10^{-8}\xi_4^4
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

V primeru perturbacijske metode reda nižjega od 4, je rezultat enak kot je prikazan v

(7.5), le da v izrazu ni členov, pri katerih je vsota potenc slučajnih spremenljivk višja od reda perturbacijske metode.

Primerjava numerične učinkovitosti različnih metod

V preglednici 7.2 je prikazan računski čas potreben za perturbacijsko metodo različnih redov ob uporabi različnih metod, s katerimi so računani koeficienti Taylorjeve vrste. Izračuni so bili izvedeni na računalniku z Intelovim procesorjem i7-950 (3.07 GHz), z 12 GB RAM-a, 4 jedri in 8 nitmi. Merjen je izključno čas analize, potreben za izračun vseh členov Taylorjeve vrste odziva konstrukcije. Prvi del analize - izračun K-L členov je za vse tri metode enak. Čas, potreben za izračun K-L vrste je 0.04 s. Kot je razvidno iz primerjav časov, je razvita ADB formulirana občutljivostna analiza časovno neprimerno hitrejša od vseh ostalih metod.

Preglednica 7.2: Računski CPU čas, potreben za izračun razvoja odziva konstrukcije v vrsto (pomen oznak: PA - primarna analiza, OA - občutljivostna analiza, metoda KD - metoda končnih diferenc).

Table 7.2: CPU time needed for calculation of the response (abbreviations: PA - primal analysis, OA - sensitivity analysis, metoda KD - finite difference method).

Perturbacijska metoda 1. reda					
	Simbolna OA		ADB OA		Št. odvodov
	CDriver	0.11 s	PA	0.11 s	4
	MDriver	3464 s	OA	0.02 s	
Skupni čas	3464 s		0.13 s		2.64 s

Perturbacijska metoda 2. reda					
	Simbolna OA		ADB OA		Št. odvodov
	CDriver	0.11 s	PA	0.11 s	14
	MDriver	24106 s	OA	0.17 s	
Skupni čas	24106 s		0.28 s		14.22 s

Perturbacijska metoda 3. reda					
	Simbolna OA		ADB OA		Št. odvodov
	CDriver	0.11 s	PA	0.11 s	34
	MDriver	77607 s	OA	0.83 s	
Skupni čas	77607 s		0.94 s		62.19 s

Perturbacijska metoda 4. reda					
	Simbolna OA		ADB OA		Št. odvodov
	CDriver	0.11 s	PA	0.11 s	69
	MDriver	200984 s	OA	5.12 s	
Skupni čas	200984 s		5.23 s		173.24 s

Primerjava z metodo Monte Carlo

Za oceno natančnosti perturbacijske metode, so bile izvedene še simulacije Monte Carlo in sicer 2 seriji z različnim številom simulacij, 1000 in 50000. V preglednici 7.3 je podana primerjava pričakovane vrednosti $\bar{v}_m$ in standardne deviacije σ_{v_m} navpičnega pomika v_m , dobljenega s perturbacijsko metodo prvega, drugega, tretjega in četrtega reda.

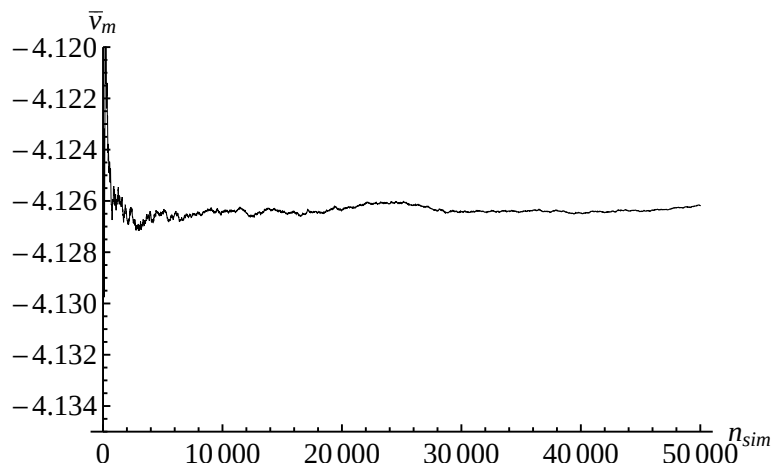
Izvedba različnih števil ponovitev simulacij Monte Carlo je bila izbrana predvsem zato, da se pokaže, da je za konvergenco simulacij Monte Carlo potrebno veliko število simulacij, vkolikor se želi doseči da je nabor naključno izbranih slučajnih spremenljivk res tolikšen, da predstavlja statistično tipično množico. Čeprav deluje 1000 simulacij na pogled kar veliko število ponovitev, pa se izkaže, da se rezultati predvsem za σ_{v_m} občutno razlikujejo od tistih, h katerim metoda konvergira, ko se uporabi večje število simulacij. Kar potrjuje tudi grafa na slikah 7.3 in 7.4. Iz grafov je razvidno, da se v izvedenih simulacijah za dani računski primer prične pričakovana vrednost ustaljevati po približno 5000 simulacijah Monte Carlo, standardna deviacija pa šele po približno 30000 simulacijah Monte Carlo. Primerjava rezultatov perturbacijske metode z večjim številom simulacij Monte Carlo nam da informacijo, v kolikšni meri vpliva red perturbacijske metode na natančnost rezultatov. Primerjava rezultatov pokaže, da zaradi nelinearnosti odziva perturbacijska metoda drugega in višjih redov v tem primeru pomembno vpliva na natančnost rezultatov.

Preglednica 7.3: Pričakovana vrednost ($\bar{v}_m$) in standardna deviacija (σ_{v_m}) navpičnega pomika v_m v cm ter skupni CPU čas, potreben za izračun odziva.

Table 7.3: Expected value ($\bar{v}_m$) and standard deviation (σ_{v_m}) of the vertical displacement v_m in cm and total CPU time, needed to calculate the response of the cladding.

	Perturbacijska metoda (ADB formulacija)				Monte Carlo	
	1. reda	2. reda	3. reda	4. reda	10 ³ sim.	5 · 10 ⁴ sim.
$\bar{v}_m$	-4.137	-4.126	-4.126	-4.126	-4.128	-4.126
σ_{v_m}	0.0555	0.0577	0.0585	0.0586	0.0571	0.0588
Skupni (CPU) čas	0.13 s	0.28 s	0.94 s	5.23 s	112 s	5604 s

Na sliki (7.5) so prikazani rezultati perturbacijske metode prvega, drugega, tretjega in četrtega reda ter prvih 100 simulacij Monte Carlo za primer, ko je obdržan le prvi člen K-L dekompozicije (t.j. ostane le slučajna spremenljivka ξ_1 , ostale slučajne spremenljivke so $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$). Prikazanih je le prvih 100 simulacij Monte Carlo zaradi boljše preglednosti diagrama. Rezultati občutljivostne analize prvega, drugega, tretjega in četrtega reda so primerjani z rezultati simulacij Monte Carlo. Kot je razvidno na sliki, perturbacijska metoda prvega reda opiše odziv konstrukcije dobro le v neposredni bližini pričakovane vrednosti. Perturbacijska metoda drugega reda se rezultatom simulacij Monte Carlo približa že znatno bolje in odziv opiše na videz dobro do oddaljenosti slučajne spremenljivke 1.5 standardne deviacije od pričakovane vrednosti. Perturbacijski metodi tretjega in če-



Slika 7.3: Povprečna vrednost pomika na sredini panela $\bar{v}_m$ v odvisnosti od števila simulacij Monte Carlo.

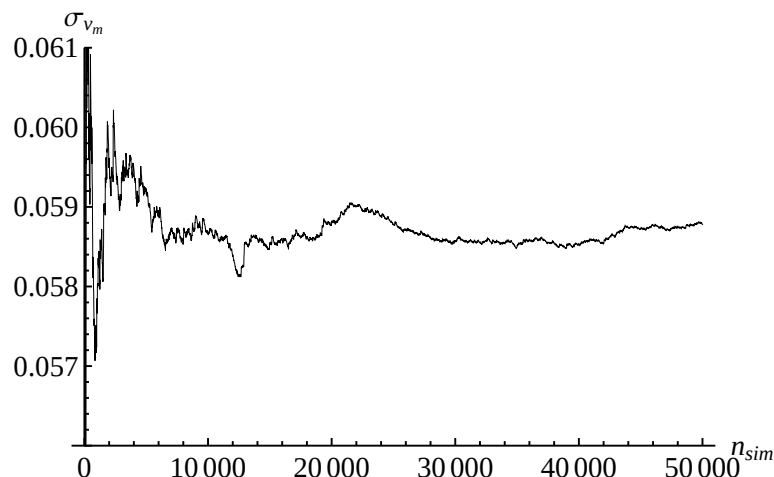
Figure 7.3: Mean deflection in the middle of cladding $\bar{v}_m$ in dependence on the number of Monte Carlo simulations.

trtega reda se na območju 3 standardnih deviacij v okolici pričakovane vrednosti že zelo dobro ujemata z dejanskim odzivom, ki je izračunan z metodo Monte Carlo.

Iz prikazanega računskega primera lahko zaključimo, da perturbacijska metoda višjega reda, izračunana z ADB formulirano občutljivostno analizo višjega reda, izkaže veliko prednosti v primerjavi z ostalimi metodami za izračun odvodov (simbolna občutljivostna analiza in metoda končnih diferenc) in statistike odziva konstrukcije (metoda Monte Carlo). Računski čas je namreč za nekaj velikostnih redov krajši v primerjavi z ostalimi metodami. Perturbacijska metoda višjega reda pa izračuna zelo natančne rezultate in odziv konstrukcije opiše zelo dobro tudi v širši okolici odziva.

7.1.3 Ciklično obremenjevanje jeklene epruvete

Obravnavan je problem cikličnega elasto-plastičnega obremenjevanja jeklene epruvete s stohastično začetno geometrijsko nepopolnostjo. Primer cikličnega obremenjevanja je izbran predvsem za prikaz, da je perturbacijska metoda drugega reda povezanih časovno odvisnih problemov z ADB formulirano občutljivostno analizo tudi v primeru bolj kompleksnih problemov izvedljiva za znatno večje število občutljivostnih parametrov kot z metodami, ki se v znanosti sicer uporabljajo. Geometrijska nepopolnost epruvete je modelirana s stohastičnim poljem, ki je diskretizirano s 45 členi K-L vrste. V okviru perturbacijske metode drugega reda to pomeni, da je potrebno izračunati 1080 odvodov po slučajnih parametrih, od tega 45 odvodov prvega in 1035 odvodov drugega reda. Za tako kompleksen problem je izračun vseh 1080 odvodov z metodo končnih diferenc ali simbolno občutljivostno analizo zaradi dolgega računskega časa praktično neizvedljiv. Poleg tega



Slika 7.4: Standardna deviacija pomika na sredini panela σ_{v_m} v odvisnosti od števila simulacij Monte Carlo.

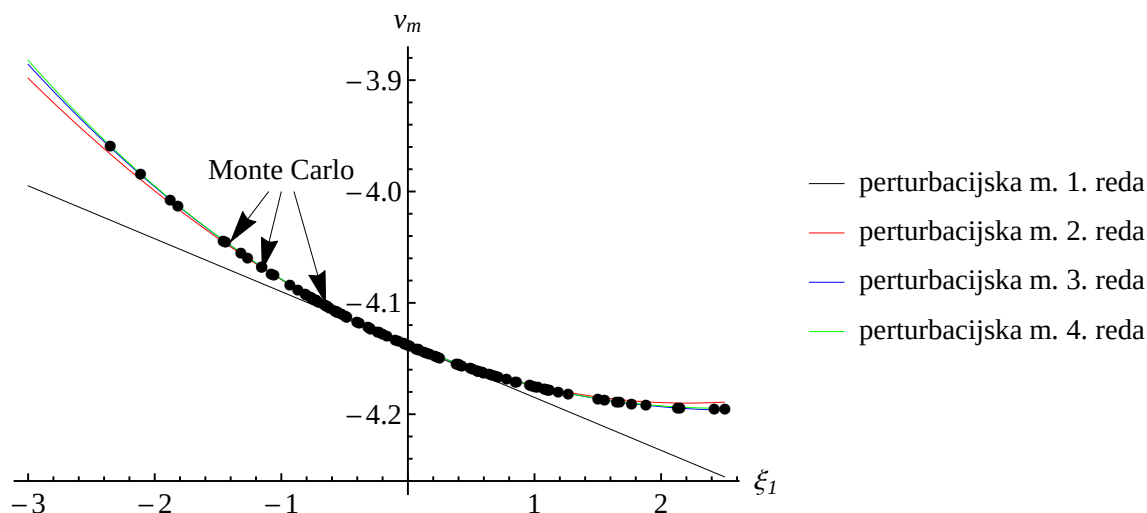
Figure 7.4: Standard deviation of the deflection in the middle of cladding σ_{v_m} in dependence on the number of Monte Carlo simulations.

se pri uporabi metode končnih diferenc za tako kompleksen mehanski problem pojavi še problem diskretizacijskih napak. V primeru relativno majhne vrednosti iskane občutljivosti je zaradi neodstranljive napake metode izračun posameznih občutljivosti z metodo končnih diferenc sploh nemogoč, kar je predstavljeno kasneje v poglavju.

Jeklena epruveta je izpostavljena dvema in pol cikloma vsiljenih pomikov, ki povzročajo izmenjujoče natezno in tlačno deformiranje epruvete, pri čemer se epruveta plastificira. Pomiki se vsiljujejo na vrhu epruvete. Diagram, ki prikazuje časovno spreminjanje vsiljenih pomikov, je prikazan na sliki 7.7. Vrednost vsiljenih pomikov je $\Delta L(t) = \lambda(t)L_{max}$, pri čemer je $L_{max} = 5\%L$. Širina epruvete je na odsekih A-B in C-D konstantna, oblika epruvete na prehodu med tema dvema širinama epruvete pa je modelirana s kubično funkcijo (odsek B-C). Osna in rotacijska simetrija problema omogočata poenostavitev problema, tako da se modelira le ena četrtina epruvete, vzdolž osi simetrije pa uporabi ustrezne robne pogoje (preprečen pomik v ravnini modela pravokotno na os simetrije). Dimenzije in računski model epruvete so prikazani na sliki 7.6.

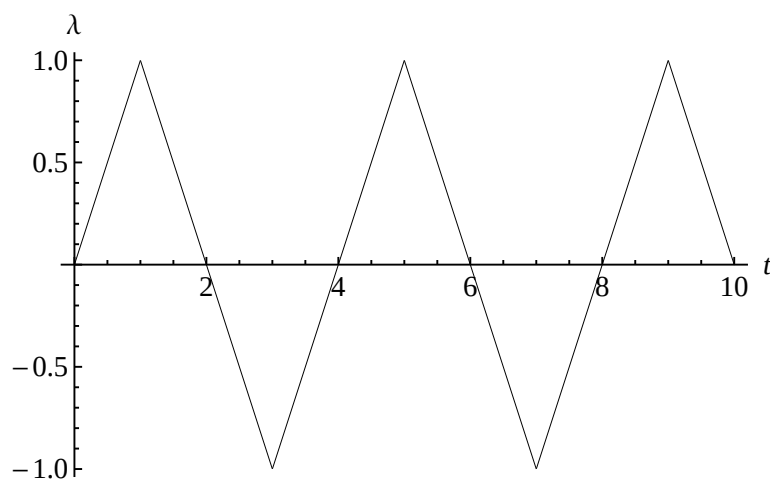
Preglednica 7.4: Materialni parametri epruvete.
Table 7.4: Material parameters of the circle bar.

E	206.9 GPa
ν	0.29
$\sigma_{y,0}$	0.45 GPa
K_h	0.12924 GPa
$\sigma_{y,inf}$	0.715 GPa
δ	16.93



Slika 7.5: Navpični pomik na sredini panela v_m , izračunan s perturbacijsko metodo različnih redov in simulacijami Monte Carlo.

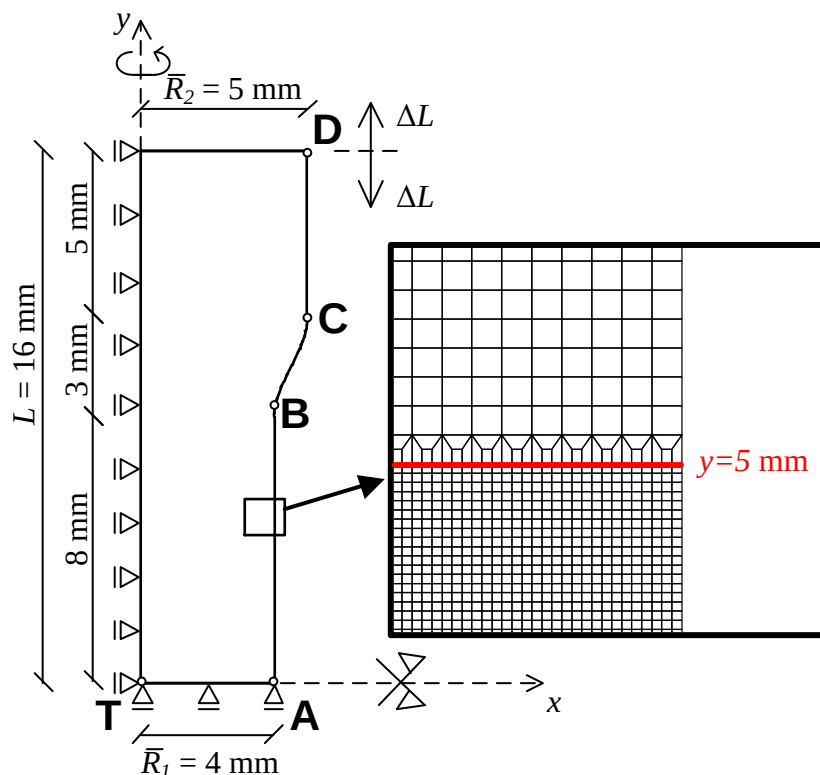
Figure 7.5: Deflection in the middle of cladding, obtained with perturbation method of different orders and Monte Carlo simulations.



Slika 7.7: Diagram cikličnega obremenjevanja epruvete.

Figure 7.7: Diagram of cycling loading.

Epruveta je diskretizirana z osnosimetričnimi štirivozliščnimi elasto-plastičnimi elementi, ki dovoljujejo velike deformacije. Formulacija elasto-plastičnosti, ki je uporabljena za modeliranje jeklene epruvete, je opisana v poglavju 6.6. Materialni parametri epruvete so podani v preglednici 7.4. Zaradi pričakovane lokalizacije deformacij je na spodnji tretjini višine modela uporabljena gostejša mreža končnih elementov. Epruveta je na tem delu po višini diskretizirana s 168 končnimi elementi. Na preostalem delu epruvete je uporabljena trikrat redkejša mreža, kar znes 122 končnih elementov po preostali višini modela. V vodoravni smeri je število končnih elementov izbrano tako, da so elementi



Slika 7.6: Skica modela ciklično obremenjene jeklene epruvete.
Figure 7.6: Numerical example of cyclic plasticity of circle bar.

približno oblike kvadratov. To je doseženo s 123 končnimi elementi v vodoravni smeri na spodnjem delu in 41 končnimi elementi v vodoravni smeri na zgornjem delu epruvete. Skupno je model epruvete diskretiziran s 25789 končnimi elementi. Uporabljena mreža končnih elementov je pregosta za celoten prikaz na sliki, zato je na sliki 7.6 prikazan le manjši izsek diskretizacijske mreže na mestu, kjer se zgodi prehod med gostejšo in redkejšo mrežo.

Diskretizacija stohastičnega polja v K-L vrsto

Geometrijska nepopolnost epruvete je modelirana z enodimenzionalnim stohastičnim poljem, definiranim vzdolž celotne višine epruvete. Pričakovana oblika epruvete je njena idealna oblika, standardna deviacija je približno 0.5 % širine epruvete, korelacijska dolžina pa desetino višine modela. Izbrana je modificirana eksponentna kovariančna funkcija C_C z efektivno dolžino $l_{eff} = 3l_c$. Parametri stohastičnega polja so podani v preglednici 7.5

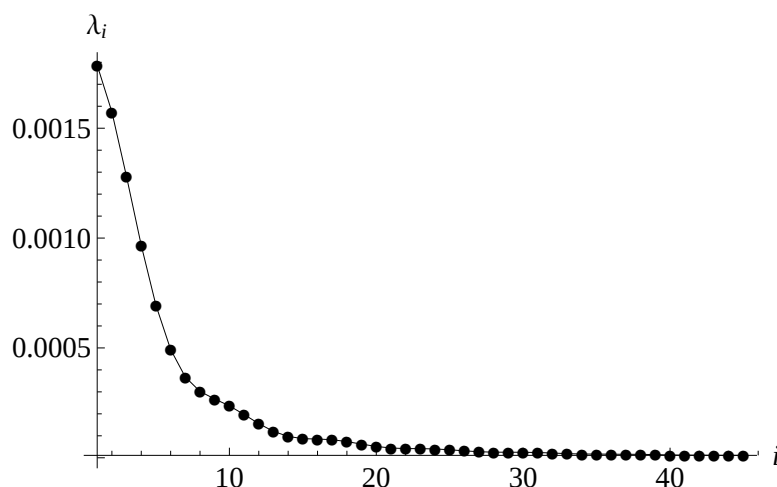
Za izračun K-L dekompozicije stohastičnega polja je bila najbolj smotrna izbira diskretizacije enodimenzionalne domene s končnimi elementi enakih dolžin, kot so končni elementi epruvete po višini. Na ta način se izognemo dodatnemu preračunavanju in interpoliranju lastnih funkcij pri prenosu oblike le-teh na dejansko epruveto, saj dobimo vrednosti lastnih funkcij točno v koordinatah zunanega oboda epruvete. Ob tej izbiri se enodi-

Preglednica 7.5: Parametri stohastičnega polja geometrijske nepopolnosti.

Table 7.5: Parameters for stochastic field of geometric imperfection.

Pričakovana vrednost ($\bar{R}$)	$\bar{R}(y)$
Standardna deviacija (σ_R)	0.0025 mm
Korelacijska dolžina (l_c)	1.6 mm
Kovariančna funkcija	$C_C, l_{eff} = 3l_c$

menzionalno domeno, na kateri je definirano stohastično polje razdeli na 290 poddomen in le-te nato kombinira na medsebojni razdalji do l_{eff} v 23565 2×2 -vozliščnih stohastičnih končnih elementov. V primeru, da bi domene kombinirali preko celotne domene, bi imeli 42195 stohastičnih končnih elementov. K-L dekompozicija se z uporabo ADB formuliranih stohastičnih končnih elementov izračuna v 0.17 s, od tega gre 0.06 s na račun sestavljanja matrik $\mathbf{C}$ in $\mathbf{N}$, 0.02 s za reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti v Mathematici ter 0.09 s za normiranje lastnih funkcij. Natančnost variance diskretiziranega stohastičnega polja ob upoštevanju prvih 45 členov K-L dekompozicije znaša 95.5 % dejanske variance stohastičnega polja. Na sliki 7.8 so prikazane lastne vrednosti K-L dekompozicije stohastičnega polja.



Slika 7.8: Izračunane lastne vrednosti K-L dekompozicije stohastičnega polja geometrijske nepopolnosti.

Figure 7.8: Calculated eigenvalues of K-L decomposition of stochastic field of the geometric imperfections.

Ko imamo izračunano K-L dekompozicijo stohastičnega polja geometrijske nepopolnosti, lahko širino epruvete na obodu v vsaki točki mreže končnih elementov zapišemo kot

$$R(y, \theta) = \bar{R}(y) + \sum_{k=1}^M \sqrt{\lambda_k} f_k(y) \xi_k(\theta). \quad (7.6)$$

Preračun x -koordinat od oboda proti notranjosti epruvete v odvisnosti od naključnih spremenljivk ξ_k in izračun občutljivosti prostorskih koordinat vozlišč epruvete na naključne spremenljivke si lahko zaradi uporabe hibridnega simbolno-numeričnega sistema olajšamo z uporabo AceFEM-a. Simbolni sistemi namreč omogočajo, da se pri podajanju mreže končnih elementov epruvete slučajne spremenljivke ξ_k pusti v simbolni obliki. Koordinate vozlišč končnih elementov eksplicitne funkcije parametrov ξ_k in odvodi prostorskih koordinat po ξ_k se na ta način enostavno izračunajo s simbolnim odvajanjem, kot je prikazano v spodnjem okvirju.

```
SMTAnalysis["SearchFunction" → (# /. MapThread[Rule, {ξ, ξinit}] &)];
Xn = SMTNodes[All, {2, 3}];
δXδξ = Map[Flatten, Transpose[Table[D[Xn, ξ[[i]]], {i, M}]]];
```

X_n je vektor vseh koordinat, ki ostanejo v tem primeru zapisane v odvisnosti od parametrov ξ_k , z ukazom D pa se v Mathematici izvede operacija analitičnega simbolnega odvajanja. Oznaka $\delta X \delta \xi$ je uporabljena za hitrostno polje, ki vsebuje podatke $D\hat{\mathbf{X}}/D\xi_i$ po vseh vozliščih mreže končnih elementov. Dodatna opcija "SearchFunction" omogoči AceFEM-u, da združi posamezne poddomene problema, s tem da koordinate vozlišč izvednoti numerično pri $\xi = \xi_{init}$

Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode

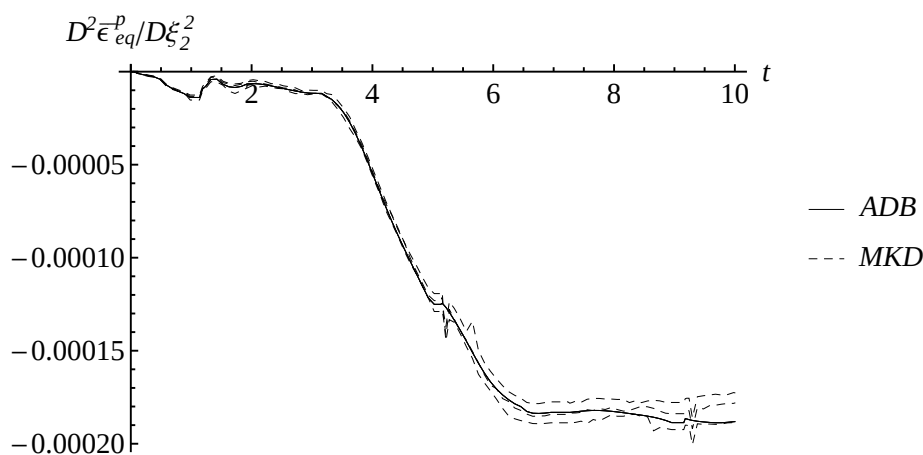
Ker je problem kompleksen, se bomo tokrat omejili le na izračun odziva s perturbacijsko metodo z uporabo ADB formulirane analitične občutljivostne analize ter izboljšane metode končnih diferenc. Simbolna občutljivostna analiza bi namreč za ta računski primer zaradi kompleksnosti problema potrebovala neizvedljivo dolg računski čas.

Ker gre za povezan, časovno odvisen problem, se občutljivostna analiza v primeru ADB formulacije izvede na koncu vsakega časovnega koraka, potem ko je dosežena konvergenca primarne analize. Na tem mestu morda velja opozoriti še na to, da se (v vsakem koraku) po izvedeni primarni analizi pred pričetkom občutljivostne analize izvede še po eno Newton-Raphsonovo iteracijo. Razlog je v tem, da se v tej dodatni Newton-Raphsonovi iteraciji izračuna in razcepi tangentna matrika, ki pripada zadnjim vektorjem rešitve in je torej iste natančnosti kot so vektorji rešitve.

Pri metodi končnih diferenc je prišlo zaradi velikosti in kompleksnosti mehanskega problema do precejšnjih težav s konvergenco metode. Pokazala se je namreč ekstremna občutljivost metode na majhne razlike pri izbiri začetnega približka h (enačba (2.69)), na različno izbrane časovne korake med analizo in celo na uporabo paralelnega računanja, kjer je bil seštevek zaokrožitvenih napak zaradi različnih zaporedij izračunov na 4 jedrih in 8 nitih na koncu tako velik, da je znatno vplival na končni rezultat.

Vpliv paralelizacije

Vpliv paralelizacije je prikazan na sliki 7.9, kjer so prikazani po trije izračuni občutljivosti drugega reda akumuliranih plastičnih deformacij ($\bar{\epsilon}_{eq}^p$) v točki T (0, 0) od parametra ξ_2 za ADB formulirano občutljivostno analizo (polna črta) in metodo končnih diferenc (črtkana črta). Analize po obeh metodah so izvedene z uporabo paralelizacije na 4 jedrih in 8 nitih. Časovni koraki so bili v vseh primerih izbrani vnaprej in identični. Kot je razvidno iz slike 7.9, pri ADB formulirani občutljivostni analizi uporaba več jeder ne vpliva opazno na končni rezultat, medtem ko je metoda končnih diferenc na paralelizacijo zelo občutljiva. Za primerjavo v številkah, občutljivost $\frac{D^2 \bar{\epsilon}_{eq}^p}{D \xi_2^2}$ je bila po 10-krat izračunana z obema metodama (na 4 jedrih in 8 nitih). Občutljivost v končnem časovnem koraku ($t=10$ s) v primeru metode končnih diferenc variira med $1.73 \cdot 10^{-4}$ in $1.91 \cdot 10^{-4}$, medtem ko se rezultati 10-ih analiz, izvedenih z ADB formulirano občutljivostno analizo, ujemajo na 10 decimalnih mest. V primeru, ko se izračun občutljivosti omeji le na eno jedro, se rezultati ujemajo tudi za metodo končnih diferenc, kar potrди, da pride do zgoraj prikazanih razlik izključno zaradi uporabe paralelnega računanja.



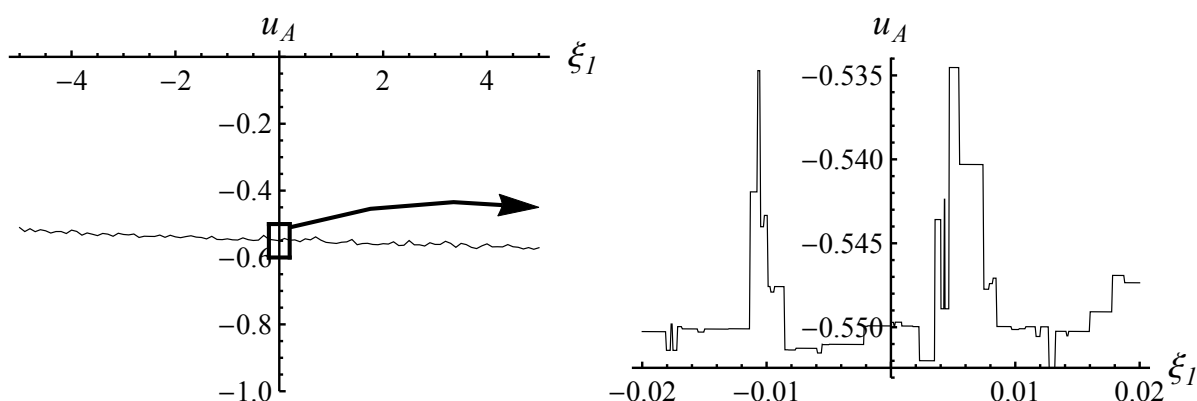
Slika 7.9: Občutljivosti drugega reda $\frac{D^2 \bar{\epsilon}_{eq}^p}{D \xi_2^2}$, primarna analiza izvedena s paralelizacijo na procesorju s 4 jedri in 8 nitmi. (ADB - ADB formulirana občutljivostna analiza, MKD - metoda končnih diferenc.)

Figure 7.9: Second-order sensitivities $\frac{D^2 \bar{\epsilon}_{eq}^p}{D \xi_2^2}$, primal analysis performed with parallel computing on processor with 4 cores and 8 threads. (ADB - ADB formulated sensitivity analysis, MKD - finite difference method.)

Vpliv časovne integracije

Vpliv različno izbranih časovnih korakov, ko je dopuščena avtomatična adaptivna izbira velikosti korakov s strani okolja za končne elemente, je imel za posledico odsekoma nezvezno funkcijo odziva, ki je posledica diskretizacijske napake po času. Na sliki 7.10 je prikazan vodoravni pomik v točki A ($R_1, 0$) v odvisnosti od parametra ξ_1 . Izračuni so v tem primeru izvedeni na enem jedru. Kot je razvidno, majhne razlike vhodnega parametra ξ_1 povzročijo izbiro različnih časovnih korakov med analizo (okolje za KE določi naslednji

časovni korak na podlagi števila Newton-Raphsonovih iteracij, potrebnih da problem v trenutnem časovnem koraku konvergira). Razlike v izbiri časovnih korakov se odrazijo predvsem v številu Gaussovih točk, ki tekom analize preidejo iz elastičnega v plastično stanje in obratno. Posledica akumulacije vmesnih diskretizacijskih napak se odrazi v precejšnjih razlikah končnega izračunanega pomika. Odvodi, izračunani z uporabo metode končnih diferenc, so za takšno funkcijo $u_A(\xi_1)$ seveda povsem napačni, medtem ko ADB formulirana občutljivostna analiza na izbiro časovnega koraka ni občutljiva, saj izračuna analitični odvod dejanskih enačb in pri tem ne potrebuje spreminjati parametra ξ_i .



Slika 7.10: Vodoravni pomik (levo) in detajl diagrama vodoravnega pomika v točki A (desno) v odvisnosti od slučajnega parametra ξ_1 v primeru adaptivno izbranih časovnih korakov.

Figure 7.10: Horizontal displacement (left) and a detail of diagram of horizontal displacement (right) in point A in dependence on sensitivity parameter ξ_1 in case of adaptive time-stepping.

Da smo napako zaradi paralelizacije in diskretizacijsko napako zaradi različno izbranih časovnih korakov izločili, so bile v vseh analizah privzete naslednje zahteve:

- časovni koraki so definirani vnaprej in so identični za vse izvedene analize (120 časovnih korakov),
- vse analize se računajo na enem jedru in eni niti.

Zahtevi po omejitvi izračuna na eno jedro in eno nit in po vnaprej določenih časovnih korakih pokažeta še eno slabo lastnost metode končnih diferenc, saj je v splošnem določanje časovnih korakov vnaprej nemogoče, kajti v tem primeru bi morali že vnaprej poznati dokaj točen odziv obravnavanega mehanskega problema. Posledica je, da ti dve zahtevi močno omejita uporabnost metode končnih diferenc. Kljub temu smo, kot smo že zapisali v zgornjih vrsticah, v prikazanem računskem primeru prilagodili analizo in jo izvedli z vnaprej določenimi časovnimi koraki ter izračunom analize na enem jedru z namenom preveriti in pokazati pravilnost razvite ADB formulirane občutljivostne analize, česar sicer ne bi mogli.

Razvoj vodoravnega pomika v točki A v vrsto z uporabo perturbacijske metode 2. reda

Kot prva primerjava je bila izbrana občutljivostna analiza drugega reda vodoravnega pomika u_A v točki A ($R_1, 0$) glede na slučajne parametre ξ_i . V tem primeru se je pokazala še ena slabost metode končnih diferenc. Ker je občutljivost drugega reda pomika u_A na slučajne parametre majhna, je bilo pri metodi končnih diferenc nemogoče dobiti takšen začetni korak, da bi bila napaka metode dovolj majhna v primerjavi z izračunanim odvodom.

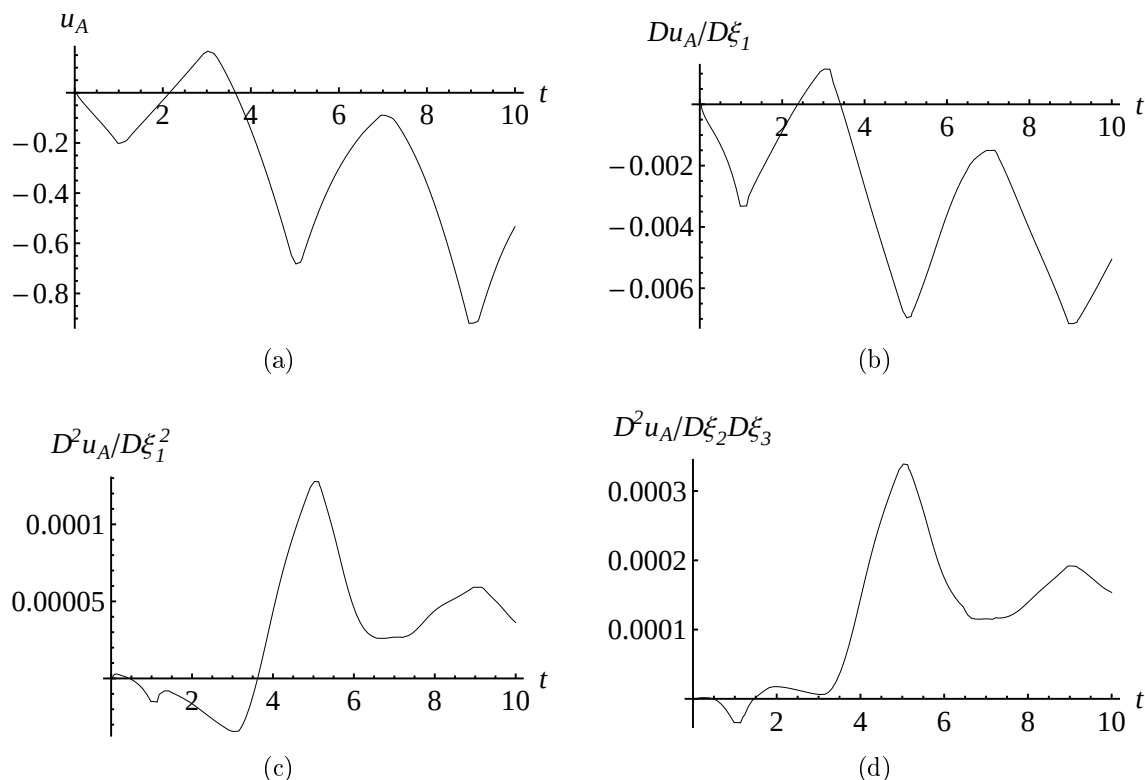
V primeru večjega izbranega začetnega koraka je bila napaka metode prevelika, saj je ocena oblike funkcije $u_A(^0\xi_i)$ na podlagi izračunov $u_A(^0\xi_i - h)$, $u_A(^0\xi_i)$ in $u_A(^0\xi_i + h)$ v primeru izbire prevelike vrednosti koraka h preveč različna kot je dejanska vrednost drugega odvoda v točki $u_A(^0\xi_i)$.

V primeru premajhnega začetnega koraka pa je bila napaka zaokrožitve zaradi zapisa števila v formatu plavajoče vejice prevelika. Če na primer za izračun odvoda $\frac{D^2 u_A}{D\xi_1^2}$ uporabimo začetni korak $h = 10^{-6}$, je števec enačbe za izračun končnih diferenc (enačba (2.69)) velikostnega reda 10^{-15} . Ob podatku, da je zahtevana natančnost primarne analize 10^{-12} (ki sicer zadeva normo vektorja rešitve $\mathbf{p}$, medtem ko je u_A le ena komponenta tega vektorja, kar pomeni da je natančnost u_A v splošnem večja ali enaka 10^{-12} , odvisno od natančnosti preostalih komponent vektorja) postane hitro jasno, da je rezultat metode končne difference v tem primeru zelo verjetno neuporaben. Natančnost primarne analize bi bilo sicer možno za kakšen velikostni red izboljšati. Vendar je pri tem potrebno upoštevati, da so ob uporabljeni dvojni natančnosti števila točna približno do 16. decimalke in da se v vsaki izvedeni računski operaciji na tem decimalnem mestu zaradi sprotne zaokrožitve pojavijo dodatne napake, ki se v splošnem skupno seštevajo. To pomeni, da bi tudi ob zahtevani večji natančnosti primarne analize težko dosegli, da bi ob uporabi metode končnih diferenc prišli do kaj več kot na decimalno natančnega rezultata občutljivostne analize ob neprimerno višji ceni izvedbe analize.

Pri izračunu občutljivosti z ADB formulirano občutljivostno analizo zgoraj naštetih težav ni bilo. Na sliki 7.11 so prikazani diagrami pomikov u_A v odvisnosti od časa ter diagrami občutljivosti $\frac{Du_A}{D\xi_1}$, $\frac{D^2 u_A}{D\xi_1^2}$ in $\frac{D^2 u_A}{D\xi_2 D\xi_3}$ v odvisnosti od časa.

Razvoj akumuliranih plastičnih deformacij v točki T v vrsto z uporabo perturbacijske metode 2. reda

Za naslednjo primerjavo je bila izbrana občutljivost akumuliranih plastičnih deformacij ($\bar{\epsilon}_{eq}^p$) v središčni točki epruvete T (0,0) na stohastično polje geometrijske nepopolnosti, pri kateri so občutljivosti drugega reda povečini za en velikostni red višje od občutljivosti pomika u_A . Tudi v tem primeru se izračunani odvodi drugega reda z metodo končnih diferenc še vedno opazno razlikujejo glede na izbrani začetni korak, vendar so vseeno stabilnejši v primerjavi z občutljivostjo pomika u_A in se za določen interval izbranega



Slika 7.11: Diagram pomika $u_A(t)$ (a) ter občutljivosti: (b) $Du_A/D\xi_1$, (c) $D^2u_A/D\xi_1^2$ in (d) $D^2u_A/D\xi_2D\xi_3$ v odvisnosti od časa.

Figure 7.11: Diagram of displacement $u_A(t)$ (a) and diagrams of sensitivities: (b) $Du_A/D\xi_1$, (c) $D^2u_A/D\xi_1^2$ and (d) $D^2u_A/D\xi_2D\xi_3$ in dependence of time.

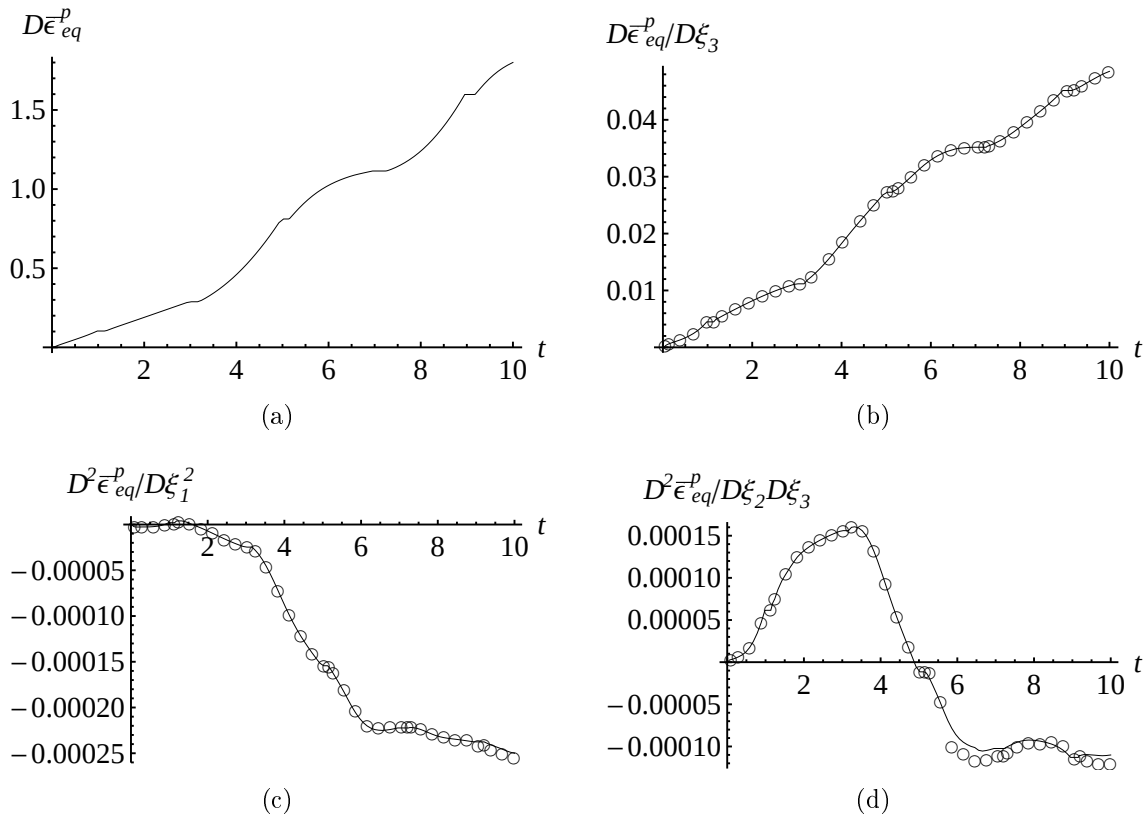
začetnega koraka h razlikujejo večinoma na drugi decimaliki.

Ker so akumulirane plastične deformacije ena izmed komponent vektorja $\mathbf{h}_g$, se občutljivosti vektorja $\mathbf{h}_g$ izračunajo avtomatično v vsakem časovnem koraku (v podprogramu za izračun občutljivosti odvisnih vektorjev) in jih je tako potrebno le prebrati.

Na sliki 7.12 je prikazan diagram $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ v odvisnosti od časa ter občutljivosti $\frac{D\bar{\epsilon}_{eq}^p}{D\xi_3}$, $\frac{D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p}{D\xi_1^2}$ in $\frac{D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p}{D\xi_2D\xi_3}$, izračunane z ADB formulirano občutljivostno analizo in metodo končnih diferenc. Kot je razvidno iz diagramov, se metodi lepo ujemata, kar potrjuje pravilnost razvite ADB formulacije občutljivostne analize drugega reda.

Primerjava numerične učinkovitosti različnih metod

Poleg tega, da ADB formulirana občutljivostna analiza v primerjavi s končnimi diferen-
cami nima problemov s konvergenco, se pomembna prednost ADB formulacije pokaže tudi
pri primerjavi računskih časov. V preglednici 7.6 so podani računski časi obeh metod za
izvedbo perturbacijske metode drugega reda za različno število upoštevanih členov K-L
vrste. Izračuni so bili izvedeni na računalniku z Intelovim procesorjem i7-950 (3.07 GHz),
z 12 GB RAM-a, 4 jedri in 8 nitmi, pri čemer je bil izračun omejen na 1 jedro in 1 nit. Ra-
čunski časi za metodo končnih diferenc za več kot 5 občutljivostnih parametrov so zaradi



Slika 7.12: Akumulirane plastične deformacije $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ v točki T in občutljivosti $\bar{\epsilon}_{eq}^p$ prvega in drugega reda na slučajne parametre (a) $\bar{\epsilon}_{eq}^p(t)$, (b) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3$, (c) $D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_1^2$, (d) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_2D\xi_3$ (— ADB formulirana občutljivostna analiza, $\circ$ metoda končnih diferenc).
Figure 7.12: Accumulated plastic deformations and first- and second-order sensitivities of accumulated plastic deformations in point T with respect to random parameters: (a) $\bar{\epsilon}_{eq}^p(t)$, (b) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_3$, (c) $D^2\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_1^2$, (d) $D\bar{\epsilon}_{eq}^p/D\xi_2D\xi_3$ (— ADB formulated sensitivity analysis, $\circ$ finite difference method).

neizvedljivo dolgega računskega časa le ocenjeni. Ocene so narejene na podlagi števila iteracij in računskih časov, ki so bili potrebni za odvode, za katere je bil izračun z metodo končnih diferenc dejansko izveden (pri oceni računskega časa je bilo ustrezno upoštevano število odvodov prvega reda, število odvodov drugega reda po istem parametru ter število odvodov drugega reda po dveh različnih parametrih).

Primerjava pokaže, da je ADB formulirana občutljivostna analiza numerično veliko bolj učinkovita od izboljšane metode končnih diferenc. Za primerjavo, računski čas primarne analize je 510 s. Da je pri ADB formulirani občutljivostni analizi dosežena predpisana natančnost, je v vsakem časovnem koraku, potem ko vektorji rešitve že konvergirajo do določene natančnosti, potrebna dodatna Newton-Raphsonova iteracija, zato da se izračuna tangentna matrika, ki pripada vektorjem rešitve in torej ustreza želeni natančnosti. Te dodatne Newton-Raphsonove iteracije doprinesejo dodatnih 76 s za celotno analizo. Za izračun posameznega odvoda z ADB občutljivostno analizo je potrebnih približno 36 s,

kar pomeni približno 7 % računskega časa, ki je potreben za primarno analizo. Preostali čas gre na račun “administrativnega dela” okolja za končne elemente (komunikaciji med Mathematico in CDriverjem, shranjevanju vmesnih rezultatov itd.).

Če upoštevamo še dejstvo, da ADB formulirana občutljivostna analiza ni občutljiva na paralelno računanje, lahko zaključimo, da bi računski čas za izračun občutljivosti za posamezen občutljivostni parameter lahko še dodatno zmanjšali z uporabo paralelizacije, česar pri metodi končnih diferenc za tako kompleksen primer zaradi seštevanja zaokrožitvenih napak izračunov na posameznih jedrih ne moremo. Lahko pa v primeru obeh metod uporabimo paralelizacijo za izračun različnih odvodov. V tem primeru se pri občutljivostni analizi lahko paralelno računajo le odvodi istega reda (potem ko so vsi odvodi nižjega reda izračunani), medtem ko pri metodi končnih diferenc te omejitve ni, saj je vsak izračun neodvisen od rezultatov preostalih odvodov. Vendar bi kljub temu tudi v tem primeru bil skupni računski čas analize v prid ADB formulirani občutljivostni analizi.

Preglednica 7.6: Primerjava absolutnega računskega časa za perturbacijsko metodo drugega reda z ADB formulirano občutljivostno analizo in metodo končnih diferenc (elasto-plastičen material).

Table 7.6: Comparison of absolute calculation time needed to perform analysis with second-order perturbation method with ADB formulated sensitivity analysis and finite difference method (elasto-plastic material).

Število členov K-L dekompozicije (M)	Število odvodov prvega in drugega reda, ki jih je potrebno izračunati	ADB formulirana občutljivostna analiza	Metoda končnih diferenc
1	2	6.6×10^2 s	7.7×10^3 s
2	5	7.8×10^2 s	2.0×10^4 s
3	9	9.6×10^2 s	3.9×10^4 s
5	20	1.4×10^3 s	1.0×10^5 s
15	135	6.9×10^3 s	8.0×10^5 s (ocena)
30	495	2.5×10^4 s	3.1×10^6 s (ocena)
45	1080	5.4×10^4 s	6.8×10^6 s (ocena)

Primerjava numerične učinkovitosti različnih metod za hiperelastični materialni model

Za primerjavo je izvedena še perturbacijska metoda drugega reda, pri kateri je uporabljen hiperelastičen material, ostali parametri so nespremenjeni. Uporabljen je neo-Hookev model, enak kot pri elastičnem stanju elasto-plastičnega elementa (en. (6.68)). Hiperelastični problemi pripadajo razredu nepovezanih in časovno neodvisnih problemov. Kot je bilo že razloženo, je zaradi tega pri ADB formulirani občutljivostni analizi potrebno izvesti občutljivostno analizo le v zadnjem časovnem koraku, po končani primarni analizi. V primeru metode končnih diferenc se način izračuna odvodov seveda ne spremeni. Računski časi

za primer hiperelastičnega materiala so prikazani v preglednici 7.7. Iz primerjave vidimo, da je razmerje med računskimi časi obeh metod drugačno kot pri elasto-plastičnem materialu. Poglavitni razlog je, kot je razloženo zgoraj, da se občutljivostna analiza pri ADB formulaciji izvede le v enem koraku, po končani primarni analizi. Primerjava računskih časov je zopet močno v prid ADB formulacije.

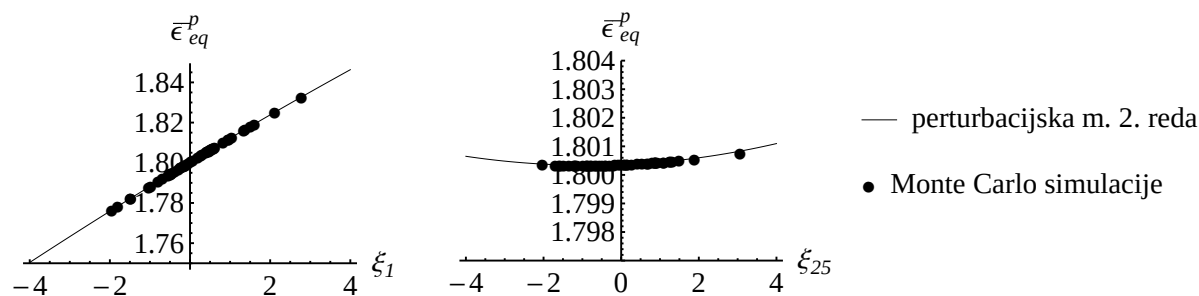
Preglednica 7.7: Primerjava absolutnega računskega časa za perturbacijsko metodo drugega reda z ADB formulirano občutljivostno analizo in metodo končnih diferenc hiperelastičen material).

Table 7.7: Comparison of absolute calculation time needed to perform analysis with second-order perturbation method with ADB formulated sensitivity analysis and finite difference method (hyperelastic material).

Število členov K-L dekompozicije (M)	Število odvodov prvega in drugega reda, ki jih je potrebno izračunati	ADB formulirana občutljivostna analiza	Metoda končnih diferenc
1	2	1.5×10^2 s	1.9×10^3 s
2	5	1.5×10^2 s	6.1×10^3 s
3	9	1.5×10^2 s	1.2×10^4 s
5	20	1.6×10^2 s	2.8×10^4 s
15	135	2.2×10^2 s	2.2×10^5 s (ocena)
30	495	4.2×10^2 s	8.5×10^5 s (ocena)
45	1080	7.6×10^2 s	1.9×10^6 s (ocena)

Primerjava perturbacijske metode z metodo Monte Carlo

Kot rečeno, smo za dani računski primer primerjali le dve metodi za izračun perturbacijske metode, ADB formulirano občutljivostno analizo in izboljšano metodo končnih diferenc. Metoda Monte Carlo je zaradi dolgega računskega časa primarne analize neizvedljiva, ob podatku da je za eno primarno analizo potrebnih 510 s, bi se npr. 5000 simulacij Monte Carlo izvajalo pribl. 30 dni. Zato je za primerjavo rezultatov perturbacijske metode drugega reda, pognanih le nekaj simulacij in sicer za primer, ko se spreminjata le parameter ξ_1 oz. ξ_{25} , medtem ko je za ostale slučajne spremenljivke privzeta njihova pričakovana vrednost $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_M = 0$ oz. $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{24} = \xi_{26} = \dots = \xi_M = 0$. Rezultati obeh pristopov so prikazani na sliki 7.13 in potrjujejo, da perturbacijska metoda dobro opiše obnašanje odziva konstrukcije na celotnem prikazanem območju štirih standardnih deviacijah parametrov.



Slika 7.13: Primerjava rezultatov perturbacijske metode drugega reda in 100 simulacij Monte Carlo za slučajna parametra ξ_1 in ξ_{25} .

Figure 7.13: Comparison of the results obtained with second-order perturbation method and 100 Monte Carlo simulations for parameters ξ_1 and ξ_{25} .

7.2 Nelinearna stohastična analiza korodiranih konstrukcij

7.2.1 Proces korozije

Korozija je kompleksen pojav razpadanja kovine. Najpogosteje se pojavi na površini materiala, kjer pride ob stiku z elektrolitom iz okolice (npr. vodno raztopino) zaradi termodinamske nestabilnosti materiala do elektrokemijskih reakcij. Proces korozije je odvisen od velikega števila notranjih in zunanjih spremenljivk, od tega jih je veliko stohastične narave (mikroskopska struktura kovine, različne koncentracije in sestava ionov ter molekul v elektrolitih itd.). Obstaja več vrst korozije: enakomerna, jamičasta, napetostna, interkristalna, erozijska itd. Izmed naštetih je jamičasta korozija en poglavitnih vzrokov porušitev inženirskih sistemov. Proces jamičaste korozije je v literaturi obravnavan z različnimi pristopi. Veliko raziskav se posveča opisu pojava s kemijskega in kinetičnega vidika nastanka in širitve korozijskega procesa glede na lastnosti materiala in snovi iz okolice, s katerimi je material v stiku (npr. Park in Pyun, 2004, Vautrin et al., 2008, Chainais-Hillairet in Bataillon, 2008, Mikhailov et al., 2009, Asanuma in Aogaki, 1995, Kriston in Lakatos-Varsanyi, 2001 in drugi). Omenjeni modeli se ukvarjajo predvsem s hitrostjo in pogoji širjenja procesa korozije na ravni mikrostrukture, zato se njihovi izsledki ne morejo neposredno prenesti na modeliranje konstrukcij na makro ravni. Bistvo izsledkov teh raziskav, ki je v našem pristopu k modeliranju procesa korozije uporabno, je, da je proces korozije zelo stohastičen in nepredvidljiv pojav in da je lastnosti, obliko in hitrost nastajanja korozijskih razjed za splošen inženirski problem praktično nemogoče opisati z dovolj veliko gotovostjo.

Drug pristop, ki se ga v literaturi najpogosteje uporablja, modelira proces korozije kot dva ločena stohastična procesa: nastanek korozijske razjede in rast le-te (Valor et al., 2007, Zhang et al., 2008, Tarantseva, 2010). Z uporabo teorije ekstremnih vrednosti se nato določi verjetnost, da je na nekem omejenem območju globina posamezne korozijske

razjede večja od izbrane vrednosti. Gre torej za način modeliranja korozije kot diskreten stohastičen proces.

Zaključki vseh obravnavanih študij in raziskav so, da je korozija močno stohastičen proces in zato primeren za opis s stohastičnim poljem, pa vendar v literaturi skorajda ni zaslediti študije, ki bi ga obravnavala na ta način. Edini nam znani pristop, kjer je bilo za opis prostorsko porazdeljenih korozijskih razjed uporabljeno stohastično polje in tako problem korozije apliciran v programsko okolje za uporabo metode končnih elementov, sta predstavila Teixeira in Soares (2008). Privzela sta, da so globine korozijskih razjed logaritemsko normalno porazdeljene, njihovo srednjo vrednost pa določila z izbirno funkcijo verjetnosti eksponentne porazdelitve. Ostale potrebne parametre za določitev stohastičnega polja sta izbrala na podlagi eksperimenta ali po lastni izbiri. Stohastično polje sta diskretizirala z razvojem z linearnim optimalnim ocenjevanjem. Pokazala sta, kako upoštevanje prostorsko modelirane korozije znatno zniža nosilnost jeklene plošče v primerjavi z modelom, v katerem se debelina plošče enakomerno stanjša za pričakovano globino korozijskih razjed.

V naslednjih računskih primerih je proces korozije modeliran s stohastičnim poljem, diskretiziranim s K-L porazdelitvijo. Pričakovana vrednost, standardna deviacija in kovariacijska funkcija so zaradi pomanjkanja eksperimentalnih rezultatov izbrane po lastni izbiri. Namen prikazanih numeričnih primerov je pokazati, da je razvita avtomatizacija za opis stohastičnih polj in izračun statistike odziva z uporabo metode končnih elementov numerično zelo učinkovita in zato dobro izhodišče za poglobljene študije vpliva in modeliranja procesov korozije na obnašanje konstrukcij.

7.2.2 Tlačena vrtljivo podprta plošča

V prikazanem računskem primeru je obravnavana korodirana jeklena plošča kvadratne oblike. Plošča je na vseh štirih robovih vrtljivo podprta in na dveh nasprotnih robovih tlačno obremenjena, kot je prikazano na sliki 7.14. Materialni parametri plošče so podani v preglednici 7.8. Dimenzije plošče so podane v preglednici 7.9. Privzeto je, da je plošča korodirana z enakomerno korozijo. Izračun mejne obtežbe je izveden s perturbacijsko metodo drugega reda in simulacijami Monte Carlo.

Plošča je modelirana z lupinastimi 9-vozliščnimi elasto-plastičnimi končnimi elementi, ki omogočajo velike deformacije. Lupinasti končni elementi so končni elementi, ki so primerni za opis mehanskih problemov, pri katerih sta dve prostorski dimenziji problema znatno večji od tretje dimenzije. Poleg tega končni elementi lupine omogočajo deformiranje v treh dimenzijah prostora. Model lupine, uporabljen v prikazanem računskem primeru, je razvil Wisniewski (Wisniewski, Turska, 2000, 2001). Model izhaja iz Reissner-Mindlinove teorije plošč in je precej kompleksen, zato se, glede na to da sam model končnega elementa ni predmet te disertacije, v podroben opis kinematičnih in konstitucijskih enačb na tem mestu ne bomo spuščali.

Plošča je diskretizirana tako, da je vzdolž vsake izmed stranic po 30 končnih elementov, kar nanese skupno 900 končnih elementov preko celotne domene plošče.

Poleg lupinastih končnih elementov, s katerimi je modelirana plošča, sta v modelu s končnim elementom modelirana tudi obtežba konstrukcije ter pomik konstrukcije v izbrani točki, skupno 60 končnih elementov za obtežbo in 1 končni element za pomik. Končna elementa obtežbe in pomika sta modelirana tako, da se na ta način med obremenjevanjem konstrukcije sledi pomiku in je zato možno sledenje obtežni poti tudi preko mejne obtežbe (kar sicer z običajnim pristopom, ko se postopno povečuje obtežba, ki deluje na konstrukcijo, ne bi bilo možno). Za vodenje je izbran vodoravni pomik plošče v točki A, v smeri delovanja obtežbe. Točka A, v kateri se vodi pomik, je označena na sliki 7.14. Postopek za izračun mejnega obtežnega faktorja je predstavljen kasneje v poglavju.

Preglednica 7.8: Materialni parametri plošče.

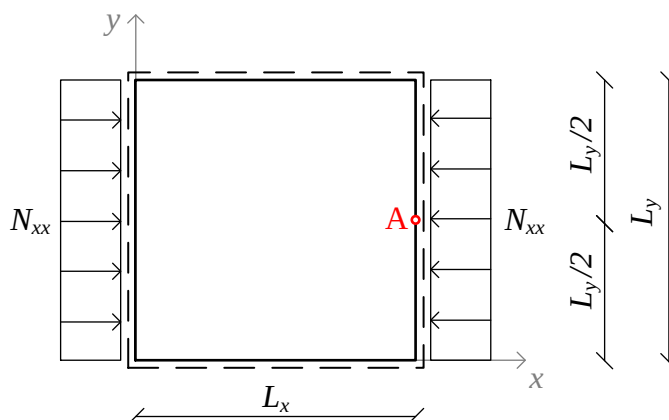
Table 7.8: Material parameters of plate.

Elastični modul (E)	210 kN/mm ²
Poissonov količnik (ν)	0.29
Meja plastičnega tečenja (f_y)	0.355 kN/mm ²
Modul utrjevanja (K_h)	0 kN/mm ²

Preglednica 7.9: Dimenzije plošče.

Table 7.9: Plate dimensions.

Stranica plošče vzdolž x -osi (L_x)	1 m
Stranica plošče vzdolž y -osi (L_y)	1 m
Debelina plošče (t_P)	10 mm

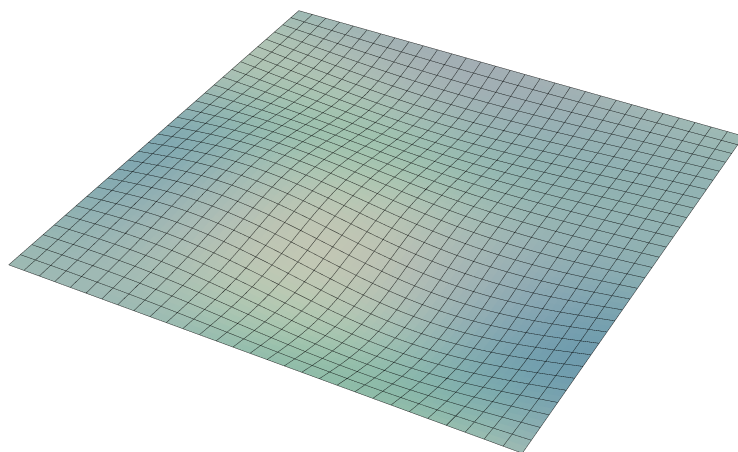


Slika 7.14: Skica plošče.

Figure 7.14: Sketch of the plate.

Modeliranje geometrijske nepopolnosti plošče

V modelu je upoštevana tudi geometrijska nepopolnost plošče. Izračunana je kot superpozicija prvih šestih uklonskih oblik in sicer v razmerju 1:0.7:0.7:0.7:0.7:0.7, kot je priporočeno v standardu EN 1993-1-5. To pomeni da je za izračun oblike nepopolnosti vzeta celotna magnituda prve uklonske oblike (norma vektorja prve uklonske oblike je 1), medtem ko so preostale upoštrevane uklonske oblike normirane na 70 % magnitude (norme vektorjev druge do šeste uklonske oblike so 0.7). Dobljena geometrijska nepopolnost se izračuna kot seštevek teh uklonskih oblik (skladno s privzetimi magnitudami posameznih uklonskih oblik), dobljeno geometrijsko obliko pa se normira tako, da je največji odklon nepopolne od idealne geometrije e_0 enak predpisanemu. V našem primeru smo vzeli $e_0 = L_x/200$. Na ta način dobljena geometrijska nepopolnost je v 10-kratni povečavi prikazana na sliki 7.15.



Slika 7.15: Model geometrijske nepopolnosti plošče, 10-kratna povečava.
Figure 7.15: Geometrical imperfections of the plate, 10-times magnified.

Postopek izračuna mejnega obtežnega faktorja

Za izračun mejnega obtežnega faktorja γ_{max} je bila izvedena nelinearna analiza, pri kateri se je postopno povečevala obremenitev konstrukcije, pri tem pa vodil vodoravni pomik plošče v točki A, v smeri delovanja obtežbe. Dopuščena je bila adaptivna izbira velikosti časovnih korakov. Kot je bilo predstavljeno že uvodoma, sta tako sila, ki deluje na konstrukcijo, kot pomik modelirana s končnimi elementi. Bistvo takšnega pristopa je, da se med obremenjevanjem vodi pomik konstrukcije v izbrani točki, medtem ko obtežni faktor postane ena izmed neznank problema (poleg prostostnih stopenj lupinastih končnih elementov) in je zato možno sledenje obtežni poti tudi preko mejne obtežbe, kot je prikazano na sliki 7.16. Mejni obtežni faktor γ_{max} se izračuna na podlagi zadnjih treh korakov analize. Pri tem smo privzeli, da ima krivulja obtežne poti $\gamma(u)$ na tem delu obliko kvadratne funkcije. Pomik u_{max} in obtežni faktor $\gamma_{max} = \gamma(u_{max})$, ki pripada mejni obtežbi, se v tem primeru izračunata po enačbah

$$u_{max} = \frac{u_{n-2}^2(\gamma_{n-1} - \gamma_n) + u_{n-1}^2(\gamma_n - \gamma_{n-2}) + u_n^2(\gamma_{n-2} - \gamma_{n-1})}{2(u_{n-2}(\gamma_{n-1} - \gamma_n) + u_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-2}) + u_n(\gamma_{n-2} - \gamma_{n-1}))} \quad (7.7)$$

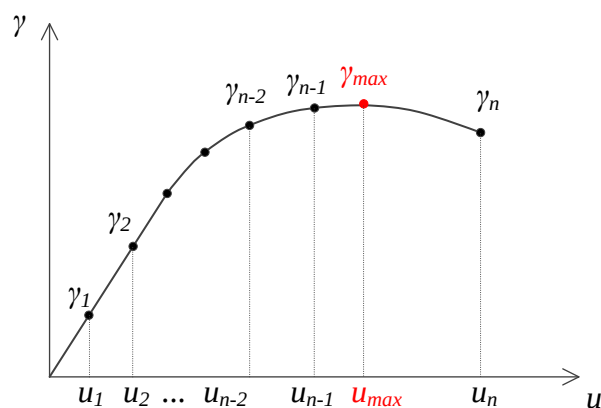
$$\begin{aligned} \gamma_{max} = & \left(\left(u_{n-2}^2(\gamma_{n-1} - \gamma_n) + 2u_{n-2}(u_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-2}) + u_n(\gamma_{n-2} - \gamma_{n-1})) + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_{n-1}^2(\gamma_{n-2} - \gamma_n) + u_n^2(\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}) \right)^2 \right) / \left(4(u_{n-2} - u_{n-1})(u_{n-2} - u_n)(u_{n-1} - \right. \\ & \left. - u_n)(u_{n-2}(\gamma_{n-1} - \gamma_n) + u_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-2}) + u_n(\gamma_{n-2} - \gamma_{n-1})) \right) + \gamma_{n-2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Rezultat perturbacijske metode drugega reda je razvoj mejnega obtežnega faktorja v Taylorjevo vrsto drugega reda, kar pomeni da je poleg γ_{max} potrebno izračunati tudi odvode prvega in drugega reda γ_{max} po občutljivostnih parametrih. Zato je bilo potrebno vgraditi ADB formulirano občutljivostno analizo drugega reda tudi v končni element obtežbe. Rezultat občutljivostne analize so občutljivosti prvega in drugega reda, $D\gamma_k/D\xi_i$ in $D^2\gamma_k/D\xi_i D\xi_j$, kjer je k indeks časovnega koraka: $k = 1, 2, \dots, n$ in $i, j = 1, 2, \dots, M$ indeksa naključnih spremenljivk K-L vrste. Ker smo privzeli, da je γ_{max} odvisen od rezultatov v zadnjih treh korakih analize, lahko preko te odvisnosti (en. (7.8)) in dejstva, da imamo za te tri točke občutljivosti izračunane, izračunamo tudi občutljivosti $D\gamma_{max}/D\xi_i$ in $D^2\gamma_{max}/D\xi_i D\xi_j$

$$\begin{aligned} \frac{D\gamma_{max}}{D\xi_i} &= \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-2}} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_i} + \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-1}} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_i} + \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_n} \frac{D\gamma_n}{D\xi_i} \\ \frac{D^2\gamma_{max}}{D\xi_i D\xi_j} &= \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-2}} \frac{D^2\gamma_{n-2}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-1}} \frac{D^2\gamma_{n-1}}{D\xi_i D\xi_j} + \frac{\partial\gamma_{max}}{\partial\gamma_n} \frac{D^2\gamma_n}{D\xi_i D\xi_j} \\ &+ \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial^2\gamma_{n-2}} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial^2\gamma_{n-1}} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial^2\gamma_n} \frac{D\gamma_n}{D\xi_i} \frac{D\gamma_n}{D\xi_j} \\ &+ \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-2}\partial\gamma_{n-1}} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_j} + \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-2}\partial\gamma_n} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_n}{D\xi_j} \\ &+ \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-1}\partial\gamma_n} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_n}{D\xi_j} + \frac{\partial^2\gamma_{max}}{\partial\gamma_{n-1}\partial\gamma_{n-2}} \frac{D\gamma_{n-1}}{D\xi_i} \frac{D\gamma_{n-2}}{D\xi_j}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Mejno obtežbo izračunamo po enačbi

$$N_{xx,max} = \gamma_{max} \cdot N_{xx}. \quad (7.10)$$

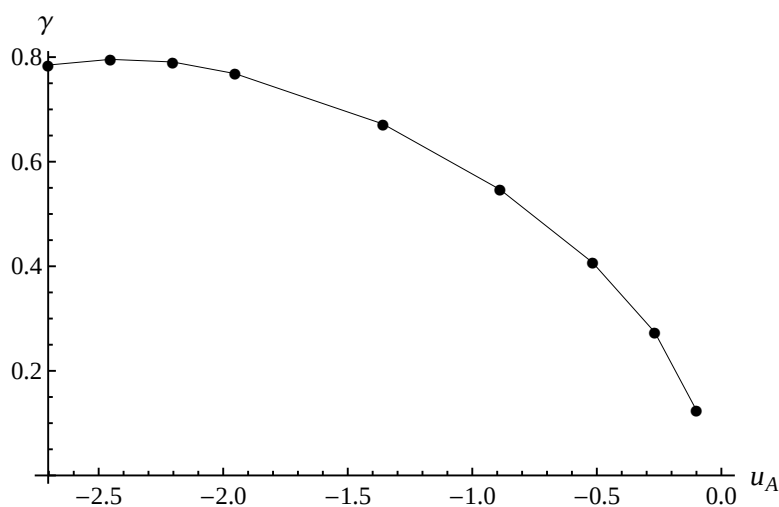


Slika 7.16: Sledenje obtežne poti preko vodenega pomika.

Figure 7.16: A load-displacement curve.

Zaradi lažjega preračunavanja je izbrana enotska sila: $N_{xx} = 1 \text{ kN/mm}$. γ_{max} je mejni obtežni faktor.

Na sliki 7.17 je prikazan diagram obtežne poti za primer, ko je debelina plošče enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.

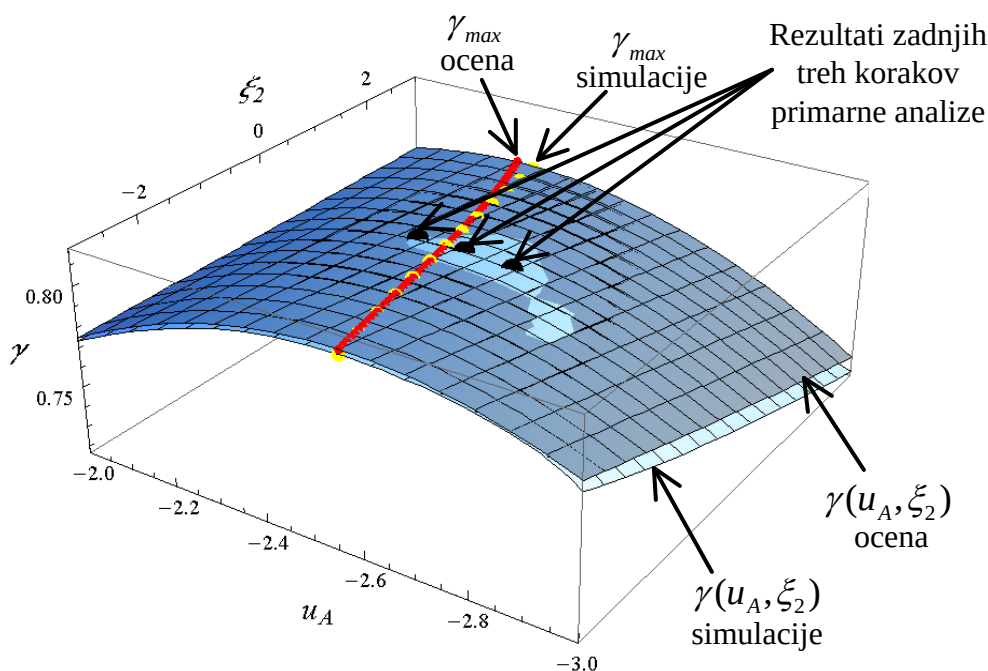


Slika 7.17: Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina stanjšana enakomerno za pričakovano vrednost.

Figure 7.17: A load-displacement curve for the case of expected value of plate thickness change.

Za oceno ustreznosti opisanega postopka izračuna mejnega kritičnega faktorja, je na tem mestu prav preveriti natančnost tako izpeljanega odziva (t. j. izpeljanega iz zadnjih treh korakov analize) z dejanskim odzivom. Zaradi možnosti grafične primerjave, se omejimo le na eno slučajno spremenljivko, npr. ξ_2 , medtem ko vzamemo ostale slučajne spremenljivke pri njihovih pričakovanih vrednostih: $\xi_1 = \xi_3 = \dots = 0$. Iščemo torej odziv $\gamma(u_A, \xi_2)$.

Na sliki 7.18 je s sivo barvo prikazana ocena odziva $\gamma(u_A, \xi_2)$, izračunana iz odziva in občutljivosti v zadnjih treh točkah analize, ki so odebeljene in označene s črno barvo. S svetlo barvo pa je izrisan dejanski odziv $\gamma(u_A, \xi_2)$, izračunan s simulacijami. Dodatno sta na tej sliki prikazana mejni obtežni faktor γ_{max} in pripadajoči pomik u_{max} v odvisnosti od slučajne spremenljivke ξ_2 . Z rdečimi pikami sta označena mejni obtežni faktor ter pripadajoči pomik, izpeljana na podlagi rezultatov primarne in občutljivostne analize v zadnjih treh korakih analize, z rumenimi pikami pa mejni obtežni faktor ter pripadajoči pomik, izračunana z dejanskimi simulacijami. Primerjava potrjuje ustreznost postopka izračuna mejnega obtežnega faktorja in pripadajočega pomika, saj se rezultati zelo dobro ujemajo z rezultati dejanskih simulacij. Za primerjavo smo poskušali oceniti $\gamma(u_A, \xi_2)$ tudi z interpolacijo skozi štiri točke (namesto samo treh), vendar se natančnost rezultatov ni bistveno izboljšala.



Slika 7.18: Obtežni faktor v odvisnosti od pomika in slučajne spremenljivke ξ_2 (siva barva: ocena $\gamma(u_A, \xi_2)$; bela barva: $\gamma(u_A, \xi_2)$ na podlagi dejanskih simulacij, rdeča barva: ocena γ_{max} ; rumena barva: γ_{max} na podlagi dejanskih simulacij; črna barva: rezultati zadnjih treh korakov analize, na podlagi katerih se izračunata oceni $\gamma(u_A, \xi_2)$ in γ_{max}).

Figure 7.18: Load factor in dependence on displacement and random variable ξ_2 (gray color: estimation of $\gamma(u_A, \xi_2)$; white color: $\gamma(u_A, \xi_2)$ obtained with simulations, red color: estimation of γ_{max} ; yellow color: γ_{max} obtained with simulations; black color: last three steps of the analysis, from which $\gamma(u_A, \xi_2)$ in γ_{max} are estimated).

Analitični mejni obtežni faktor za primer idealno ravne plošče

Za prikazani računski primer plošče (z idealno geometrijo) obstaja tudi analitična rešitev. Analitična mejna plastična in analitična kritična uklonska obtežba v odvisnosti od debeline

plošče sta

$$\begin{aligned} N_{xx,pl}(t_P) &= t_P f_y; \\ N_{xx,crit}(t_P) &= \frac{4 \pi^2 E t_P^3}{12 (1 - \nu^2) L_y^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Mejna obtežba je za primer idealno ravne plošče manjša izmed kritične in mejne plastične sile

$$N_{xx,max}(t_P) = \text{Min}(N_{xx,pl}(t_P), N_{xx,crit}(t_P)). \quad (7.12)$$

Modeliranje enakomerne korozije

Stohastičen pojav enakomerne korozije smo modelirali na dva načina - kot enakomerno naključno stanjšanje debeline plošče (v tem primeru spremembe debeline ne opišemo s stohastičnim poljem) in kot stohastično polje z veliko korelacijsko dolžino, kar pomeni da se vrednosti preko polja zelo malo spreminjajo in je polje gladko. Pričakovana vrednost, standardna deviacija in korelacijska dolžina (ki velja le za opisa korozije s stohastičnim poljem) modela korozije so prikazane v preglednici 7.10.

Preglednica 7.10: Parametri stohastičnega polja korozije.
Table 7.10: Parameters for the stochastic field of corrosion.

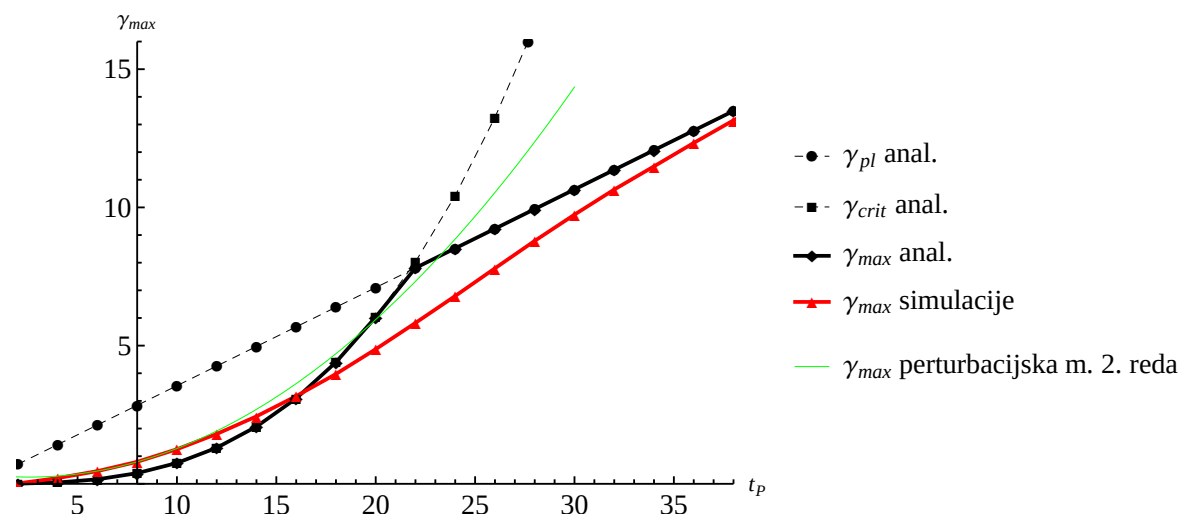
Pričakovana vrednost ($\Delta \bar{t}$)	- 2 mm
Standardna deviacija ($\sigma_{\Delta t}$)	0.3 mm
Korelacijska dolžina (l_c)	10000 mm

Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode za enakomerno stanjšanje debeline plošče

V primeru, da privzamemo enakomerno spremembo debeline plošče zaradi korozije, imamo opravka s perturbacijsko metodo za deterministični mehanski model. V tem primeru imamo le en parameter, za katerega je potrebno izvesti občutljivostno analizo in sicer spremembo debeline plošče od pričakovane vrednosti.

Kot zanimivost si najprej pogledjmo primerjavo analitičnega mejnega obtežnega faktorja za primer idealno ravne plošče z mejnim obtežnim faktorjem, izračunanim z dejanskimi simulacijami različnih debelin plošče. Primerjava je prikazana na sliki 7.19. Analitične vrednosti mejnega obtežnega faktorja so izračunane po enačbah (7.11) in (7.12). Rdeča krivulja predstavlja mejni obtežni faktor izračunan z numeričnimi simulacijami, v katerih je upoštevana tudi geometrijska nepopolnost plošče. Diagram ne predstavlja pojava korozije, saj se zaradi pojava korozije debelina plošče lahko le stanjša. Kljub temu je primerjava rezultatov za različne debeline plošč zanimiva s stališča razumevanja različnih metod izračuna mejnega obtežnega faktorja. Kot je splošno znano, so vitke pločevine

občutljive na velikost in obliko začetnih geometrijskih nepopolnosti. Mejna nosilnost geometrijsko nepopolne plošče je za večje debeline plošče nižja od mejne nosilnosti, ki bi jo plošča prenesla ob idealni geometriji, vendar se z večanjem debeline plošče tej vrednosti približuje. Z večanjem vitkosti plošče pa je nosilnost plošče zaradi postkritične nosilnosti večja od nosilnosti po linearni teoriji izbočenja. Na sliki je prikazan tudi mejni obtežni faktor, izračunan s perturbacijsko metodo drugega reda za enakomerno spremembo debeline okrog pričakovane vrednosti debeline plošče, torej 8 mm. Krivulja odziva, izračunana s perturbacijsko metodo drugega reda, se z mejnim obtežnim faktorjem, izračunanim s simulacijami, dobro ujema za spremembo debeline ± 4 mm.



Slika 7.19: Diagram mejnega obtežnega faktorja v odvisnosti od debeline plošče.

Figure 7.19: Limit load factor in dependence of plate thickness.

Odziv mejnega obtežnega faktorja v odvisnosti od stopnje enakomerne korodiranosti konstrukcije, izračunan po metodi perturbacije drugega reda, je enak prikazanemu na sliki 7.19, le da se v tem primeru krivulja zaključi pri začetni debelini plošče, ki je 10 mm. Rezultat razvoja mejnega obtežnega faktorja v vrsto z metodo perturbacije drugega reda je

$$\gamma_{max, enakomerno} = 7.96 \times 10^{-1} + 2.04 \times 10^{-1} \Delta t + 1.79 \times 10^{-2} \Delta t^2, \quad (7.13)$$

pri čemer je Δt odstopanje spremembe debeline od pričakovane (Gaussova spremenljivka s pričakovano vrednostjo 0 in standardno deviacijo 0.3 mm).

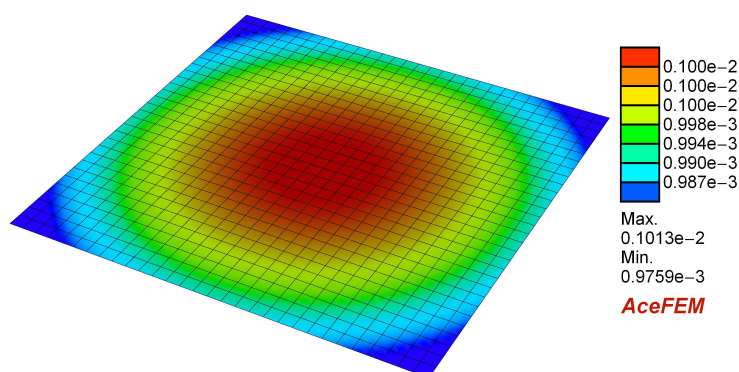
Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode in korozije, modelirane s stohastičnim poljem

Pri enakomerni koroziji debelina plošče zelo malo variira po domeni, kar pomeni da gre za močno korelirano stohastično polje z veliko korelacijsko dolžino. Za opis koreliranosti sto-

hastičnega polja sta izbrani eksponentna kovariančna funkcija (C_A) in njena modifikacija, ki je odvedljiva tudi v izhodišču in zato bolje konvergira (C_D). Računski čas za sestavo vsake izmed obeh matrik je 21 s. Izračuni so bili izvedeni na računalniku z Intelovim procesorjem i7-950 (3.07 GHz), z 12 GB RAM-a, 4 jedri in 8 nitmi.

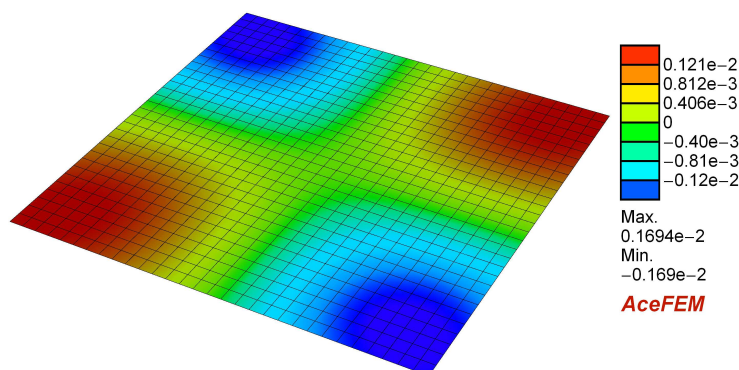
Ker gre za visoko korelirano stohastično polje, je za visoko natančnost opisa polja (v smislu variance stohastičnega polja) potrebnih le nekaj začetnih členov K-L vrste. V primeru obeh kovariančnih funkcij so obdržani le prvi štirje členi K-L dekompozicije ($M = 4$). Natančnost variance polja, izračunana na podlagi enačbe (2.34), je v primeru kovariančne funkcije C_A 98 %, v primeru kovariančne funkcije C_C pa 100 %.

Za diskretizacijo stohastičnega polja je bila plošča razdeljena na enako število poddomen kot v primeru mehanskega modela (30×30 domen). Poddome se nato kombinirajo v 405450×9 -vozliščnih stohastičnih končnih elementov. Končni rezultat diskretizacije stohastičnega polja so deterministični členi K-L vrste: lastne vrednosti in lastne funkcije. Na slikah 7.20 in 7.21 sta prikazani prva in četrta lastna funkcija za primer ko je koreliranost stohastičnega polja opisana s kovariančno funkcijo C_A .



Slika 7.20: Prva lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A .

Figure 7.20: First eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A .



Slika 7.21: Četrta lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A .

Figure 7.21: Fourth eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A .

Rezultat perturbacijske metode drugega reda je razvoj mejnega obtežnega faktorja v Taylorjevo vrsto drugega reda okrog pričakovane vrednosti slučajnih spremenljivk ξ_i .

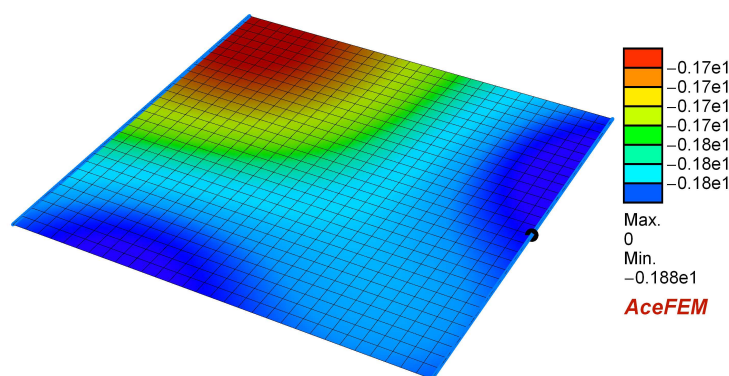
$$\begin{aligned}\gamma_{max,C_A} = & 7.96 \cdot 10^{-1} + 5.94 \cdot 10^{-2}\xi_1 - 4.50 \cdot 10^{-3}\xi_2 - 4.34 \cdot 10^{-3}\xi_3 + 1.40 \cdot 10^{-4}\xi_4 \\ & + 1.54 \cdot 10^{-3}\xi_1^2 + 4.10 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_2 + 2.20 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_3 - 7.51 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_4 + 1.06 \cdot 10^{-4}\xi_2^2 \\ & + 3.15 \cdot 10^{-4}\xi_2\xi_3 + 4.84 \cdot 10^{-5}\xi_2\xi_4 + 2.82 \cdot 10^{-6}\xi_3^2 - 1.29 \cdot 10^{-4}\xi_3\xi_4 - 4.65 \cdot 10^{-5}\xi_4^2\end{aligned}\quad (7.14)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{max,C_D} = & 7.96 \cdot 10^{-1} + 6.09 \cdot 10^{-2}\xi_1 - 2.30 \cdot 10^{-3}\xi_2 + 1.73 \cdot 10^{-3}\xi_3 - 1.55 \cdot 10^{-5}\xi_4 \\ & + 1.60 \cdot 10^{-3}\xi_1^2 + 2.05 \cdot 10^{-4}\xi_1\xi_2 - 7.96 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_3 + 1.17 \cdot 10^{-5}\xi_1\xi_4 + 2.80 \cdot 10^{-5}\xi_2^2 \\ & - 5.92 \cdot 10^{-5}\xi_2\xi_3 - 2.78 \cdot 10^{-6}\xi_2\xi_4 - 9.88 \cdot 10^{-6}\xi_3^2 - 1.02 \cdot 10^{-5}\xi_3\xi_4 - 1.16 \cdot 10^{-6}\xi_4^2\end{aligned}\quad (7.15)$$

Primerjava rezultatov in numerične učinkovitosti perturbacijske metode in metode Monte Carlo

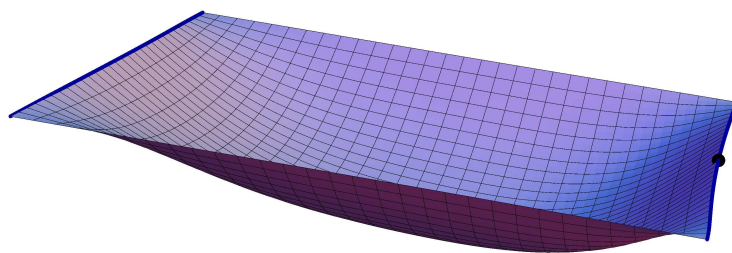
V simulacijah Monte Carlo se z generatorjem naključnih števil generira slučajne spremenljivke ξ_i oz. v primeru enakomernega stanjšanja debeline se stohastično odstopanje stanjšanja plošče od pričakovane vrednosti generira kot Gaussovo spremenljivko s standardno deviacijo, podano v preglednici 7.10. Z generiranimi vrednostmi parametrov ξ_i stohastičnega polja oz. spremembe debeline se nato izvede primarna analiza. Za vsako od treh možnosti opisa enakomerne korozije je bilo izvedenih po 5000 simulacij, v katerih se je shranjeval izračunani mejni obtežni faktor.

Na sliki 7.22 je prikazana realizacija stohastičnega polja korozije v naključno izbrani simulaciji Monte Carlo za kovariančno funkcijo C_A . Deformirana oblika plošče, 7-kratno povečana, do katere pride pri prikazani naključno izbrani simulaciji Monte Carlo, je prikazana na sliki 7.23. Kot je razvidno iz oblike deformirane plošče, pride do globalnega uklona plošče. Ker je plošča vitka (primerjalna vitkost plošče, ki je enakomerno korodirana je 2.71), je globalni uklon pričakovan porušni mehanizem.



Slika 7.22: Naključno izbrana realizacija stohastičnega polja korozije plošče.

Figure 7.22: A random sample of stochastic field of corrosion.



Slika 7.23: Deformirana plošča v trenutku, ko je dosežen mejni obtežni faktor (7-kratna povečava deformacij).

Figure 7.23: Deformed plate in the moment of limit load factor (deformations are 7-times magnified).

V preglednici 7.11 je prikazana primerjava rezultatov perturbacijske metode drugega reda in simulacij Monte Carlo, števila odvodov, ki jih je v posameznem primeru potrebno izračunati v okviru perturbacijske metode, in računskega časa kompletne primarne in občutljivostne analize za perturbacijsko metodo oz. računskega časa za izvedbo 5000 simulacij Monte Carlo.

Rezultati pokažejo zelo dobro ujemanje med različnimi opisi enakomerne korozije, med različnimi kovariančnimi funkcijami ter med obema metodama. Največje razlike nastopijo pri računskih časih, ki so močno v prid perturbacijski metodi.

Na podlagi primerjave pričakovanih vrednosti in standardne deviacije lahko zaključimo, da za izbrani primer močno koreliranega stohastičnega polja, ko je korelacijska dolžina zelo velika v primerjavi z dimenzijami domene, stohastično polje lahko opišemo dovolj natančno tudi ob zanemaritvi spreminjanja vrednosti polja preko domene.

7.2.3 Tlačen korodiran nosilec z globalnim uklonom kot merodajnim porušnim mehanizmom

V prikazanem računskem primeru je obravnavan korodiran jekleni prostoležeči nosilec s prečnim prerezom I in sicer je izbran standardni profil IPE300. Privzet je model jamičaste korozije. Nosilec je na obeh koncih obremenjen s tlačno osno silo. Dolžina nosilca je tolikšna, da je ne glede na stopnjo korodiranosti pričakovani porušni mehanizem globalni uklon (primerjalna vitkost nosilca, ki je enakomerno korodiran, je 2.01). Za izračun mejne obtežbe, pri kateri bo prišlo do porušitve nosilca sta izbrani perturbacijska metoda drugega reda in simulacije Monte Carlo.

Pasnici in stojina nosilca so modelirani z enakimi lupinastimi 9-vozliščnimi elasto-plastičnimi končnimi elementi, ki omogočajo velike deformacije, kot plošča v prejšnjem računskem pri-

Preglednica 7.11: Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi 2. reda (n_{odv}) in skupni računski CPU čas, potreben za posamezno metodo.

Table 7.11: Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the ultimate load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of second-order perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.

	Perturbacijska metoda (ADB formulacija)			Monte Carlo 5000 simulacij		
	C_A	C_D	enakomerno stanjšanje	C_A	C_D	enakomerno stanjšanje
n_{odv}	14	14	2	/	/	/
$\bar{\gamma}_{max}$	0.798	0.798	0.798	0.796	0.798	0.798
$\sigma_{\gamma_{max}}$	0.060	0.061	0.061	0.060	0.061	0.061
t	62 s	62 s	41 s	173557 s	178186 s	178645 s

meru. Nosilec je diskretiziran s prostorsko mrežo končnih elementov tako, da je vzdolž dolžine nosilca 68 končnih elementov, pasnica je po širini diskretizirana s 6 končnimi elementi, stojina pa je po višini diskretizirana s 4 končnimi elementi. Za preprečitev lokalnih deformacij na mestu vnosa koncentrirane tlačne sile, je nosilec na obeh straneh ojačan z debelo (35 mm) čelno pločevino. Le-ta je modelirana z linearno-elastičnim materialnim modelom in diskretizirana tako, da se njena vozlišča ujemajo z vozlišči pasnic in stojine nosilca. Skupno je nosilec (vključno s čelnimi pločevinami) diskretiziran s 1136 lupinastimi končnimi elementi s skupno 4689 vozlišči.

Poleg lupinastih končnih elementov, s katerimi je modeliran nosilec, sta v modelu s končnim elementom modelirana tudi obtežba konstrukcije ter pomik konstrukcije v izbrani točki, skupno 32 končnih elementov za obtežbo in 1 končni element za pomik. Kot v računskem primeru tlačene plošče, se tudi tokrat med obremenjevanjem vodi pomik. Za vodenje je izbran vodoravni pomik nosilca v smeri delovanja obtežbe v krajnem prerezu nosilca (pri $x = L$), v težiščni točki prečnega prereza.

Privzeti materialni parametri nosilca so prikazani v preglednici 7.12. Dimenzije nosilca so podane v preglednici 7.13.

Modeliranje začetne geometrijske nepopolnosti nosilca

V modelu je upoštevana tudi geometrijska nepopolnost nosilca. Izračunana je kot superpozicija prvih šestih uklonskih oblik in sicer v razmerju 1:0.7:0.7:0.7:0.7:0.7, kot je razloženo v računskem primeru tlačene plošče. Dobljena geometrijska nepopolnost je normirana tako, da je največji odklon nepopolne od idealne geometrije e_0 enak $L/200$, kjer je L dolžina nosilca. Na sliki 7.24 je prikazanih prvih šest uklonskih oblik izračunanih z rešitvijo problema začetne nestabilnosti, pri čemer je bil nosilec modeliran z linearno

Preglednica 7.12: Materialni parametri nosilca.

Table 7.12: Material parameters of beam.

Elastični modul (E)	210 kN/mm ²
Poissonov količnik (ν)	0.29
Meja plastičnega tečenja (f_y)	0.355 kN/mm ²
Modul utrjevanja (K_h)	0.21 kN/mm ²

Preglednica 7.13: Dimenzije nosilca.

Table 7.13: Beam dimensions.

Dolžina nosilca (L)	5.25 m
Širina pasnice (b_F)	150 mm
Debelina pasnice (t_F)	10.7 mm
Višina profila (h_I)	300 mm
Debelina stojine (t_W)	7.1 mm

elastičnimi 9-vozljiščnimi lupinastimi končnimi elementi. Slika 7.25 prikazuje 5-kratno povečavo tako dobljene geometrijske nepopolnosti.

Diskretizacija stohastičnega polja korozije v K-L vrsto

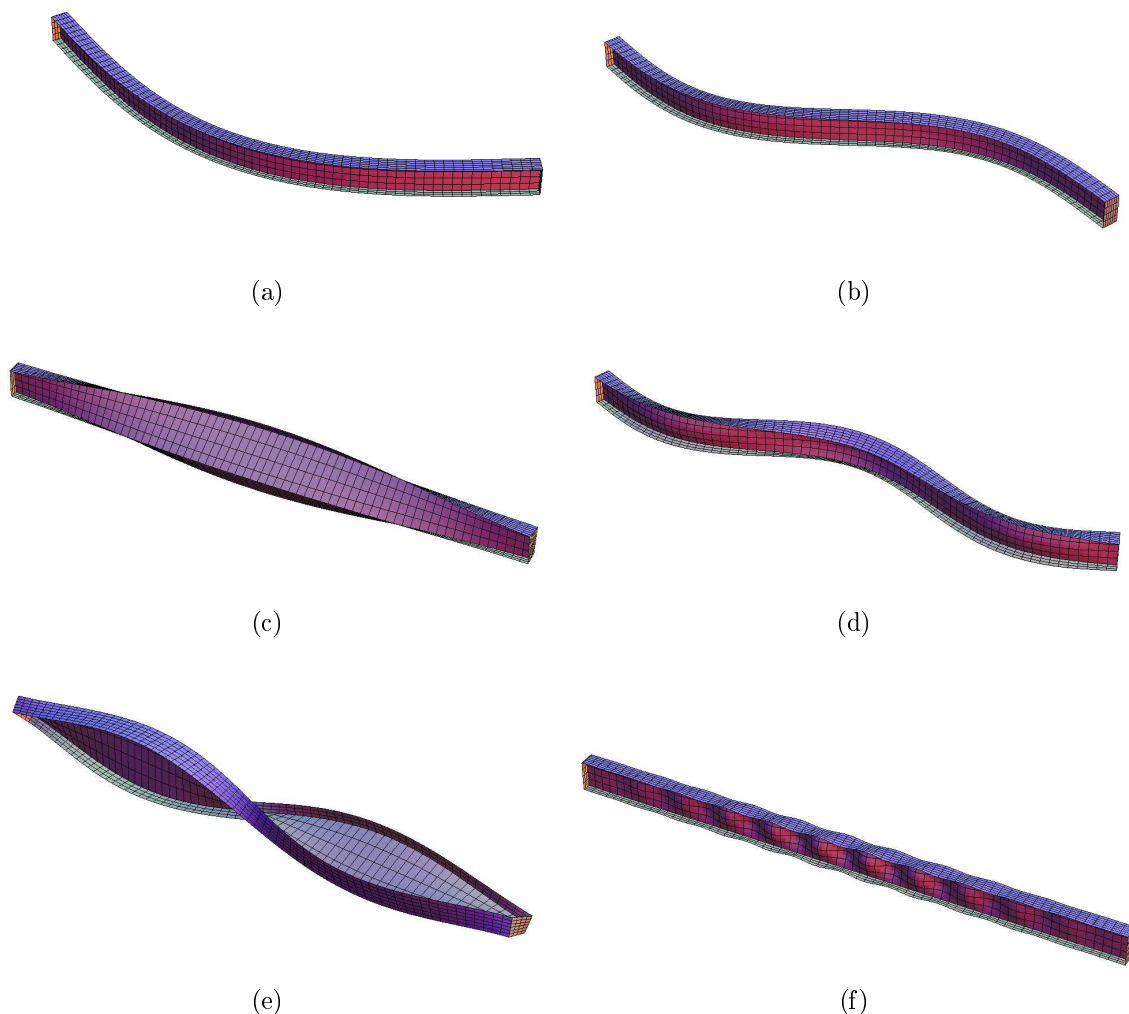
Proces jamičaste korozije je opisan s stohastičnim poljem spremembe debeline. Pričakovana vrednost, standardna deviacija in korelacijska dolžina stohastičnega polja so prikazane v preglednici 7.14. Ker je v primeru jamičaste korozije korelacijska dolžina relativno krajša od vzdolžne dimenzije nosilca, je tokrat poleg eksponentne in gladke možna tudi aplikacija modificiranih kovariančnih funkcij, predlaganih v poglavju 5. Narejene so primerjave za vseh pet kovariančnih funkcij. Število členov K-L vrste je v vseh primerih tako, da je natančnost variance, izračunana na podlagi enačbe (2.34) 80 %. Stohastično polje je na nosilec aplicirano tako, da je upoštevana tudi korelacija spremembe debeline med stojino in pasnicama. Stohastično polje ni aplicirano na čelni pločevini, saj je namen modeliranja čelnih pločevin le v tem, da se koncentrirane napetosti na koncih nosilca enakomerno prenesejo na nosilec, brez povzročitve velikih lokalnih deformacij.

Preglednica 7.14: Parametri stohastičnega polja korozije.

Table 7.14: Parameters of the stochastic field of corrosion.

Pričakovana vrednost ($\Delta \bar{t}$)	-0.9 mm
Standardna deviacija ($\sigma_{\Delta t}$)	0.1 mm
Korelacijska dolžina (l_c)	300 mm
Efektivna dolžina (l_{eff})	$3 l_c$

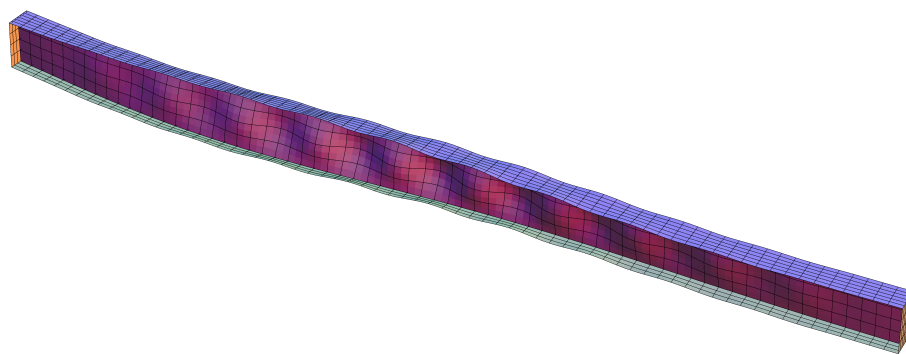
V preglednici 7.15 je prikazano število členov vrste, potrebnih da varianca diskretizira-



Slika 7.24: Prvih šest uklonskih oblik nosilca.
Figure 7.24: First six buckling modes of the beam.

nega stohastičnega polja doseže 80 % dejanske variance polja, računski čas, potreben za sestavljanje kovariančnih matrik in gostota kovariančnih matrik (definirana kot razmerje neničelnih členov in vseh členov matrike) za različne kovariančne funkcije, predlagane v poglavju 5. Izračuni so bili izvedeni na računalniku z Intelovim procesorjem i7-950 (3.07 GHz), z 12 GB RAM-a 4 jedri in 8 nitmi. Rezultati pokažejo na eni strani prednost modificiranih kovariančnih funkcij pri katerih je čas, potreben za sestavljanje kovariančne matrike in gostota le-te občutno manjši v primerjavi s kovariančno funkcijo, ki je preko celotne prostorske domene neničelna. Na drugi strani je iz primerjave števila členov razvidna prednost modifikacij C_D in C_E , ki zaradi odvedljivosti v izhodišču konvergirata veliko bolje in je posledično potrebnih za skoraj dve tretjini manj členov K-L vrste.

Za diskretizacijo stohastičnega polja je bil nosilec razdeljen na enako število poddomen kot v primeru mehanskega modela, opisanem v začetnih odstavkih, tako da se vozlišča prekrivajo in ni potrebno dodatno preračunavanje pri prenosu izračunanih lastnih funkcij



Slika 7.25: Model nepopolnosti nosilca, 5-kratna povečava.

Figure 7.25: Imperfections of the beam, 5-times magnified.

Preglednica 7.15: Potrebno število členov K-L vrste za 80 % natančnost, čas centralne procesne enote (CPU) za sestavo kovariančne matrike in gostota kovariančne matrike za različne kovariančne funkcije.

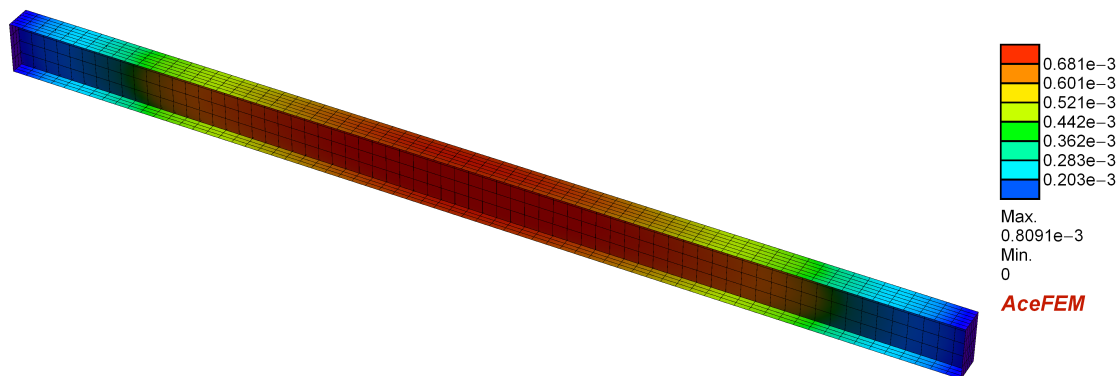
Table 7.15: Number of retained terms in K-L decomposition to attain 80 % accuracy, central processor unit (CPU) time to assemble covariance matrix and covariance matrix density for different covariance functions.

	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
M	66	65	66	23	23
t	30.7 s	8.2 s	8.2 s	30.7 s	8.2 s
gostota $\mathbf{C}$	1	0.32	0.32	1	0.32

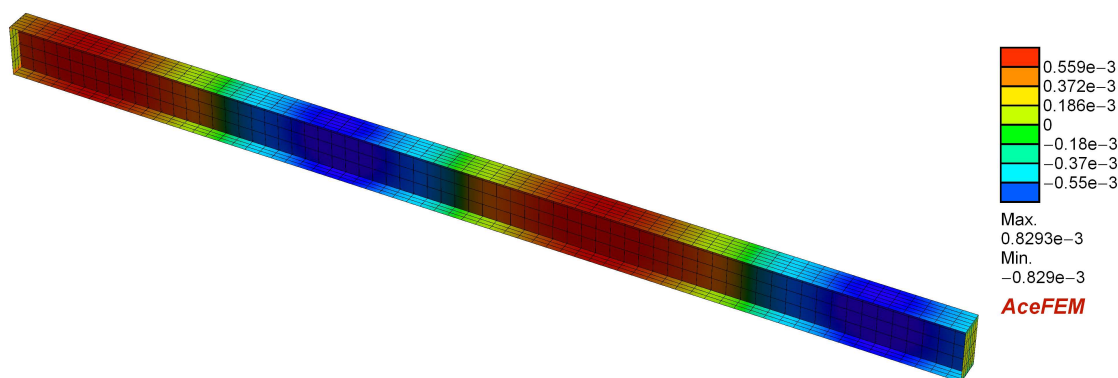
na mehanski problem. Kot je opisano v poglavju 4.1, se v naslednjem koraku poddomene kombinirajo v pare, ki tvorijo 2×9 -vozliščne stohastične elemente. Skupno je preko nosilca v primeru kovariančnih funkcij C_A in C_D , pri katerih se kombinirajo poddomene preko celotne domene, 592416 stohastičnih končnih elementov, v primeru modificiranih kovariančnih funkcij, kjer se kombinirajo le poddomene na medsebojni razdalji manjši od l_{eff} , pa 182472 stohastičnih končnih elementov. Končni rezultat diskretizacije stohastičnega polja so deterministični členi K-L vrste: lastne vrednosti in lastne funkcije. Na slikah 7.26 in 7.27 sta prikazani prva in četrta lastna funkcija za primer ko je koreliranost stohastičnega polja opisana s kovariančno funkcijo C_A .

Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode

Za izračun mejne nosilnosti γ_{max} je bila izvedena nelinearna analiza, pri kateri se je postopno povečevala obremenitev konstrukcije, pri tem pa vodil vodoravni vzdolžni pomik v krajnem prerezu nosilca (pri $x = L$), v težiščni točki prečnega prereza. Dopuščena je bila adaptivna izbira velikosti časovnih korakov. Mejni obtežni faktor γ_{max} in iskane občutljivosti se izračuna na podlagi zadnjih treh korakov analize, kot je podrobneje razloženo v računskem primeru tlačene plošče. Na sliki 7.28 je prikazan diagram obtežne poti za



Slika 7.26: Prva lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A .
Figure 7.26: First eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A .



Slika 7.27: Četrta lastna funkcija za stohastično polje s kovariančno funkcijo C_A .
Figure 7.27: Fourth eigenfunction of stochastic field with covariance function C_A .

primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.

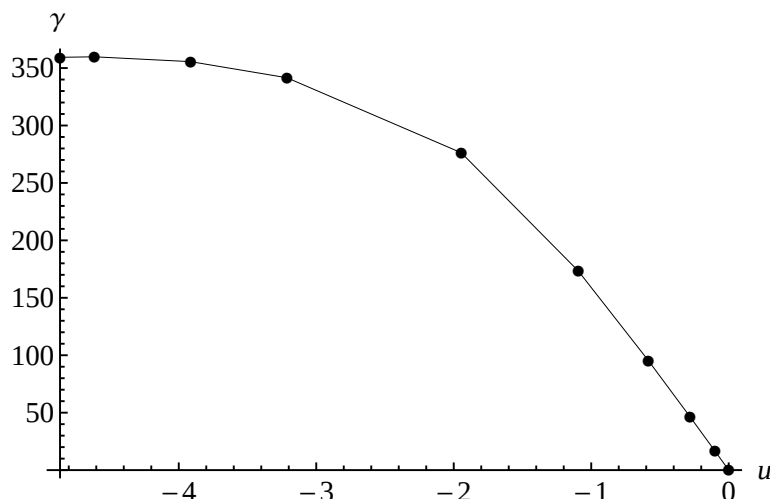
Rezultat stohastičnega problema z uporabo perturbacijske metode je razvoj mejnega obtežnega faktorja v Taylorjevo vrsto drugega reda po stohastičnih spremenljivkah ($\gamma_{max} = \gamma_{max}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$). Mejno obtežbo izračunamo po enačbi

$$P_{max} = \gamma_{max} P, \quad (7.16)$$

kjer je P začetna sila, s katero obremenimo konstrukcijo. Zaradi lažjega preračunavanja je najbolj smotrno izbrati enotsko silo: $P = 1$ kN.

Izračun odziva z metodo Monte Carlo

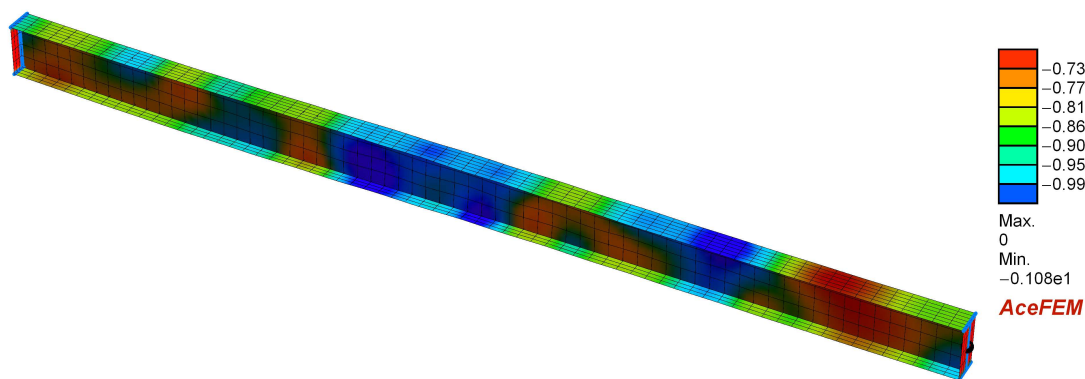
Pri drugi primerjani metodi, to je metodi Monte Carlo, je bilo izvedenih za vsako kovariančno funkcijo po 5000 simulacij. V vsaki simulaciji se z generatorjem naključnih števil generirajo vrednosti slučajnih koeficientov $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$. S temi vrednostmi se izračuna stohastično polje korozije ter izvede primarna analiza, v kateri se izračuna γ_{max} . Vredno-



Slika 7.28: Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.

Figure 7.28: Load-displacement curve for the beam with uniformly reduced thickness.

sti γ_{max} se skozi simulacije shranjuje in iz množice vseh realizacij nato določi statistiko odziva, ki nas zanima. Na sliki 7.29 je prikazana naključno izbrana simulacija korozije nosilca, na sliki 7.30 pa je prikazana deformirana konstrukcija (10-kratna povečava) v trenutku porušitve v naključno izbrani simulaciji Monte Carlo. Mejna obtežba je bila v večini primerov dosežena v 9 časovnih korakih.

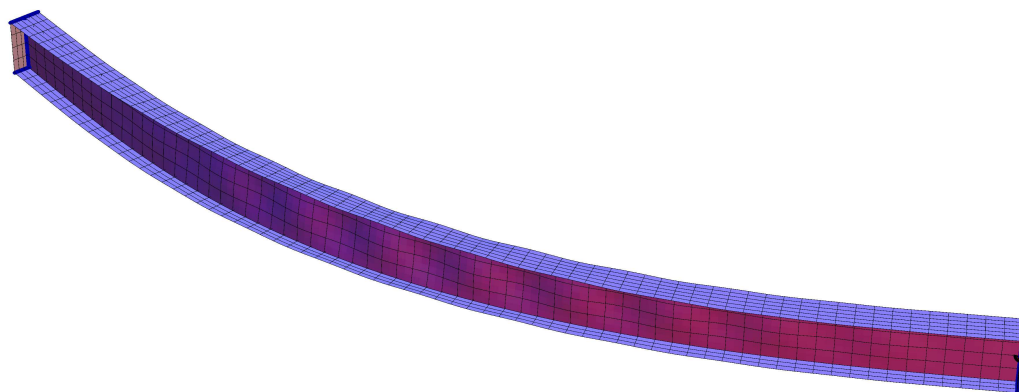


Slika 7.29: Naključno izbrana realizacija spremembe debeline nosilca.

Figure 7.29: A random sample of beam thickness change.

Primerjava rezultatov in numerične učinkovitosti različnih metod

V preglednici 7.16 je prikazana primerjava rezultatov perturbacijske metode drugega reda in simulacij Monte Carlo, števila odvodov, ki jih je za različne kovariančne funkcije potrebno izračunati v okviru perturbacijske metode in računskega časa kompletne primarne in občutljivostne analize za perturbacijsko metodo oz. računskega časa za izvedbo 5000 simulacij Monte Carlo. Rezultati pokažejo zelo dobro ujemanje med perturbacijsko metodo in rezultati, dobljenimi s simulacijami Monte Carlo. Poleg tega tudi ni opaznih večjih



Slika 7.30: Deformiran nosilec v trenutku definirane $\gamma = \gamma_{max}$ (10-kratna povečava deformacij).

Figure 7.30: Deformed beam in the moment of $\gamma = \gamma_{max}$ (deformations are 10-times magnified).

razlik med rezultati, dobljenimi z različnimi kovariančnimi funkcijami. Za dani računski primer izbira med petimi primerjanimi kovariančnimi funkcijami torej ne vpliva bistveno na rezultat in se zato lahko izkoristi prednosti večje numerične učinkovitosti predlaganih modificiranih kovariančnih funkcij.

Na sliki 7.31 sta prikazana histograma kritične uklonske sile za kovariančni funkciji C_A in C_C . Oba histograma izkazujeta simetrijo razpršenosti kritične sile okrog pričakovane vrednosti, prav tako je na histogramih opazna malenkostna razlika v razpršenosti, kar potrjujeta izračunani standardni deviaciji.

Največja razlika med primerjanimi metodami in različnimi kovariančnimi funkcijami se pokaže pri računskih časih. Tu se najbolj izkaže perturbacijska metoda in znotraj te kovariančni funkciji C_D in C_E , ki za isto natančnost potrebujeta neprimerno manj členov K-L dekompozicije, posledično je potrebno izračunati precej manj odvodov. Pri simulacijah Monte Carlo je število slučajnih parametrov ξ_i v vseh primerih dovolj majhno, da ne vpliva bistveno na računski čas, saj je čas, potreben za generiranje 66 ali 23 naključnih števil, zanemarljiv. Majhne razlike v skupnih računskih časih za simulacije Monte Carlo za različne kovariančne funkcije gredo predvsem na račun adaptivne izbire časovnih korakov, zaradi česar je ob naključni vrednosti debeline nosilca za analizo lahko potrebnih različno število korakov.

Na sliki 7.32 je prikazana primerjava perturbacijske metode 2. reda in 100 simulacij Monte Carlo za kovariančno funkcijo C_A , pri čemer se spreminja le po en člen K-L dekompozicije in sicer ξ_1 oz. ξ_5 , za preostale slučajne parametre pa je privzeto $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_M = 0$ oz. $\xi_1 = \xi_2 = \dots \xi_4 = \xi_6 = \dots = \xi_M = 0$. Število prikazanih simulacij Monte Carlo je

Preglednica 7.16: Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi (n_{odv}) in skupni CPU čas za različne metode.

Table 7.16: Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the limit load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.

	Perturbacijska metoda (ADB formulacija)				
	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
$\bar{\gamma}_{max}$	359.16	359.16	359.16	359.16	359.16
$\sigma_{\gamma_{max}}$	1.38	1.35	1.33	1.35	1.33
n_{odv}	2277	2210	2277	299	299
t	6004 s	5827 s	6004 s	792 s	792 s

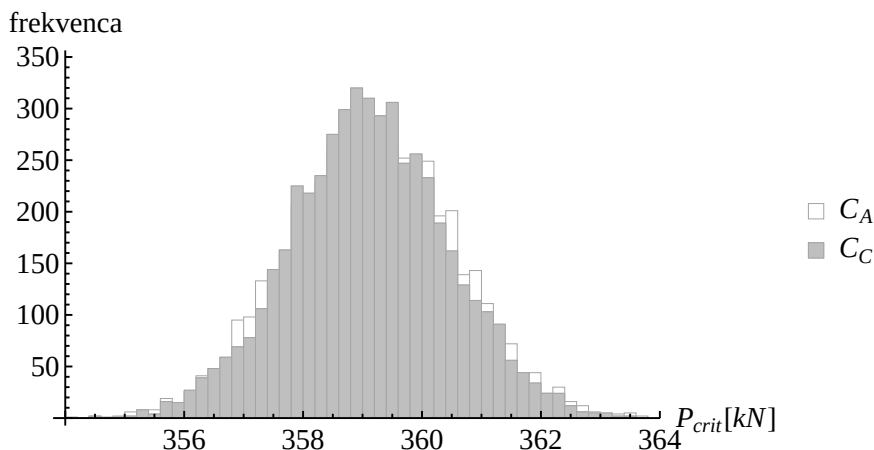
	Monte Carlo 5000 simulacij				
	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
$\bar{\gamma}_{max}$	359.14	359.14	359.11	359.12	359.15
$\sigma_{\gamma_{max}}$	1.39	1.36	1.33	1.38	1.31
t	150831 s	151794 s	152060 s	151933 s	151754 s

bilo omejeno na 100 zaradi boljše preglednosti diagrama. Oba diagrama dodatno potrđita ujemanje rezultatov.

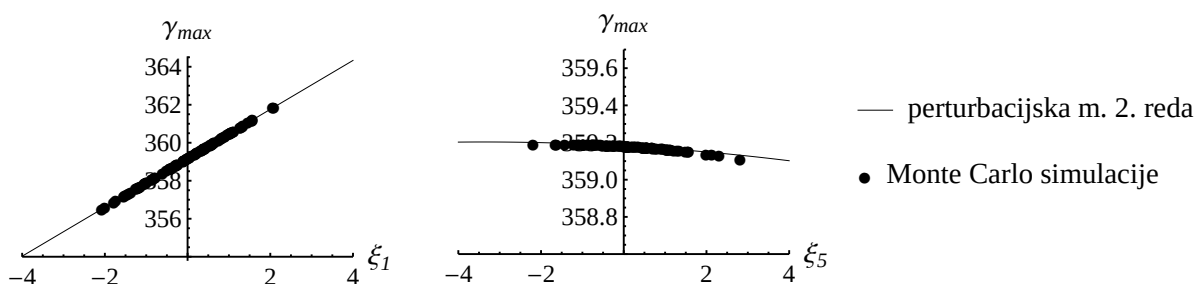
7.2.4 Tlačen korodiran nosilec s spremenljivim porušnim mehanizmom

Izbran je jekleni prostoležeči nosilec z enakimi dimenzijami prečnega prereza ter enakimi robnimi pogoji kot v računskem primeru 7.2.3. Razlika je le v dolžini nosilca, ki je v tem primeru krajša in sicer meri nosilec v dolžino 2.6 m. Druga razlika v primerjavi z nosilcem iz poglavja 7.2.3 je tudi v parametrih stohastičnega polja korozije. Tudi v tem primeru je modelirana jamičasta korozija, le da ima stohastično polje tokrat nekoliko večjo pričakovano vrednost ter nekoliko večjo standardno deviacije. Podatki o stohastičnem polju spremembe debeline zaradi korozije so podani v preglednici 7.17. Zaradi razlik v dimenziji nosilca in parametrih korozije, je obnašanje nosilca v tem primeru nekoliko bolj nepredvidljivo, saj pride zaradi manjše primerjalne vitkosti (ki v primeru da je debelina pločevin stanjšana za pričakovano vrednost znaša 0.99) in stohastično razporejene korozije do interakcije globalnega uklona, plastifikacije materiala in lokalne izbočitve pločevin.

Bistvo tega numeričnega primera je, da se pokaže omejitve perturbacijske metode. Perturbacijska metoda je namreč primerna le za zvezen odziv sistema in ne zmore zajeti diskretnih dogodkov. V danem računskem primeru to pomeni, da lahko perturbacijska



Slika 7.31: Histograma kritične uklonske sile za kovariančni funkciji C_A in C_C .
Figure 7.31: Histograms of critical buckling load for covariance functions C_A and C_C .



Slika 7.32: Mejni obtežni faktor $\gamma_{max}(\xi_1)$ in $\gamma_{max}(\xi_5)$, izračunan s perturbacijsko metodo drugega reda in 100 Monte-Carlo simulacijami.

Figure 7.32: Limit load factor $\gamma_{max}(\xi_1)$ and $\gamma_{max}(\xi_5)$, obtained with second-order perturbation method and 100 Monte Carlo simulations.

metoda razvije mejni obtežni faktor v Taylorjevo vrsto okrog odziva, do katerega pride pri pričakovani vrednosti stohastičnega polja, ne zmore pa upoštevati, da se s spreminjanjem slučajnih spremenljivk lahko spreminja tudi porušni mehanizem.

Modeliranje geometrijske nepopolnosti nosilca

Geometrijska nepopolnost je izračunana na enak način kot je opisano v poglavju 7.2.3 in sicer je upoštevanih prvih 6 uklonskih oblik nosilca v razmerju 1:0.7:0.7:0.7:0.7:0.7. Nepopolnost je nato normirana tako, da je največji odklon nepopolne od idealne geometrije e_0 enak $e_0 = L/200$. Ker je nosilec v tem primeru krajši, je za razliko od prejšnjega primera, kjer je bilo prvih 5 uklonskih oblik globalnih in šele šesta lokalna, tokrat le prva uklonska oblika globalna, pri preostalih 5-ih oblikah pa so prisotne lokalne izbočitve pločevin. Prvih 6 uklonskih oblik je prikazano na sliki 7.33, 5-kratna povečava dobljene geometrijske nepopolnosti pa je prikazana na sliki 7.34.

Diskretizacija stohastičnega polja korozije v K-L vrsto

Proces korozije je opisan s stohastičnim poljem spremembe debeline. Kot v prejšnjem

Preglednica 7.17: Parametri stohastičnega polja korozije.
Table 7.17: Parameters for the stochastic field of corrosion.

Pričakovana vrednost (Δt)	−1.8 mm
Standardna deviacija ($\sigma_{\Delta t}$)	0.7 mm
Korelacijska dolžina (l_c)	300 mm
Efektivna dolžina (l_{eff})	$3l_c$

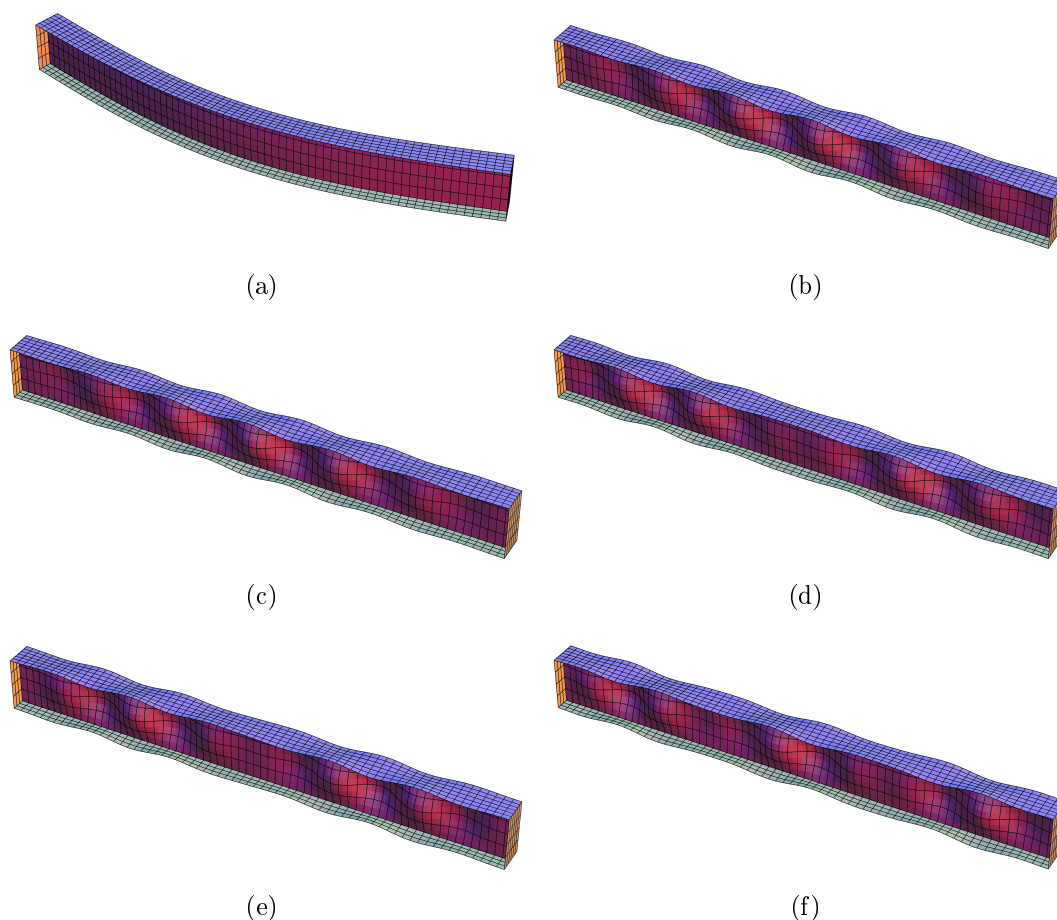
primeru tlačnega nosilca je tudi tokrat narejena primerjava opisa stohastičnega polja z vsemi petimi kovariančnimi funkcijami, kot so opisane v poglavju 5. Število členov K-L vrste je v vseh primerih takšno, da je natančnost variance polja, izračunana na podlagi enačbe (2.34) 80 %. Ker je tokrat nosilec krajši in korelacijska dolžina zato relativno večja v primerjavi z dolžino nosilca kot je bila v prejšnjem računskem primeru, je tokrat za dosego 80 % natančnosti potrebnih manj členov K-L dekompozicije, gostota kovariančnih funkcij pa je v primeru modificiranih kovariančnih funkcij večja in čas sestavljanja kovariančnih matrik temu primerno nekoliko daljši. Število členov, ki je potrebno za isto natančnost, je tudi tokrat zelo v prid funkcijama C_D in C_E . Potrebno število členov vrste za posamezno kovariačno funkcijo, računski čas, potreben za sestavljanje kovariančnih matrik in gostota kovariančnih matrik za različne kovariančne funkcije so prikazani v preglednici 7.18. Izračuni so bili izvedeni na računalniku z Intelovim procesorjem i7-950 (3.07 GHz), z 12 GB RAM-a, 4 jedri in 8 nitmi.

Preglednica 7.18: Potrebno število členov K-L vrste za 80 % natančnost variance, čas centralne procesne enote (CPU) za sestavo kovariančne matrike in gostota kovariančne matrike za različne kovariančne funkcije.

Table 7.18: Number of retained terms in K-L decomposition to attain 80 % accuracy of stochastic field variance, central processor unit (CPU) time to assemble covariance matrix and covariance matrix density for different covariance functions.

	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
M	35	34	35	12	13
t	30.7 s	15.3 s	15.3 s	30.7 s	15.3 s
gostota $\mathbf{C}$	1	0.55	0.55	1	0.55

Za diskretizacijo stohastičnega polja je bil nosilec razdeljen na enako število poddomen kot v primeru mehanskega modela, torej kot v prejšnjem računskem primeru. V primeru kovariančnih funkcij, ki so neničelne preko celotne domene se zaradi enake gostote mreže kot v prejšnjem računskem primeru, tudi tokrat formira 592416 2×9 -vozliščnih stohastičnih elementov. Pri modificiranih kovariančnih funkcijah pa ima večja koreliranost stohastičnega polja korozije zaradi krajše dolžine nosilca za posledico skoraj dvakrat večje število stohastičnih končnih elementov kot v računskem primeru daljšega nosilca in sicer



Slika 7.33: Prvih šest uklonskih oblik nosilca.
Figure 7.33: First six buckling modes of the beam.

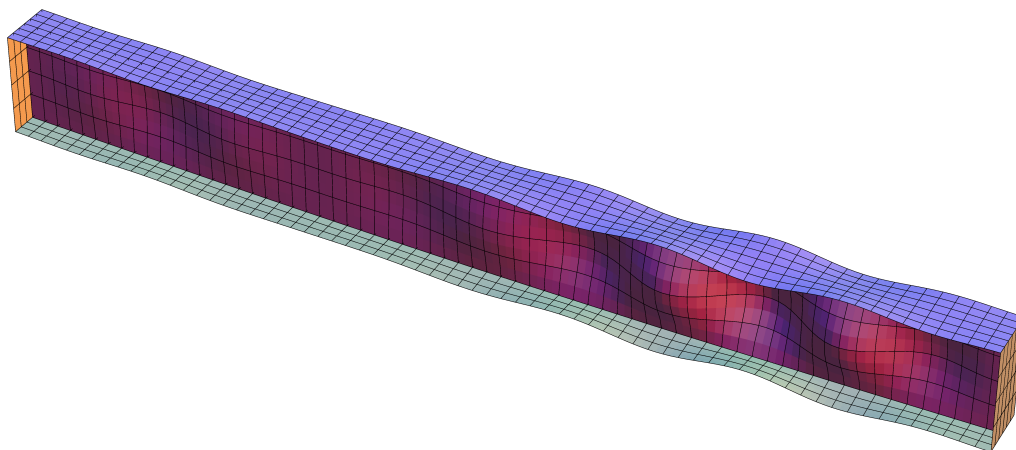
334566.

Razvoj odziva v vrsto z uporabo perturbacijske metode

Za izračun mejne obremenitve je bila izvedena nelinearna analiza po enakem postopku (postopno povečevanje obremenitve konstrukcije, pri čemer se vodi vodoravni pomik v krajni točki nosilca (pri $x = L$), v težiščni točki prečnega prereza), kot je opisano v predhodnem računskem primeru tlačnega nosilca. Na enak način se iz zadnjih treh korakov analize (ki se prekine čim je mejni obtežni faktor presežen) izračuna mejni obtežni faktor in občutljivosti. Za vsako od primerjanih kovariančnih funkcij se izvede tudi po 5000 simulacij Monte Carlo. Časovni koraki se tudi tokrat določajo adaptivno. Na sliki 7.35 je prikazan diagram obtežne poti za primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.

Primerjava rezultatov in numerične učinkovitosti perturbacijske metode in metode Monte Carlo

V preglednici 7.19 je prikazana primerjava rezultatov perturbacijske metode drugega reda in simulacij Monte Carlo, števila odvodov, ki jih je za različne kovariančne funkcije po-



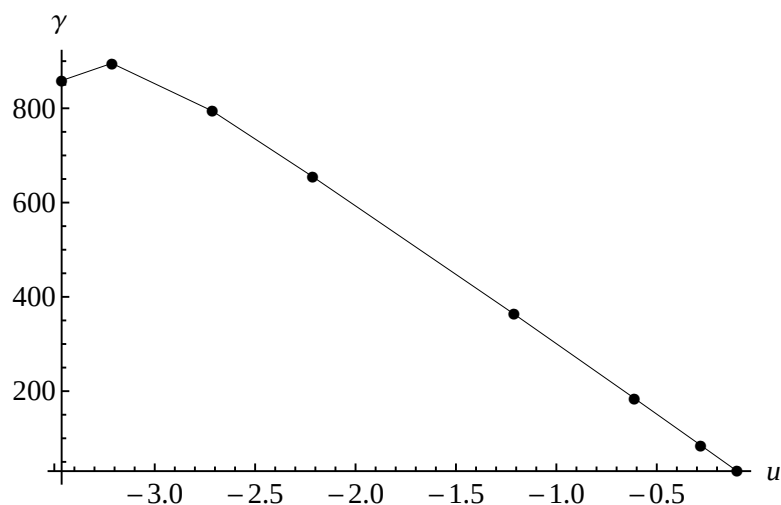
Slika 7.34: Model nepopolnosti nosilca, 5-kratna povečava.

Figure 7.34: Imperfections of the beam, 5-times magnified.

trebno izračunati v okviru perturbacijske metode in računskega časa kompletne primarne in občutljivostne analize za perturbacijsko metodo oz. računskega časa za izvedbo 5000 simulacij Monte Carlo.

Tokrat so med rezultati simulacij Monte Carlo in perturbacijske metode drugega reda opazne precejšnje razlike predvsem v pričakovani vrednosti mejne obtežbe. Razlog je v tem, da pri simulacijah Monte Carlo zaradi naključno porazdeljene korozije in manjše vitkosti nosilca v primerjavi s prejšnjim računskim primerom prihaja do različnih porušnih mehanizmov, kot je razvidno iz slik 7.36 in 7.37. Močno nelinearno obnašanje funkcije odziva konstrukcije prikazuje tudi diagram na sliki 7.38, na kateri se spreminja le parameter ξ_3 , medtem ko je za ostale parametri privzeta njihova pričakovana vrednost $\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = \dots = \xi_M = 0$ (koreliranost stohastičnega polja je opisana s kovariančno funkcijo C_A). Iz tega diagrama je jasno, da razvoj v Taylorjevo vrsto drugega reda, ki odziv aproksimira s kvadratno parabolo, ne more dobro opisati dejanskega odziva konstrukcije v odvisnosti od stohastičnih parametrov. Diagram sicer ni reprezentativen za vse slučajne parametre, saj se γ_{max} za nekatere parametre ξ_i spreminja manj nelinearno.

Računski časi analiz so v primerjavi z daljšim nosilcem nekoliko krajši, saj je bil v tem primeru večinoma potreben en časovni korak manj. Manjše razlike med računskimi časi simulacij Monte Carlo grejo tudi tokrat na račun adaptivne izbire časovnih korakov, zaradi česar je ob naključni vrednosti debeline nosilca za analizo lahko potrebnih različno število korakov.



Slika 7.35: Diagram obtežne poti za primer, ko je debelina nosilca enakomerno stanjšana za pričakovano vrednost.

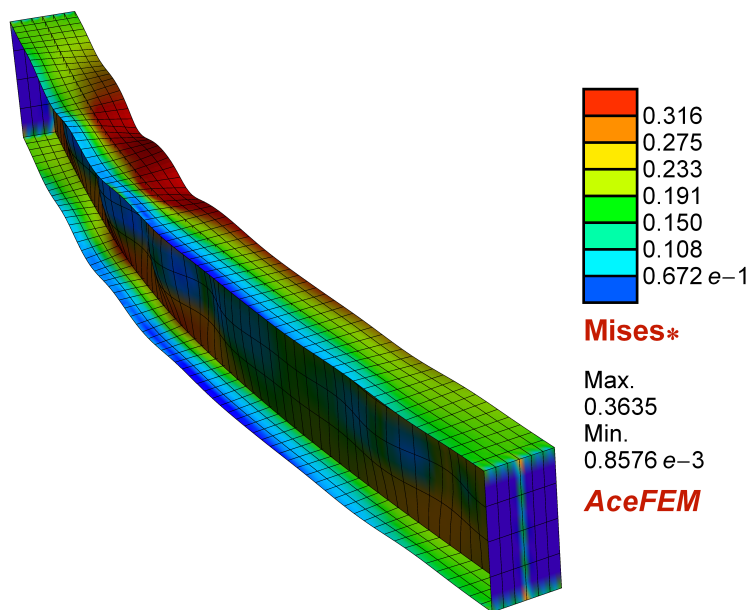
Figure 7.35: Load-displacement curve for the beam with uniformly reduced thickness.

Preglednica 7.19: Pričakovana vrednost ($\bar{\gamma}_{max}$) in standardna deviacija ($\sigma_{\gamma_{max}}$) mejnega obtežnega faktorja γ_{max} , število odvodov, ki jih je potrebno izračunati pri perturbacijski metodi (n_{odv}) in skupni CPU čas za različne metode.

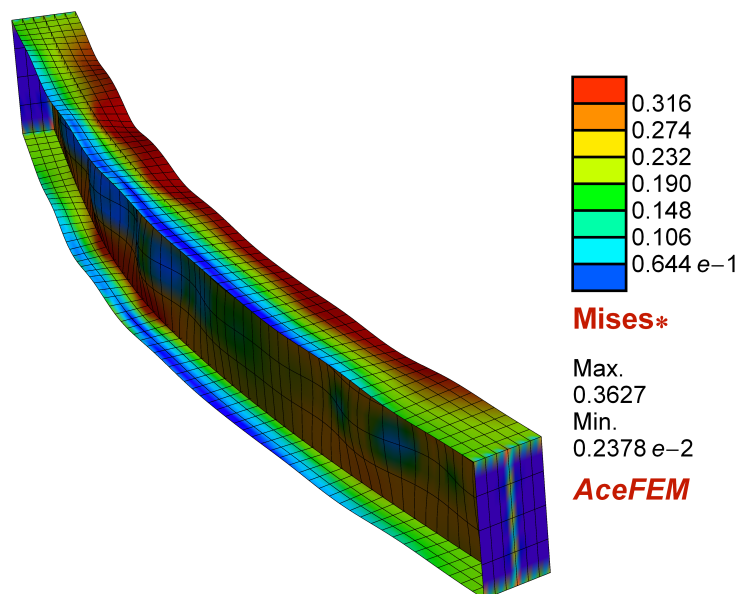
Table 7.19: Expected value ($\bar{\gamma}_{max}$) and standard deviation ($\sigma_{\gamma_{max}}$) of the ultimate load factor γ_{max} , number of derivatives that have to be calculated in case of perturbation method (n_{odv}) and total CPU time, needed to perform the analysis with different methods.

	Perturbacijska metoda (ADB formulacija)				
	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
$\bar{\gamma}_{max}$	894.1	894.1	894.2	894.5	894.5
$\sigma_{\gamma_{max}}$	46.3	46.2	46.1	47.7	47.5
n_{odv}	665	629	665	90	104
t	1404 s	1404 s	1404 s	229 s	228 s

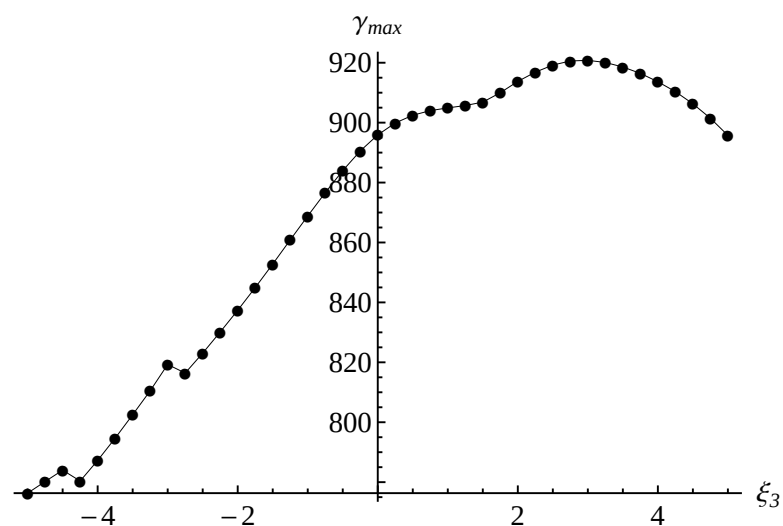
	Monte Carlo 5000 simulacij				
	C_A	C_B	C_C	C_D	C_E
$\bar{\gamma}_{max}$	870.6	870.1	868.2	869.7	869.4
$\sigma_{\gamma_{max}}$	46.5	46.0	46.5	48.4	47.8
t	147338 s	146612 s	148916 s	147674 s	146018 s



Slika 7.36: Primer, ko zaradi stohastične porazdelitve korozije nosilec odpove lokalno.
Figure 7.36: Local buckling of the beam due to stochastically distributed corrosion.



Slika 7.37: Primer, ko zaradi stohastične porazdelitve korozije nosilec odpove globalno.
Figure 7.37: Global buckling of the beam due to stochastically distributed corrosion.



Slika 7.38: Mejni obtežni faktor v odvisnosti od slučajnega parametra ξ_3 , izračunan z dejanskimi simulacijami.

Figure 7.38: Limit load factor in dependence on parameter ξ_3 , obtained with simulations.

8 Zaključki

V inženirskih problemih imamo opravka z naključnostjo pri skoraj vseh parametrih problema. Zato je stohastičen pristop prepoznan kot najbolj natančen pristop za opis mehanskih problemov, kljub temu pa je zelo redko uporabljen v praksi. Glavni razlog je bistveno večja kompleksnost opisa mehanskega problema v primerjavi z determinističnim pristopom ter pomanjkanje metod avtomatizacije modeliranja stohastičnega odziva konstrukcije.

Za analizo mehanskega problema je tako v znanstveno raziskovalnih krogih kot v inženirski praksi najpogosteje uporabljena metoda končnih elementov. Zato je bil naš cilj razviti avtomatizacijo modeliranja stohastičnih procesov, ki bi bila kompatibilna z obstoječo tehnologijo končnih elementov. Posledično ima razvita avtomatizacija prednosti, ki odlikujejo metodo končnih elementov, kot so na primer možnost aplikacije za poljubne geometrijsko in materialno nelinearne probleme, enostavno modeliranje robnih pogojev problema in relativno nizka cena analiziranja mehanskih problemov. Poleg tega ima razvita avtomatizacija, ki je zasnovana za uporabo v metodi končnih elementov, zaradi splošne uveljavljenosti slednje velik potencial za njeno širšo uporabo v prihodnosti.

V nadaljevanju podajamo pomembnejše rezultate, izvirne prispevke in zaključke disertacije.

Formulacija $2 \times N$ vozliščnih stohastičnih končnih elementov

Za opis in diskretizacijo stohastičnega polja je bila uporabljena Karhunen-Loèvvova dekompozicija, ki izmed metod, ki stohastično polje razvijejo v vrsto, predstavlja optimalno redukcijo v smislu potrebnega števila členov vrste in je hkrati primerna za poljubno variabilne stohastične procese. Za izračun determinističnih členov Karhunen-Loèvvove dekompozicije smo izbrali Galerkinovo metodo, ki reševanje Fredholmove integralske enačbe prevede na reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti in se izkazuje kot najbolj primerna in natančna za uporabo v metodi končnih elementov. Vendar se je izkazalo, da neposredna implementacija Galerkinove metode v standardno okolje za izračun problemov po metodi končnih elementov na običajen način ni možna. Problem je v izračunu prispevka končnega elementa h kovariančni matriki, saj je v tem koraku potrebno poznati razdaljo med posameznimi elementi. Klasično formulirani končni elementi informacije o koordinatah preostalih elementov ne vsebujejo. Da smo se izognili temeljnemu poseganju v okolje za končne elemente, smo problem rešili tako, da smo razvili formulacijo stohastičnih končnih elementov na ta način, da sta v posameznem končnem elementu kombinirani po dve poddomeni prostorske domene. Razvita rešitev je primerna in uporabna v po-

ljubnem standardnem okolju za končne elemente, ki omogoča vključevanje uporabniško definiranih končnih elementov. Za izboljšanje numerične učinkovitosti ob uporabi predlagane formulacije stohastičnih končnih elementov smo upoštevali tudi lastnost, da sta matrika oblikovnih funkcij in kovariančna matrika simetrični.

Dokaz, da poenostavljena kovariančna funkcija ni pozitivno definitna

Z namenom pocenitve numeričnega postopka se v primeru srednje in nizko koreliranih stohastičnih polj v literaturi pogosto pojavlja poenostavljena eksponentna kovariančna funkcija, ki smo jo poimenovali okrnjena eksponentna kovariančna funkcija. Dokazali smo, da okrnjena eksponentna kovariančna funkcija ni pozitivno definitna, zaradi česar je problem posledično numerično nestabilen. Posledica je, da dobimo tudi negativne lastne vrednosti. Le-te so sicer praviloma višjega reda in po velikosti majhne, zato (če zanemarimo dejstvo, da mora biti kovariančna funkcija po definiciji pozitivno definitna) na sam rezultat razvoja v Karhunen-Loèvovo vrsto ne vplivajo bistveno. Pomemben pa je predvsem vpliv negativnih lastnih vrednosti na numerično učinkovitost reševanja posplošenega problema lastnih vrednosti. Učinkovitih algoritmov za izračun manjšega števila lastnih vrednosti in lastnih vektorjev velikih razpršenih matrik, kot je npr. Arnoldi, v primeru izgube pozitivne definitnosti namreč ni možno uporabiti.

V disertaciji predlagamo dve alternativni modifikaciji kovariančne funkcije. Prva je aproksimacija okrnjene eksponentne kovariančne funkcije, druga pa je aproksimacija gladke kovariančne funkcije. Gladka kovariančna funkcija je za razliko od eksponentne kovariančne funkcije v izhodišču odvedljiva, kar ima za posledico boljšo konvergenco Karhunen-Loèvove dekompozicije in potrebuje za isto natančnost opisa stohastičnega polja manj členov.

Vse tri modifikacije kovariančne funkcije (okrnjena eksponentna kovariančna funkcija in obe predlagani kovariančni funkciji) so aproksimacije kovariančne funkcije na način, da je aproksimirana kovariančna funkcija od neke (poljubno) izbrane točke naprej (ki smo jo poimenovali efektivna dolžina) enaka nič. Posledično je kovariančna matrika razpršena in (ob pogoju pozitivne definitnosti) omogoča uporabo numerično učinkovitih algoritmov.

Na računskih primerih smo pokazali prednosti modificiranih kovariančnih funkcij v smislu numerične učinkovitosti. Pokazali smo tudi, da uporaba predlaganih modificiranih kovariančnih funkcij namesto originalne eksponentne kovariančne funkcije ne vpliva bistveno na rezultate. Razlike v stohastičnem polju so v primeru uporabe modificiranih kovariančnih funkcij in pri izbiri ustrezne efektivne dolžine zanemarljivo majhne.

Naredili smo tudi parametrično študijo vpliva modificiranih kovariančnih funkcij na numerično stabilnost postopka. Študije so pokazale, da za vse tri primerjane modificirane kovariančne funkcije velja: gostejša je diskretizacijska mreža, večja mora biti efektivna dolžina (t.j. dolžina, od katere naprej je modificirana kovariančna funkcija enaka nič), da je izračunana kovariančna matrika pozitivno definitna. Iz primerjav numerične stabilno-

sti postopka ob enaki gostoti mreže pa lahko zaključimo, da je ob uporabi predlaganih modifikacij kovariančna matrika pozitivno definitna že ob znatno manjši efektivni dolžini kot okrnjena eksponentna kovariančna funkcija, ki se jo v literaturi običajno uporablja. Nadalje lahko na podlagi parametričnih študij za vse modifikacije kovariančnih funkcij predlagamo priporočilo izbire efektivne dolžine na intervalu med tremi in petimi korelacijskimi dolžinami. Izbira znotraj teh vrednosti je odvisna predvsem od velikosti problema in želene natančnosti.

Primerjava globalne napake variance diskretiziranega stohastičnega polja pokaže še eno prednost predlagane modificirane okrnjene kovariančne funkcije pred okrnjeno kovariančno funkcijo. Z naraščanjem števila ohranjenih členov Karhunen-Loèveve dekompozicije modificirana okrnjena kovariančna funkcija bolje konvergira k rešitvi originalne eksponentne kovariančne funkcije kot okrnjena kovariančna funkcija.

Na avtomatskem odvajanju bazirana formulacija perturbacijske metode višjega reda

Perturbacijska metoda je metoda za izračun statistike odziva konstrukcije. V perturbacijski metodi se odziv konstrukcije aproksimira z razvojem odziva v Taylorjevo vrsto. Red perturbacijske metode pomeni red Taylorjeve vrste, v katero se razvije odziv. V splošnem velja: višji je red perturbacijske metode, bolj natančen je opis odziva v njegovi širši okolici. Posledično imajo izračunane statistike višjo natančnost. Kljub temu je perturbacijska metoda višjega reda v znanstveni literaturi zelo redko uporabljena. Vzrok temu je pomanjkanje učinkovitih in natančnih algoritmov za izračun odvodov višjega reda funkcionala odziva, ki so potrebni za izvedbo perturbacijske metode višjega reda. Analiza, s katero se računa odvode funkcionala odziva, se imenuje občutljivostna analiza.

V disertaciji je razvit postopek numerično zelo učinkovitega in analitično natančnega izračuna odvodov višjega reda funkcionala odziva. Postopek smo razvili tako, da smo avtomatizacijo občutljivostne analize, ki z uporabo avtomatskega odvajanja izračuna analitične vrednosti odvodov prvega reda (Korelc, 2009a), razširili za občutljivostno analizo (poljubnega) višjega reda. Razvita formulacija občutljivostne analize višjega reda bazira na avtomatskem odvajanju in izračuna analitične odvode višjega reda v natančnosti enaki računski natančnosti. Formulacija inženirskih problemov, ki bazira na uporabi razširjene tehnike avtomatskega odvajanja, se imenuje "*Automatic Differentiation Based formulation*" ali okrajšano ADB formulacija. Odlikuje jo tudi pregleden in strnjen zapis enačb simbolnega zapisa končnega elementa, ki je rezultat uporabe hibridnega simbolno-numeričnega pristopa za opis mehanskih problemov.

Numerična učinkovitost razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov je primerljiva z numerično učinkovitostjo deterministične analize z uporabo klasične metode končnih elementov. Glede numerične učinkovitosti so razviti ADB formulaciji občutljivostne analize konkurenčne le kode končnih elementov, v katerih so izrazi za izračun odvodov

ročno izpeljani in optimirani. Vendar je slabost slednjega pristopa, da je izpeljava izrazov zelo kompleksna in zamudna že za odvode prvega reda in z višanjem reda odvodov postane praktično neizvedljiva. Primerjava numerične učinkovitosti razvite ADB formulacije z drugimi obstoječimi metodami za izračun odvodov višjega reda je močno v prid prvi in je prikazana na številnih računskih primerih. Zaradi visoke numerične učinkovitosti je na ta način možna izvedba perturbacijske metode višjega reda za neprimerno višje število uporabljenih členov Karhunen-Loèveve dekompozicije, kot je možno z drugimi razvitimi metodami za izračun odvodov (npr. metodo končnih diferenc ali simbolno občutljivostno analizo).

Razvita formulacija občutljivostne analize višjega reda, ki bazira na avtomatskem odvajanju, ne predstavlja le pridobitve v stohastičnem pristopu k reševanju mehanskih problemov, temveč je uporabna tudi na drugih področjih, npr. pri optimizaciji konstrukcij, kjer se v primeru podatka o odvodih drugega reda lahko uporabi kvadratično konvergentne algoritme.

Pomen razvite metode za razvoj inženirske znanosti

Ker je računski čas, potreben za izvedbo analize z razvito avtomatizacijo metode stohastičnih končnih elementov primerljiv z računskim časom deterministične analize, predstavlja razvita avtomatizacija potencial za uporabo v splošni inženirski praksi in za nadaljnji razvoj Evrokodov (evropskih standardov, ki urejajo področje projektiranja gradbenih konstrukcij). Le-ti namreč že zdaj dovoljujejo uporabo tako determinističnega kot stohastičnega pristopa, vendar zaradi pomanjkanja enostavnih in učinkovitih metod trenutno temeljijo predvsem na determinističnem pristopu.

Zaključki računskih primerov

Uporaba razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov je prikazana na petih računskih primerih. V prvih dveh računskih primerih je s stohastičnim poljem opisana začetna geometrijska nepopolnost, v zadnjih treh pa proces korozije. Računski primeri so izbrani tako, da je razvita avtomatizacija metode stohastičnih končnih elementov verificirana za vse osnovne primere, pomembne za inženirsko prakso. V smislu mesta pojavnosti parametra (ki se ga modelira s stohastičnim poljem) v kodi končnega elementa, je avtomatizirana metoda stohastičnih končnih elementov verificirana tako za primer, ko stohastičnost vpliva na geometrijo domene problema (računska primera s stohastičnim poljem geometrijske nepopolnosti) kot za primer ko se parameter v enačbah za izračun reziduala pojavi eksplicitno (računski primeri s stohastičnim poljem korozije, ki je modelirana kot sprememba debeline prečnih prereзов). Nadalje smo računske primere izbrali tako, da je avtomatizacija verificirana za različne porušne mehanizme in sicer tako za mejno stanje materiala, kot za mejno stanje stabilnosti.

Zaključki računskih primerov:

- Primerjava med razvito ADB formulirano občutljivostno analizo in simbolno obču-

tljivostno analizo, ki prav tako izračuna analitične vrednosti odvodov, potrdi popolno ujemanje rezultatov obeh metod ob neprimerno večji numerični učinkovitosti razvite ADB formulacije občutljivostne analize.

- Visoka numerična učinkovitost razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov omogoča izvedbo perturbacijske metode višjega reda za znatno večje število členov Karhunen-Loèvove dekompozicije, kot je možno z drugimi razvitimi metodami za izračun odvodov (npr. metodo končnih diferenc ali simbolno občutljivostno analizo).
- ADB formulirana perturbacijska metoda višjega reda je ne glede na velikost in kompleksnost problema neobčutljiva na izbiro časovnih korakov analize ter na izvedbo analize z uporabo več jeder ali t. i. paralelizacije, medtem ko so rezultati metode končnih diferenc (ki je sicer najpogostejše uporabljena metoda za izračun občutljivosti) v primeru kompleksnih mehanskih problemov zaradi seštevavanja vmesnih diskretizacijskih oz. zaokrožitvenih napak popolnoma napačni.
- Razvita avtomatizacija za opis stohastičnih polj in izračun statistike odziva z uporabo metode končnih elementov je primerna tudi za opis procesa korozije.
- Računski čas, potreben za izvedbo analize konstrukcij z realističnim upoštevanjem njihove stohastične narave, je primerljiv z računskim časom deterministične analize z uporabo klasične metode končnih elementov.

9 Povzetek

V disertaciji je obravnavana metoda stohastičnih končnih elementov v modeliranju konstrukcij. Glavni cilj disertacije je razvoj splošnega simbolnega pristopa k avtomatizaciji modeliranja močno in srednje koreliranih stohastičnih procesov v okolju za končne elemente. Stohastičen pristop je zaradi dejanske stohastične narave večine lastnosti materialov in drugih pojavov v naravi namreč prepoznan kot najbolj natančen pristop za opis mehanskih problemov, kljub temu pa je zaradi svoje kompleksnosti in pomanjkanja avtomatizacije modeliranja zelo redko uporabljen v praksi. Temu primerno je bilo glavno vodilo pri iskanju numeričnih algoritmov in razvoju izboljšav obstoječih numeričnih metod, da so kompatibilne z obstoječimi numeričnimi postopki, ki se uporabljajo v metodi končnih elementov. Metoda končnih elementov je zaradi svoje robustnosti in neomejenosti namreč najpogosteje uporabljena metoda za analizo mehanskih problemov.

V disertaciji je bil uporabljen hibridni simbolno-numerični pristop, ki kombinira različne metode in pristope na način, da se uporabi prednosti vsake metode, medtem ko se na področju, na katerem je posamezna metoda šibka, uporabi drugo metodo. Na ta način je končni rezultat boljši, kot če bi uporabili le eno izmed metod. V uporabljenem hibridnem simbolno-numeričnem pristopu so kombinirani: program za simbolno računanje Mathematica, ki omogoča pregleden in strnjen zapis enačb problema, avtomatski generator kode z vgrajeno tehniko avtomatskega odvajanja AceGen, ki simbolni zapis enačb avtomatično prevede v poljuben izbrani programski jezik (npr. C, C++, FORTRAN itd.), ne da bi bilo potrebno karkoli spreminjati v izvorni kodi, ter okolje za končne elemente AceFEM, ki je programski paket Mathematice in zato omogoča veliko svobodo v vsakem koraku analize ter v prikazu rezultatov. Zelo pomembna prednost uporabljenega pristopa je možnost uporabe tehnike avtomatskega odvajanja, ki z vpeljavo podajanja izjem k proceduri odvajanja omogoča neomejeno uporabo na lokalnem nivoju v metodi končnih elementov. Na ta način so dobljene vrednosti odvodov analitične, natančne do natančnosti računalniškega zapisa števil ob hkratni visoki numerični učinkovitosti.

Stohastična metoda končnih elementov je v grobem sestavljena iz dveh korakov: opisa problema s stohastičnim poljem ter izračuna statistike odziva konstrukcije. V disertaciji smo se posvetili vsakemu koraku posebej.

Diskretizacija stohastičnega polja

Kot najboljša rešitev izmed metod za opis in diskretizacijo stohastičnega polja se ponuja Karhunen-Loèvova dekompozicija, ki stohastično polje razvije v vrsto in predstavlja optimalno redukcijo v smislu potrebnega števila členov vrste. Poleg tega je Karhunen-Loèvova

dekompozicija primerna tako za stohastične procese, ki se spreminjajo preko prostorske domene problema, kot za stohastične procese, ki se spreminjajo skozi čas ter za poljubno korelirane stohastične procese.

Deterministične člene Karhunen-Loèvove dekompozicije se izračuna kot rešitev homogene Fredholmove integralske enačbe drugega reda. Ker za splošen primer analitična rešitev te enačbe ne obstaja, smo za numerično reševanje Fredholmove enačbe uporabili Galerkinovo metodo, ki reševanje te enačbe prevede na reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti in omogoča implementacijo problema v okolje za metodo končnih elementov. Problem, ki ga je bilo pri tem potrebno rešiti, je, da neposredna implementacija Galerkinove metode v standardno okolje za izračun problemov po metodi končnih elementov na običajen način ni možna. Razlog je, da je za izračun prispevka končnega elementa h kovariančni matriki potrebno poznati razdaljo med posameznimi elementi. Ker klasično formulirani končni elementi podatka o koordinatah preostalih elementov ne vsebujejo, smo problem rešili tako, da smo razvili formulacijo stohastičnih končnih elementov na način, da sta v posameznem končnem elementu kombinirani po dve poddomeni prostorske domene. Predlagana rešitev je primerna in uporabna v poljubnem standardnem okolju za končne elemente, ki omogoča vključevanje uporabniško definiranih končnih elementov. Posledično je operiranje s poljubnimi oblikami ali topologijami problema zelo enostavno.

Nadalje smo v okviru raziskav možnosti pocenitve numeričnega postopka za ta korak posebno pozornost namenili poenostavljeni kovariančni funkciji, ki se v primeru srednje koreliranih stohastičnih polj pogosto uporablja v literaturi. Poenostavljena kovariančna funkcija (ki smo jo poimenovali okrnjena eksponentna kovariančna funkcija) je aproksimacija eksponentne kovariančne funkcije. Eksponentna kovariančna funkcija je najpogostejše uporabljena kovariančna funkcija za opis koreliranosti parametrov v mehanskih problemih. V primeru srednje in nizko koreliranih stohastičnih polj eksponentna kovariančna funkcija z oddaljenostjo od izhodišča hitro pada. Ta njena lastnost ponuja možnost, da se jo aproksimira tako, da se privzame, da je kovariančna funkcija od neke točke naprej (ki smo jo poimenovali efektivna dolžina) enaka nič. Prednost okrnjene eksponentne kovariančne funkcije je, da je pripadajoča kovariančna matrika razpršena in je zato možna uporaba učinkovitejših algoritmov. Problem tako definirane kovariančne funkcije je, da ni pozitivno definitna, kar pa je v obstoječih člankih večinoma prezrto. V disertaciji smo dokazali, da predlagana poenostavljena kovariančna funkcija ni pozitivno definitna, zaradi česar je problem numerično nestabilen. Posledica je, da dobimo tudi negativne lastne vrednosti. Le-te so sicer praviloma višjega reda in po velikosti majhne, zato (če zanemarimo dejstvo, da mora biti kovariančna funkcija po definiciji pozitivno definitna) na sam rezultat razvoja v Karhunen-Loèvovo vrsto ne vplivajo bistveno. Pomemben pa je predvsem vpliv negativnih lastnih vrednosti na numerično učinkovitost reševanja posplošenega problema lastnih vrednosti. Učinkovitih algoritmov za izračun manjšega števila lastnih vrednosti in lastnih vektorjev velikih razpršenih matrik, kot je npr. Arnoldi, v

primeru izgube pozitivne definitnosti namreč ni možno uporabiti.

V disertaciji smo predlagali dve alternativni modifikaciji kovariančne funkcije, ki pocenita numerično reševanje problema in hkrati zagotavljata boljšo numerično stabilnost. Prva modifikacija je modifikacija okrnjene eksponentne kovariančne funkcije, druga predlagana modifikacija pa je modifikacija gladke kovariančne funkcije. Gladka kovariančna funkcija je modifikacija eksponentne kovariančne funkcije, ki jo predlagajo Spanos, Bear in Redhorse (2007). Lastnost eksponentne kovariančne funkcije, da je v izhodišču neodvedljiva, ima namreč za posledico slabo konvergenco Karhunen-Loèveve dekompozicije v bližini te točke. Kot rešitev avtorji predlagajo modifikacijo eksponentne kovariančne funkcije tako, da se odpravi neodvedljivost kovariančne funkcije v njenem izvoru. Posledica je boljša konvergenca Karhunen-Loèveve dekompozicije, ki potrebuje za isto natančnost opisa stohastičnega polja manj členov.

Na numeričnih primerih smo pokazali prednosti modificiranih kovariančnih funkcij v smislu numerične učinkovitosti. Pokazali smo tudi, da uporaba predlaganih modificiranih kovariančnih funkcij namesto originalne eksponentne kovariančne funkcije ne vpliva bistveno na rezultate, saj so razlike ob izbiri ustrezne efektivne dolžine zanemarljivo majhne.

Naredili smo tudi parametrično študijo vpliva modificiranih kovariančnih funkcij na numerično stabilnost postopka. Študije so pokazale, da za vse tri primerjane modificirane kovariančne funkcije velja, gostejša je diskretizacijska mreža, večja mora biti efektivna dolžina (t.j. dolžina, od katere naprej je modificirana kovariančna funkcija enaka nič), da je izračunana kovariančna matrika pozitivno definitna. Iz primerjav numerične stabilnosti postopka ob enaki gostoti mreže pa lahko zaključimo, da je ob uporabi predlaganih modifikacij kovariančna matrika pozitivno definitna že ob znatno manjši efektivni dolžini kot okrnjena eksponentna kovariančna funkcija. Nadalje lahko na podlagi parametričnih študij za vse modifikacije kovariančnih funkcij predlagamo priporočilo izbire efektivne dolžine na intervalu med tremi in petimi korelacijskimi dolžinami. Izbira znotraj teh vrednosti je odvisna predvsem od velikosti problema in želene natančnosti.

Primerjava globalne napake variance diskretiziranega stohastičnega polja pokaže še eno prednost predlagane modificirane okrnjene kovariančne funkcije pred okrnjeno kovariančno funkcijo. Z naraščanjem števila ohranjenih členov Karhunen-Loèveve dekompozicije modificirana okrnjena kovariančna funkcija bolje konvergira k rešitvi originalne eksponentne kovariančne funkcije kot okrnjena kovariančna funkcija.

Izračun statistike odziva konstrukcije

V okviru izračuna statistike odziva konstrukcije so nas zanimale predvsem statistike nižjega reda in sicer pričakovana vrednost in standardna deviacija odziva. Za izračun odziva stohastičnih problemov smo uporabili perturbacijsko metodo. Perturbacijska metoda odziv konstrukcije aproksimira z razvojem odziva v Taylorjevo vrsto. Red perturbacijske metode pomeni red Taylorjeve vrste, v katero se razvije odziv. Perturbacijska metoda iz-

računa statistike odziva v eni sami izvedbi analize mehanskega problema in je numerično veliko bolj učinkovita od drugih metod, ki se običajno uporabljajo za izračun statistik (npr. simulacije Monte Carlo ali spektralna metoda stohastičnih končnih elementov). Slabost perturbacijske metode je, da je primerna le za opis odzivov konstrukcije, ki se v okolici pričakovane vrednosti odziva obnašajo zvezno. V mehaniki trdnin to pomeni, da je uporaba perturbacijske metode omejena na primere, pri katerih se porušni mehanizem v odvisnosti od slučajnih parametrov ne spreminja. Poleg tega lahko perturbacijska metoda odziv konstrukcije opiše dovolj natančno le na omejenem območju okrog pričakovane vrednosti, odvisno od nelinearnosti odziva in reda perturbacijske metode. V splošnem velja: višji je red perturbacijske metode, bolj natančen je opis odziva v njegovi širši okolici. Kljub temu je perturbacijska metoda višjega reda v znanstveni literaturi zelo redko uporabljena. Vzrok je pomanjkanje učinkovitejših in natančnejših algoritmov za izračun odvodov višjega reda funkcionala odziva, ki so potrebni za izvedbo perturbacijske metode višjega reda. Analiza, s katero se računa odvode funkcionala odziva, se imenuje občutljivostna analiza. V disertaciji smo avtomatizacijo občutljivostne analize, ki z uporabo avtomatskega odvajanja izračuna analitične vrednosti odvodov (Korelc, 2009a), razširili za občutljivostno analizo (poljubnega) višjega reda. Razvita formulacija občutljivostne analize višjega reda bazira na avtomatskem odvajanju in izračuna analitične odvode višjega reda v natančnosti enaki računski natančnosti. Formulacija inženirskih problemov, ki bazira na uporabi razširjene tehnike avtomatskega odvajanja, se imenuje "*Automatic Differentiation Based formulation*" ali okrajšano ADB formulacija. Odlikuje jo tudi pregleden in strnjen zapis enačb simbolnega zapisa končnega elementa, ki je rezultat uporabe hibridnega simbolno-numeričnega pristopa za opis mehanskih problemov. Prednost ADB formulirane občutljivostne analize je tudi visoka numerična učinkovitost. Posledično je možna izvedba perturbacijske metode višjega reda za neprimerno višje število uporabljenih členov Karhunen-Loèveve dekompozicije, kot je možno z drugimi metodami za izračun odvodov (npr. metodo končnih diferenc ali simbolno občutljivostno analizo).

Razvita formulacija občutljivostne analize višjega reda, ki bazira na avtomatskem odvajanju, je uporabna tudi na drugih področjih, npr. pri optimizaciji konstrukcij, kjer se v primeru podatka o odvodih drugega reda lahko uporabi kvadratično konvergentne algoritme.

Numerična učinkovitost razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov je primerljiva z numerično učinkovitostjo deterministične analize z uporabo klasične metode končnih elementov. To pomeni, da razvita avtomatizacija poleg možnosti uporabe za raziskovalne namene predstavlja tudi potencial za uporabo v splošni inženirski praksi in nadaljnji razvoj Evrokodov (evropskih standardov, ki urejajo področje projektiranja gradbenih konstrukcij). Le-ti namreč že zdaj dovoljujejo uporabo tako determinističnega kot stohastičnega pristopa, vendar zaradi pomanjkanja enostavnih in učinkovitih metod trenutno temeljijo predvsem na determinističnem pristopu.

Računski primeri

V poglavju 7 je prikazana uporaba razvite avtomatizacije metode stohastičnih končnih elementov na petih računskih primerih, ki so razdeljeni na dva sklopa. V prvem sklopu, v katerem sta obravnavana dva računska primera, je s stohastičnim poljem opisana geometrijska nepopolnost. V drugem sklopu so obravnavani trije računski primeri korodiranih konstrukcij. Računski primeri so izbrani tako, da je razvita avtomatizacija metode stohastičnih končnih elementov verificirana za vse osnovne primere, pomembne za inženirsko prakso. V smislu mesta pojavnosti parametra (ki se ga modelira s stohastičnim poljem) v kodi končnega elementa, je avtomatizirana metoda stohastičnih končnih elementov verificirana tako za primer, ko stohastičnost vpliva na geometrijo domene problema (računska primera s stohastičnim poljem geometrijske nepopolnosti) kot za primer ko se parameter v enačbah za izračun reziduala pojavi eksplicitno (računski primeri s stohastičnim poljem korozije, ki je modelirana kot sprememba debeline prečnih prerezov). Nadalje smo računske primere izbrali tako, da je avtomatizacija verificirana za različne porušne mehanizme in sicer tako za mejno stanje materiala, kot za mejno stanje stabilnosti.

Prvi računski primer obravnava upogib sinusoidnega panela s stohastično spremenljivo amplitudo valov. Odziv panela je izračunan s perturbacijsko metodo z uporabo ADB formulirane občutljivostne analize ter simbolne občutljivostne analize. Obe metodi vrmeta analitične vrednosti odvodov. Primerjava rezultatov pokaže popolno ujemanje rezultatov obeh metod in potrdi pravilnost razvite ADB formulirane občutljivostne analize. Primerjava računskih časov pokaže neprimerno višjo numerično učinkovitost ADB formulirane občutljivostne analize. Odnos med odzivom panela je v odvisnosti od slučajnih parametrov nelinearen in pokaže razliko v natančnosti ocen statistike odziva ob uporabi perturbacijske metode različnih redov.

Računski primer ciklično obremenjene epruvete je izbran predvsem z namenom pokazati, da je zaradi visoke numerične učinkovitosti ADB formulirane perturbacijske metode tudi v primeru kompleksnih mehanskih problemov možno izračunati neprimerno večje število odvodov (poljubnega reda) kot z drugimi znanimi metodami. Stohastično polje geometrijske nepopolnosti je diskretizirano s Karhunen-Loèvo dekompozicijo, v kateri je ohranjenih 45 členov. Za izračun odziva konstrukcije z uporabo perturbacijske metode drugega reda to pomeni, da je potrebno izračunati skupno 1080 odvodov prvega in drugega reda. Nadalje se pokaže, da je ADB formulirana perturbacijska metoda višjega reda neobčutljiva na izbiro časovnih korakov analize ter na izvedbo analize z uporabo več jeder ali t. i. paralelizacije, medtem ko so rezultati metode končnih diferenc (ki je sicer najpogosteje uporabljena metoda za izračun občutljivosti) v tem primeru zaradi seštevavanja vmesnih diskretizacijskih oz. zaokrožitvenih napak popolnoma napačni.

V drugem sklopu so obravnavani trije računski primeri korodiranih konstrukcij. Korozija je kompleksen pojav razpadanja kovine, ki so mu bile v preteklosti namenjene že številne študije. Zaključki vseh obravnavanih študij in raziskav so, da je korozija močno stohastičen

proces in zato primeren za opis s stohastičnim poljem, vendar v literaturi skorajda ni zaslediti študije, ki bi ga obravnavala na ta način. V računskih primerih smo pokazali, da je razvita avtomatizacija za opis stohastičnih polj in izračun statistike odziva z uporabo metode končnih elementov primerna tudi za opis procesa korozije. Pričakovana vrednost, standardna deviacija in kovariančna funkcija so zaradi pomanjkanja eksperimentalnih rezultatov izbrane po lastni izbiri. Proces korozije smo opisali s stohastičnim poljem spremembe debeline lupinastih končnih elementov.

V vseh treh računskih primerih se za izračun mejne nosilnosti konstrukcije izvede nelinearna analiza. Upoštewane so tudi začetne geometrijske nepopolnosti konstrukcij. Konstrukcije se postopno obremenjuje in pri tem vodi pomik v izbrani točki, medtem ko je obtežni faktor ena izmed neznank problema (poleg prostostnih stopenj lupinastih končnih elementov). Zato je možno slediti obtežni poti tudi preko mejne obtežbe. V koraku, ko je mejna obremenitev konstrukcije presežena, se analiza prekine, mejni obtežni faktor in iskane občutljivosti pa izračuna iz obtežnih faktorjev in občutljivosti, ki pripadajo zadnjim trem korakom analize, kar je podrobneje obrazloženo v računskem primeru plošče.

Računski primer tlačnega prostoležečega korodiranega nosilca z globalnim uklonom kot merodajnim porušnim mehanizmom je zanimiv predvsem zaradi primerjave med numerično učinkovitostjo in rezultati perturbacijske metode ob uporabi različnih kovariančnih funkcij: eksponentne, gladke ter njunih modifikacij. Izkaže se, da so rezultati praktično enaki in upravičijo uporabo modificiranih kovariančnih funkcij, predlaganih v disertaciji. Primerjava rezultatov z simulacijami Monte Carlo potrди natančnost rezultatov, izračunanih s perturbacijsko metodo, ter pokaže neprimerno boljšo numerično učinkovitost ADB formulirane perturbacijske metode.

Ker je iz znanstvenega vidika prav, da se pokaže tudi slabosti in omejitve predlagane metode, smo za zadnji računski primer izbrali krajši tlačni korodiran nosilec, pri katerem se porušni mehanizem spreminja v odvisnosti od slučajnih spremenljivk stohastičnega polja. Posledično pokažejo simulacije Monte Carlo drugačno sliko glede statistike mejnega obtežnega faktorja, kot jo dobimo s perturbacijsko metodo. Razlog je, da perturbacijska metoda razvije mejni obtežni faktor v Taylorjevo vrsto okrog pričakovanega odziva, ne zmore pa upoštevati, da se s spreminjanjem slučajnih spremenljivk lahko spreminja tudi porušni mehanizem.

Zaključki vseh računskih primerov so, da je razvita avtomatizacija metode stohastičnih končnih elementov natančna in numerično zelo učinkovita ter omogoča izvedbo analize konstrukcij z realističnim upoštevanjem njihove stohastične narave v računskem času, primerljivim z deterministično analizo z uporabo klasične metode končnih elementov.

10 Summary

The thesis deals with the uncertainty of the parameters in engineering systems. As well known, mechanical problems are in general stochastic in nature. Uncertainties are involved in material properties, domain geometry and/or loads and can be described with stochastic fields. However, procedures dealing with stochastic systems are computationally significantly more complex and expensive in comparison to their deterministic counterparts. Therefore, deterministic approach based on characteristic stochastic properties (like minimum, maximum and mean values), which are assumed to embrace all the possible scenarios, is usually used in engineering practice. However, this is not necessarily true. Further, deterministic approach cannot lead to optimal design of structures. Therefore, realistic modelling of the uncertainties is recognized as very important in structure modelling. Despite this fact, the stochastic approach is very rarely used in practice. The problem is that the introduction of parameter uncertainty significantly enlarges the size and the complexity of the problem. The objective of this thesis is to develop the automation of stochastic finite element method that allows simple manipulation with arbitrary input data and mesh topology in case of stochastic fields and is numerically efficient in order to make stochastic approach competitive with the deterministic one.

The automation of stochastic finite element method, presented in this thesis, is based on hybrid symbolic-numeric approach. Complete automation is achieved through combining symbolic and algebraic computational systems, automatic differentiation technique and automatic code generation with the general-purpose finite element environment. The basic equations of stochastic finite element method are written in symbolic form in Mathematica, which provides high abstract and clear description of the problem. The automatic differentiation technique is used to calculate derivatives that appear as part of finite element code. Automatic differentiation represents an alternative solution to the numerical differentiation as well as to the symbolic differentiation. The advantages of this technique are that it calculates the exact derivatives and avoids the problem of expression growth associated with the symbolic differentiation performed by the computer algebra system at the same time.

Stochastic finite element method usually consists of two steps: representation of the stochastic fields and the assessment of the stochastic response of the system. The automation for each of these two steps is described below.

Representation of the stochastic field

For the discretization of the stochastic field, Karhunen-Loève (K-L) expansion is chosen,

since it is optimal in the sense that the mean square error of truncated series is minimized. Further, K-L decomposition is suitable for stochastic processes that change with time as well as for stochastic processes that change with space. It can also be used for arbitrary (high or low) correlated stochastic processes.

To calculate the deterministic terms in K-L decompositions, eigenfunctions and eigenvalues, homogeneous Fredholm integral equation of the second kind with covariance function as kernel has to be solved. In general, numerical solution is required to solve this equation. With the purpose to apply stochastic finite element method within the standard finite element environment, Galerkin procedure is used to solve this problem numerically. With this procedure, the integral equation is converted to a generalized algebraic eigenvalue problem. For the automation of the stochastic field discretization procedure, we develop stochastic finite elements. Stochastic finite elements are composed of three tasks: calculation of the contribution of each finite element to the global covariance matrix, calculation of the contribution of each finite element to the global matrix of eigenfunctions and calculation of integral of eigenfunctions with the purpose to normalize the obtained eigenfunctions.

Moreover, we investigated the possibility to reduce the cost of covariance matrix calculation. In mechanical problems, exponential covariance function is most often used covariance function. The nature of the exponential covariance function is such that by applying Galerkin procedure to solve Fredholm integral equation, it leads to dense covariance matrix which is very costly to compute. With the purpose to improve computational efficiency, an approximation of the exponential function can often be found in the literature, which leads in case of moderately correlated stochastic fields to sparse covariance matrix. In this modification, the original exponential covariance function is approximated with the function that is set to zero at some chosen distance, named effective length. The thesis provides a proof that the covariance function, modified in this way, is not positive definite. The consequence is possible numerical instability of the problem expressed as loss of positive definiteness of covariance matrix which prevents the use of highly efficient eigenvalue solvers that have to be used to solve the resulting generalized eigenvalue problem.

The thesis presents two alternative modifications of the covariance function that reduce the computation cost and at the same time significantly improves the numerical stability of the procedure. In the first modification, a slight modification of this modified exponential covariance function is proposed. In the second modification, smooth covariance function is approximated in a way that the obtained covariance matrix is sparse. Smooth covariance function is an approximation of exponential covariance function in a way that the nondifferentiability of the original exponential covariance function at its peak is eliminated, leading to better convergence of K-L decomposition (Spanos, Bear and Redhorse, 2007). Thus, the requisite number of terms for representing the stochastic field is

significantly smaller.

Numerical examples in the thesis confirm the lower computational cost when modified covariance functions are applied instead of the original exponential and smooth covariance function. Further, numerical examples justify the use of modified covariance function, since the differences in results are negligible.

The influence of choosing different effective lengths (by which the modified covariance functions are set to zero) on the accuracy of the solution of Fredholm integral equation and on the numerical stability of the process is also investigated in the thesis. This study shows that for all three modified covariance functions it holds true that the denser the discretization mesh is, the higher the value of the effective length should be to obtain positive definite covariance matrix. From the comparison of the minimum effective length, needed to obtain positive definite covariance matrix when the same discretization mesh is applied, it can be concluded that the two modified covariance functions, proposed in the thesis, are advantageous to obtain positive covariance matrix with smaller minimum effective length in comparison to modification usually used in the literature.

Calculation of the system response

The statistics that are of interest in this thesis are mean and standard deviation of the response functional. For the calculation of the statistics, the perturbation method is chosen. In the adopted stochastic approach, the perturbation method approximates the response functional by its Taylor series expansion around the expected values of the random variables of K-L decomposition. Two major advantages of the response functional expressed as a function of random variables are that the presented technique can provide substantial time savings in comparison to other methods dealing with stochastic fields (e.g. Monte Carlo or spectral stochastic finite element method) and secondly, since the result is the polynomial function with random variables left in a symbolic way, its nature can be easily analyzed. On the other side, a disadvantage of the perturbation method is that it is suitable only for mechanical problems that have no discontinuities in the response. This means that the failure mode should be the same regardless of the value of the parameters around which the response functional is expanded. Further, the accuracy of approximation away from the origin of the series expansion is not known in advance. In general, the more the response is nonlinear, the higher-order perturbation method is required to describe the response with the desired accuracy. However, the use of higher-order perturbation method is very rare. The reason is the lack of efficient and simple algorithms to calculate higher-order derivatives of the response functional which are required in higher-order perturbation method. The analysis that calculates the derivatives of arbitrary response functional with respect to chosen parameters is called sensitivity analysis. In the thesis, the automation of higher-order sensitivity analysis is developed, based on automatic differentiation technique. The automation is a further development of the automation of first-order sensitivity analysis, presented in Korelc, 2009a. The advan-

tages of the developed automatic differentiation based (ADB) formulation of higher-order sensitivity analysis are the calculation of the exact derivatives, high numerical efficiency and abstract symbolic description of the finite element code to derive higher-order derivatives. Consequently, the derived ADB formulation of higher-order sensitivity analysis can be used to perform a higher-order perturbation method for substantially higher number of retained K-L terms that can be done with any other existing method (e.g. finite difference method or symbolic sensitivity analysis).

The presented ADB formulation of higher-order sensitivity analysis is not limited only to the problems that involve stochasticity. The method is also applicable to other fields of mechanical problems that require higher-order sensitivity analysis, for example, in optimization problems the second-order sensitivity analysis provides important information to the optimization algorithm, therefore more efficient algorithms can be used (e.g. sequential quadratic programming procedures) with higher convergence rate.

The calculation time of the presented automation of stochastic finite element method is comparable to that of the deterministic approach to mechanical problems with the use of standard finite element method. Consequently, the presented automation offers not only the possibility for in-depth studies of problems that involve stochasticity, but also has a potential to be used in everyday engineering practice and for further development of Eurocodes (a set of harmonized technical rules for the structural design of construction works in the European Union).

Numerical examples

In the last part of the thesis, the results of the automated stochastic finite element method are demonstrated on 5 numerical examples. In the first two numerical examples, the initial geometric imperfection is modeled with stochastic field. In the last three numerical examples, stochastically corroded steel structures are modeled. The choice of the numerical examples was made with the purpose to verify the automation of the stochastic finite element method on all basic examples that are important in the engineering practice. With regard to the part of the finite element code, where there appears the parameter that is described with the stochastic field, the developed automation is verified for cases in which the uncertainty affects the geometry of the problem, as well as for the parameters that explicitly appear as a part of the derivation of the residuals. Furthermore, the automation is verified for different failure modes: excessive (plastic) deformations and the loss of structural stability.

The first numerical example is an example of bent clamped sinusoidal double skin cladding. The amplitude of waves is presumed to change stochastically along the cladding and is modeled with one-dimensional stochastic field. The response of the cladding with respect to the random parameters is calculated with perturbation method of up to fourth -order. The results obtained with the ADB formulated perturbation method are compared to

symbolic sensitivity analysis which also calculates exact derivatives. The results of both methods are exactly the same and confirm the correctness of the derived formulation of higher-order perturbation method. This numerical example also shows the difference between the results obtained with perturbation method of different orders. The response of the cladding is nonlinear with respect to random parameters of the stochastic field, therefore it is considerably better described with perturbation method of higher order.

The second example is an example of elasto-plastic steel circle bar, exposed to cycling loading that causes plastification of the bar. The goal of this example is to show that the presented ADB formulation of second-order sensitivity analysis expands feasibility of performing complete second-order sensitivity analysis to considerably higher number of sensitivity parameters than with any other known method. The number of derivatives that can be calculated with the ADB formulated sensitivity analysis in acceptable time is very high even in case of complex mechanical problems. In this numerical example, 45 terms are kept in the K-L decomposition. In the framework of the second-order perturbation method this means calculation of 1080 derivatives, from which 45 first-order and 1035 second-order derivatives are obtained. Furthermore, this numerical example shows further two advantages of the ADB formulated sensitivity analysis. Firstly, the ADB formulated sensitivity analysis is insensitive to parallelization and secondly, it is insensitive to arbitrarily chosen time steps for the analysis, while the finite difference method (which is most often used method to perform sensitivity analysis) gives totally wrong values of the derivatives when any of these two options is allowed. The comparison of the calculation times of the ADB formulated sensitivity analysis and the finite difference method is also considerably better on behalf of the ADB formulated sensitivity analysis.

The last three numerical examples deal with the corrosion process. Corrosion is the process of a material degradation, caused by chemical reaction with its environment. Many studies have been devoted to the corrosion process and from all of them it can be concluded that the corrosion is a stochastic process and is therefore suitable to be modeled with stochastic field. However, in the literature there is almost no example of modelling corrosion in this way. In these three numerical examples it is shown that the presented automation of the stochastic finite element method is convenient also for the description of the corrosion process. The corrosion is modeled as the stochastic field of the structure cross-section thickness change. Nonlinear analysis is performed to calculate limit load factor. Initial geometric imperfections of the structures are also taken into account. A path-following procedure to find a limit load factor is described in the numerical example of uniformly corroded plate.

In the fourth numerical example, the buckling of simply supported corroded beam is presented. The pitting corrosion is modeled. The correlation of the stochastic field in this case is moderate, therefore it allows the use of modified covariance functions that are proposed in this thesis. The aim of this numerical example is to compare the results when

different covariance functions are applied. The calculation times to perform the second-order perturbation method are noticeably better in case of modified covariance functions, while the results for all covariance functions are practically the same, thus justifying the use of modified covariance functions. The results of the ADB formulated second-order perturbation method are also compared to the Monte Carlo simulations. Results of both methods are practically the same, while the calculation times are significantly lower for the perturbation method.

However, despite many advantages, the perturbation method also has its limits in applicability. As already mentioned, the perturbation method is suited only for mechanical problems that have no discontinuities in the response. To demonstrate the limitation of the method, the fifth numerical example was chosen. The example is similar to former numerical example of the beam under compression. The length of the beam in this example is chosen so that the beam exhibits different failure modes, dependent on each particular realisation of the stochastic field of corrosion. Since the perturbation method is only capable to describe the response of the limit load factor around the expected values of the stochastic field for one single failure mode (the one that belongs to the mean value of the stochastic field), the results of the perturbation method obviously deviate from those obtained with the Monte Carlo simulations.

To summarize, the numerical examples show that by considering the limitations of the perturbation method, the presented automation of stochastic finite element method is accurate and numerically very efficient. Therefore, it provides implementation of the stochastic finite element analysis in the time, comparable to the calculation time of the deterministic finite element analysis.

VIRI

- Akbari, J., Kim, N. H., Ahmadi, M. T. 2010. Shape sensitivity analysis with design-dependent loadings - equivalence between continuum and discrete derivatives. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40, 1-6: 353-364.
- Allaix, D. L., Carbone, V. I. 2012. Development of a numerical tool for random field discretization, *Advances in Engineering Software*, 51: 10-19.
- Asanuma, M., Aogaki, R. 1995. Morphological pattern formation in pitting corrosion, *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 396, 1-2: 241-249.
- Babolian, E., Marzban, H. R., Salmani, M. 2008. Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 201, 1-2: 452-464.
- Beall, M. W., Shephard, M. S. 1999. An object-oriented framework for reliable numerical simulations. *Engineering with Computers*, 15, 1: 61-72.
- Bebamzadeh, A., Haukaas, T. 2008. Second-order sensitivities of inelastic finite element response by direct differentiation. *Journal of Engineering Mechanics*, 134, 10: 867-880.
- Boer, H., van Keulen, F., Vervenne, K. 2002. Refined second order semi-analytical design sensitivities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, 9: 1033-1051.
- Chainais-Hillairet, C., Bataillon, C. 2008. Mathematical and numerical study of a corrosion model. *Numerische Mathematik*, 110, 1: 1-25.
- Cho, M., Kim, H. 2006. Improved semi-analytic sensitivity analysis combined with a higher order approximation scheme in the framework of adjoint variable method. *Computers and Structures*, 84, 29-30: 1827-1840.
- Choi, K. K., Twu, S.-L. 1989. On equivalence of discrete-discrete and continuum-discrete design sensitivity analysis. NASA. Langley Research Center, Recent Advances in Multidisciplinary Analysis and Optimization, Part 2; 653-672.
- Choi, K. K., Kim, N. H. 2005. Structural sensitivity analysis and optimization 1, Linear Systems. New York, Springer Science+Business Media.
- Courmontagne, P. 1999. A new formulation for the Karhunen-Loeve expansion. *Signal Processing*, 79, 3: 235-249.

Crisfield, M. A. 1996. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. New York, Wiley.

Eyheramendy, D., Zimmermann, T. 1999. Object-oriented symbolic derivation and automatic programming of finite elements in mechanics. *Engineering with Computers*, 15, 1: 12–36.

EN 1993 1-5, 2004, Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1.5: Plated structural elements. Brussels, European Committee for Standardization.

Field, R. V., Grigoriu, M. 2004. On the accuracy of the polynomial chaos approximation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19, 1-2: 65-80.

Frauenfelder, P., Schwab, C., Todor, R. A. 2005. Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 2-5: 205-228.

Gaignaire, R., Clenet, S., Moreau, O., Sudret, B. 2006. Influence of the order of input expansions in the Spectral Stochastic Finite Element Method, In: *Proc. 7th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF2006)*, Aussois, France.

Ghanem, R., Spanos, P. D. 2003. *Stochastic Finite Element: A Spectral Approach*. New York, Dover.

Griewank, A. 2000. *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*. Philadelphia, SIAM.

Grigoriu, M. 2006. Evaluation of Karhunen-Loève, Spectral, and Sampling Representations for Stochastic Processes. *Journal of Engineering Mechanics*, 132, 2: 179-189.

Haftka, R. T., Adelman, H. M. 1989. Recent developments in structural sensitivity analysis. *Structural Optimization*, 1: 137-151.

Huang, S. P., Quek, S.T., Phoon, K. K. 2001. Convergence study of the truncated Karhunen-Loève expansion for simulation of stochastic processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 9: 1029–1043.

Iokimidis, N. I. 1992. Application of Mathematica to the direct semi-numerical solution of finite element problems. *Computers and structures*, 45, 5-6: 833-839.

Iokimidis, N. I. 1993. Elementary application of Mathematica to the solution of elasticity problems by the finite element method. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 102, 1: 29-40.

Kala, Z. 2007. Stability of steel structures in the presence of stochastic and fuzzy uncertainty. *Thin-Walled Structures*, 45, 10-11: 861-865.

Keulen, F., de Boer, H. 1998. Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 1: 71-91.

Keulen, F., Haftka, R. T., Kim, N. H. 2005. Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 30-33: 3213–3243.

Keese, A. 2003. A Review of Recent Developments in the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations (Stochastic Finite Elements), *Informatikbericht* 2003-6. Brunswick, Institute of Scientific Computing, Department of Mathematics and Computer Science, Technische Universität Braunschweig.

Kiureghian, A., Haukaas, T., Fujimura, K. 2006. Structural reliability software at the University of California, Berkeley. *Structural Safety*, 28, 1-2: 44-67.

Korelc, J. 1997. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. *Theoretical Computer Science*, 187, 1-2: 231-248.

Korelc, J., Melink, T. 2008. Automation of Stochastic Finite Element Method by Symbolic-Numeric Approach. In: 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), Venice, Italy.

Korelc, J. 2009a. Automation of primal and sensitivity analysis of transient coupled problems. *Computational mechanics*, 44: 631-649.

Korelc, J. 2009b. AceGen, Multi-Language, Multi-Environment numerical code generation. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
www.fgg.uni-lj.si/symech/ (1.4.2010)

Korelc, J. 2009c. AceFEM, Mathematica finite element environment. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
www.fgg.uni-lj.si/symech/ (1.4.2010)

Korelc, J. 2011. Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models, *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 3: 281-287.

Korelc, J. 2012. Efficiency and limitations of automation of computational modeling. Personal notes from semy-plenary lecture in European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2012), Vienna.

Kristanič, N. 2008. Limit State Design Using Exact Sensitivity Analysis and Shape Optimization. Ph. D. Thesis, Ljubljana, University of Ljubljana: 148 p.

Kriston, A., Lakatos-Varsanyi, M. 2001. Testing and analyzing metastable pitting corrosion, *Electrochimica Acta*, 46, 24-25: 3699-3703.

- Li, C. C., Der Kiureghian, A. 1993. Optimal Discretization of Random Fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119, 6: 1136-1154.
- Li, C. F., Feng, Y. T., Owen D. R. J., Li, D. F., Davis, I. M. 2008. A Fourier-Karhunen-Loeve discretization scheme for stationary random material properties in SFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73, 13: 1942-1965.
- Lin, G., Su, C.-H., Karniadakis, G. E. 2008. Stochastic modeling of random roughness in shock scattering problems: Theory and simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 43-44: 3420-3434.
- Liu, W.-K., Belytschko, T., Mani, A. 1986a. Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 56, 1: 61-81.
- Liu, W.-K., Belytschko, T., Mani, A. 1986b. Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 10: 1831-1845.
- Liu, P.-L. and Liu, K.-G. 1993. Selection of random field mesh in finite element reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 119, 4: 667-680.
- Logg, A. 2007. Automating the finite element method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 14, 2: 93-138.
- Mathematica 9.0, Wolfram Research Inc.
<http://www.wolfram.com>
- Marsaglia, G. 1995. The Marsaglia Random Number CDROM including the Diehard Battery of Tests of Randomness, Florida State University.
<http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard/>
- Matthies, H. G., Brenner, C. E., Bucher, C. G., Soares, C. G. 1997. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements. *Structural Safety*, 19, 3:283-336.
- Michaleris, P., Tortorelli, D. A. in Vidal, C. A. 1994. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 14: 2471-2499.
- Mikhailov, A. S., Scully, J. R., Hudson, J. L. 2009. Nonequilibrium collective phenomena in the onset of pitting corrosion, *Surface Science*, 603, 10-12: 1912-1921.
- Mikhlin, S. G. 1957. Integral equations. Oxford, Pergamon Press.

- Nair, P. B. 2001. On the theoretical foundations of stochastic reduced basis methods. In Proceedings of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Paper 2001-1677. Seattle, Washington, United States.
- Nashed, M. Z., Wahba, G. 1974. Convergence Rates of Approximate Least Squares Solutions of Linear Integral and Operator Equations of the First Kind, *Mathematics of Computation*, 28: 69-80.
- Noh, H.-C. 2005. Extension of Weighted Integral Stochastic Finite Element Method to the Analysis of Semi-Infinite Domain. *Journal of Engineering Mechanics*, 131, 5: 550-556.
- Ozaki, I., Kimura, F., Berz, M. 1995. Higher-order sensitivity analysis of finite element method by automatic differentiation. *Computational Mechanics*, 16, 4: 223-234.
- Papadopoulos, V., Charmpis, D. C., Papadrakakis, M. 2008. A computationally efficient method for the buckling analysis of shells with stochastic imperfections. *Computational Mechanics*, 43, 5: 687-700.
- Park, J.-J., Pyun, S.-I. 2004. Stochastic approach to the pit growth kinetics of Inconel alloy 600 in Cl^- ion-containing thiosulphate solution at temperatures 25-150°C by analysis of the potentiostatic current transients. *Corrosion Science*, 46, 2: 285-296.
- Pavlović, M. N. 2003. Symbolic computation in structural engineering. *Computers and Structures*, 81, 22-23: 2121-2136.
- Phoon, K. K., Huang, S. P., Quek, S. T. 2002. Implementation of Karhunen-Loeve expansion for simulation using a wavelet-Galerkin scheme. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, 3: 293-303.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. 1988-92. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. New York, Cambridge University Press.
- Reh, S., Beley, J.-D., Mukherjee, S., Khor, E. H. 2006. Probabilistic finite element analysis using ANSYS. *Structural Safety*, 28, 1-2: 17-43.
- Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodaye Bahre, Y. 2011. Second order sensitivity analysis for shape optimization of continuum structures. *Computational Methods in Civil Engineering*, 2, 1: 43-63.
- Sachdeva, S. K., Nair, P. B., Keane, A. J. 2007. On using deterministic FEA software to solve problems in stochastic structural mechanics. *Computers and Structures*, 85, 5-6: 277-290.
- Schenk, C. A., Schueller, G. I. 2003. Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38, 7: 1119-1132.

Schevenels, M., Lombaert, G., Degrande, G. 2004. Application of the stochastic finite element method for Gaussian and non-Gaussian systems. In: Proceedings of ISMA 2004, Leuven, BELGIQUE, 3299-3313.

Schuëller, G. I. 2006. Developments in stochastic structural mechanics. Archive of Applied Mechanics, 75, 10-12: 755-773.

Schuëller, G. I., Pradlwarter, H. J. 2006. Computational stochastic structural analysis (COSSAN) – a software tool. Structural Safety, 28, 1-2: 68-82.

Shang, S., Yun, G. J. 2013. Stochastic finite element with material uncertainties: Implementation in a general purpose simulation program. Finite Elements in Analysis and Design, 64: 65–78.

SIST EN 1990:2004, Evrokod - Osnove projektiranja konstrukcij, Slovenski inštitut za standardizacijo.

Spanos, P. D., Beer, M., Red-Horse, J. 2007. Karhunen-Loève Expansion of Stochastic Processes with a modified Exponential Covariance Kernel. Journal of Engineering Mechanics, 133, 7: 773-779.

Stefanou, G. 2009. The stochastic finite element method: Past, present and future. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 9-12: 1031-1051.

Stefanou, G., Kallimanis, A., Papadrakakis, M. 2005. On the efficiency of the Karhunen-Loève expansion for the simulation of Gaussian stochastic fields. In: Proc. of 9th International Conference on Structural Safety & Reliability (ICOSSAR 2005), Rome, Italy, pp.2503-2508.

Stefanou, G., Papadrakakis, M. 2007. Assessment of spectral representation and Karhunen-Loève expansion methods for the simulation of Gaussian stochastic fields. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 21-24, 2465-2477.

Sudret, B. 2002. Comparison of the Spectral Stochastic Finite Element Method with the Perturbation method for second moment analysis. In: Proceedings 1st ASRANET International Conference. Glasgow.

Tarantseva, K. R. 2010. Models and Methods of Forecasting Pitting Corrosion. Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces, 46, 1: 139-147.

Teixeira, A. P., Soares, C. G. 2008. Ultimate strength of plates with random fields of corrosion. Structure and Infrastructure Engineering, 4, 5: 363-370.

Thacker, B. H., Riha, D. S., Fitch, S. H. K., Huyse, L. J., Fleming, J. B. 2006. Probabilistic Engineering Analysis Using the NESSUS Software. Structural Safety, 28, 1-2: 83-107.

Valor, A., Caleyó, F., Alfonso, L., Rivas, D., Hallen, J. M. 2007. Stochastic modeling of pitting corrosion: a new model for initiation and growth of multiple corrosion pits. *Corrosion Science*, 49, 2: 559-579.

Vanmarcke, E., Grigoriu, M. 1983. Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 109, 5: 1203-1214.

Vautrin-UI, C., Mendy, H., Taleb, A., Chausse, A., Stafiej, J., Badiali, J. P. 2008. Numerical simulations of spatial heterogeneity formation in metal corrosion. *Corrosion Science* 50, 8: 2149-2158.

Vorhees, A., Millwater, H., Bagley, R. 2011. Complex variable methods for shape sensitivity of finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 10: 1146–1156.

Wisniewski, K., Turska, E. 2000. Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 8-10: 1117-1135.

Wisniewski, K., Turska, E. 2001. Warping and in-plane twist parameters in kinematics of finite rotation shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 43-44: 5739-5758.

Wriggers, P. 2008. *Nonlinear Finite Element Methods*. Berlin, Springer.

Zhang, T., Liu, X., Shao, Y., Meng, G., Wang, F. 2008. Electrochemical noise analysis on the pit corrosion susceptibility of Mg-10Gd-2Y-0.5Zr, AZ91D alloy and pure magnesium using stochastic model. *Corrosion Science*, 50, 12: 3500-3507.

Zhiming, Y., Jianming, L. 1998. Iterative analytical solution of nonlinear analysis of shallow spherical shell with computer algebra systems-MapleV. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163, 1-4: 383-394.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. 1991. *The finite element method*, vols I, II. New York, McGraw Hill.