MOČNIK-
WENGHART.

GEOMETRISCHE
FORMENLEHRE
FÜR
MÄDCHEN-BÜRGERSCHULEN.

Močniks
geometrische Formenlehre

für

Mädchen-Bürgerschulen.

Bearbeitet

von

E. F. Wenghart,

Bürgerschuldirektor.

Mit 162 Figuren und 118 geometrischen Ornamenten.

Dritte, verbesserte Auflage.

Mit hohem k. k. Ministerialerlaß vom 30. September 1903, Zahl 31943, allgemein zulässig erklärt.

Preis, gebunden 1 K 70 h.

WIEN.

VERLAG VON F. TEMPSKY.

1904.

Inhalt.

1. Abschnitt: Betrachtung der geometrischen Gebilde.

2. Abschnitt: Kopieren, Vergrößern und Verkleinern der Figuren.

3. Abschnitt: Umfang und Flächeninhalt der Figuren.

4. Abschnitt: Oberfläche und Kubikinhalt der Körper.

Die geometrischen Ornamente sind zum Teil der Grammatik der Ornamente von Owen Jones und der Ornamentik von Franz Salis Mayr entnommen, die Handarbeitsbeispiele größtenteils der in dieser Beziehung so reich ausgestatteten Zeitschrift „Wiener Mode“.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

I. Abschnitt.

Betrachtung der geometrischen Gebilde.

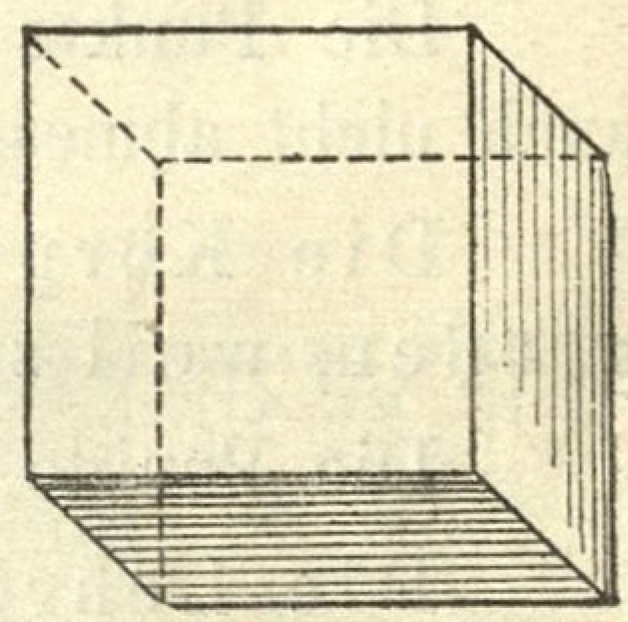
1. Grundvorstellungen der Raumgebilde.

(Der Würfel wird auf dem Tische oder einem Stative so aufgestellt, daß zwei Flächen eine horizontale Lage haben und eine Fläche den Schülern zugewendet ist.)

Wir können durch unsere Sinne eine große Menge von Gegenständen wahrnehmen, so beispielsweise im Schulzimmer den vorstehenden Würfel, die Schultafel, den Kasten, die Bänke u. s. w. — Alle diese Gegenstände nehmen einen Raum ein, welcher von ihnen nach allen Richtungen ausgefüllt wird; sie sind nach allen Richtungen hin begrenzt.

Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt Körper.

Fig. 1.



Der Würfel ist ein Körper.

Die sinnlich wahrnehmbaren Gegenstände werden von einem Stoffe (Materie, Substanz) ausgefüllt; sie heißen auch physische Körper. Denkt man sich nun aus ihrem Raume den Stoff, aus welchem sie bestehen, weg, so erhält man die Vorstellung eines geometrischen Körpers.

Während man bei physischen Körpern hauptsächlich den Stoff, aus welchem sie bestehen, und dessen Eigenschaften berücksichtigt, sieht man bei geometrischen Körpern auf ihre Form.

Obwohl die Körper nach allen Richtungen ausgedehnt sind, unterscheidet man doch 3 Hauptrichtungen der Ausdehnung (Dimensionen): die Länge, die Breite und die Dicke (Tiefe oder Höhe).

Zeige am Würfel und an andern Gegenständen des Schulzimmers diese 3 Hauptrichtungen!

Der Würfel wird von 6 Flächen eingeschlossen. Diese sind: die obere und die untere, die vordere und die rückwärtige, die rechte und die linke Fläche.

Wie viele Flächen zeigen sich am Kasten, an einer zylindrischen Federschachtel, an einem Zuckerhute, an einer Kugel?

Die Körper sind von Flächen begrenzt.

Jede Fläche des Würfels ist nach 2 Hauptrichtungen ausgedehnt; so die untere Fläche von links nach rechts und von vorne nach rückwärts.

Auch an der Tafelfläche, an den einzelnen Flächen des Kastens u. s. w. lassen sich zwei Hauptausdehnungen nachweisen.

Die Flächen haben 2 Hauptausdehnungen, nämlich eine Länge und eine Breite.

Jede Würfelfläche wird von 4 Linien (Kanten) eingeschlossen.

Von wie vielen Linien wird ein Dreieck, ein Sechseck, die Kreisfläche begrenzt?

Die Flächen werden von Linien eingeschlossen.

Bestimme mit Hilfe eines Maßstabes die Länge einer Würfelkante! — Linien lassen sich nur nach einer Richtung ausmessen, sie besitzen daher nur eine Dimension.

Die Linien haben nur eine Ausdehnung, nämlich eine Länge.

Die beiden Grenzen einer Linie (Kante) heißt man Punkte (Ecken).

Die Linien werden von Punkten begrenzt.

Die Punkte nehmen keinen Raum ein, sie lassen sich daher auch nicht abmessen.

Die Körper, Flächen und Linien nennt man Raumgrößen, weil sie sich im Raume ausdehnen.

Die Punkte sind keine Raumgrößen.

Die Lehre von den Raumgrößen heißt Geometrie.

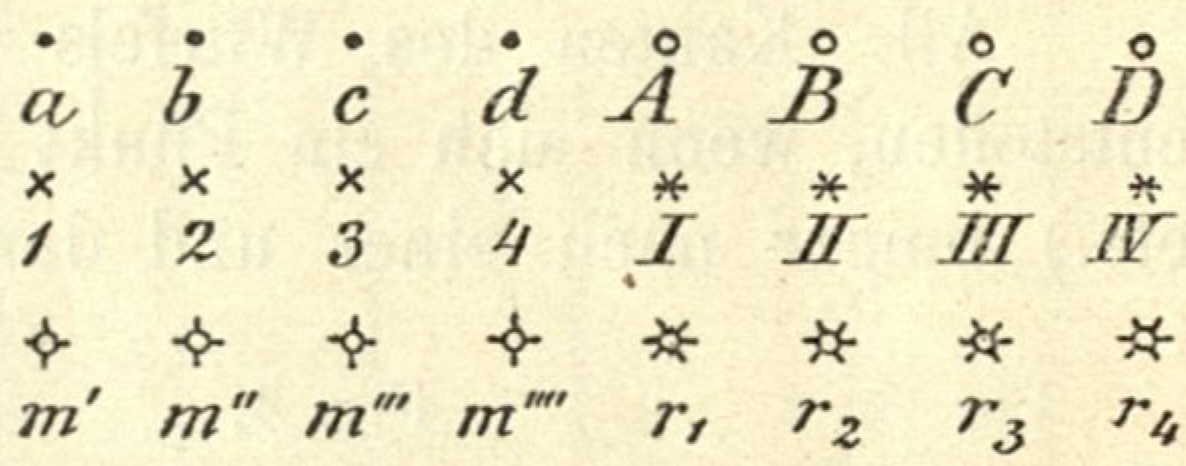
Im gewöhnlichen Leben betrachtet man häufig ein Blatt Papier als eine Fläche und feinen Draht, dünne Fäden etc. als Linien, obwohl strenge genommen alle diese Dinge eine gewisse Länge, Breite und Dicke besitzen und daher eigentlich Körper sind.

Wenn der Nil aus seinen Ufern tritt, so pflegt er nicht selten die Grenzen der einzelnen Grundstücke zu zerstören und unkenntlich zu machen. Deshalb sah man sich schon im Altertum (unter Sesostris) genötigt, um unnützem Streit unter den einzelnen Grundbesitzern vorzubeugen, das vom Nilschlamme befruchtete Land alljährlich zu vermessen und zu verteilen. Dieses von der Priesterkaste vorgenommene Geschäft führte zum Studium der einzelnen Figuren und deren Eigenschaften und gab so die Veranlassung zum Entstehen einer neuen Wissenschaft, der Lehre von der Erdmessung oder Geometrie. Die Ägypter selbst und später die Perser, Griechen, Araber und andere Völker haben diese Wissenschaft, die im Altertume als eine hochansehnliche galt, immer mehr ausgebildet und entwickelt.

2. Die Punkte.

Die Punkte können, da sie weder eine Länge noch Breite oder Dicke besitzen, nur gedacht werden. Um nun die Stelle, wo man sich einen Punkt hinzudenken hat, sichtbar zu machen, bringt man an dem betreffenden Orte der Zeichenfläche mit dem Bleistifte, mit der Feder oder der Kreide einen Tupfen an. Solche Tupfen sind jedoch nicht wirkliche Punkte; sie sind bloß Zeichen derselben. Manchmal benützt man auch als Zeichen für die Punkte Ringelchen, kleine Kreuze oder mitunter auch Sternchen.

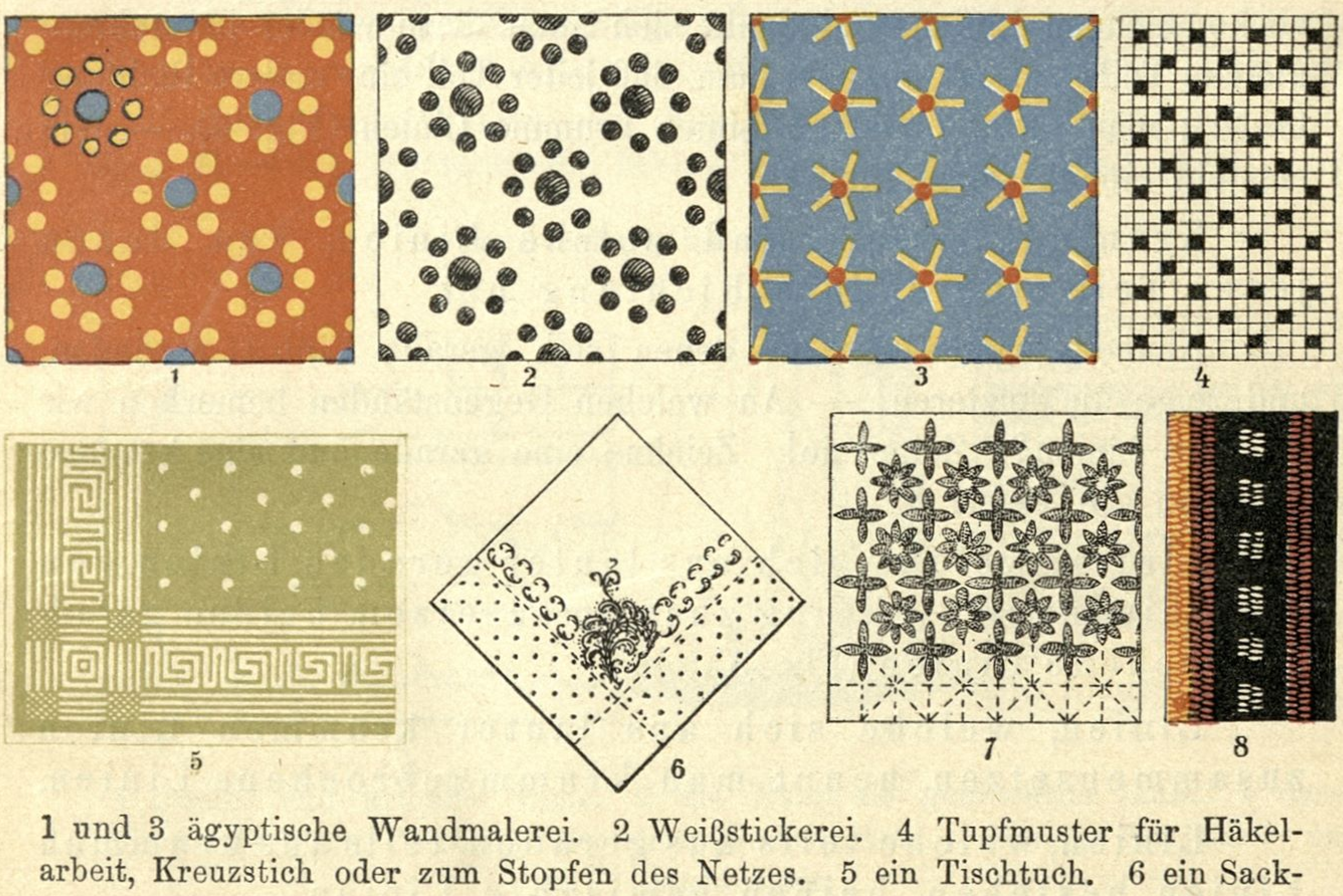
Fig. 2.



Die Punkte werden dadurch angegeben, daß man zu den dieselben versinnlichenden Zeichen Buchstaben des lateinischen Alphabetes oder auch Ziffern setzt. Zuweilen werden auch mehrere Punkte mit demselben Buchstaben bezeichnet; nur muß man dann diese Buchstaben zur Unterscheidung rechts oben mit kleinen Strichen versehen oder denselben rechts unten kleine Ziffern (Indices) anfügen.

Man sagt: der Punkt $a, b, c, A, D, 1, 4, II, III, m', m'', r_1, r_2, r_3$ u. s. w.

Verwendungsbeispiele (Gruppe I).



1 und 3 ägyptische Wandmalerei. 2 Weißstickerei. 4 Tupfmuster für Häkelarbeit, Kreuzstich oder zum Stopfen des Netzes. 5 ein Tischtuch. 6 ein Sacktuch. 7 Kreuzstich, in Farben ausführbar. 8 von einem Teppich (Filet Gobelin).

Es ist Bedürfnis eines jeden Menschen, alles, was ihn umgibt, oder was er an sich trägt, zu verschönern, zu verzieren.

Schon bei den ältesten Völkern finden wir Tupf, Kreuz oder Stern, mit welchem der Mann seine Waffe kennzeichnete oder seinen Rang darstellte. Bald nahmen diese Tupfen Reihenfolge oder wiederholende (rhythmische) Ordnung an und wurden zur Zierde, zum Ornament.

3. Die Linien.

(Betrachtung des Würfels und des geraden Kreiszylinders.)

Alle Kanten des Würfels sind gerade Linien. Solche Linien entstehen, wenn sich ein Punkt (Spitze des Bleistiftes, Kreidenspitze etc.) immer nach einer und derselben Richtung bewegt. Teilt man eine gerade Linie in mehrere gleiche Teile und beobachtet die Richtung derselben, so sieht man, daß diese bei allen Teilen unverändert und gleichbleibend ist (Fig. 4).

Fig. 3.

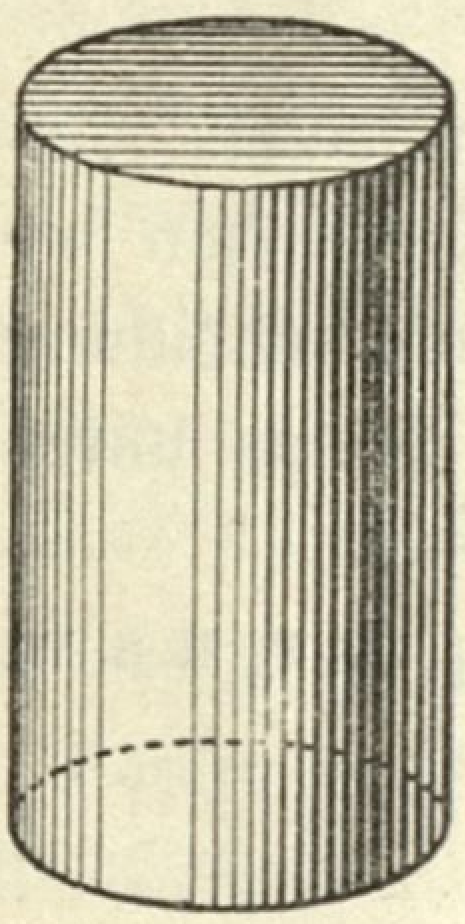
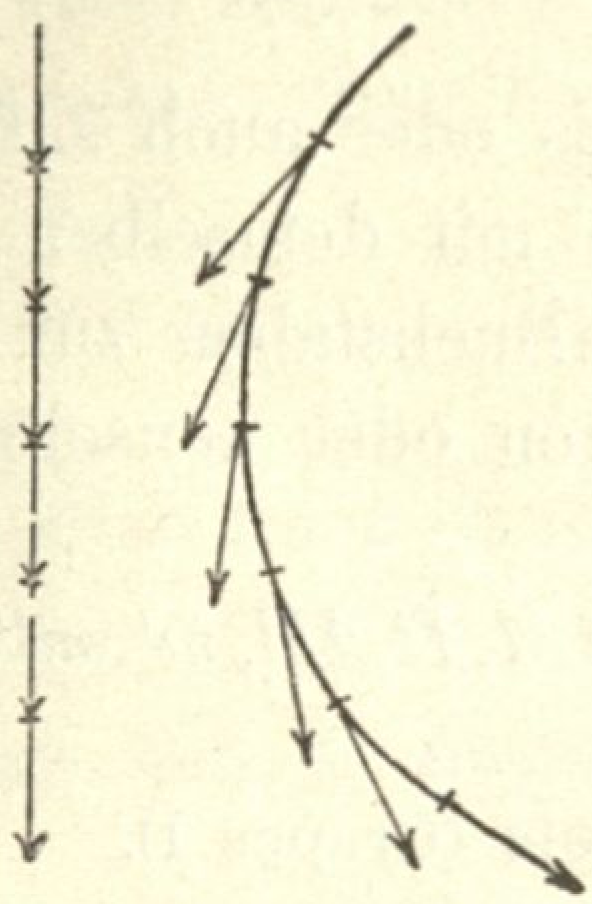


Fig. 4.



Gerade Linien sind solche Linien, welche in allen ihren Teilen eine gleiche Richtung haben.

Betrachtet man dagegen die am Zylinder (Fig. 3) oben und unten vorkommenden Linien und denkt sich auch diese wieder in mehrere gleiche Teile zerlegt, so sieht man, daß jeder Teil eine andere Richtung besitzt; man nennt derartige Linien krumme Linien (Fig. 4). — Wie entsteht eine krumme Linie?

Krumme Linien sind solche Linien, von denen jeder Teil eine andere Richtung hat.

Nenne Gegenstände an denen sich gerade Linien vorfinden, und zeige die letzteren! — An welchen Gegenständen bemerken wir krumme Linien? Zeige sie! Zeichne eine gerade und eine krumme Linie an die Tafel!

Linien, welche sich aus lauter geraden Linien von verschiedener Richtung zusammensetzen, heißen geradgebrochene Linien (Fig. 5).

Linien, welche sich aus lauter krummen Linien zusammensetzen, nennt man krummgebrochene Linien.

Linien, welche teils aus geraden, teils aus krummen Linien bestehen, heißen gemischte Linien.

Man unterscheidet gerade, krumme, geradgebrochene, krummgebrochene und gemischte Linien.

Die Linien benennt man mit 2 Buchstaben oder Ziffern oder auch mit einem Buchstaben oder einer Ziffer; im letzteren Falle werden diese Buchstaben oder Ziffern in der Mitte der Linie gesetzt und zumeist eingeklammert (Fig. 6). Man sagt: die Linie AB oder 4, 5 oder m oder 2.

Fig. 5.

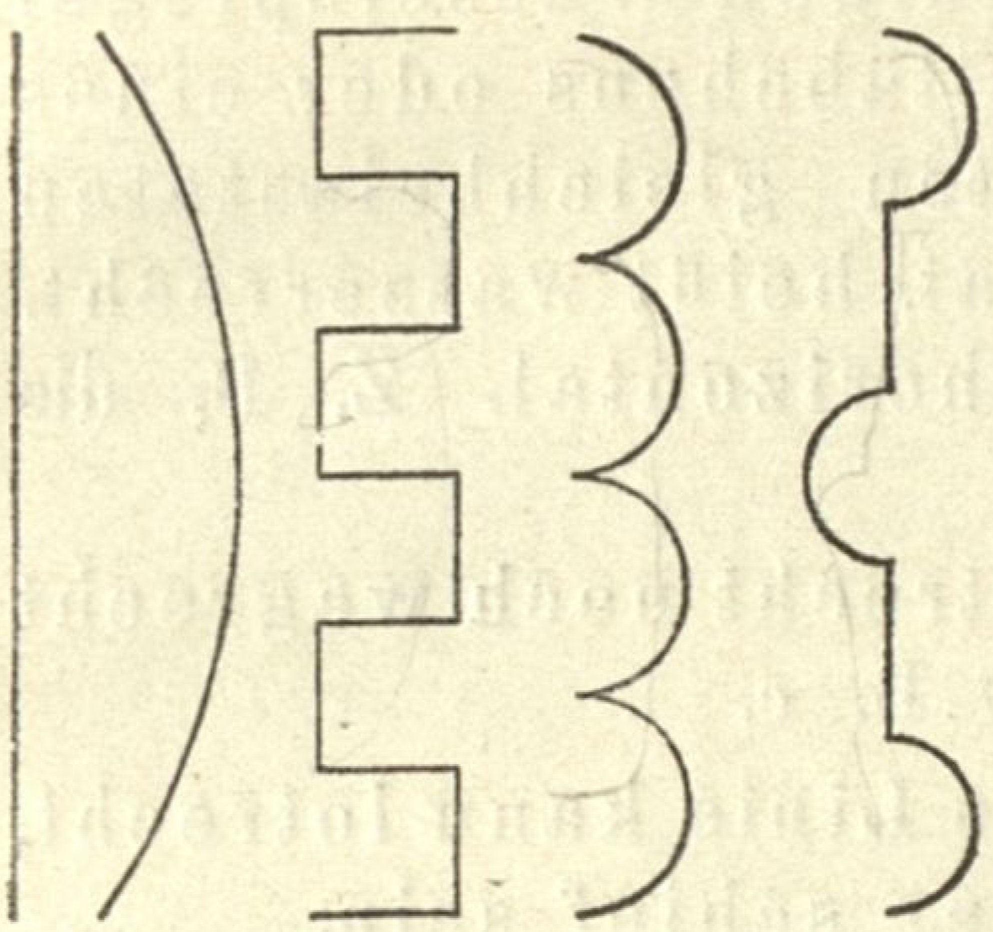


Fig. 6.

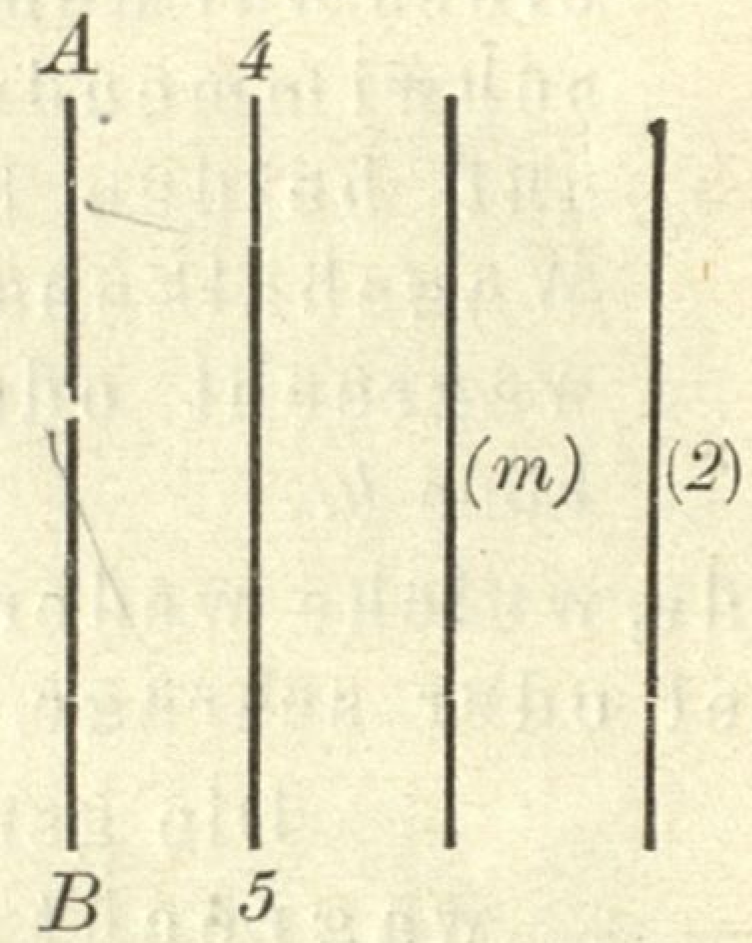
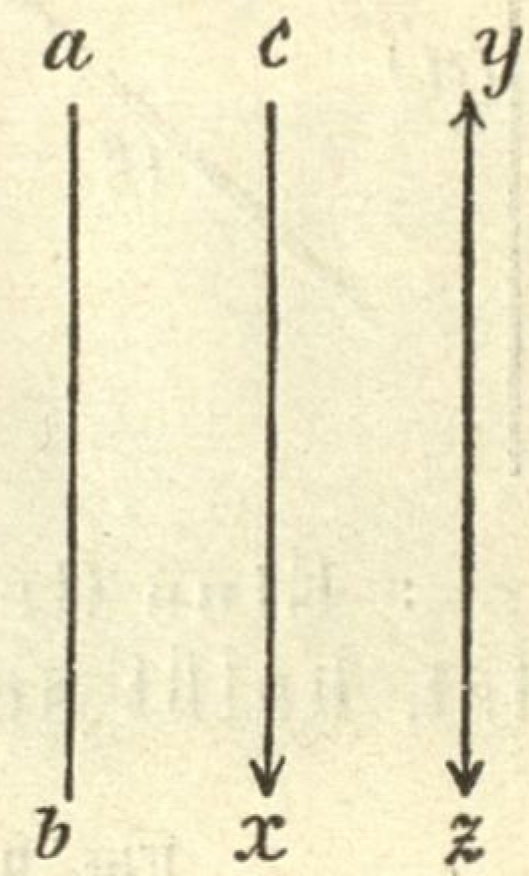


Fig. 7.



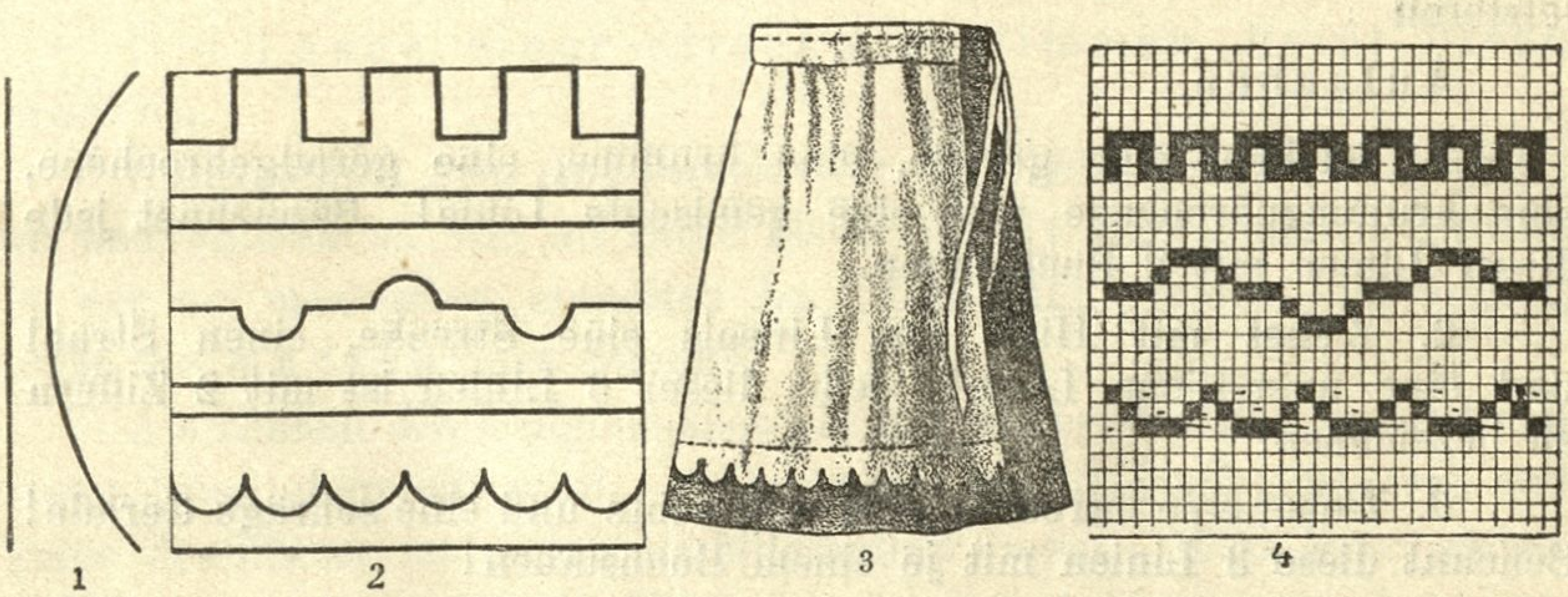
Eine beiderseits begrenzte Gerade heißt Strecke. Z. B. ab (Fig. 7).

Linien, welche wohl einen Anfang, aber kein Ende haben, nennt man Strahlen. Das Fortlaufen einer Linie pflegt man durch einen Pfeil anzudeuten. Z. B. cx.

Linien, welche weder einen Anfang noch ein Ende besitzen, werden unendliche Linien genannt. Z. B. yz.

Die Naht, welche die Frau zum Zusammenfügen der Teile der Kleidung verwendete, führte zum Linienornament, denn bald

Verwendungsbeispiele (Gruppe II).



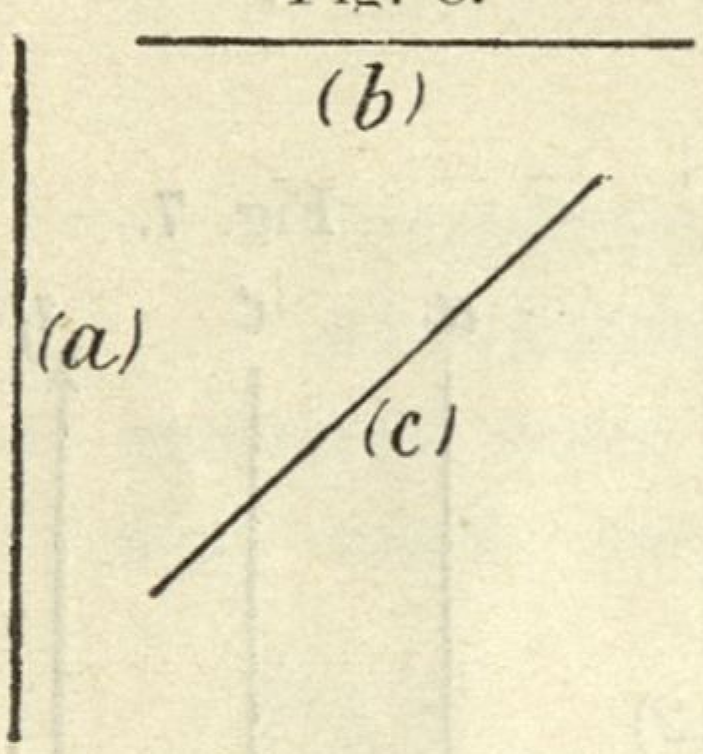
1 2 3 4

1 gerade und krumme Linie. 2 die Naht als gebrochene Linie. 3 deren Verwendung zur Verlängerung eines Kinderrockes. 4 Vorlage für Häkel- und Stickmuster.

verstand sie aus der Not eine Tugend, aus der Naht eine Zierde zu machen.

Eine Gerade, welche die Richtung des Bleilotes oder Senkels hat, heißt lotrecht oder vertikal. Z. B. die Linie *a* (Fig. 8).

Fig. 8.

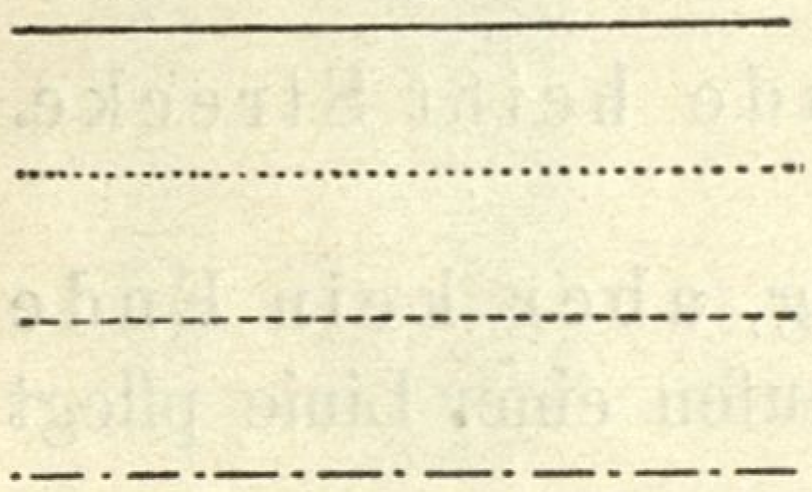


Ein freifallender Körper bewegt sich in vertikaler Richtung nach abwärts.

Eine Gerade, welche die Richtung eines auf dem ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens oder eines auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens hat, heißt wasserrecht, wagrecht oder horizontal. Z. B. die Linie *b*.

Eine Gerade, welche weder lotrecht noch wagrecht ist, heißt schief oder schräge. Z. B. *c*.

Fig. 9.



Die gerade Linie kann lotrecht, wagrecht oder schief sein.

Zum Zeichnen gerader Linien bedient man sich des Lineals.

Die Linien werden entweder in einem Zuge ohne Unterbrechung ausgezogen und heißen dann volle Linien, oder sie werden punktiert oder gestrichelt oder endlich gestrichelt-punktiert (Fig. 9).

Strenge genommen sind die aus lauter Bleistift- oder Kreideteilchen sich zusammensetzenden Striche keine Linien; man bedient sich jedoch gewöhnlich derselben als Zeichen (Symbole) der letzteren.

Aufgaben.

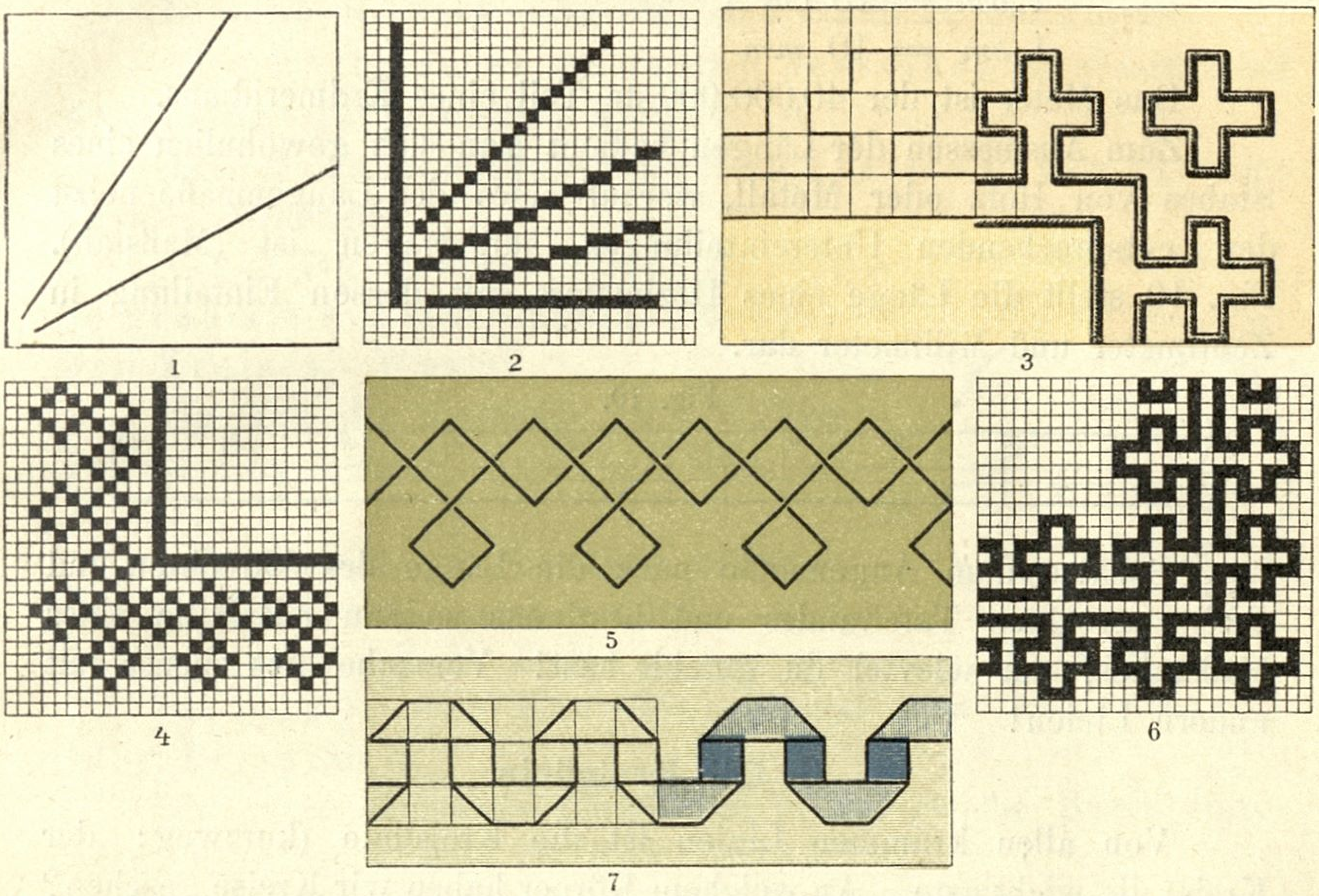
1. Zeichnet eine gerade, eine krumme, eine geradgebrochene, eine krummgebrochene und eine gemischte Linie! Bezeichnet jede dieser Linien mit 2 Buchstaben.

2. Ziehet mit Hilfe des Lineals eine Strecke, einen Strahl und eine unendliche Linie! Jede dieser 3 Linien ist mit 2 Ziffern zu bezeichnen.

3. Ziehet eine lotrechte, eine wagrechte und eine schräge Gerade! Benennt diese 3 Linien mit je einem Buchstaben!

4. Zeichnet eine volle, eine punktierte, eine gestrichelte und eine strichpunktierte Linie! Die einzelnen Linien sind mit je einer Ziffer zu bezeichnen.

Verwendungsbeispiele (Gruppe III).



1 gerade Linien von verschiedener Richtung. 2 wie man Linien auf Tupfpapier überträgt. 3 Vereinigung lotrechter und wagrechter Linien zu einer Randverzierung mit Eckbildung, verwendbar für Decken und Deckchen mit aufgenähter Schnur. 4 und 6 Tupfvorlagen für Häkelarbeit, Kreuzstich, gezählten Flachstich, zum Ausnähen des Netzes und für Perlarbeit. 5 schiefe Linien. Ornament, verwendbar wie 3 auch für Stiel- und Schnurstich. 7 Ornament, verwendbar zur Bändchenbenähung für Kinderkleider u. dgl.

4. Das Messen der Strecken.

Die Länge einer Strecke bestimmen, heißt diese messen.

Hiezu nimmt man eine Strecke von bekannter Länge als Einheit an und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dies angibt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Als Einheit des Längenmaßes gilt das Meter (m), das in 10 Dezimeter (dm) eingeteilt wird. 1 Dezimeter hat 10 Zentimeter (cm), und jedes Zentimeter ist gleich 10 Millimetern (mm). 1000 Meter geben 1 Kilometer (km), und 10 Kilometer machen 1 Myriameter (μm) aus.

In Zeichen:

$$1\ \mu m = 10\ km$$
$$1\ km = 1000\ m$$

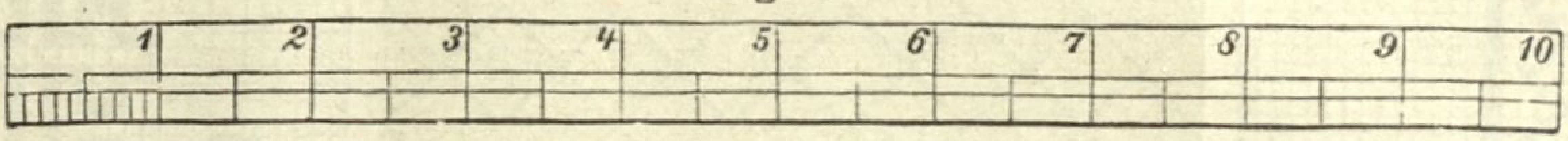
$$\left.\begin{array}{l}1\ m = 10\ dm\\ 1\ dm = 10\ cm\end{array}\right\}\ 1\ m = 100\ cm$$

$$1\ cm = 10\ mm$$

Das Meter ist der 40,000.000ste Teil eines Erdmeridians.

Zum Ausmessen der Längen bedient man sich gewöhnlich eines Stabes von Holz oder Metall, worauf eines der Längenmaße nebst den entsprechenden Untereinteilungen aufgetragen ist (Maßstab). Fig. 10 stellt die Länge eines Dezimeters mit dessen Einteilung in Zentimeter und Millimeter dar.

Fig. 10.



Schätze dem Augenmaße nach die Länge des lotrechten und des wagrechten Tafelrandes und bestimme sodann mit Hilfe eines Maßstabes, um wieviel du gefehlt hast! Versuche dies ebenso mit andern Linien!

5. Die Kreislinie.

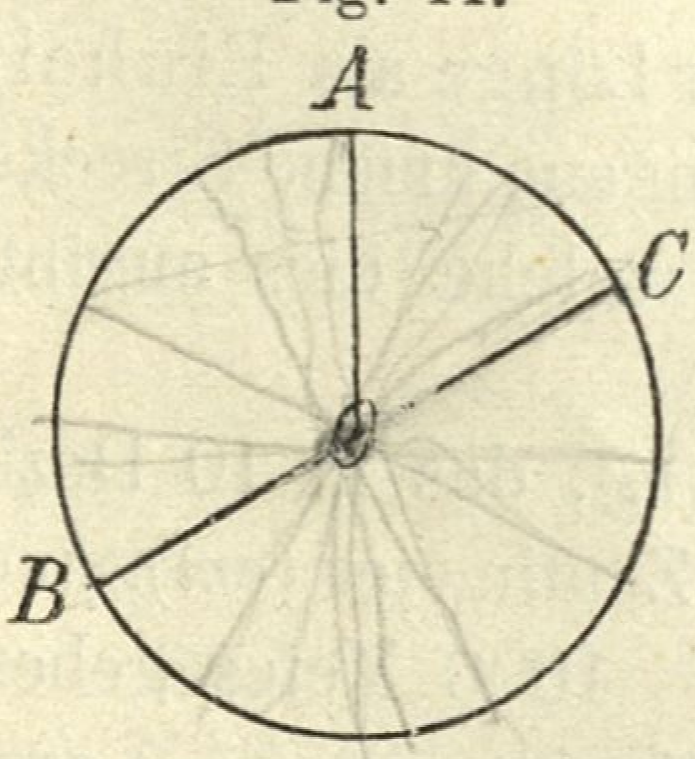
Von allen krummen Linien ist die Kreislinie (kurzweg: der Kreis) die wichtigste. An welchem Körper haben wir Kreise gesehen?

Zur Darstellung des Kreises bedient man sich des Zirkels. Während die eine Spitze in einem bestimmten Punkte (dem Mittelpunkte) eingesetzt wird, beschreibt die zweite Spitze eine in selbst zurückkehrende krumme Linie. Da hierbei die beiden Zirkelspitzen immer dieselbe Entfernung von einander beibehalten, so haben alle Punkte der Kreislinie von dem Mittelpunkte die gleiche Entfernung.

Daher kann man sagen:

E i n e K r e i s l i n i e i s t e i n e i n s i c h s e l b s t z u r ü c k k e h r e n d e k r u m m e L i n i e v o n d e r B e s c h a f f e n h e i t, d a ß a l l e i h r e P u n k t e v o n e i n e m g e g e b e n e n P u n k t e d i e g l e i c h e E n t f e r n u n g h a b e n.

Fig. 11.



Der in der Mitte der Kreislinie (Fig. 11) gelegene Punkt O heißt M i t t e l p u n k t oder Z e n t r u m.

Jede gerade Linie, welche den Mittelpunkt des Kreises mit irgend einem Punkte der Kreislinie verbindet, heißt H a l b m e s s e r oder R a d i u s. Z. B. AO.

Alle geraden Linien, welche zwei entgegengesetzte Punkte der Kreislinie verbinden, nennt man D u r c h m e s s e r oder D i a m e t e r. Z. B. BC.

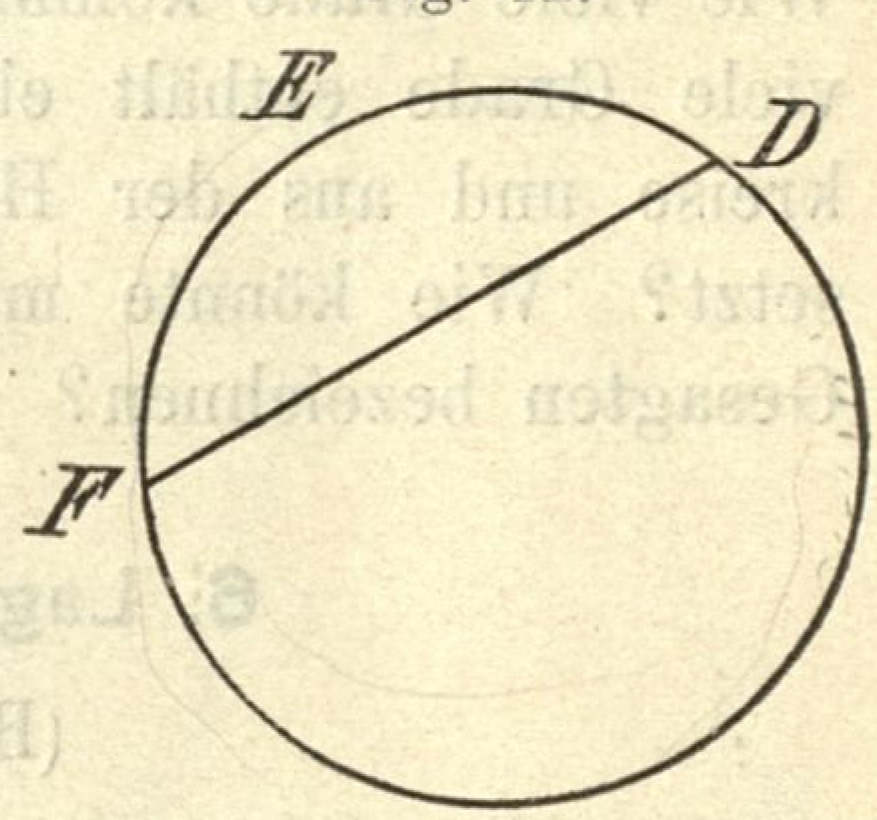
In welchem Punkte treffen alle Halbmesser eines und desselben Kreises zusammen?

In welchem Punkte schneiden sich sämtliche Durchmesser?

Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind untereinander gleich. Warum?

Alle Durchmesser desselben Kreises haben gleiche Größe. Weshalb?

Fig. 12.



Jeder Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser desselben Kreises. Warum?

Ein Teil der Kreislinie heißt Kreisbogen oder kurz Bogen. Z. B. Fig. 12, *D E F*.

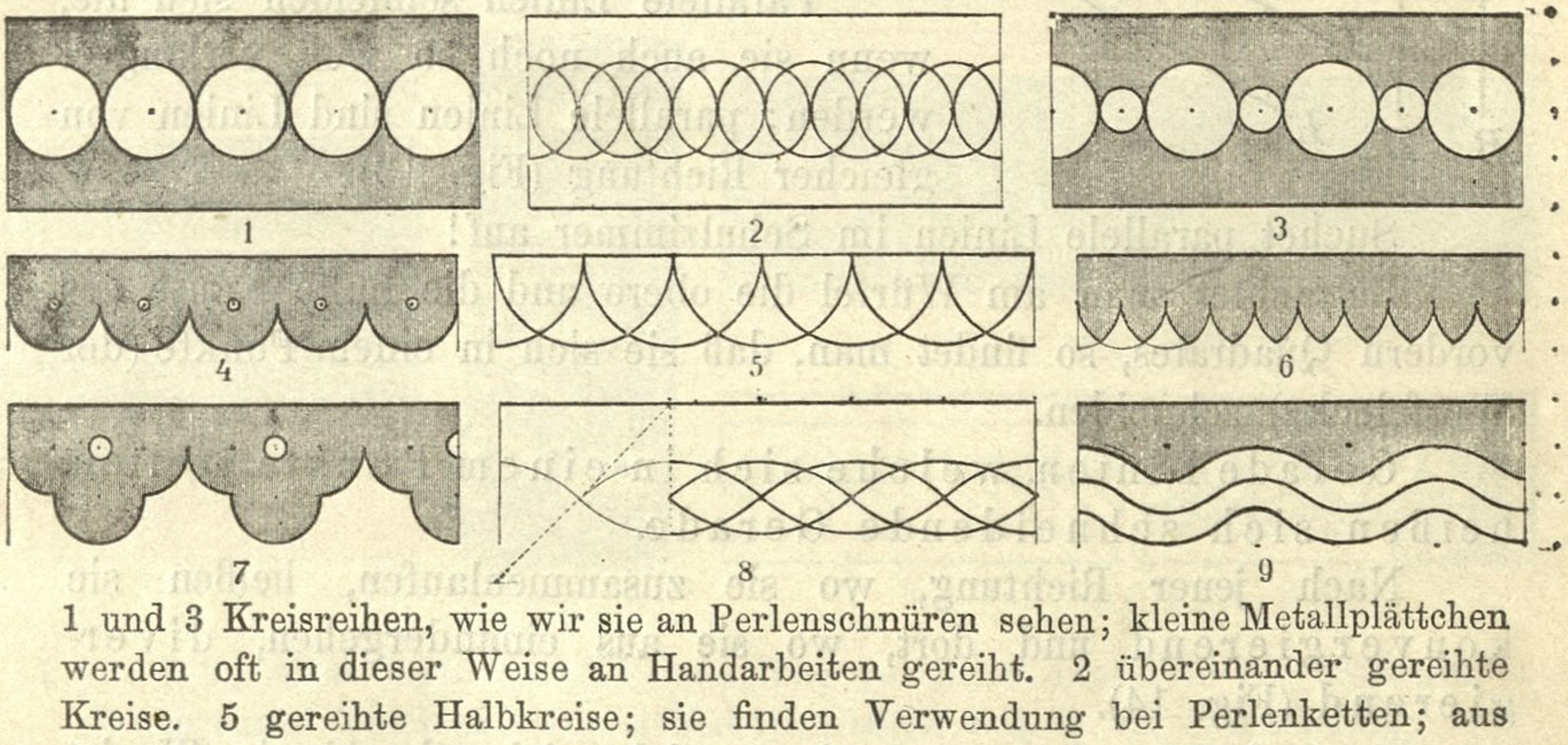
Jede Strecke, welche zwei beliebige Punkte des Kreisumfanges verbindet, wird Sehne genannt. Z. B. *D F*.

Die Länge der Kreislinie nennt man auch Umfang oder Peripherie.

Die ganze Kreislinie pflegt man in 360 gleiche Bogen einzuteilen; jedes Stück heißt ein Bogengrad.

Wie viele Bogengrade enthält *a*) der Halbkreis? *b*) ein Viertelkreis oder Quadrant? *c*) ein Achtelkreis oder Oktant?

Verwendungsbeispiele (Gruppe IV).



1 und 3 Kreisreihen, wie wir sie an Perlenschnüren sehen; kleine Metallplättchen werden oft in dieser Weise an Handarbeiten gereiht. 2 übereinander gereihte Kreise. 5 gereihte Halbkreise; sie finden Verwendung bei Perlenketten; aus ihnen bildet sich 6 der gotische Bogen, der so wie 4 und 7 als Ausschlagemuster für nicht fransende Stoffe wie Tuch, Flanell u. s. w. Verwendung findet. 8 Reihung von Viertelbogen zur Wellenlinie, welche in mehrfacher Übereinanderlegung die geometrische Grundlage der Flechtbänder bildet. 9 das Wellenband, wie es als Abschluß von Wäschestücken häufig verwendet wird.

Bei feineren Messungen wird jeder Grad überdies in 60 Bogenminuten und jede Bogenminute in 60 Bogensekunden eingeteilt.

Die Grade, Minuten und Sekunden werden mit ^{0}, $'$ und $''$ bezeichnet.

Man schreibt: Der Kreisumfang enthält 360^0, $1^0 = 60'$ und $1' = 60''$.

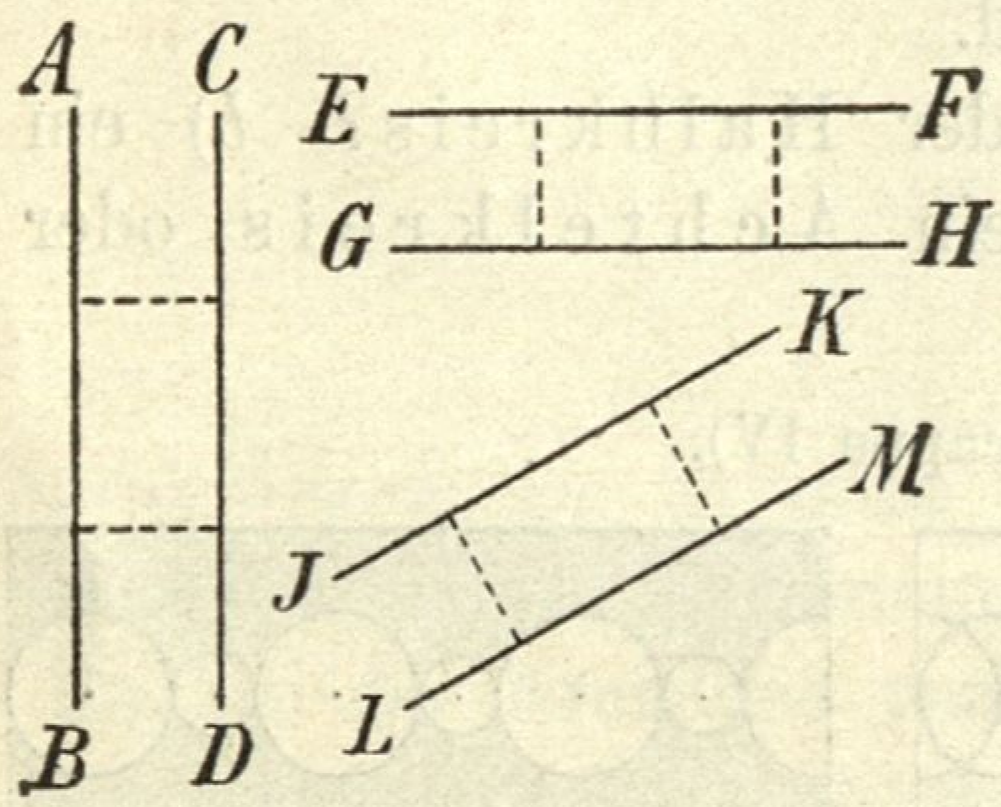
Wie viele Grade enthält ein Sechstel (Sextant) des Kreises? Wie viele Grade kommen auf die Hälfte eines Sechstelkreises? Wie viele Grade enthält ein Kreisbogen, der sich aus einem Sechstelkreise und aus der Hälfte eines zweiten Sechstelkreises zusammensetzt? Wie könnte man ein solches Bogenstück nach dem früher Gesagten bezeichnen? Wie viele Grade enthalten 2 Sechstelkreise?

6. Lage zweier Linien im Raume.

(Betrachtung des Würfels.)

Die obere und die untere Kante der zugewendeten Würfelfläche haben überall die gleiche Entfernung von einander; dasselbe gilt auch bezüglich der linken und rechten Kante dieser Fläche.

Fig. 13.



Gerade Linien, welche überall eine gleiche Entfernung von einander haben, heißen gleichlaufend oder parallel. Zeichen hierfür: $\|$.

Parallele Linien schneiden sich nie, wenn sie auch noch so weit verlängert werden; parallele Linien sind Linien von gleicher Richtung (Fig. 13).

Suchet parallele Linien im Schulzimmer auf!

Betrachtet man am Würfel die obere und die linke Kante des vordern Quadrates, so findet man, daß sie sich in einem Punkte (der Würfelecke) schneiden.

Gerade Linien, welche sich in einem Punkte treffen, heißen sich schneidende Gerade.

Nach jener Richtung, wo sie zusammenlaufen, heißen sie konvergierend und dort, wo sie aus einandergehen, divergierend (Fig. 14).

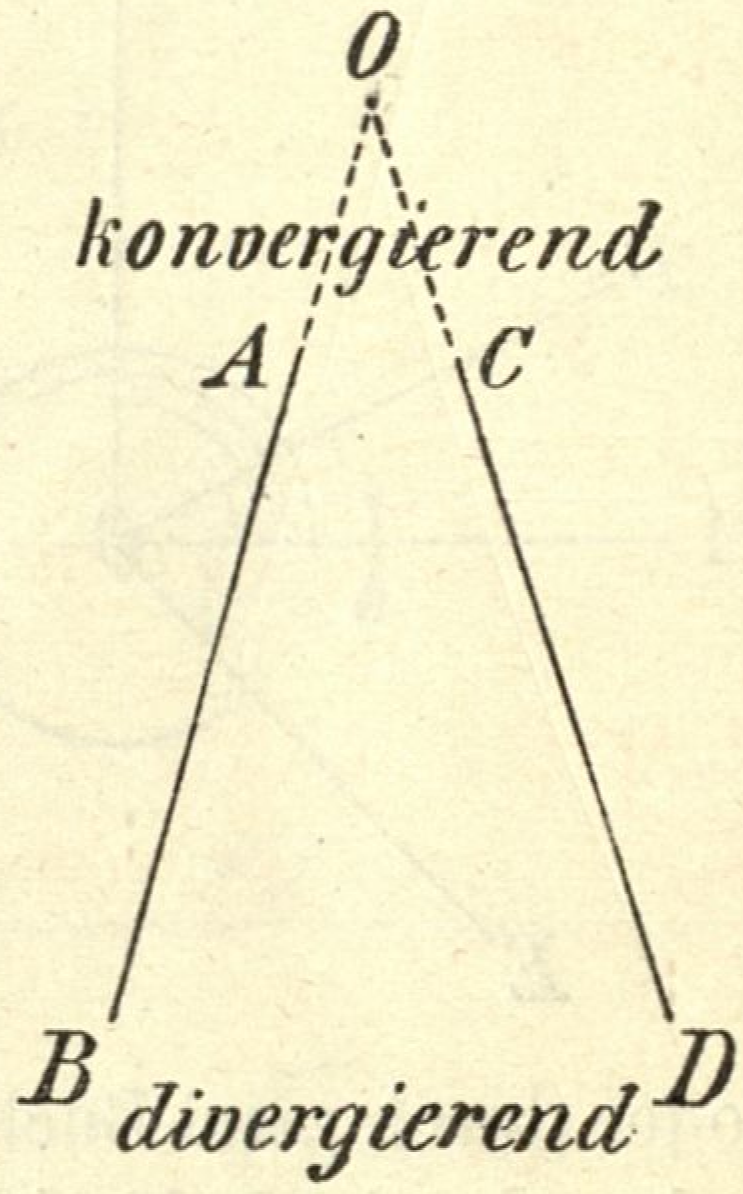
Zeige im Schulzimmer Linien, welche sich schneiden! Wo ist ihr Schnittpunkt?

Zeiget die obere Kante der vordern Würfelfläche! Suchet die rechts liegende Kante der rückwärtigen Würfelfläche auf

Sind diese Kanten zu einander parallel? Treffen sie sich in einem Punkte?

Von Linien, welche nicht zu einander parallel sind und auch so aneinander vorübergehen, daß sie sich nicht in einem Punkte treffen, sagt man: sie kreuzen sich.

Fig. 14.



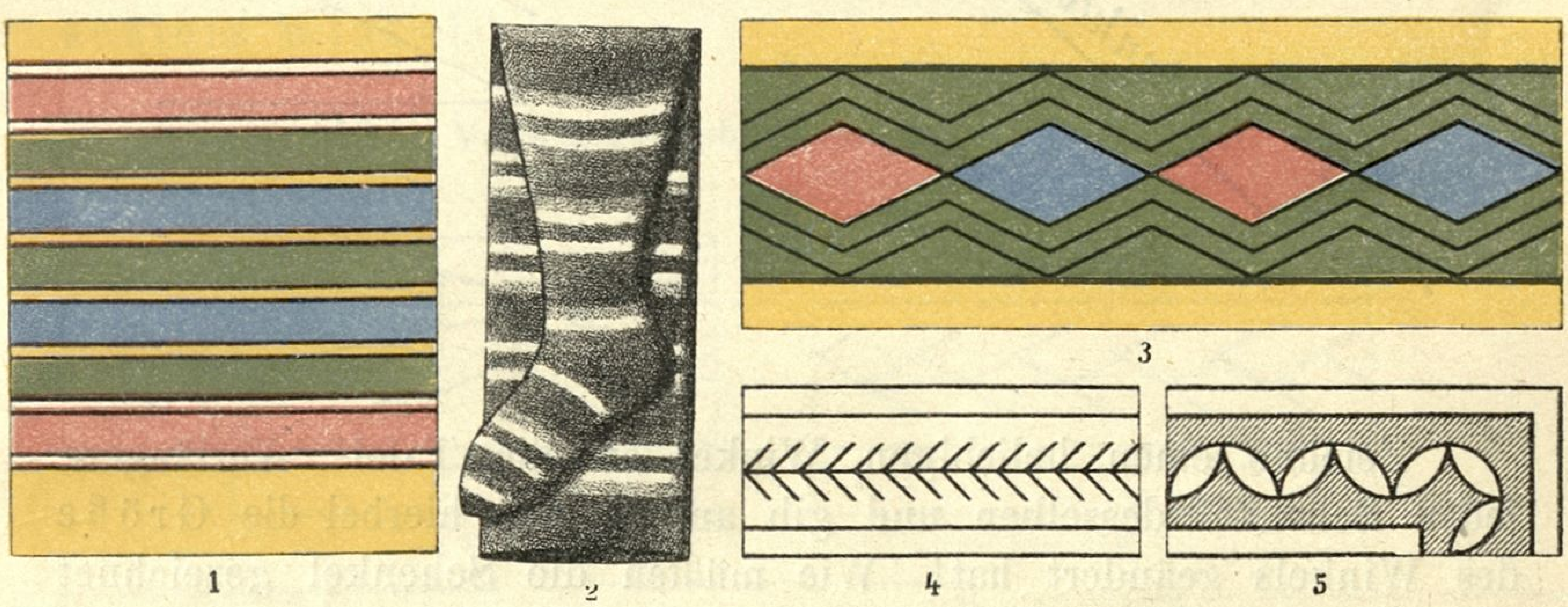
Welche Kanten des Schulzimmers kreuzen sich?

Zwei gerade Linien sind entweder zu einander parallel oder sie schneiden sich oder sie kreuzen sich.

Zeichne an die Tafel eine lotrechte Linie und zieh zu ihr nach dem Augenmaße eine Parallele! Dasselbe soll auch zu einer wagrechten und zu einer schiefen Geraden geschehen!

Zwei parallele Linien zeigen uns den Saum als Schmuck nicht nur der Kleidungs- und Wäschestücke, sondern auch der einfach getünchten Wand, der Flächen unserer Möbel, der Seiten eines Buches u. s. w. Als Schraffierung begrenzter Flächen erscheinen parallele Linien schon seit ältester Zeit.

Verwendungsbeispiele (Gruppe V).

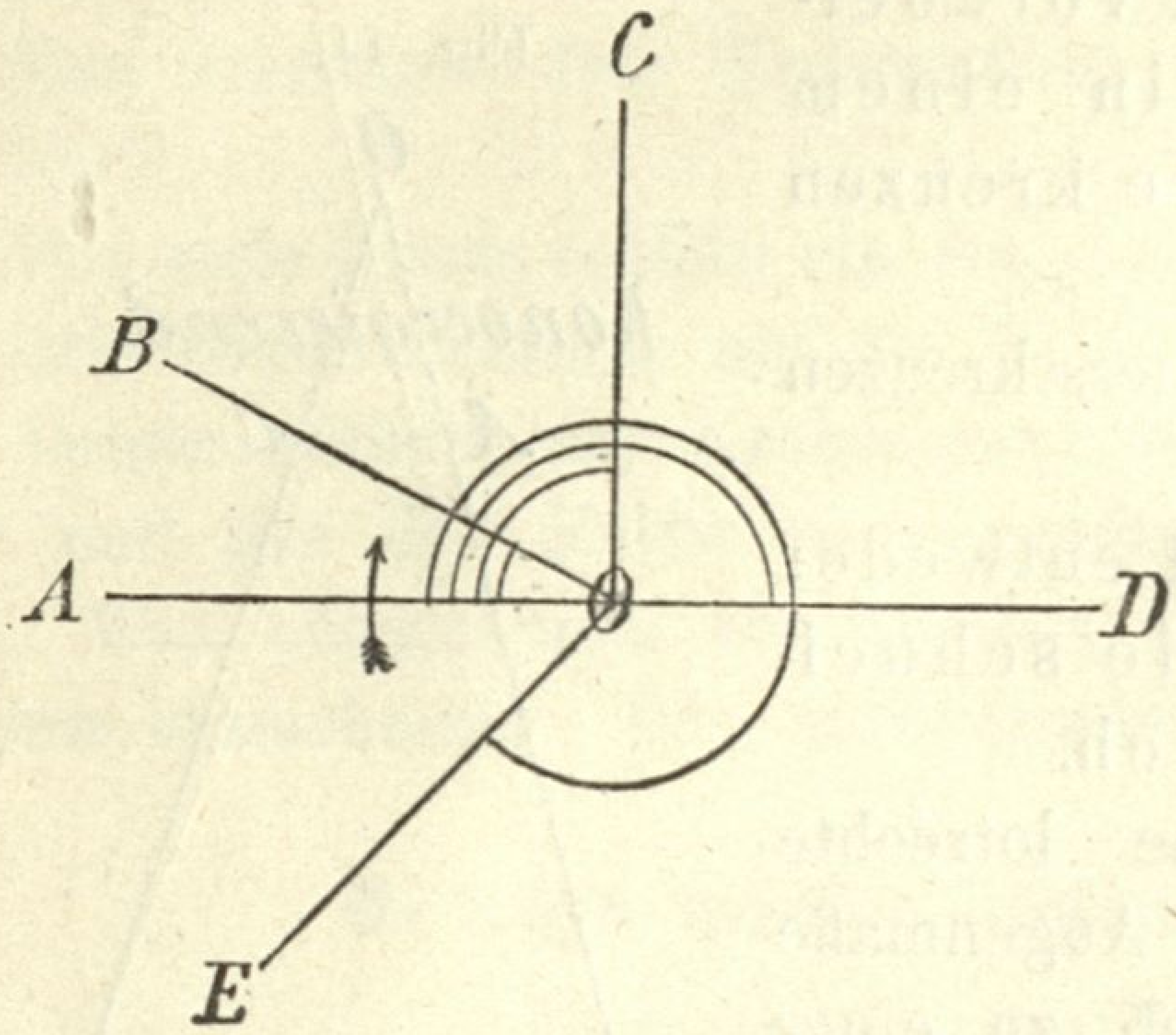


1 aus ägyptischen Gräbern. 2 Verwendung paralleler Linien in der Stickerei. 3 von einem Mumienkasten. 4 Federn, Gräten u. s. w. 5. Schraffierung.

7. Die Winkel.

Dreht sich der Strahl AO (Fig. 15) um den festen Punkt O so, daß er nach und nach in die Lagen OB, OC, OD und OE kommt und zuletzt wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt, so weicht er bei dieser Drehung von seiner ursprünglichen Lage AO immer mehr ab.

Fig. 15.



Der Unterschied in der Richtung zweier von demselben Punkte ausgehenden Strahlen heißt Winkel.

Zeichen für Winkel: $\sphericalangle$ oder $\angle$.

Die beiden Strahlen, welche den Winkel bilden, heißen Schenkel; ihr Durchschnittspunkt wird Scheitel oder Spitze des Winkels genannt (Fig. 16).

Man bezeichnet einen Winkel (Fig. 17) entweder durch einen Buchstaben am Scheitel (z. B. $\angle a$) oder durch zwei Buchstaben in der Mitte der Schenkel (z. B. Winkel rs) oder durch 3 Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem Ende des einen Schenkels, dann der Buchstabe am Scheitel und zuletzt der Buchstabe am Ende des andern Schenkels ausgesprochen wird (z. B. $\angle ABC$ oder $\angle CBA$).

Fig. 16.

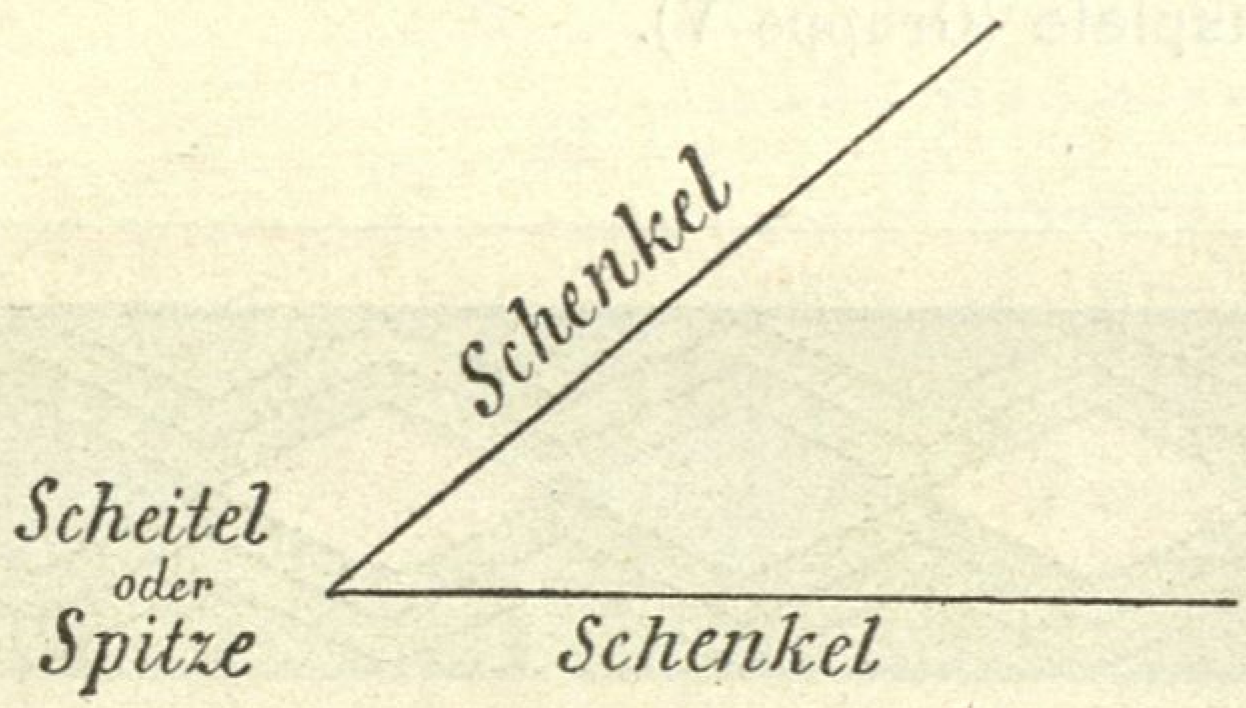
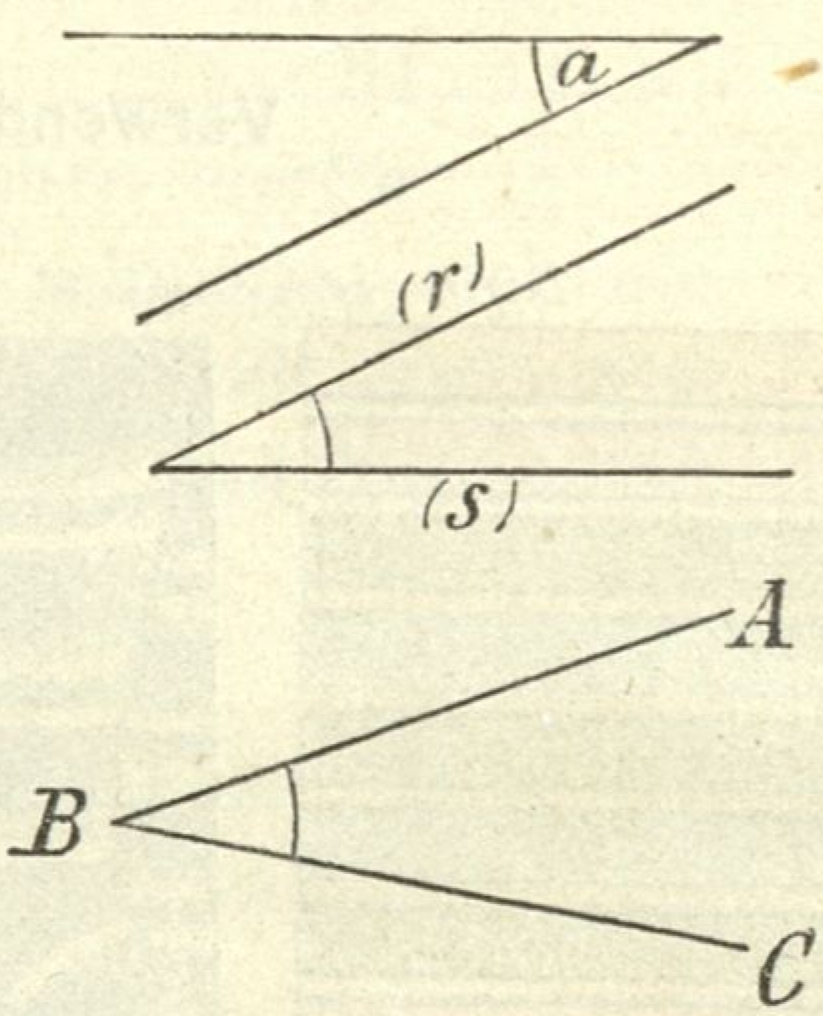


Fig. 17.



Zeichne einen beliebigen Winkel an die Tafel! Verlängere jeden Schenkel desselben und gib an, ob sich hierbei die Größe des Winkels geändert hat! Wie müßten die Schenkel gezeichnet werden, damit der Winkel größer würde?

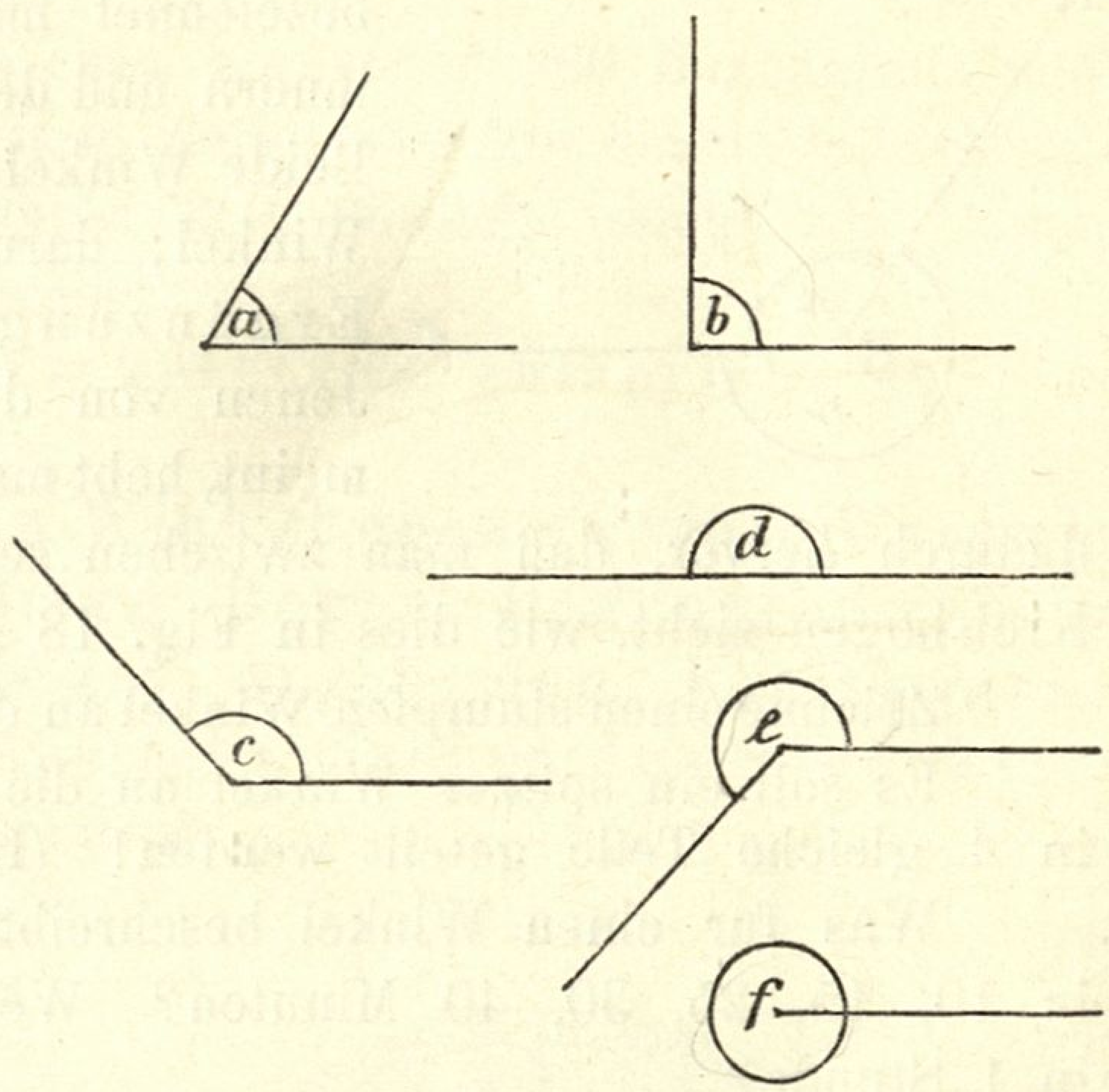
Ein Winkel wird desto größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen; die Länge der Schenkel hat aber keinen Einfluß auf die Größe eines Winkels.

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sowohl die Scheitel als auch die Schenkel sich beziehungsweise decken.

Macht der Strahl weniger als ein Viertel einer vollen Umdrehung, so entsteht ein *spitzer Winkel* ($\angle a$). Beträgt diese Drehung gerade ein Viertel einer vollen Umdrehung, so heißt der Winkel ein *rechter* ($\angle b$).

Zeichen für den rechten Winkel: R.

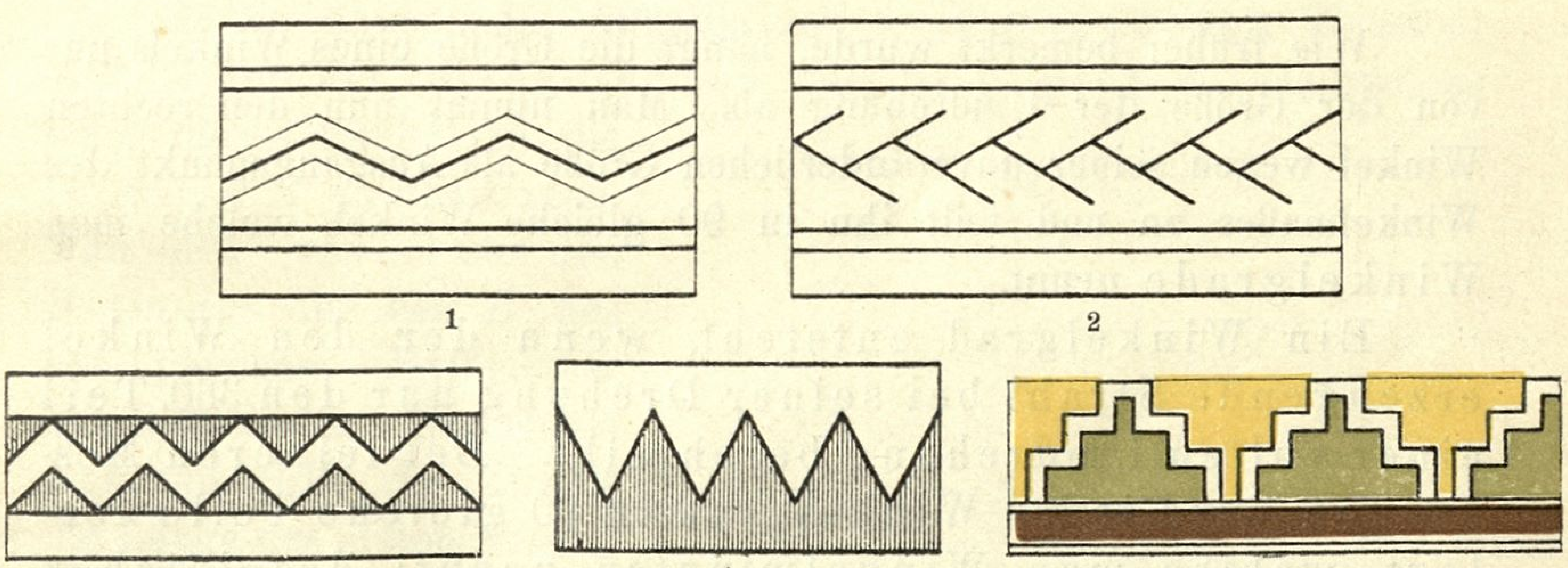
Fig. 18.



Macht die Drehung mehr als ein Viertel einer vollen Umdrehung aus, erreicht sie jedoch noch nicht eine halbe Umdrehung, so nennt man den Winkel einen *stumpfen* ($\angle c$). Beträgt die Drehung bereits eine halbe Umdrehung, bilden also beide Schenkel eine gerade Linie, so heißt der Winkel ein *gerader oder gestreckter* ($\angle d$). Winkel von mehr als einer halben Umdrehung nennt man *erhabene Winkel* ($\angle e$). Hat der Strahl eine ganze Umdrehung gemacht, so entsteht ein *voller Winkel* ($\angle f$).

Der spitze und der stumpfe Winkel heißen auch schiefe Winkel.

Verwendungsbeispiele (Gruppe VI).

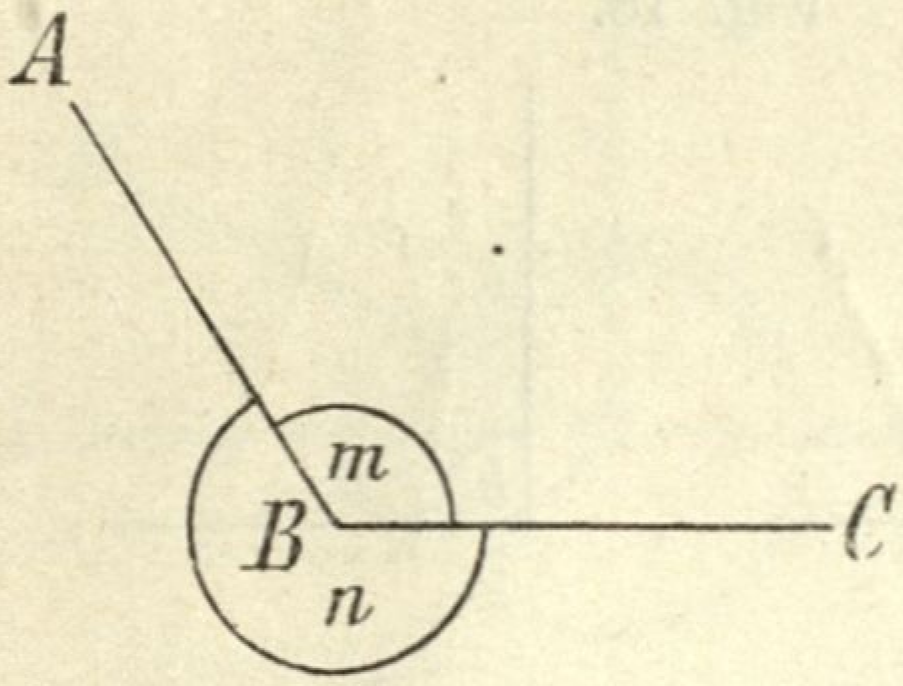


1 Zickzackband. 2 Fischgrätenstich, häufig verwendet auf Wäschegegenständen oder als Zierstich auf Kleidern. 3 Zackenlitze als Einsatz zwischen zwei gesäumten Stoffteilen. 4 Ausschlagemuster für Tuch, Flanell u. s. w. 5 Treppenform der Assyrer.

Der spitze, der rechte und der stumpfe Winkel werden häufig auch hohle Winkel genannt.

Strenge genommen bilden die beiden sich schneidenden Strahlen immer zwei Winkel. So hat man es bei den 2 sich schneidenden geraden Linien AB und BC (Fig. 19) mit den Winkeln m und n zu tun; gewöhnlich bezeichnet man den kleineren ($\angle m$) als innern und den größeren als äußern Winkel. Beide Winkel ergänzen sich zu einem vollen Winkel; darum wird jeder von ihnen der Ergänzungswinkel des andern genannt. Jenen von den 2 Winkeln, welchen man meint, hebt man in der Zeichnung gewöhnlich dadurch hervor, daß man zwischen seinen Schenkeln einen kleinen Kreisbogen zieht, wie dies in Fig. 18 zu ersehen ist.

Fig. 19.



Zeichne einen stumpfen Winkel an die Schultafel und halbiere ihn!

Es soll ein spitzer Winkel an die Tafel gezeichnet und hierauf in 4 gleiche Teile geteilt werden! (Immer nach dem Augenmaße).

Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten? Welchen Winkel macht derselbe in 1 Stunde?

Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr *a*) um 3, 6, 9 Uhr? *b*) um 2, 5, 10 Uhr?

Durch Reihung von Winkeln dürfte das unter dem Namen Zickzack bekannte Ornament entstanden sein, das bei den Assyrern Treppenform annahm und wohl auch die Grundlage des Zahnschnittornamentes bildet.

8. Das Messen der Winkel.

Wie früher bemerkt wurde, hängt die Größe eines Winkels nur von der Größe der Umdrehung ab. Man nimmt nun den rechten Winkel wegen seiner unveränderlichen Größe als Ausgangspunkt des Winkelmaßes an und teilt ihn in 90 gleiche Winkel, welche man Winkelgrade nennt.

Ein Winkelgrad entsteht, wenn der den Winkel erzeugende Strahl bei seiner Drehung nur den 360. Teil einer vollen Umdrehung beschreibt. Bei feineren Messungen wird jeder Winkelgrad in 60 gleiche Teile zerlegt, welche man Winkelminuten nennt; desgleichen teilt man jede Winkelminute in 60 Winkelsekunden ein. Die Winkelgrade, Minuten und Sekunden bezeichnet man (wie eim Kreise) durch ^{0}, $'$, $''$.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Grade und Gradteile er enthält.

Aus diesen Erklärungen folgt:

Ein spitzer Winkel enthält weniger als 90°, ein rechter Winkel 90°; ein stumpfer Winkel hat mehr als 90°, aber weniger als 180°; ein gestreckter Winkel enthält 180°, ein erhabener Winkel mehr als 180°; der volle Winkel hat 360°.

Teilt man die Peripherie eines Kreises in 360 Bogengrade und zieht vom Mittelpunkte zu jedem Teilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt 360 Winkel, welche alle unter einander gleich sind (Winkelgrade).

Jedem einzelnen Winkelgrade entspricht je ein Bogengrad.

Demnach enthält ein Winkel eben so viele Winkelgrade, als der zugehörige Bogen Bogengrade hat. Daher kann jeder Winkel durch den Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, gemessen werden.

Darauf beruht der Gebrauch des Winkelmessers oder Transporteurs; derselbe dient teils zum Messen eines gegebenen, teils zur Konstruktion eines verlangten Winkels.

Fig. 20.

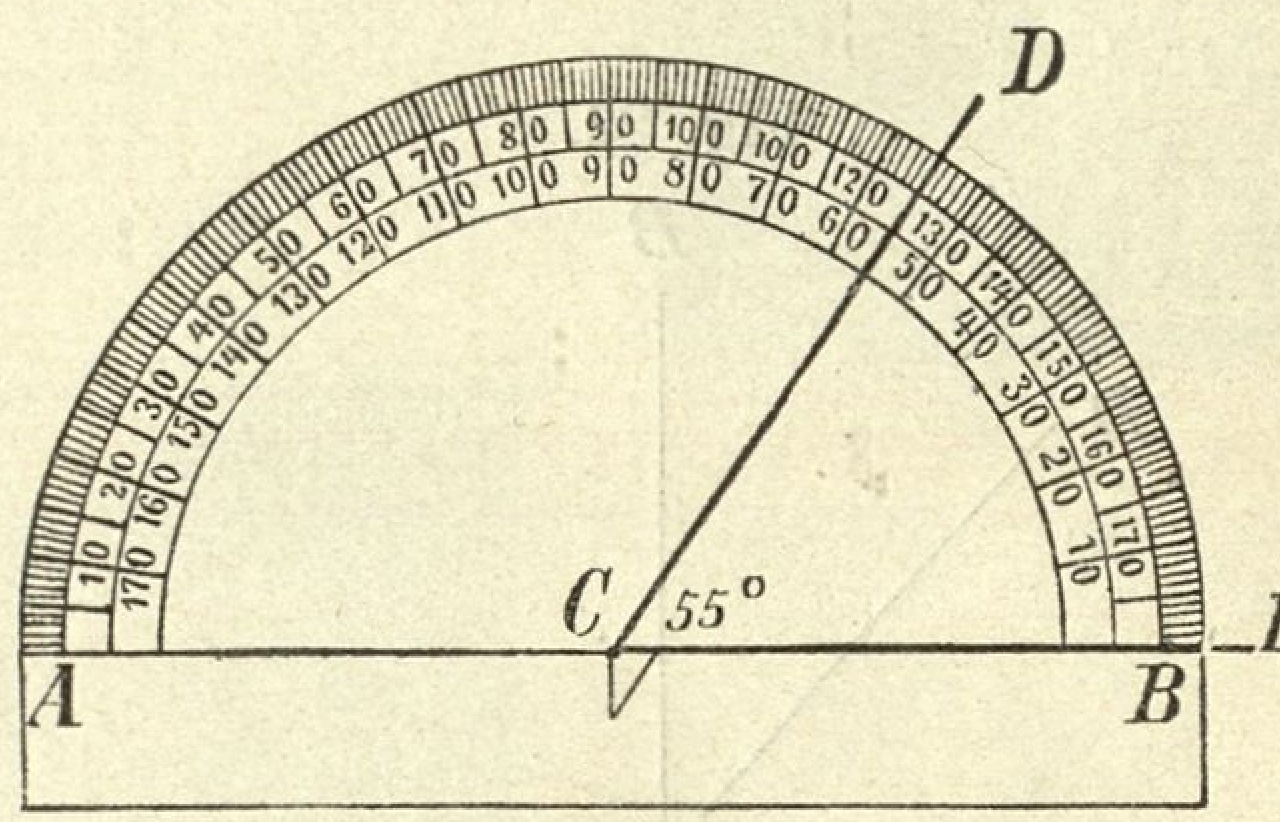
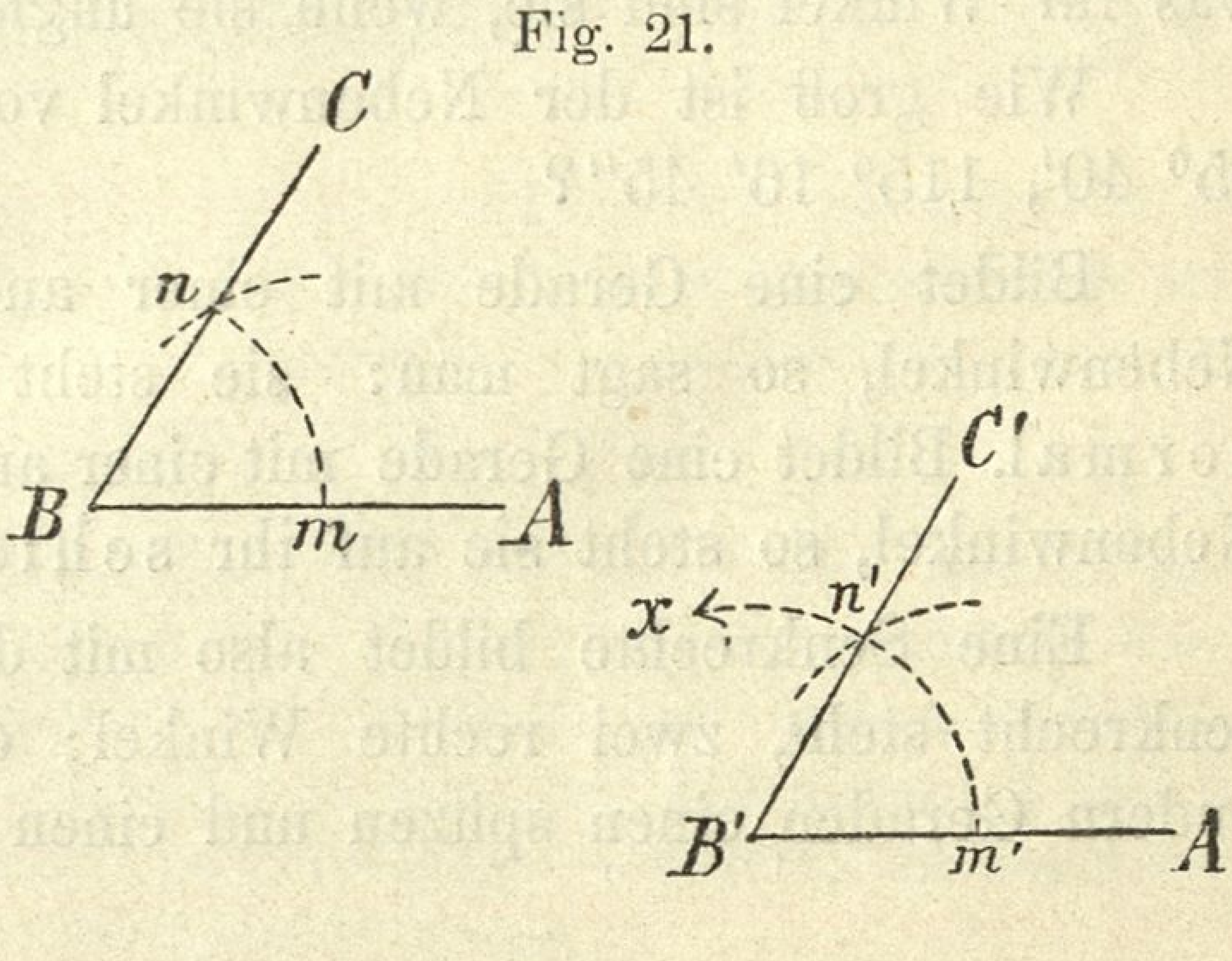


Fig. 20 zeigt, wie ein gegebener Winkel DCE abzumessen ist; derselbe enthält 55°.

Häufig kommt die Aufgabe vor, einen gegebenen Winkel ABC (Fig. 21) abzuzeichnen oder zu kopieren. Gesetzt, es wäre dieser Winkel an die Gerade $A'B'$ zu übertragen. Man ziehe von B aus den Bogen mn und von B' aus mit gleichem Halbmesser den Bogen $m'x$. Nun messe man mit Hilfe des Zirkels die Länge des ersten Bogens mn und übertrage sie auf den zweiten Kreisbogen $(m'n')$. Zieht man noch $B'C'$, so

Fig. 21.



erhält man den Winkel $A'B'C'$, welcher ebenso groß ist als ABC, weil beide Winkel gleiche Umdrehungsbogen besitzen.

Zeichne an die Schultafel mehrere spitze, stumpfe und erhabene Winkel, schätze deren Gradzahl zuerst mit freiem Auge ab und bestimme sodann die letztere mit Hilfe des Transporteurs!

Aufgaben.

1. Zeichnet an der Schultafel einen spitzen Winkel und übertraget denselben an eine andere Stelle! Dasselbe soll mit einem stumpfen Winkel geschehen!

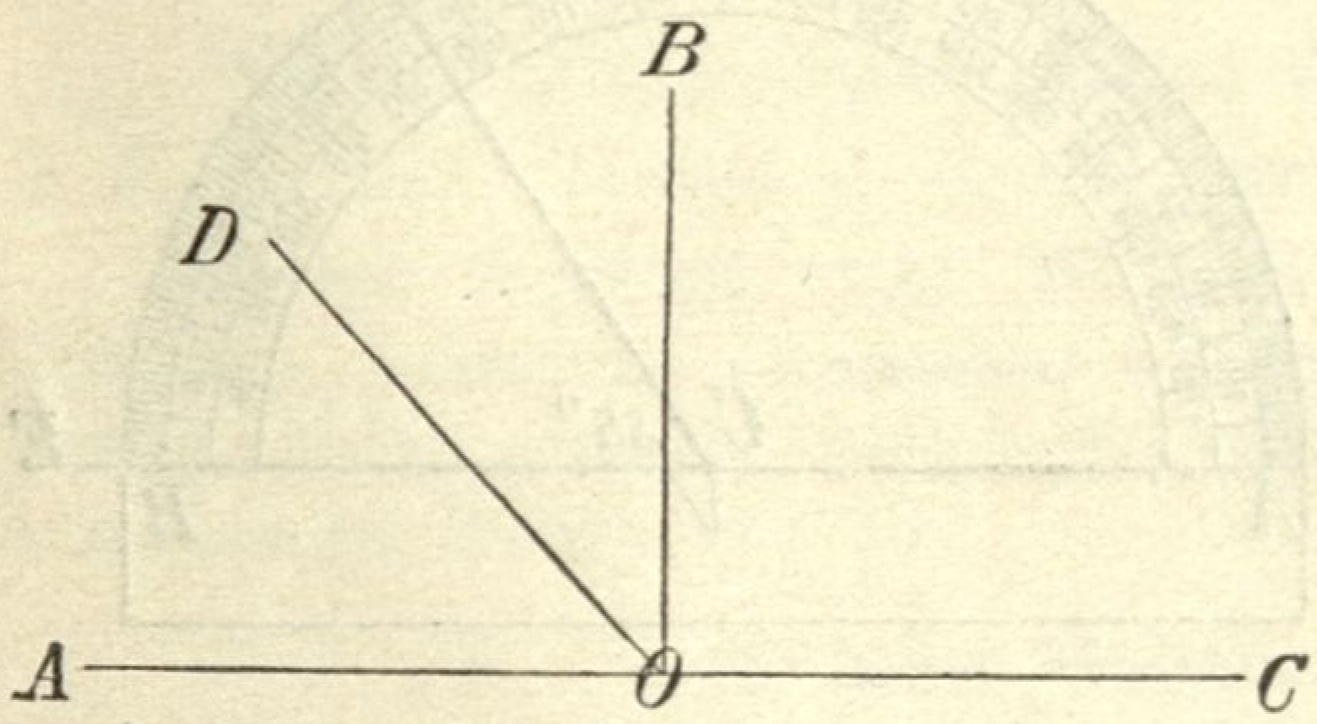
2. Zeichnet nach dem Augenmaße Winkel von 60°, 30°, 15°, 120°, 90°, 45°! (Nachmessen mit dem Transporteur).

3. Zeichnet mit Hilfe des Transporteurs Winkel von 36°, 72°, 135°!

9. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Wird ein Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer geraden Linie liegen. Solche Winkel heißen Nebenwinkel.

Fig. 22.



AOB (Fig. 22) ist ein Nebenwinkel von BOC; ebenso sind AOD und COD Nebenwinkel.

Da je zwei Nebenwinkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel geben, so folgt: Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Was für Winkel sind Nebenwinkel, wenn sie gleich sind, und was für Winkel sind sie, wenn sie ungleich sind?

Wie groß ist der Nebenwinkel von 20°, 35°, 64°, 100°, 148°, 55° 40′, 115° 16′ 45″?

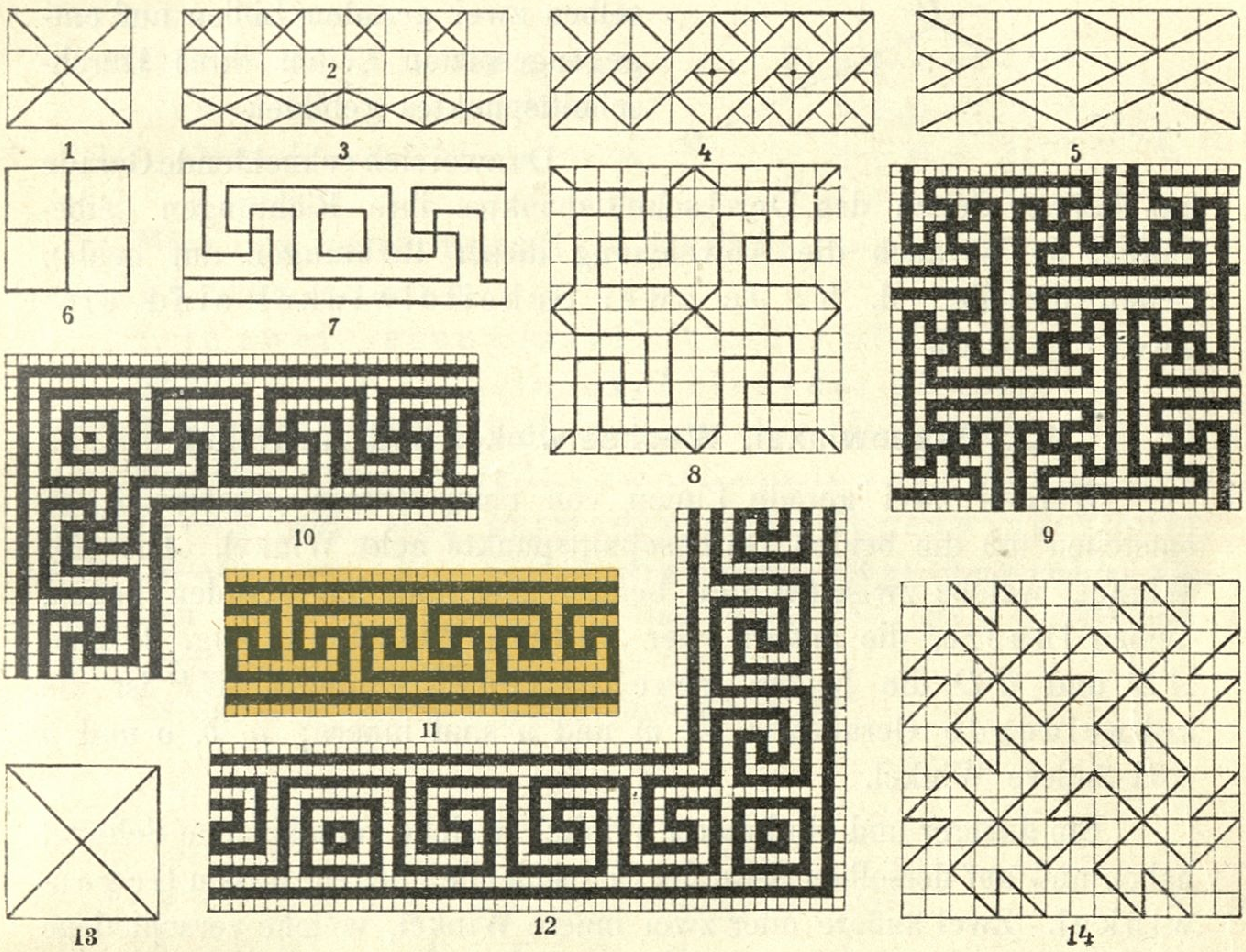
Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel, so sagt man: sie steht auf ihr senkrecht oder normal. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei ungleiche Nebenwinkel, so steht sie auf ihr schief.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, auf welcher sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzen und einen stumpfen Winkel.

In Fig. 22 ist BO senkrecht auf AC, was man so bezeichnet: $BO \perp AC$; dagegen steht DO auf AC schief (Zeichen: $\angle$).

Wenn sich eine horizontale und eine vertikale Linie treffen, so bilden sie stets einen rechten Winkel, stehen also immer senkrecht auf einander. Aber nicht von je zwei senkrechten Linien kann man sagen, daß die eine horizontal und die andere vertikal ist. Bei der Wage steht immer das Zünglein senkrecht auf dem Wagebalken. Doch ist das Zünglein nur dann vertikal und der Wagebalken horizontal, wenn die beiden Schalen leer oder gleich belastet sind; in jedem andern Falle sind sie schräge.

Verwendungsbeispiele (Gruppe VII).



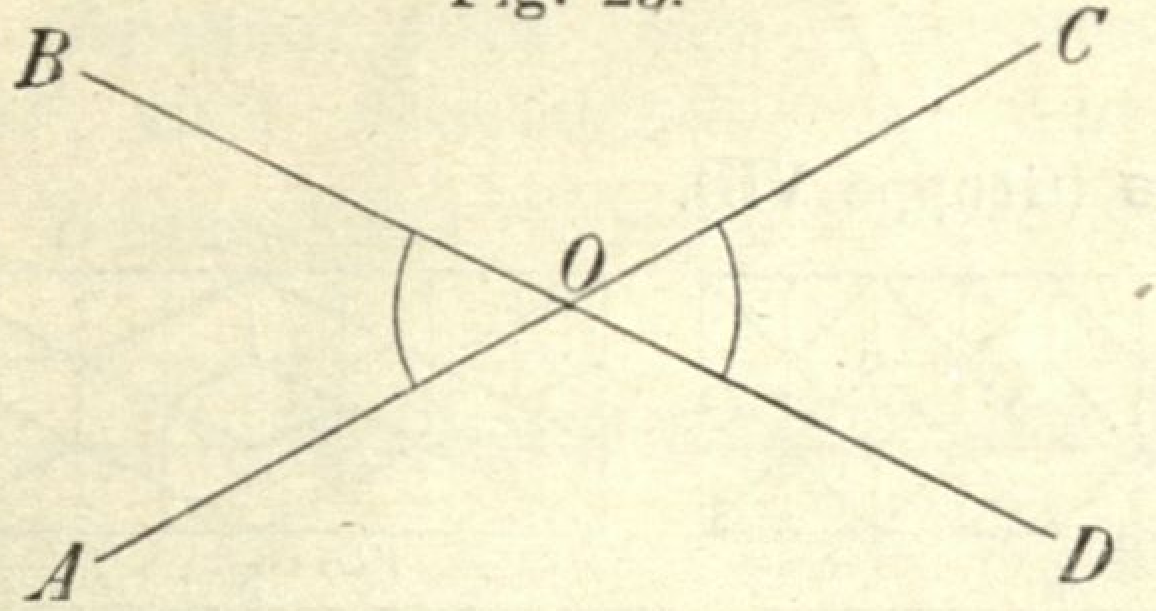
Durch Übereinanderlegen zweier gerader Linien gewinnen wir das Kreuz u. z. 1 und 2 das liegende oder griechische Kreuz, das in unseren Handarbeiten als Kreuzstich vielfach Verwendung findet; das stehende oder Andreaskreuz wird in unseren Kreuzsticharbeiten über das liegende gelegt, wenn mit demselben große Muster erzeugt werden sollen. 6 das sogenannte Swastikakreuz, aus welchem die Griechen jenes herrliche Ornament bildeten, das unter dem Namen gebrochener Stab, auch Mäander bei allen Kulturvölkern heute noch vielfache Verwendung findet; so in 7, 10, 11 und 12 als Randborte mit Eck- und Mittelbildung, in 8, 9 und 14 als Flächenfüllung. 13 gibt das Hakenkreuz, 3 und 5 durch Reihung des liegenden Kreuzes den Rautenstab. 4 Reihung des liegenden Kreuzes zur Bandverschlingung.

Zieh eine Gerade, nimm darin fünf Punkte an und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte! Welche Lage gegen einander haben diese Senkrechten?

Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen fünf Punkte an und fälle aus jedem auf die andere Gerade eine Senkrechte! Wie verhalten sich diese Senkrechten in Bezug auf ihre Länge?

Verlängert man beide Schenkel eines Winkels AOB (Fig. 23) über den Scheitel O hinaus, so heißt der von diesen Verlängerungen gebildete Winkel COD der Scheitelwinkel des gegebenen Winkels AOB. Scheitelwinkel werden also von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet.

Fig. 23.



Da zwei sich schneidende Gerade auf beiden Seiten des Durchschnittspunktes ihre Richtungen beibehalten, so ist auch die Abweichung dieser Richtungen auf beiden Seiten dieselbe; d. h.: Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

10. Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

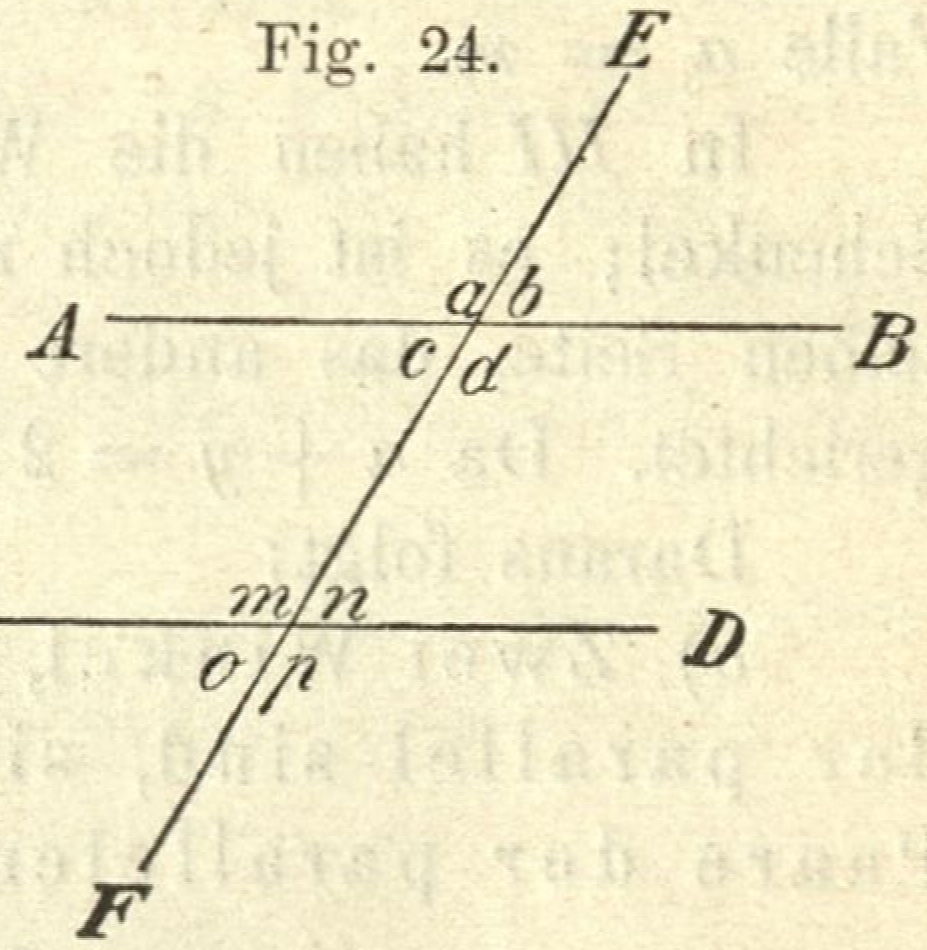
Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die andern vier äußere Winkel. In Fig. 24 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade; c, d, m und n sind innere; a, b, o und p sind äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Gegenwinkel. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden Wechselwinkel genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Anwinkel.

Gegenwinkel:	Wechselwinkel:	Anwinkel:
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n

Schreitet die Gerade AB (Fig. 24) längs der EF mit sich selbst parallel fort, bis sie in die Lage CD kommt, so wird sie, da sich dabei ihre Lage gegen die EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel bilden; es werden also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander fallen, also einander gleich sein; je zwei Wechselwinkel werden in zwei Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sein; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, also zusammen 180° betragen. Es ist also

Fig. 24.



$$\begin{array}{lll} 1)\ a = m, & 2)\ a = p, & 3)\ a + o = 180^0, \\ b = n, & b = o, & b + p = 180^0, \\ c = o, & c = n, & c + m = 180^0, \\ d = p, & d = m, & d + n = 180^0; \end{array}$$

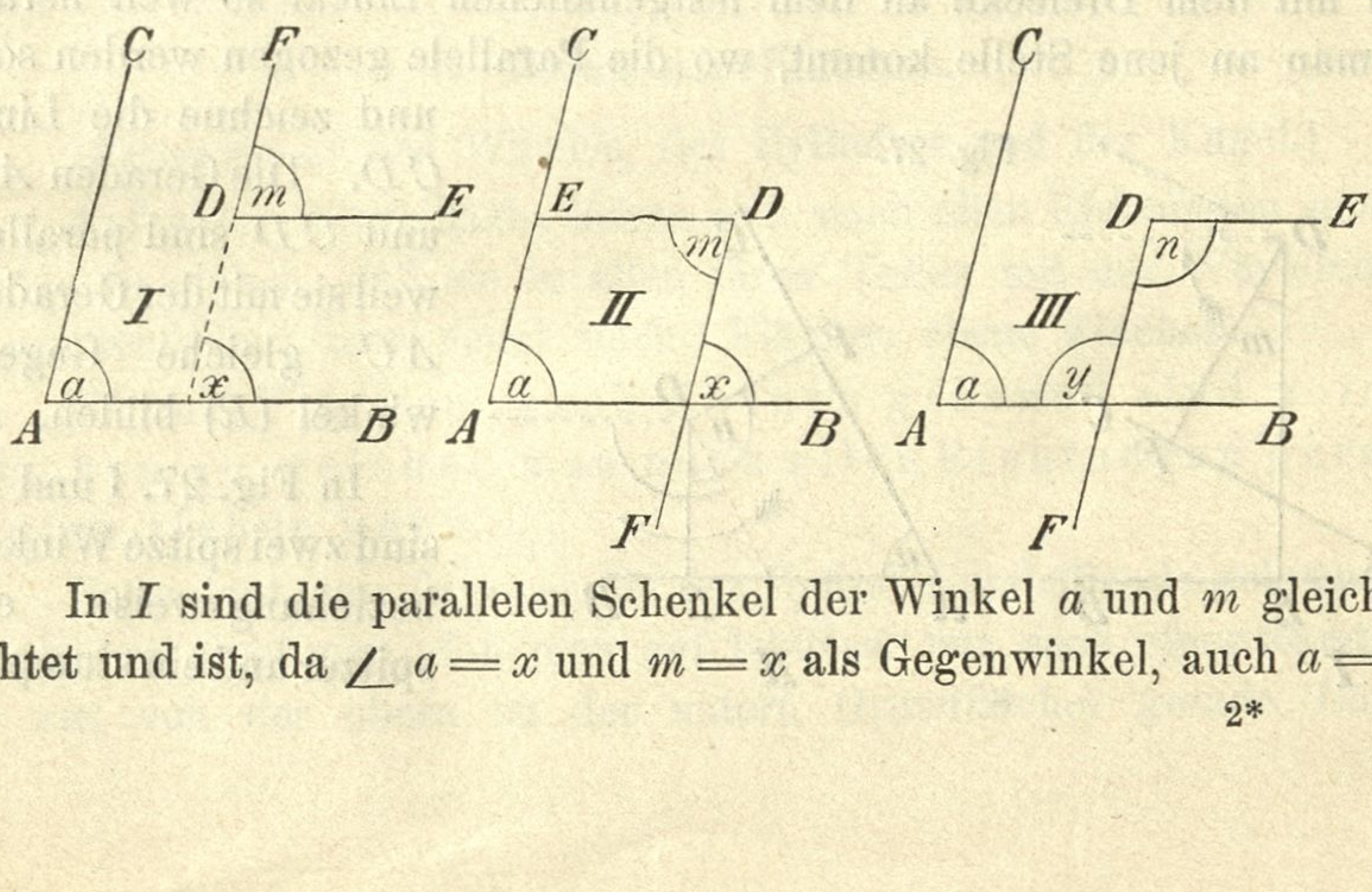
d. h.: Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind

1. je zwei Gegenwinkel einander gleich,
2. je zwei Wechselwinkel einander gleich,
3. je zwei Anwinkel zusammen gleich 180°.

Umgekehrt folgt: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind oder zwei Anwinkel zusammen 180° betragen, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Es sei (Fig. 25) $AB \parallel DE$ und $AC \parallel DF$.

Fig. 25.



In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet und ist, da $\angle\, a = x$ und $m = x$ als Gegenwinkel, auch $a = m$.

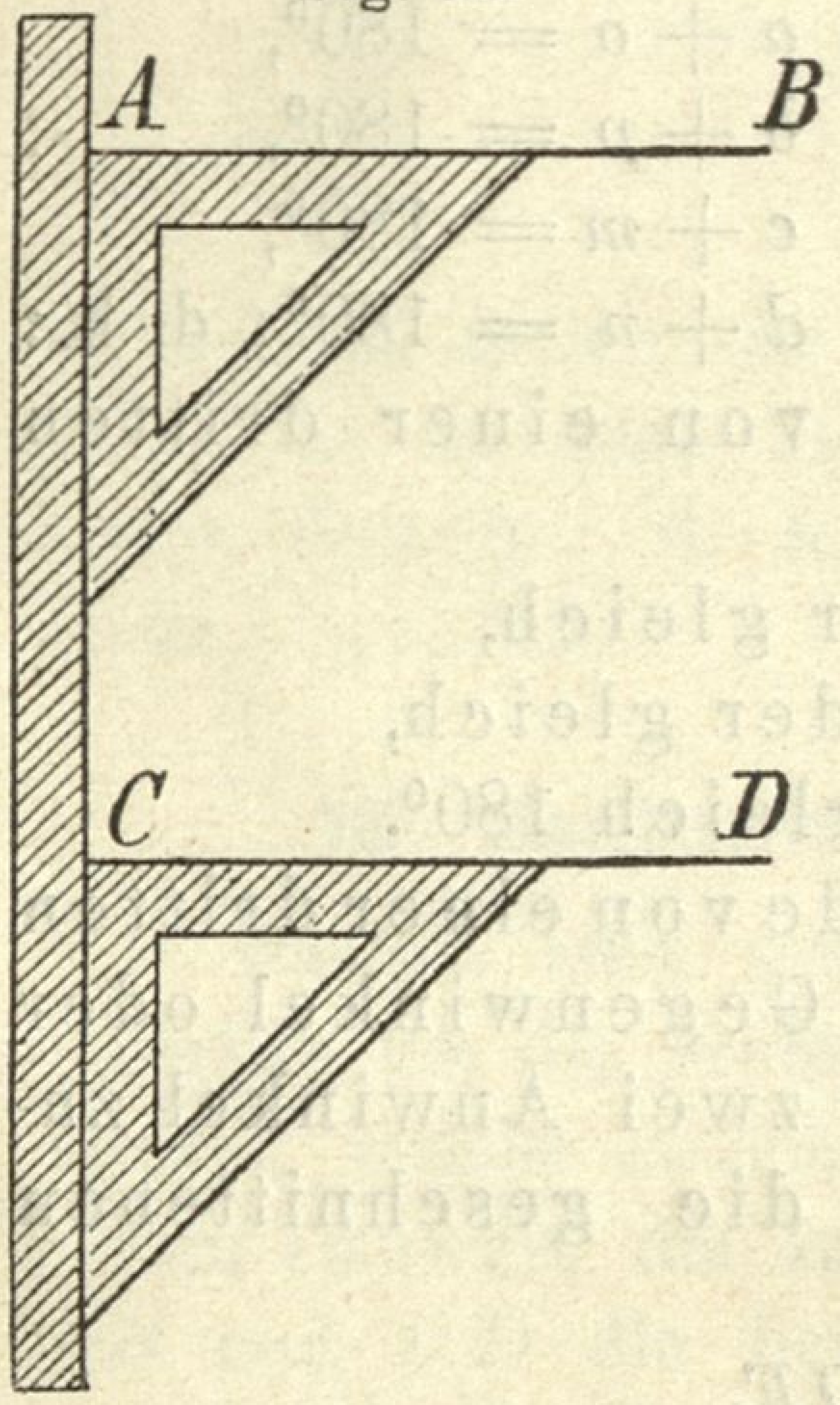
In *II* sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet; da a dem Winkel x als Gegenwinkel und m dem Winkel x als Wechselwinkel gleich ist, so ist auch in diesem Falle $a = m$.

In *III* haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel; es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Da $a + y = 2R$ und $n = y$ ist, so ist auch $a + n = 2R$.

Daraus folgt:

a) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

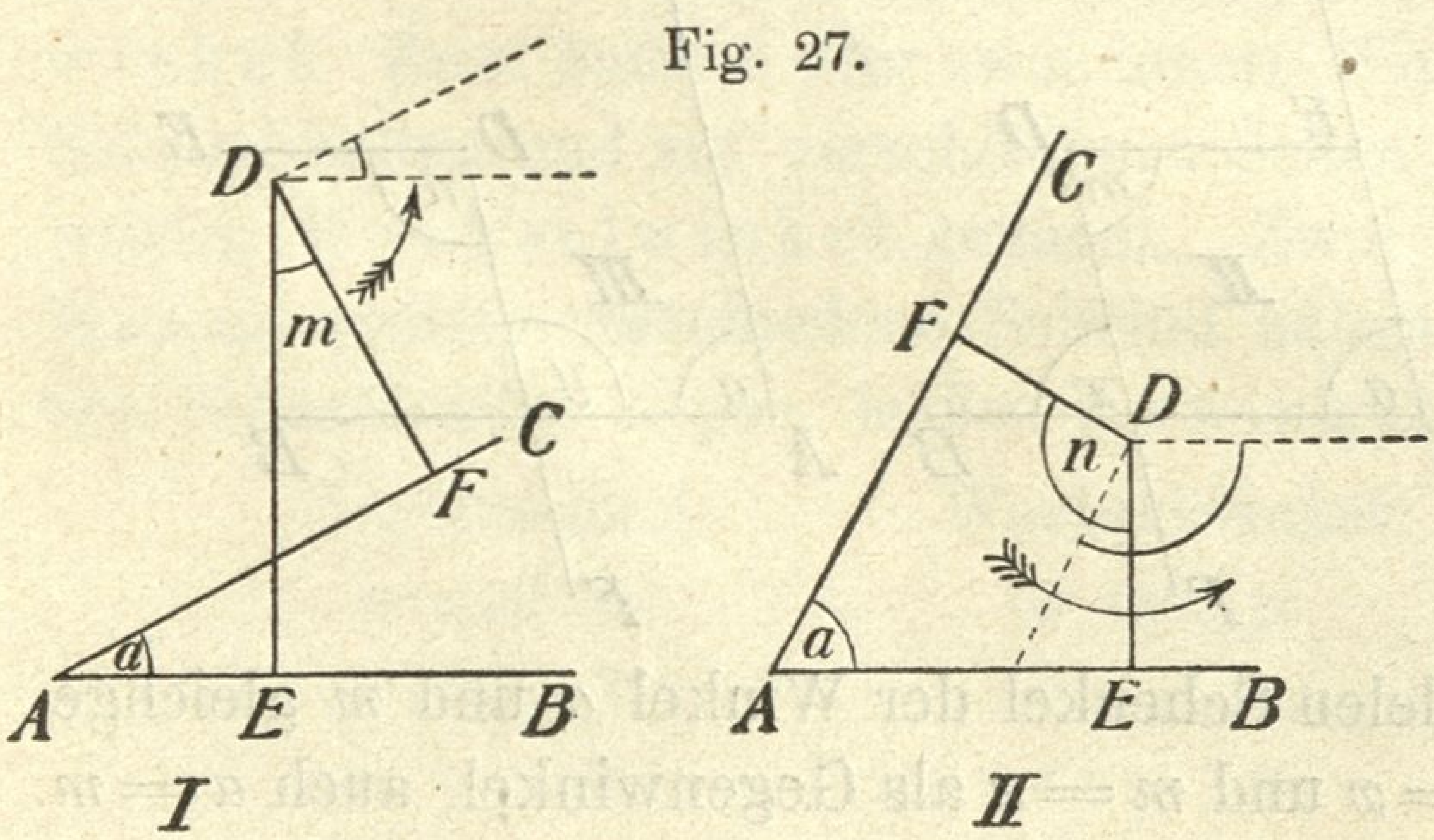
Fig. 26.



b) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist.

Häufig bedient man sich zum Ziehen paralleler Linien des Lineals und des Dreieckes. Wäre zur Geraden AB (Fig. 26) eine Parallele zu ziehen, so lege man das Dreieck mit einer Seite (am besten mit einem Schenkel des rechten Winkels) bei A an und längs der zweiten Seite (des andern Schenkels des rechten Winkels) gebe man das Lineal. Nun gleite man mit dem Dreiecke an dem festgehaltenen Lineal so weit herab, bis man an jene Stelle kommt, wo die Parallele gezogen werden soll, und zeichne die Linie CD. Die Geraden AB und CD sind parallel, weil sie mit der Geraden AC gleiche Gegenwinkel (R) bilden.

Fig. 27.

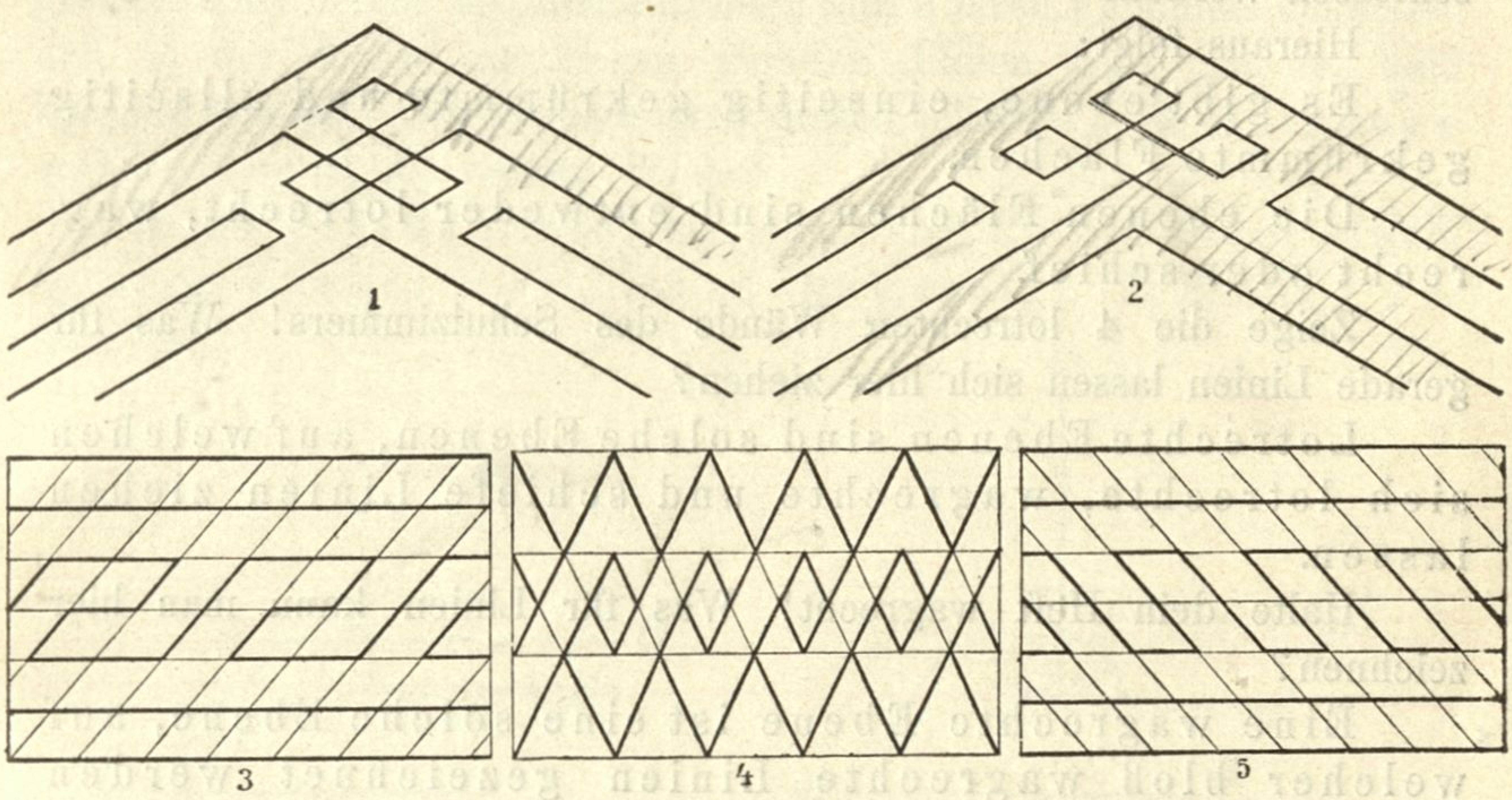


In Fig. 27. I und II, sind zwei spitze Winkel, beziehungsweise ein spitzer und ein stumpfer

Winkel ersichtlich, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß $\angle a = m$ ist, beziehungsweise die $\angle a$ und n zusammen genommen $2R$ betragen. Man braucht nur die Winkel m und n, ohne ihre Größe zu ändern, um einen Viertelkreis zu drehen, und in die punktierte Lage zu bringen; die Winkel a und m, beziehungsweise a und n sind dann Winkel mit parallelen Schenkeln und es gelten dann die oben angegebenen zwei Sätze. Hieraus folgt:

Winkel, deren Schenkel senkrecht auf einander stehen, sind entweder einander gleich oder sie ergänzen sich zu 180°.

Verwendungsbeispiele (Gruppe VIII).



1 und 2 Linienverzierungen zur Ausführung für stumpfe Ecken. 3 und 5 Linienmäander. 4 Bandverschlingung.

11. Arten der Flächen.

(Betrachtung des Würfels, des Zylinders und der Kugel.)

Auf jeder Würfelfläche lassen sich nach allen Richtungen gerade Linien so ziehen, daß sie in allen ihren Teilen mit der Würfelfläche zusammenfallen; man nennt solche Flächen ebene Flächen.

Ebene Flächen (auch Ebenen genannt) sind solche Flächen, in welchen man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann.

Betrachtet man dagegen die den Zylinder umhüllende gekrümmte Fläche, so sieht man, daß man auf letzterer nur nach einer Richtung (u. zw. von der obern zu der untern Grundfläche) gerade Linien ziehen kann; alle nach einer andern Richtung auf dieser Fläche gezogenen Linien sind krumme Linien. Eine ähnliche Fläche bemerkt man auch bei einem Zuckerhute.

Flächen, auf welchen sich nur nach einer Seite gerade Linien ziehen lassen, heißen einseitig gekrümmte Flächen.

An der Oberfläche der Kugel ist es nicht möglich, gerade Linien zu ziehen.

Solche Flächen, auf welchen man nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen kann, heißen allseitig gekrümmte Flächen.

Nenne Gegenstände, die von allseitig gekrümmten Flächen eingeschlossen werden!

Hieraus folgt:

Es gibt ebene, einseitig gekrümmte und allseitig gekrümmte Flächen.

Die ebenen Flächen sind entweder lotrecht, wagrecht oder schief.

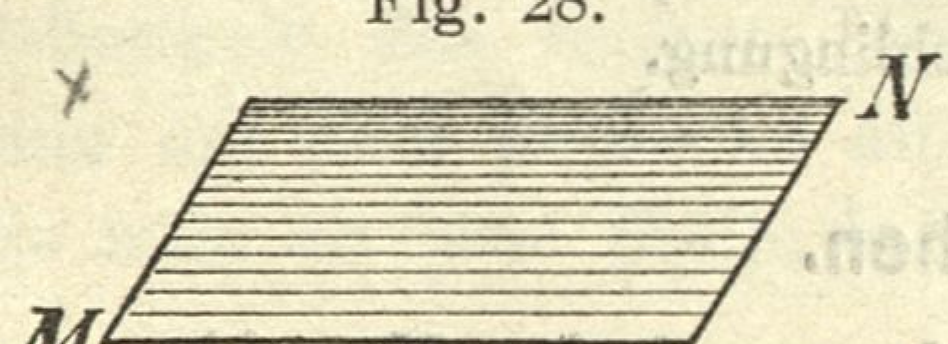
Zeige die 4 lotrechten Wände des Schulzimmers! Was für gerade Linien lassen sich hier ziehen?

Lotrechte Ebenen sind solche Ebenen, auf welchen sich lotrechte, wagrechte und schiefe Linien ziehen lassen.

Halte dein Heft wagrecht! Was für Linien kann man hier zeichnen?

Eine wagrechte Ebene ist eine solche Ebene, auf welcher bloß wagrechte Linien gezeichnet werden können.

Fig. 28.



Neige das Heft so, daß es eine schiefe oder schräge Lage einnimmt, und bestimme sodann, was für Linien sich nunmehr auf demselben ziehen lassen!

Schiefe Ebenen sind solche Ebenen, auf welche sich teils wagrechte, teils schiefe Linien ziehen lassen.

Man benennt die Ebenen gewöhnlich mit 2 Buchstaben, welche man an zwei gegenüberliegende Ecken schreibt. Z. B. (Fig. 28) die Ebene MN.

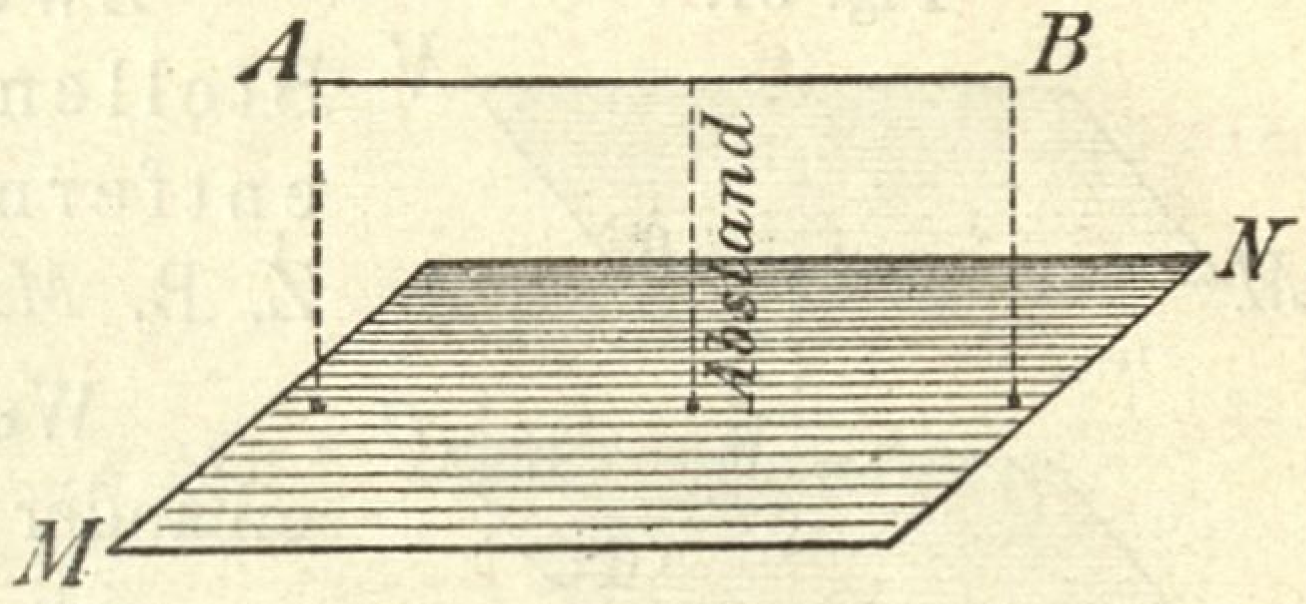
12. Die Gerade und die Ebene.

Halte den Bleistift so, daß er von der Bankfläche überall gleich weit entfernt ist!

Eine gerade Linie, welche von einer Ebene an allen Stellen denselben Abstand hat, ist zu ihr parallel.

Z. B. $AB \parallel MN$ (Fig. 29).

Fig. 29.

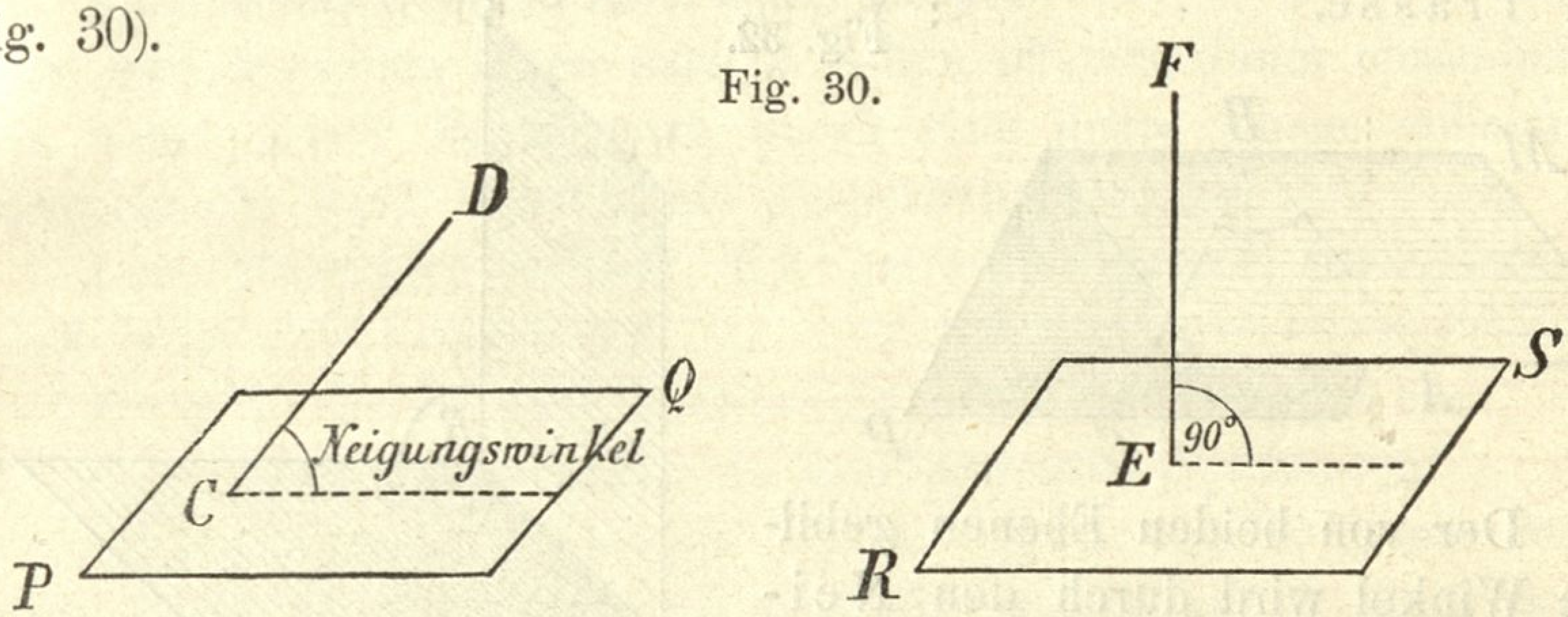


Welche Kanten des Schulzimmers sind zum Fußboden parallel? Welche zur vordern Zimmerfläche?

Halte den Stift geneigt und zwar so, daß er die Bankfläche in einem Punkte trifft! Dieser Punkt heißt Fußpunkt. Die einzelnen Punkte der Geraden sind nicht mehr gleich weit von der Ebene (Bankfläche) entfernt. Die gerade Linie bildet mit den einzelnen durch ihren Fußpunkt gehenden und in der Ebene gezogenen geraden Linien bald größere, bald kleinere Winkel. Der kleinste unter diesen Winkeln heißt Neigungswinkel; er ist ein spitzer Winkel.

Eine gerade Linie, welche eine Ebene unter einem spitzen Winkel trifft, ist zu ihr geneigt. Z. B. $CD \,\underline{/}\, PQ$ (Fig. 30).

Fig. 30.



Halte den Stift zur Bankfläche so, daß er mit allen durch seinen Fußpunkt gezogenen Geraden immer nur rechte Winkel bildet! Man sagt: er steht zur Bankfläche senkrecht.

Eine gerade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie von derselben nach allen Seiten unter einem rechten Winkel absteht. Z. B. $EF \perp RS$.

Welche Kanten des Schulzimmers stehen auf dem Fußboden senkrecht? Welche Kanten sind senkrecht zur vordern Zimmerfläche gerichtet?

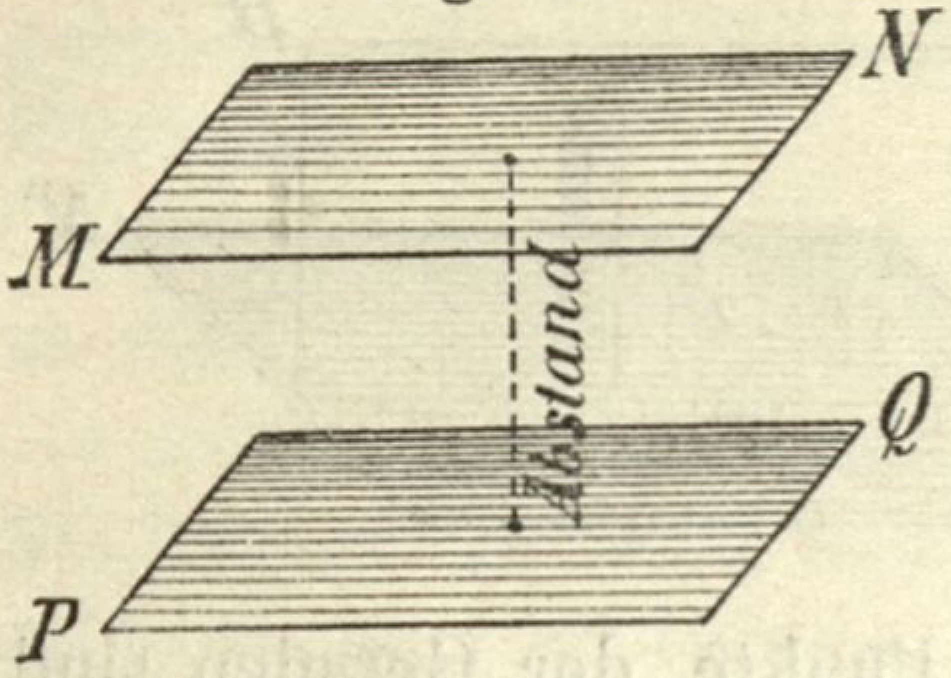
Nach dem Gesagten unterscheiden wir also eine dreifache Lage der Geraden zur Ebene:

Eine gerade Linie ist entweder zu einer Ebene parallel oder zu ihr geneigt, oder sie steht auf ihr senkrecht.

13. Lage zweier Ebenen.

Der Fußboden und die Zimmerdecke haben überall denselben Abstand.

Fig. 31.



Zwei Ebenen, welche an allen Stellen von einander gleich weit entfernt sind, heißen parallel. Z. B. $MN \parallel PQ$ (Fig. 31).

Welche Wände des Zimmers sind zu einander parallel? Zeige andere $\parallel$ Ebenen!

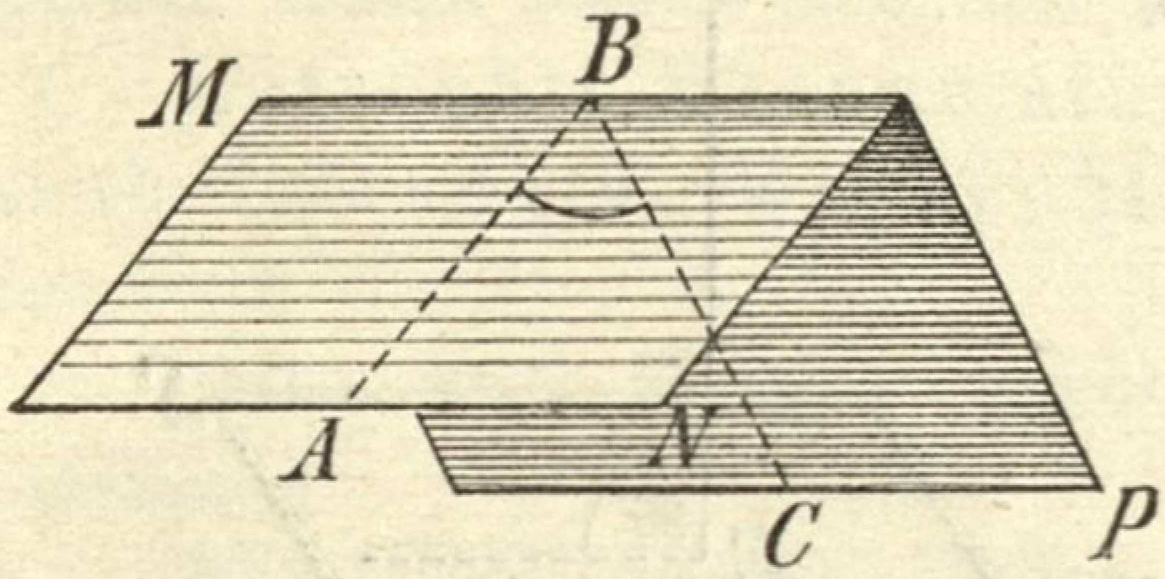
Öffne das Buch nur teilweise, aber so, daß jedes einzelne Blatt desselben von dem andern getrennt ist!

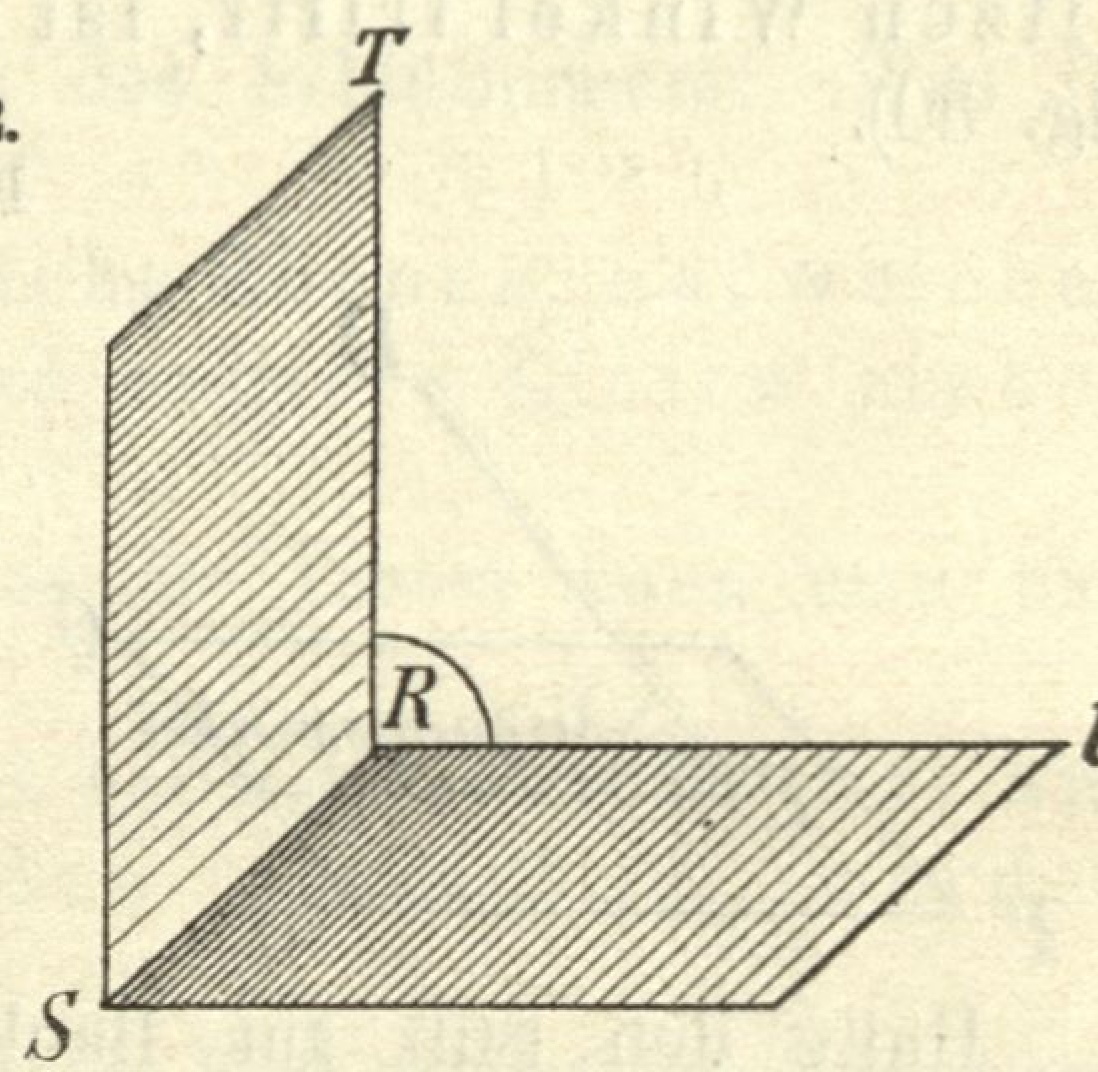
Je zwei Blätter treffen oder schneiden sich in einer geraden Linie (Rücken des Buches). Ebenen können sich nur in einer geraden Linie treffen.

Zwei Ebenen, welche sich in einer geraden Linie schneiden, heißen geneigt. Z. B. $MN \angle MP$ (Fig. 32).

Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie heißt auch Spur oder Trasse.

Fig. 32.





Der von beiden Ebenen gebildete Winkel wird durch den Neigungswinkel gemessen. Um ihn zu bestimmen, wähle man in der Trasse einen beliebigen Punkt B und ziehe auf dieselbe in jeder Ebene eine Senkrechte. $\angle ABC$ ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen MN und MP.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so sagt man, sie stehen auf einander senkrecht. Z. B. $ST \perp SU$.

Beträgt der Neigungswinkel weniger als 90°, so stehen die beiden Ebenen auf einander schief.

Welche Wände des Schulzimmers stehen senkrecht auf einander?

Aus dem Gesagten folgt:

Zwei Ebenen sind entweder zu einander parallel, oder sie stehen auf einander senkrecht, oder sie sind gegen einander schief gerichtet.

14. Körperecken.

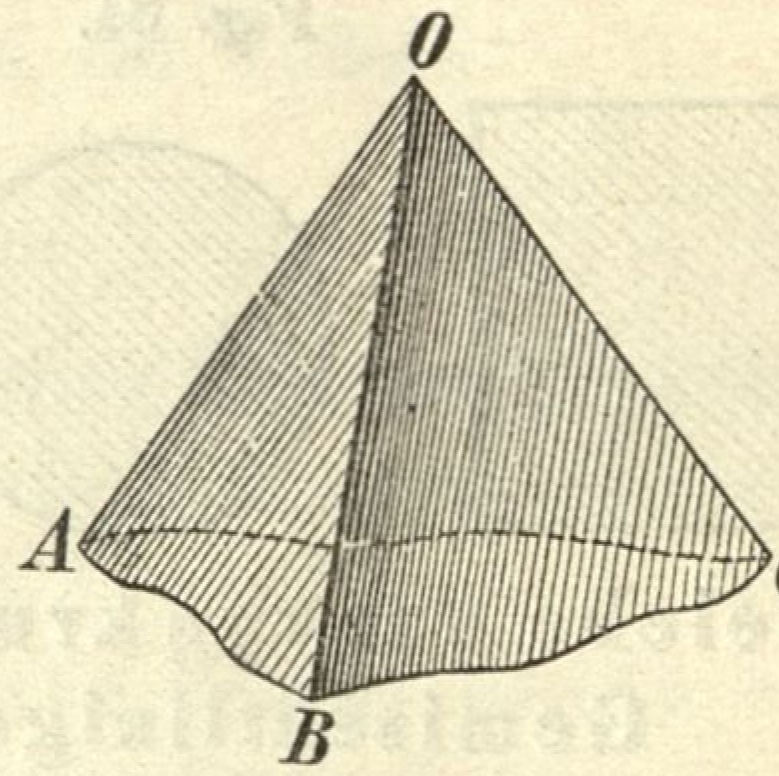
(Betrachtung von drei-, vier- und mehrseitigen Pyramiden.)

Die vorgeführten, in eine Spitze auslaufenden Körper heißen Pyramiden.

Wie viele Flächen treffen bei jeder dieser Pyramiden in einer Spitze zusammen?

Der nach einer Seite unbegrenzte Raum, den mehrere sich schneidende und in einem Punkte zusammenstoßende Ebenen einschließen, heißt ein körperlicher Winkel oder eine Körperecke.

Fig. 33.



Die Geraden, in denen sich je 2 auf einander folgende Ebenen schneiden, nennt man Kanten. Der Punkt, in welchem alle Ebenen zusammenstoßen, heißt Scheitel oder Spitze des Körperwinkels. Ein Winkel, welcher von 2 benachbarten Kanten gebildet wird, heißt Kantenwinkel. (Fig. 33.)

Zwei Ebenen bilden noch keine Körperecke, weil dieselben einen nach 2 Seiten offenen Raum einschließen. Erst wenn dieser Raum noch durch eine dritte Ebene vollständig abgeschlossen wird, entsteht ein körperlicher Winkel.

Zur Bildung einer Körperecke sind mindestens 3 Ebenen erforderlich.

Es gibt 3-, 4- und mehrseitige Körperecken.

Zeige diese Körperecken an den einzelnen Pyramiden!

Schneide einen beliebigen Winkel (etwa von 45^0) aus Papier mehrmals (z. B. 9mal) aus und versuche sodann mit 3, 4, 5 etc. in einem Punkte zusammenstoßenden Winkeln eine Ecke zu bilden! Dies gelingt nur so lange, als die Summe aller Kantenwinkel die Zahl 360^0 nicht erreicht.

In jeder Körperecke ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als 360^0.

Wie viele Körperwinkel enthält das Schulzimmer? Von wie vielen Ebenen wird jede dieser Körperecken gebildet? Wie groß ist jeder Kantenwinkel? Suche die Summe aller Kantenwinkel an jeder dieser Körperecken auf!

15. Die Figuren.

(Betrachtung des 3-, 4- und mehrseitigen Prismas.)

Die vorstehenden, oben und unten gleich weiten Körper heißen Prismen. Ihre Begrenzungsflächen sind lauter Ebenen;

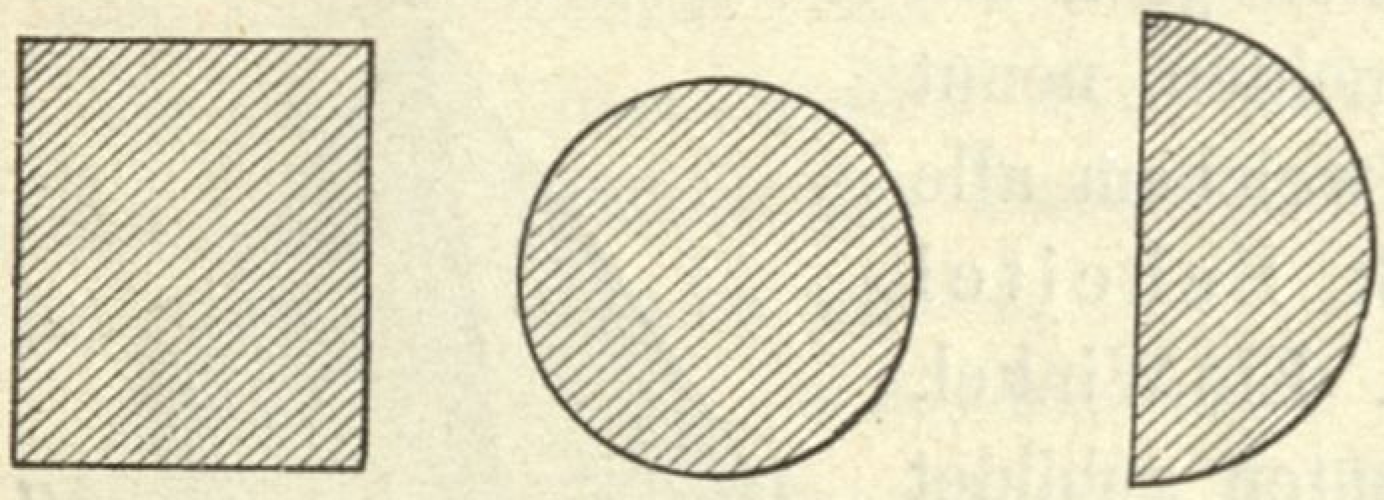
jede dieser Ebenen wird von geraden Linien nach allen Seiten hin begrenzt.

Eine nach allen Seiten begrenzte ebene Fläche heißt Figur.

Am Prisma bemerken wir nur solche Figuren, welche von geraden Linien eingeschlossen werden. Die Kreisfläche dagegen wird von einer krummen Linie begrenzt. Ein Halbkreis wird von einer geraden und von einer krummen Linie eingeschlossen.

Es gibt geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren (Fig. 34).

Fig. 34.



Geradlinige Figuren sind solche Figuren, welche nur von geraden Linien begrenzt werden.

Krummlinige Figuren sind solche Figuren, welche nur von krummen Linien eingeschlossen werden.

Gemischtlinige Figuren sind solche Figuren, welche teils von geraden, teils von krummen Linien eingeschlossen werden.

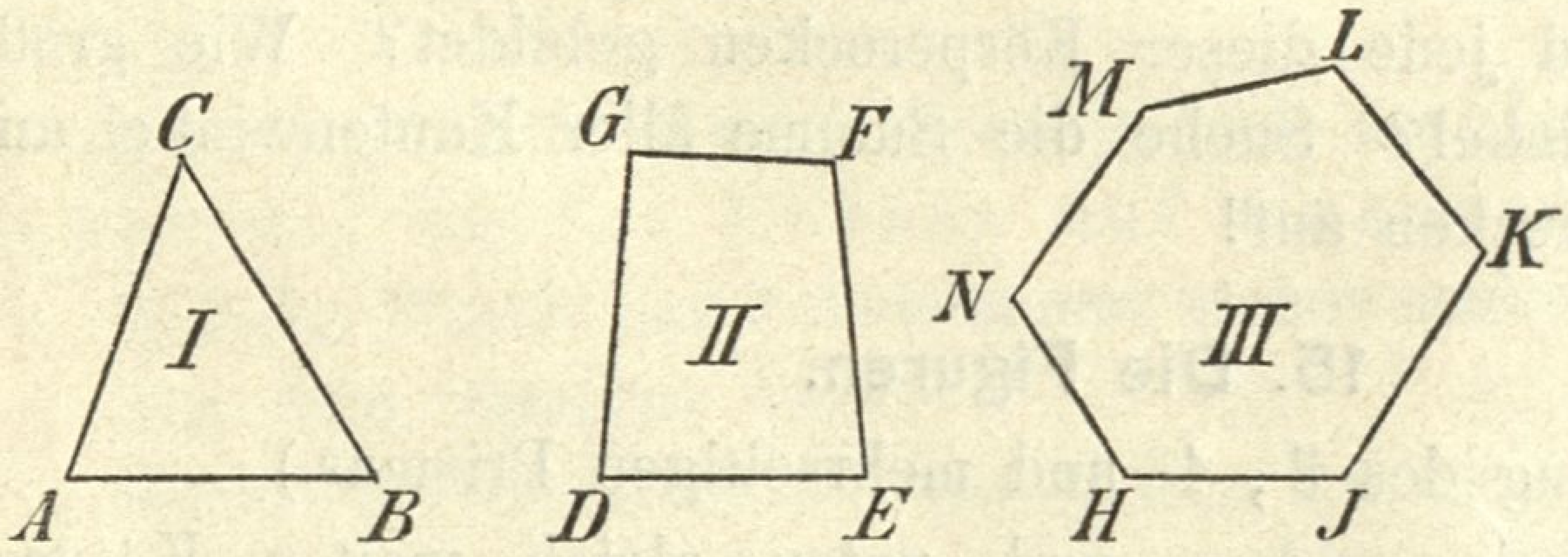
Zeige im Schulzimmer geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren!

Betrachtet man die Deckflächen der vorstehenden Prismen, so sieht man, daß die geradlinigen Figuren von 3, 4 oder von mehr als 4 Strecken (auch Seiten genannt) eingeschlossen werden können. Die von mehr als 4 Strecken eingeschlossenen geradlinigen Figuren heißen Vielecke (Polygone).

Die geradlinigen Figuren werden eingeteilt in Dreiecke, Vierecke und Vielecke oder Polygone.

Ein Dreieck ist eine geradlinige Figur, welche von 3 Strecken eingeschlossen wird (Fig. 35, I). Zeichen für Dreieck: △.

Fig. 35.



Ein Viereck ist eine geradlinige Figur, welche von 4 Strecken eingeschlossen wird (Fig. 35, II).

Ein Vieleck oder Polygon ist eine geradlinige Figur, welche von mehr als 4 Strecken eingeschlossen wird (Fig. 35, III).

Zeige im Schulzimmer Dreiecke, Vierecke und Vielecke!

Die Figuren werden benannt, indem man die einzelnen an die Ecken gesetzten Buchstaben der Reihenfolge nach ausspricht; so heißt das in Fig. 35 abgebildete Dreieck: *ABC*.

Benenne in gleicher Weise das Viereck und das Polygon!

Aufgaben.

1. Zeichnet mit Hilfe des Dreieckes und des Zirkels eine geradlinige, eine krummlinige und eine gemischtlinige Figur (z. B. ein Viereck, einen Kreis und einen Viertelkreis)!

2. Zeichnet ein Dreieck, ein Viereck und ein Vieleck!

16. Das Dreieck.

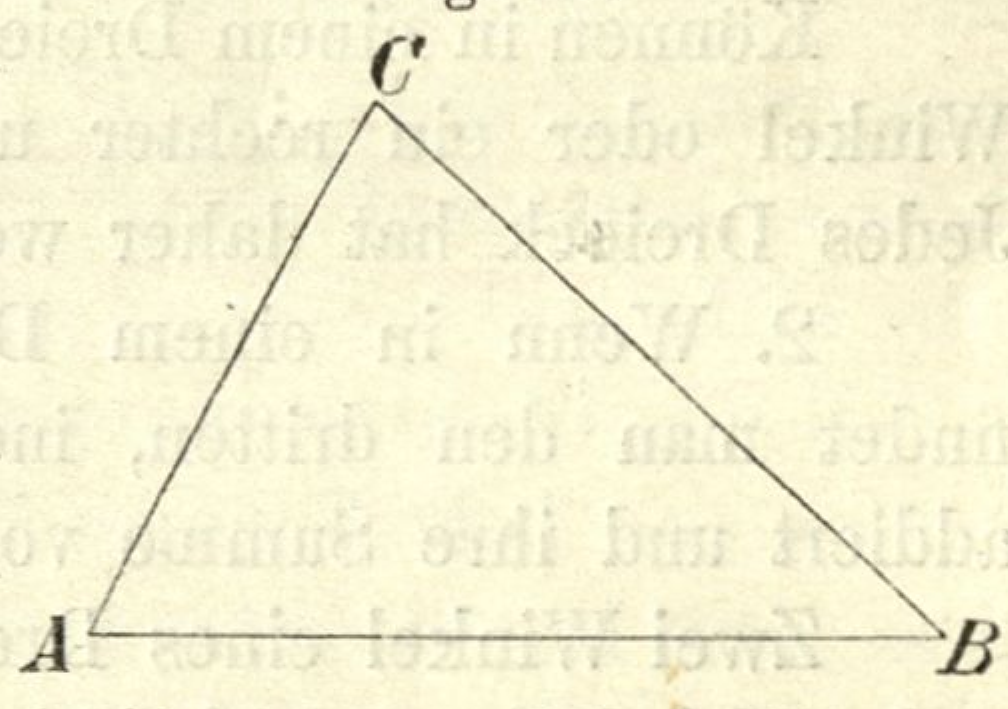
(Betrachtung des Tetraeders, einer geraden und einer schiefen Pyramide.)

Was für geradlinige Figuren sind die Seitenflächen der vorstehenden Pyramiden?

Eine von drei Strecken begrenzte Figur heißt ein Dreieck. Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel. Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen; die dritte Seite liegt ihm gegenüber.

Fig. 36.

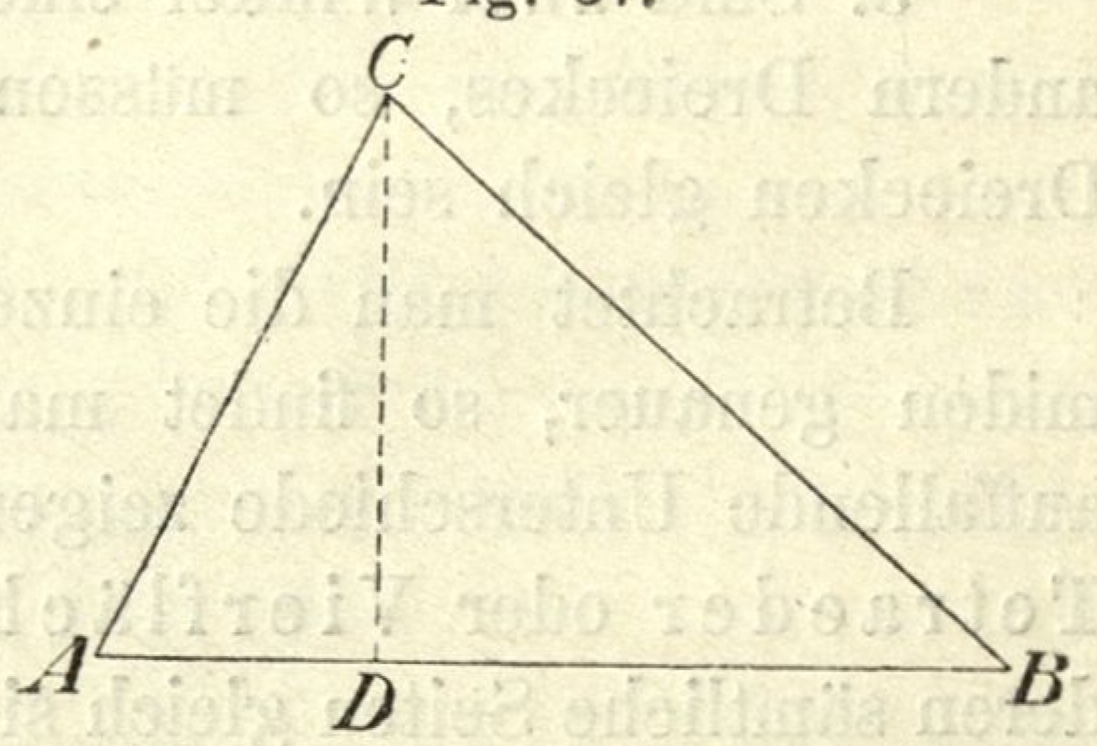


Nenne in dem Dreiecke *ABC* (Fig. 36) alle drei Seiten und alle drei Winkel!

Nenne zu jeder Seite die anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel!

Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von denen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt!

Fig. 37.



In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte. (Denn der Umweg über *AC* und *CB*, um von *A* nach *B* zu gelangen, ist länger als der gerade Weg über *AB*.)

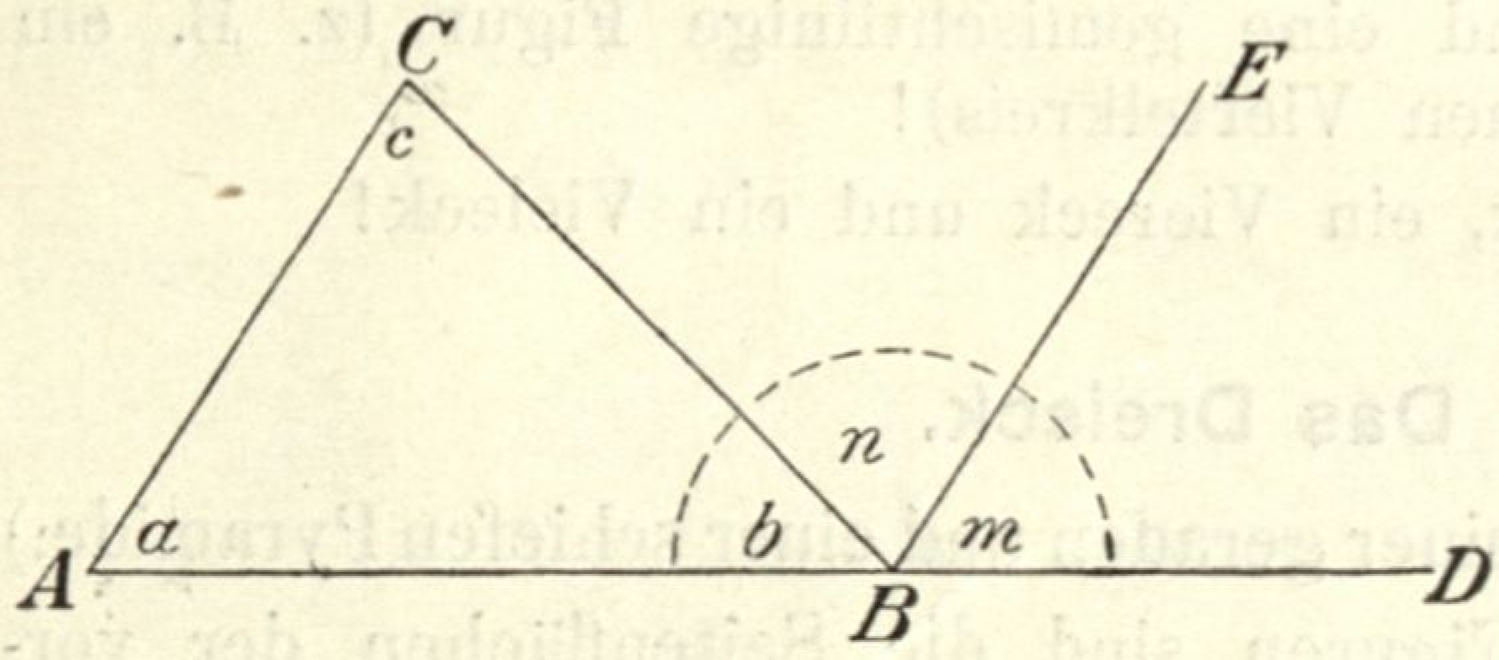
Diejenige Seite, über welche man sich das Dreieck errichtet denkt, heißt die Grundlinie. Da man sich über jeder Seite das Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite die

Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird die Spitze oder der Scheitel, und die Senkrechte, die von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes genannt.

Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 37) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe.

Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 38) die Seite AB verlängert und durch B die $BE \parallel AC$ gezogen, so entstehen die zwei Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, c, b ist daher so groß wie die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muß auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen.

Fig. 38.



Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten oder 180°.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel oder zwei stumpfe Winkel oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? — Jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitze Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180° subtrahiert.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind: *a*) 65° und 87°; *b*) 43° 10′ und 102° 27′; *c*) 25° 46′ 21″ und 74° 48′ 49″; *d*) 57° 38′ 34″ und 61° 10′ 16″; wie groß ist der dritte Winkel?

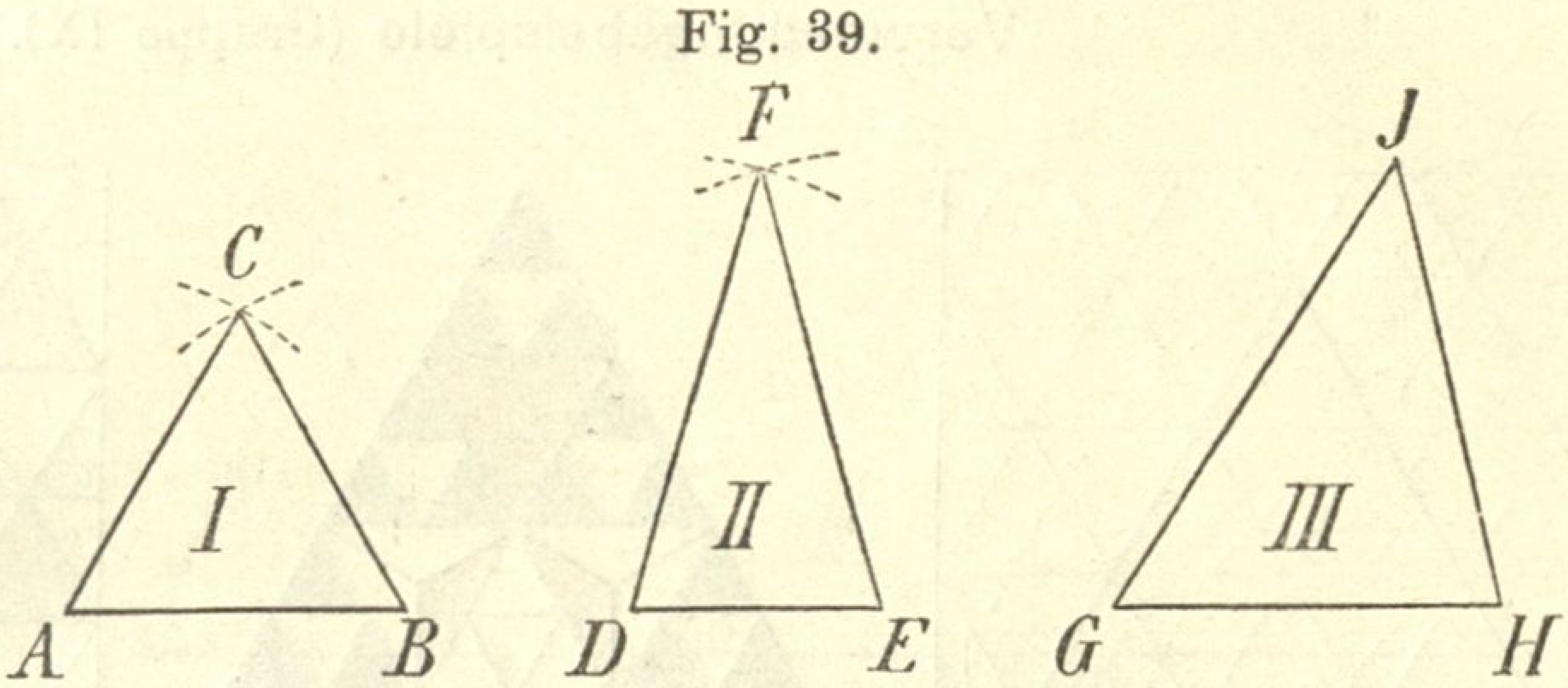
3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines andern Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

Betrachtet man die einzelnen Dreiecke der vorstehenden Pyramiden genauer, so findet man, daß diese rücksichtlich ihrer Seiten auffallende Unterschiede zeigen. Während die erste Pyramide (auch Tetraeder oder Vierflächner genannt) solche Dreiecke enthält, deren sämtliche Seiten gleich sind, finden sich bei der zweiten Pyramide Dreiecke vor, in denen je 2 Seiten (Schenkel) dieselbe Länge haben; die schiefe Pyramide enthält Dreiecke, in welchen alle 3 Seiten ungleich sind.

In Beziehung auf die Länge der Seiten unterscheidet man gleichseitige, gleichschenkelige und ungleichseitige Dreiecke.

Ein Dreieck, in welchem alle 3 Seiten gleich lang sind, heißt gleichseitiges Dreieck (Fig. 39, I).

Fig. 39.



Um ein gleichseitiges Dreieck zu erhalten, zeichne man eine Gerade *AB*, fasse diese in den Zirkel und ziehe von *A* und *B* aus 2 sich in *C* schneidende Bogen. Wird nun *C* mit *A* und *B* durch Gerade verbunden, so erhält man das gleichseitige Dreieck *ABC*.

Ein Dreieck, in welchem nur 2 Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenkeliges Dreieck (Fig. 39, II).

Die zwei gleichen Seiten nennt man auch Schenkel, die dritte Seite Grundlinie oder Basis und die ihr gegenüberliegende Ecke den Scheitel.

Soll über der Geraden *DE* ein gleichschenkeliges Dreieck gezeichnet werden, so beschreibe man mit einer beliebigen Zirkelweite (aber mehr als die Hälfte von *DE*) von *D* und *E* aus 2 sich in *F* schneidende Bogen und verbinde dann den Schnittpunkt *F* geradlinig mit *D* und *E*.

Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten eine verschiedene Länge haben, heißt ungleichseitig (Fig. 39, III). —

Das gleichseitige Dreieck enthält 3 spitze Winkel. —

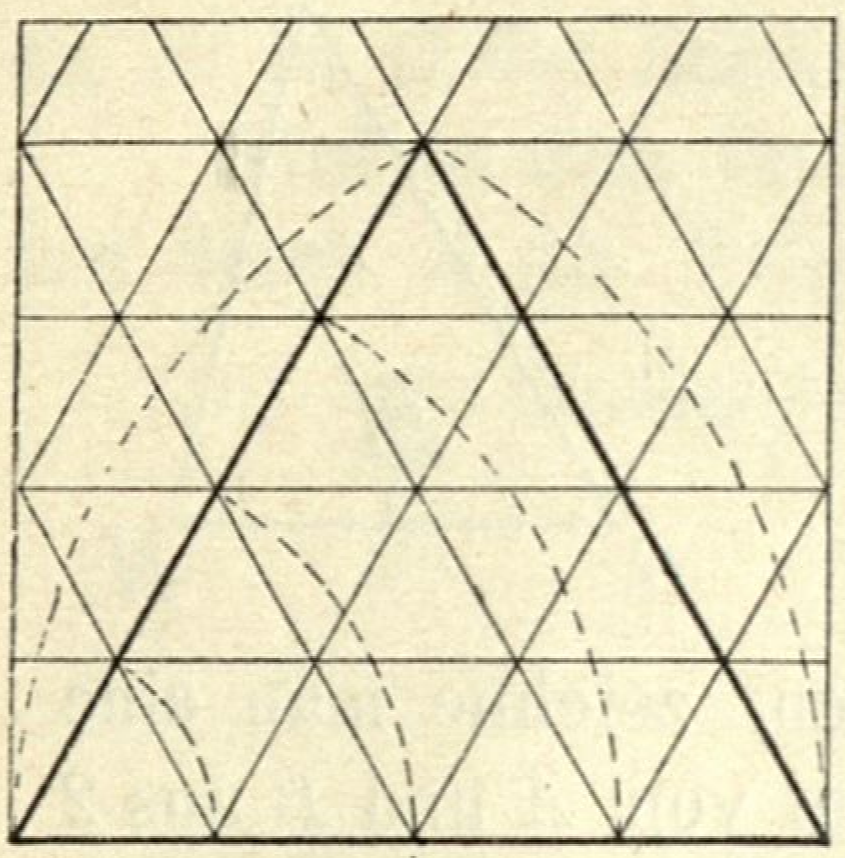
Verfertige ein gleichseitiges Dreieck aus Papier und falte es in seiner Mitte zusammen! Man bekommt nun 2 Dreiecke, wovon jedes einen rechten und 2 spitze Winkel enthält. An der schiefen Pyramide finden sich ferner auch solche Dreiecke vor, die einen stumpfen Winkel enthalten. Nach dem Gesagten zeigen die Dreiecke auch bezüglich ihrer Winkel auffallende Unterschiede.

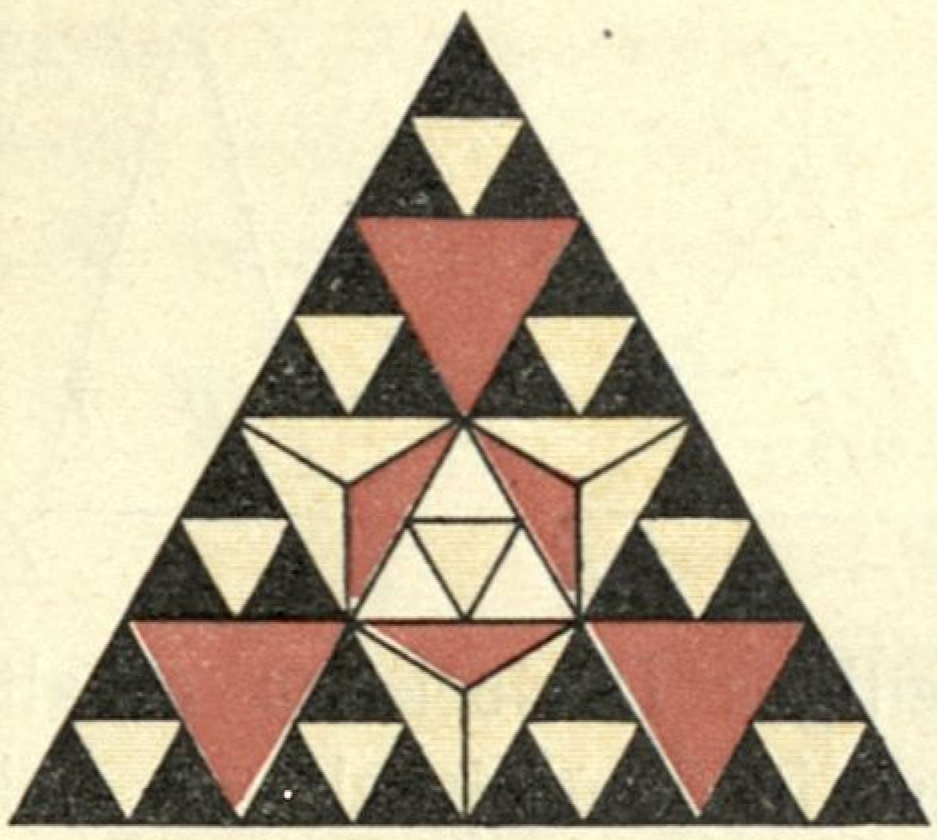
Mit Rücksicht auf die Winkel gibt es spitzwinkelige, rechtwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke.

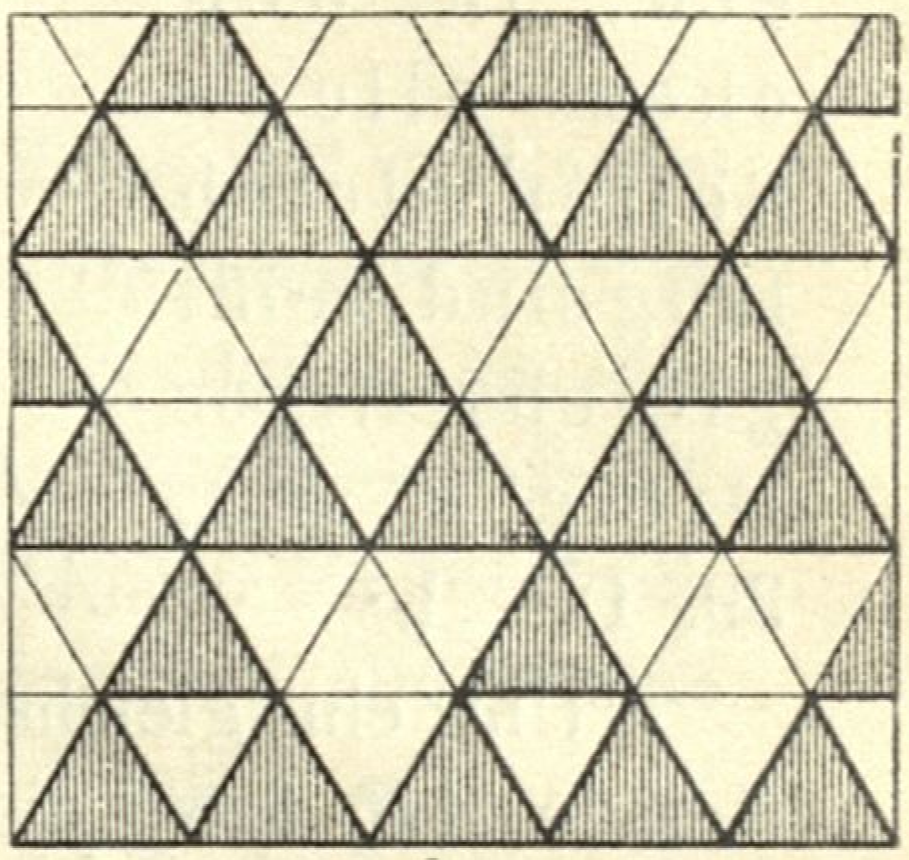
Ein Dreieck, welches drei spitze Winkel enthält, heißt spitzwinkeliges Dreieck (Fig. 40, I).

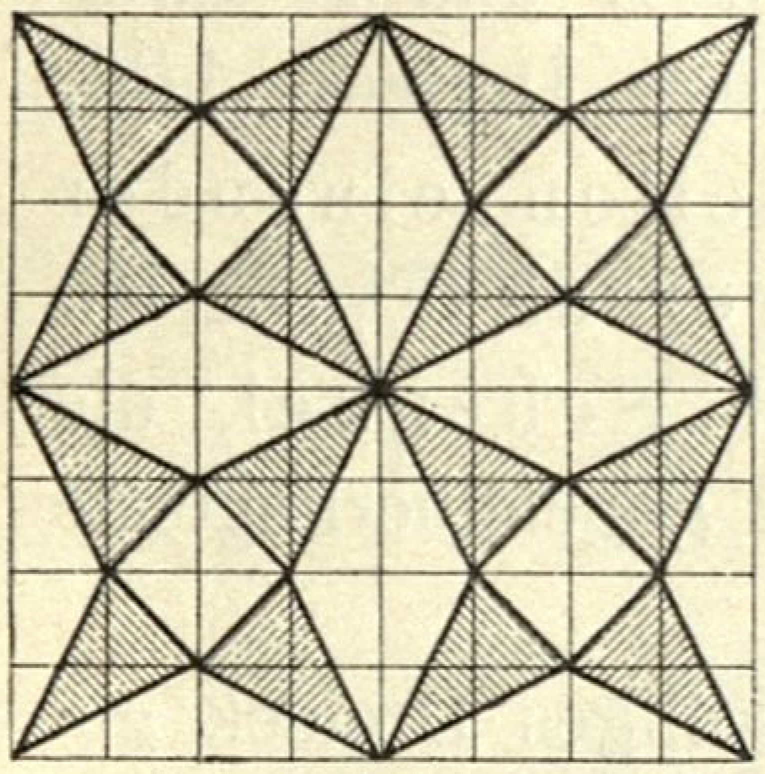
Ein Dreieck, in welchem ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen, heißt rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 40, II). Jene 2 Seiten (*EF* und *FG*), welche den rechten Winkel bilden, werden **Katheten** genannt; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (EG) heißt **Hypotenuse**.

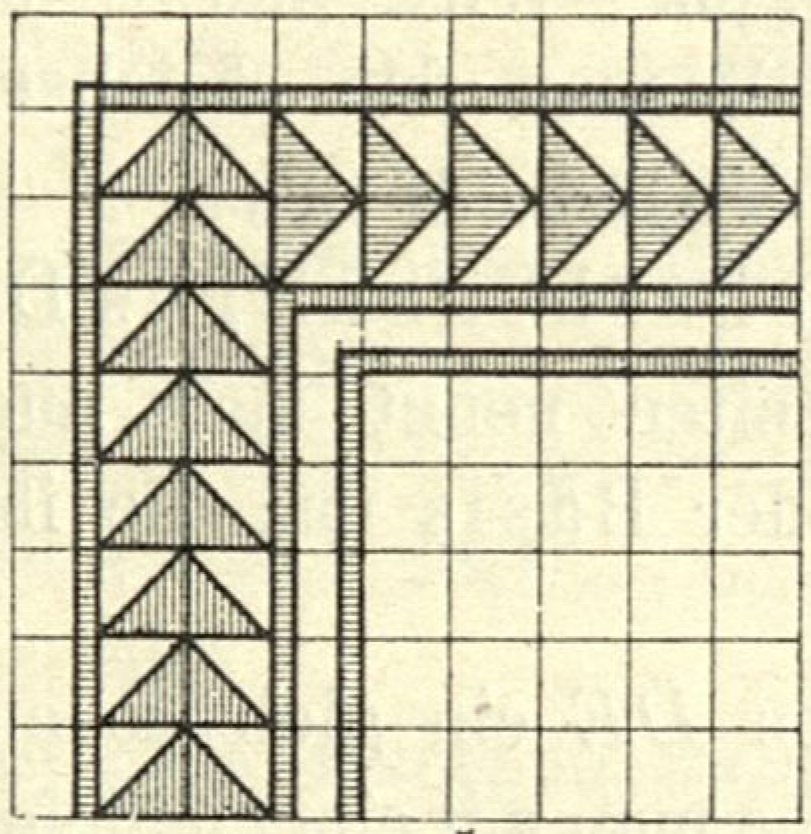
Verwendungsbeispiele (Gruppe IX).

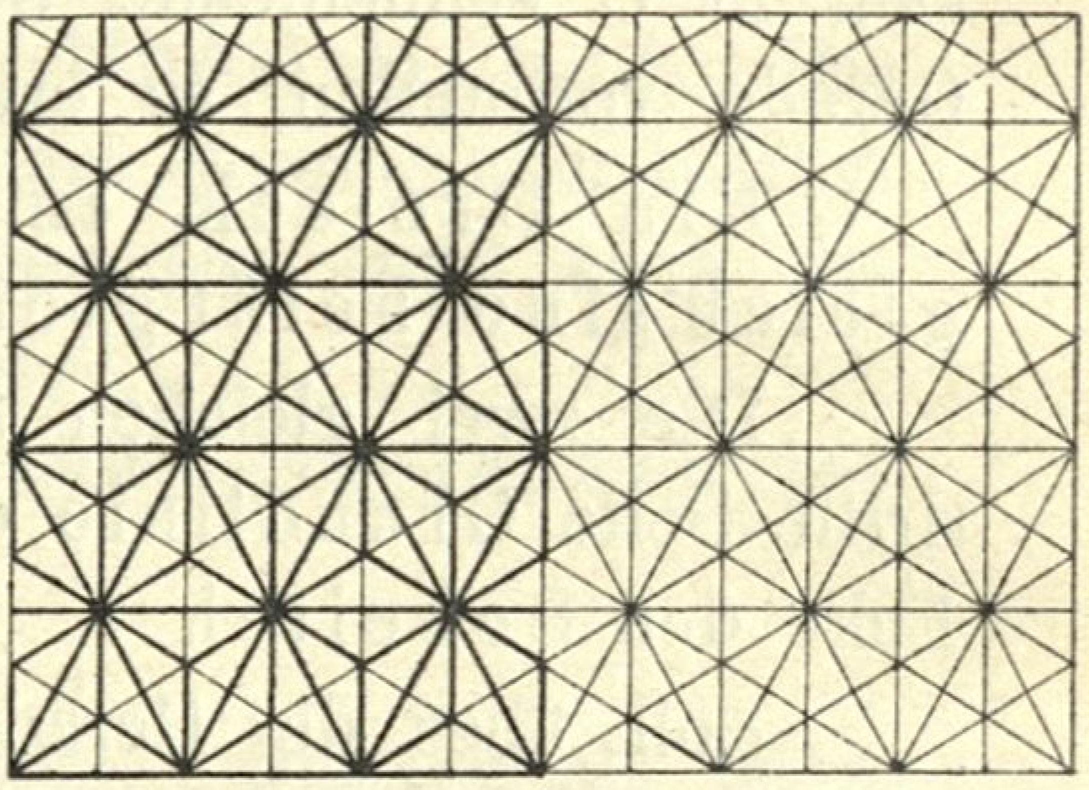

1

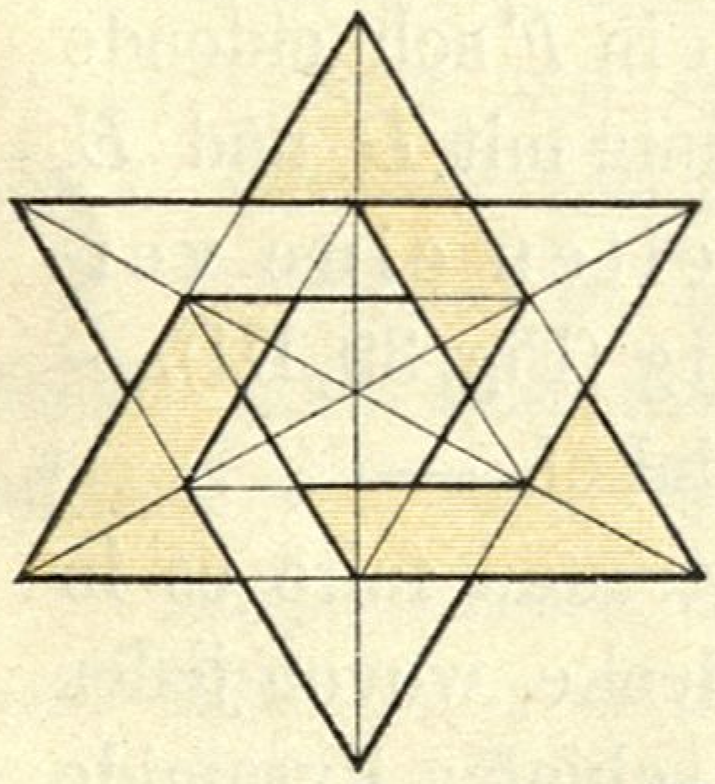

2

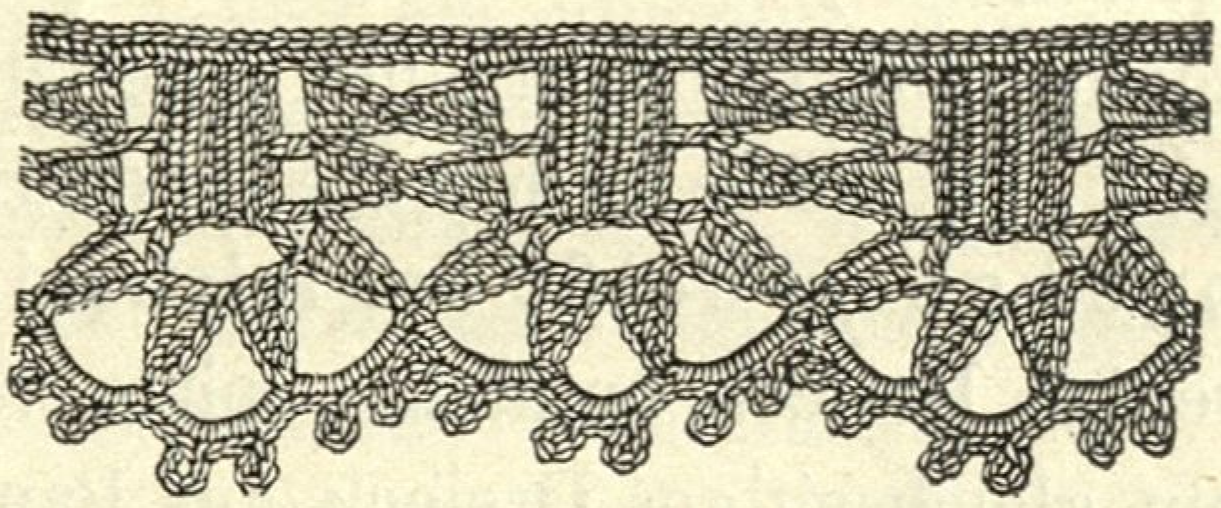

3

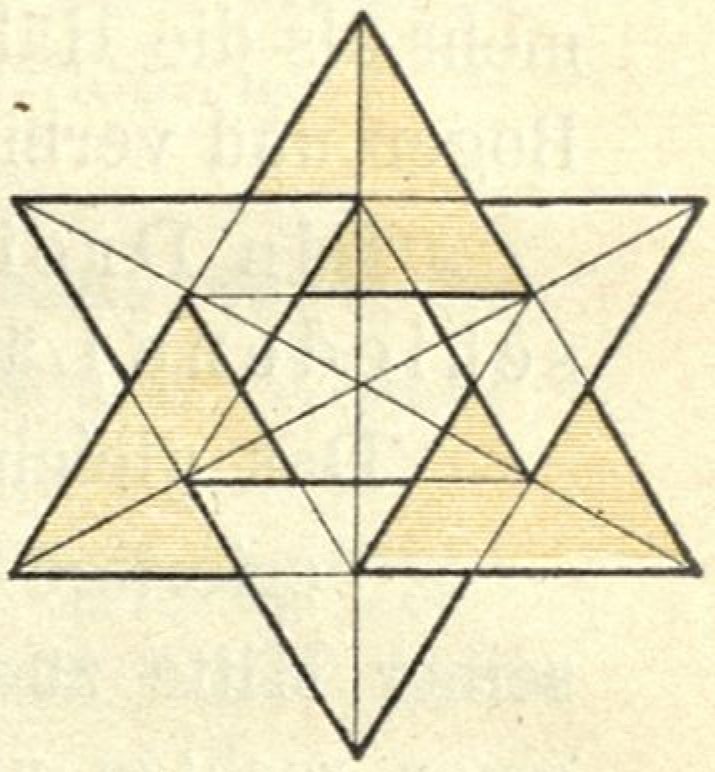

4

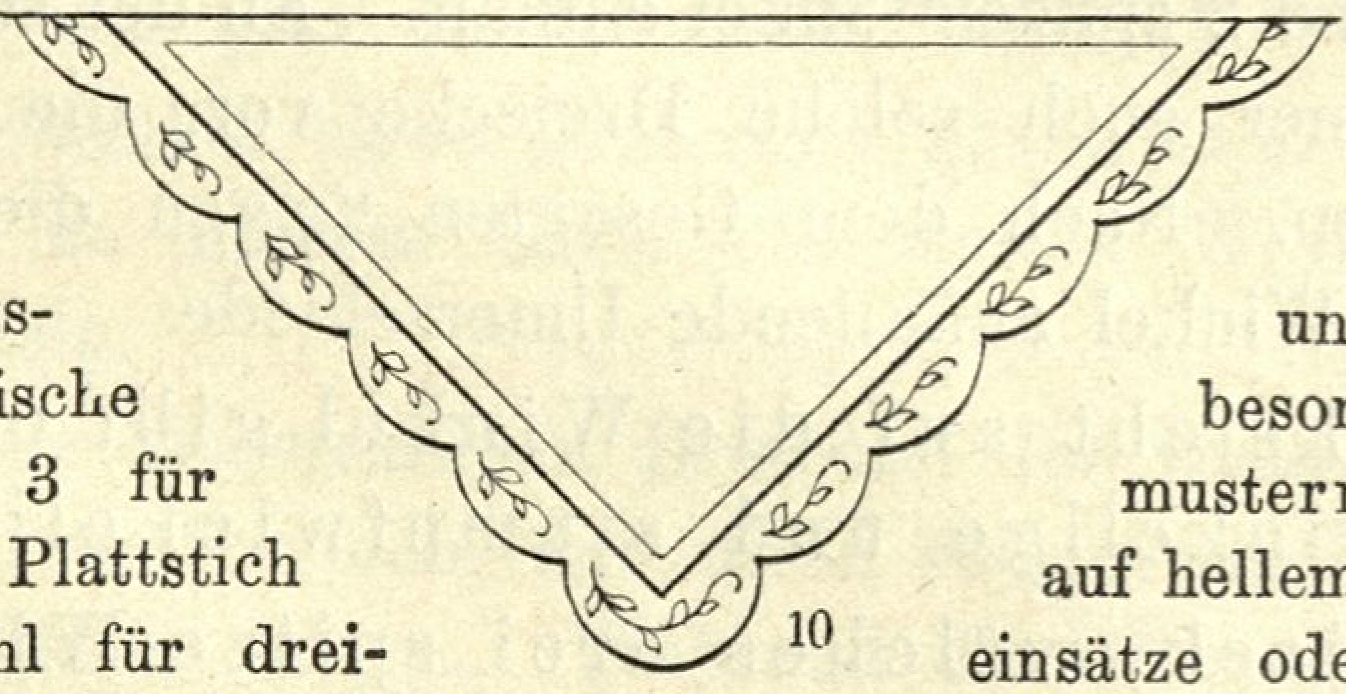

5


6


7


8

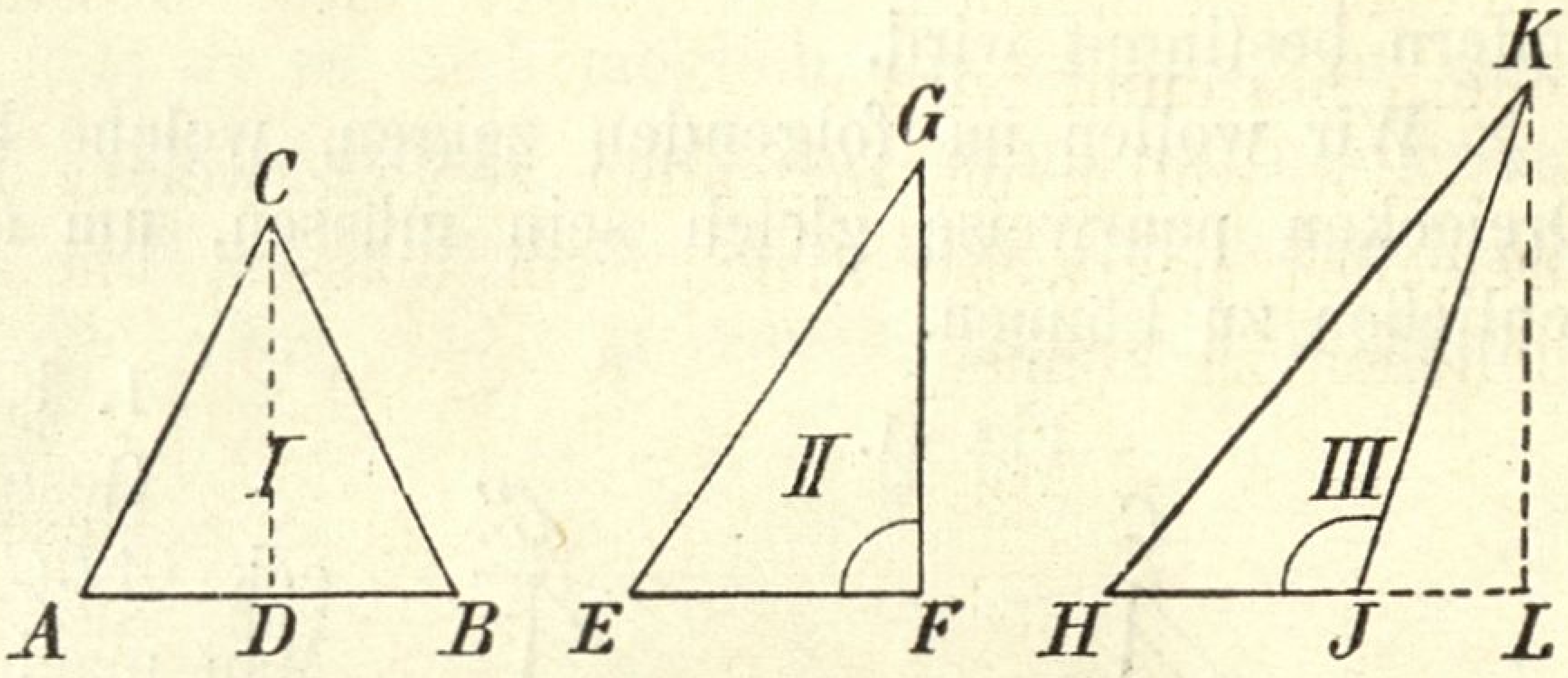

9


10

1 Netzunterlage für viele Dreiecksmuster. 2 byzantinische Fußbodenmosaik. 3 für Auflegearbeit oder Plattstich verwendbar, sowohl für dreieckige Decken oder fortgesetzt als Flächenfüllung. 4 und 6 eignen sich besonders als Füllstichmuster mit schwarzer Seide auf hellem Atlas für Kleidereinsätze oder als Borte von beliebiger Breite. 5. pompeanische Fußbodenmosaik. In Plattstich ausgeführt, als Randverzierung mit Eckbildung verwendbar. 7 und 9 in Stielstich ausführbar für kleine Untertassen. 8 Häkelmuster. 10 das vielfach verwendete dreieckige Tuch, das wir in Leinen ausführen oder stricken, häufig aber häkeln.

Ein Dreieck, in welchem ein stumpfer und zwei spitze Winkel vorkommen, heißt stumpfwinkeliges Dreieck (Fig. 40, III).

Fig. 40.



Einer der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreieckes enthält $44^0\ 51'\ 16''$; wie groß ist der andere?

Stellt in jedem der in Fig. 40 abgebildeten Dreiecke immer die untere Seite die Grundlinie oder Basis vor, so sieht man, daß im spitzwinkeligen Dreiecke die Höhe innerhalb der Dreiecksfläche fällt; im rechtwinkeligen Dreiecke trifft sie mit einer Kathete zusammen; im stumpfwinkeligen Dreiecke fällt sie außerhalb der Dreiecksfläche, weshalb die Grundlinie entsprechend verlängert werden muß.

Konstruiere ein gleichseitiges und ein gleichschenkeliges Dreieck, zieh überall die Höhe und vergleiche nun die einzelnen Dreiecke, in welche das gleichseitige und das gleichschenkelige Dreieck zerfällt!

Aufgaben.

1. Zeichne mit Hilfe des Zirkels und des Dreieckes ein gleichseitiges, ein gleichschenkeliges und ein ungleichseitiges Dreieck!

2. Zeichne *a)* einen spitzen, *b)* einen rechten und *c)* einen stumpfen Winkel und verbinde bei jedem dieser Winkel die freien Enden! Was für Dreiecke erhält man dadurch?

17. Kongruenz der Dreiecke.

Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreiecke die Mittellinie, so erhält man 2 kleinere rechtwinkelige Dreiecke. Ausgeschnitten und gehörig über einander gelegt, decken sich diese vollständig (d. h. in allen Seiten und Winkeln). Die beiden Dreiecke sind nicht nur **gleich groß**, sie stimmen auch in ihrer **Gestalt** überein (beide enthalten biespielsweise je einen rechten und zwei beziehungsweise gleiche spitze Winkel); man sagt: die 2 Dreiecke sind **kongruent**.

Kongruente Figuren sind solche Figuren, welche dieselbe Gestalt und dieselbe Größe haben.

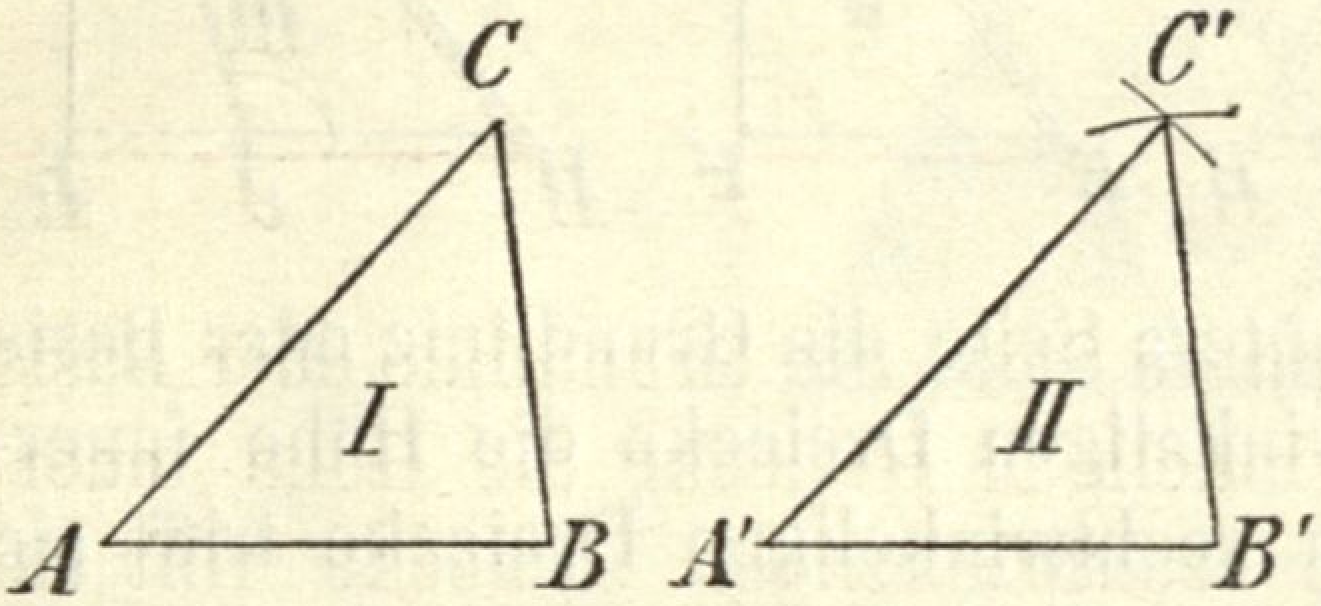
Werden kongruente Figuren über einander gelegt, so **decken sie sich**.

Zeichen für kongruent: $\cong$.

Obwohl jedes Dreieck sechs Bestimmungsstücke (nämlich drei Seiten und drei Winkel) enthält, so sind doch im allgemeinen **nur 3 Stücke** notwendig, um bereits auf die Kongruenz zweier Dreiecke schließen zu können, weil durch diese 3 Stücke die Größe der andern bestimmt wird.

Wir wollen im folgenden zeigen, welche Bestandteile in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, um auf deren Kongruenz schließen zu können.

Fig. 41.



1. Fall.

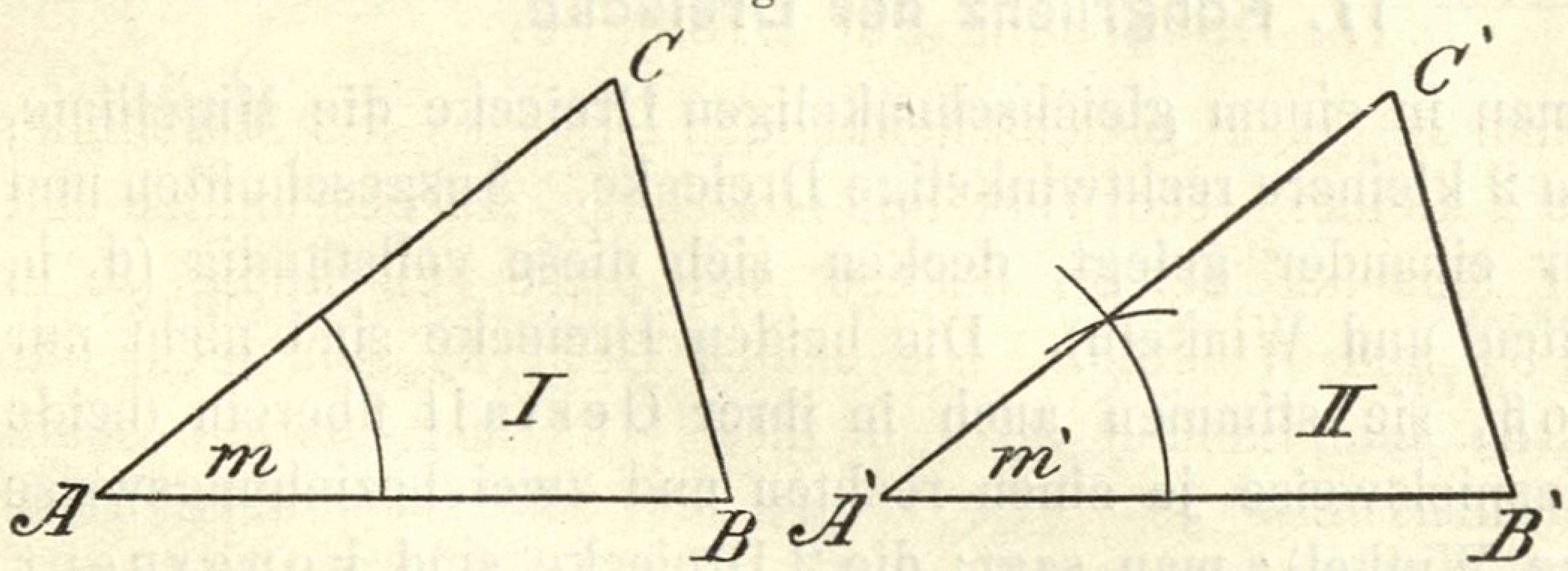
Gesetzt es wäre das Dreieck ABC (Fig. 41) gegeben. Man mache zuerst die Strecke $A'B' = AB$. Nun fasse man die zweite Seite AC in den Zirkel und beschreibe damit von A' aus einen Bogen. Hierauf messe man auf gleiche Weise BC ab und beschreibe von B' aus einen zweiten Bogen, welcher den vorigen in C' schneidet. Man hat nur noch den Punkt C' mit A' und B' geradlinig zu verbinden. Beide Dreiecke haben der Konstruktion nach die drei Seiten beziehungsweise gleich. Ausgeschnitten und gehörig auf einander gelegt, decken sie sich vollständig; sie sind also **kongruent**.

I. **Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in denselben alle drei Seiten paarweise gleich sind.**

2. Fall.

Wäre es nur gestattet, die beiden Seiten AB und AC und den von ihnen eingeschlossenen Winkel abzumessen, so läßt sich auch aus diesen 3 Bestimmungsstücken ein zweites Dreieck herstellen, welches mit dem gegebenen Dreiecke kongruent ist. Man mache vorerst $A'B' = AB$ und übertrage sodann den Winkel m nach m'. Hierauf mache man $A'C' = AC$ und verbinde C' mit B'. (Fig. 42.)

Fig. 42.



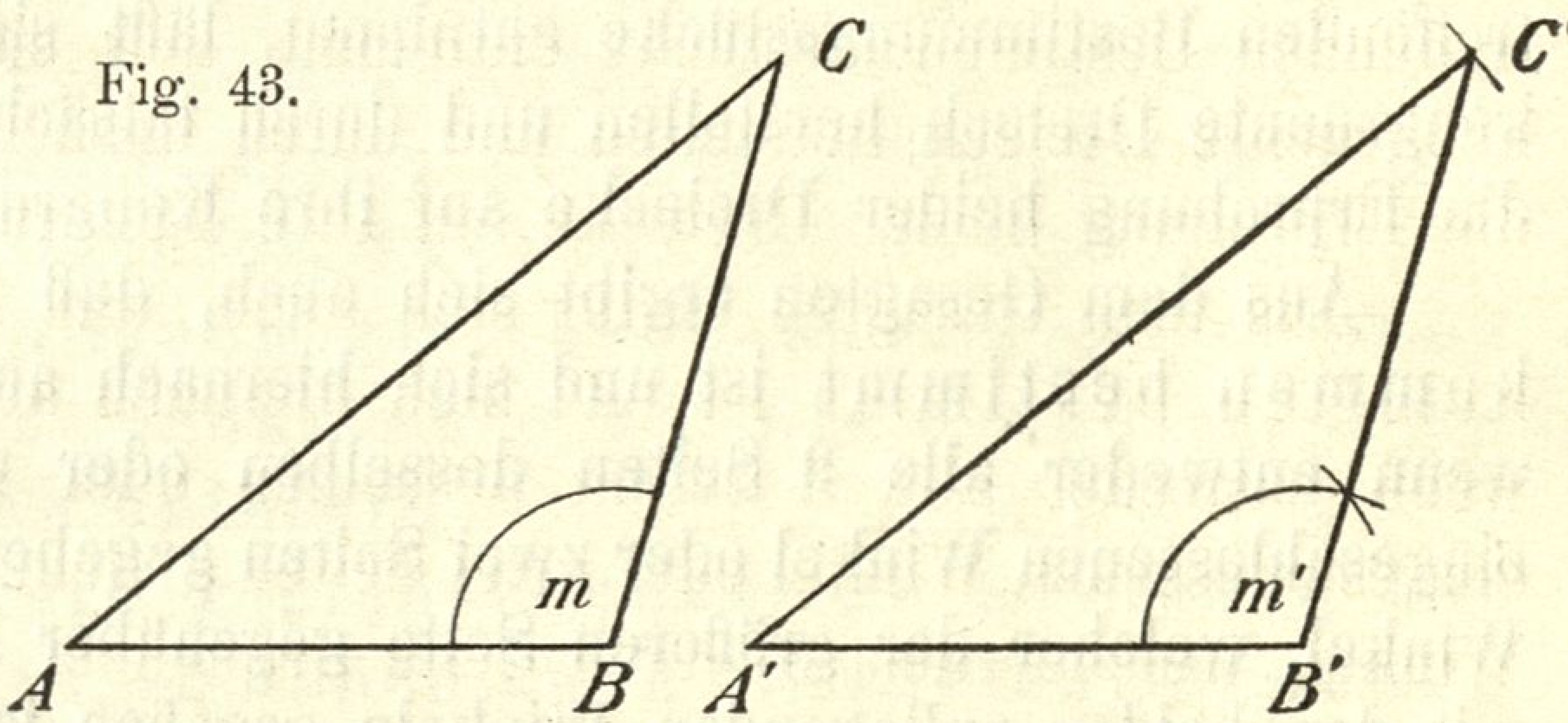
Beide Dreiecke, ausgeschnitten und auf einander gelegt, decken sich.

II. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in denselben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

3. Fall.

Auf gleiche Weise ist es auch möglich, ein zweites, zu einem gegebenen Dreiecke kongruentes zu zeichnen, wenn es nur erlaubt wäre, vom ersten Dreiecke 2 Seiten, AB und AC, abzumessen und den der größeren Seite (AC) gegenüberliegenden Winkel m (Fig. 43). Man mache zuerst $A'B' = AB$, übertrage sodann den Winkel m nach m', ziehe $B'C'$ vorerst über C' hinaus, fasse sodann AC in den Zirkel und beschreibe von A' aus einen Bogen, welcher die Gerade $B'C'$ in C' durchschneidet. Hierauf verbinde man A' und C' durch die Gerade $A'C'$. Beide Dreiecke, ausgeschnitten und gehörig auf einander gelegt, decken sich und sind mithin kongruent.

Fig. 43.



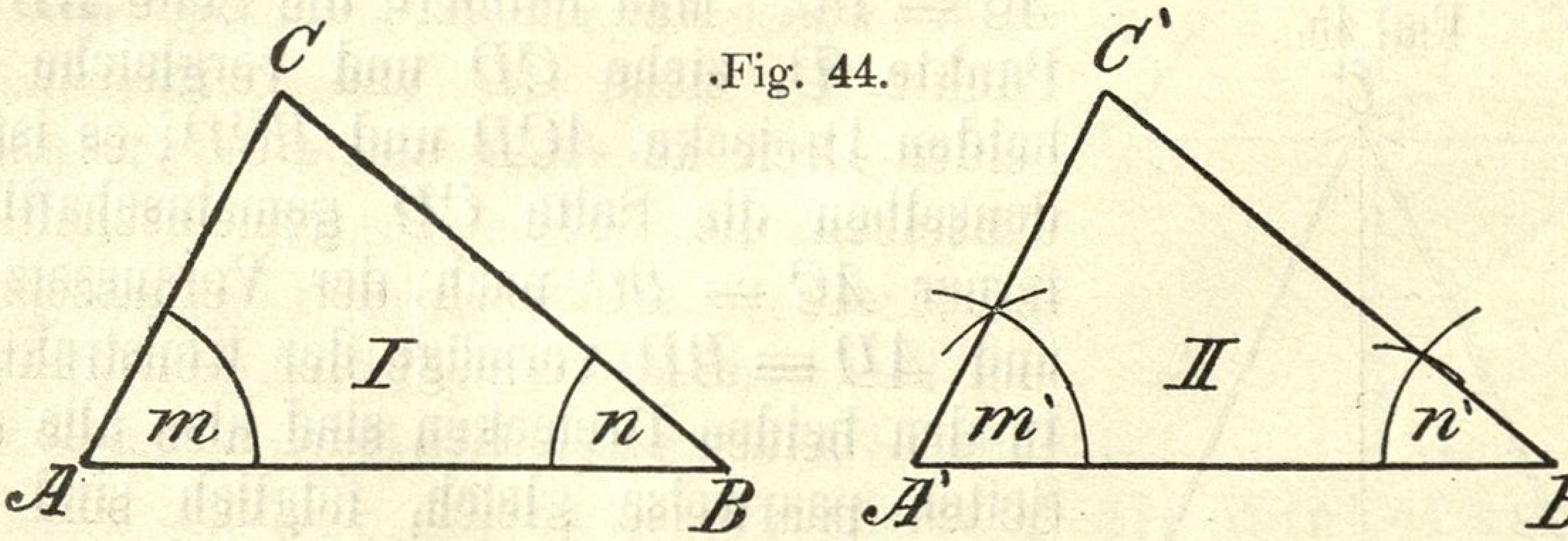
III. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in denselben zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel paarweise gleich sind.

(Man versuche aus 2 Seiten eines Dreieckes und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel das zugehörige kongruente Dreieck zu zeichnen. Ist letzteres hierdurch vollständig bestimmt?)

4. Fall.

Auch aus einer Seite AB und den beiden anliegenden Winkeln m und n (Fig. 44) läßt sich ein zweites Dreieck konstruieren, welches mit dem ersten Dreiecke kongruent ist.

Fig. 44.



Man mache zuerst $A'B' = AB$ und übertrage sodann die beiden Winkel m und n nach m' und n'. Der gemeinsame Durchschnittspunkt C' gibt die dritte Ecke des verlangten Dreieckes. Auch hier kann man sich durch Ausschneiden und Aufeinanderlegen überzeugen, daß beide Dreiecke kongruent sind.

IV. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in denselben eine Seite und die ihr anliegenden Winkel paarweise gleich sind.

Anmerkung. Zur Veranschaulichung der hier angegebenen Kongruenzsätze beim Unterrichte empfiehlt es sich, hierzu geeignete Drahtmodelle zu verwenden. Indem man denselben jedesmal die betreffenden Bestimmungsstücke entnimmt, läßt sich rasch das zweite kongruente Dreieck herstellen und durch tatsächliche Deckung leicht die Erprobung beider Dreiecke auf ihre Kongruenz durchführen.

Aus dem Gesagten ergibt sich auch, daß ein Dreieck vollkommen bestimmt ist und sich hiernach auch konstruieren läßt, wenn entweder alle 3 Seiten desselben oder zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel oder zwei Seiten gegeben sind und derjenige Winkel, welcher der größeren Seite gegenüber liegt, oder eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gegeben ist.

Zu einem gegebenen Dreiecke (Muster) ein kongruentes zeichnen, heißt man dasselbe kopieren. Das erhaltene Dreieck wird auch Kopie genannt. Meistens bedient man sich zum Kopieren des 1. Kongruenzsatzes.

Aufgaben.

1. Zeichne ein beliebiges Dreieck und kopiere es mit Hilfe des 1. Kongruenzsatzes!

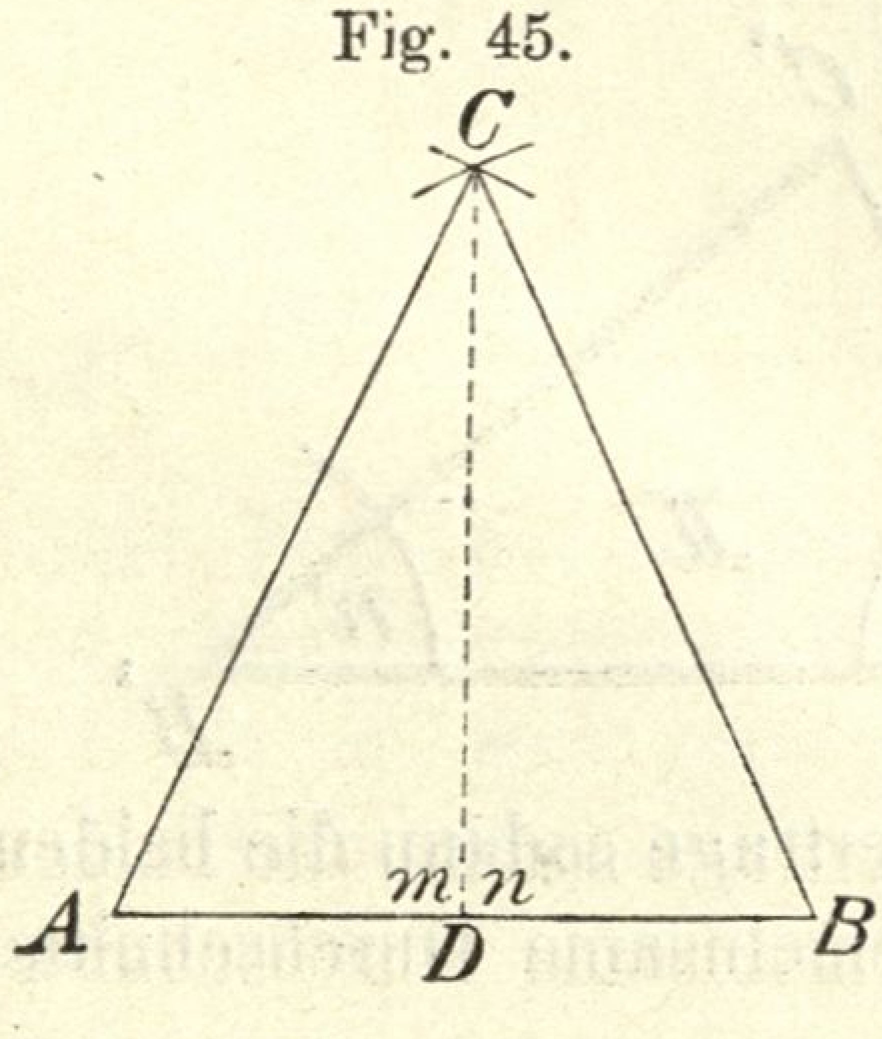
2. Zeichne ein spitzwinkeliges Dreieck und benütze zum Kopieren desselben den 2. und 3. Kongruenzsatz!

3. Ein stumpfwinkeliges Dreieck ist mit Hilfe des 3. Kongruenzsatzes zu kopieren.

18. Anwendung der Kongruenzsätze.

Es sei das Dreieck ABC (Fig. 45) gleichschenkelig und zwar $AC = BC$. Man halbiere die Seite AB im Punkte D, ziehe CD und vergleiche die beiden Dreiecke ACD und BCD; es ist in denselben die Seite CD gemeinschaftlich, ferner $AC = BC$ nach der Voraussetzung und $AD = BD$ vermöge der Konstruktion. In den beiden Dreiecken sind also alle drei Seiten paarweise gleich, folglich sind die Dreiecke ACD und BCD kongruent. Aus der Deckung dieser Dreiecke folgt

Fig. 45.



$\angle A = B$; ferner $\angle m = n$, d. h. $CD \perp AB$. Es ergeben sich daher folgende Sätze:

1. In einem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich.

2. Die Strecke, welche in einem gleichschenkeligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel verbindet, steht auf der Grundlinie senkrecht.

3. Umgekehrt: Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel.

4. Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreiecke vom Scheitel eine Senkrechte auf die Grundlinie, so wird diese dadurch halbiert.

5. Sind mehrere gleichschenkelige Dreiecke miteinander kongruent, so haben auch die gleichliegenden Höhen dieser Dreiecke dieselbe Größe.

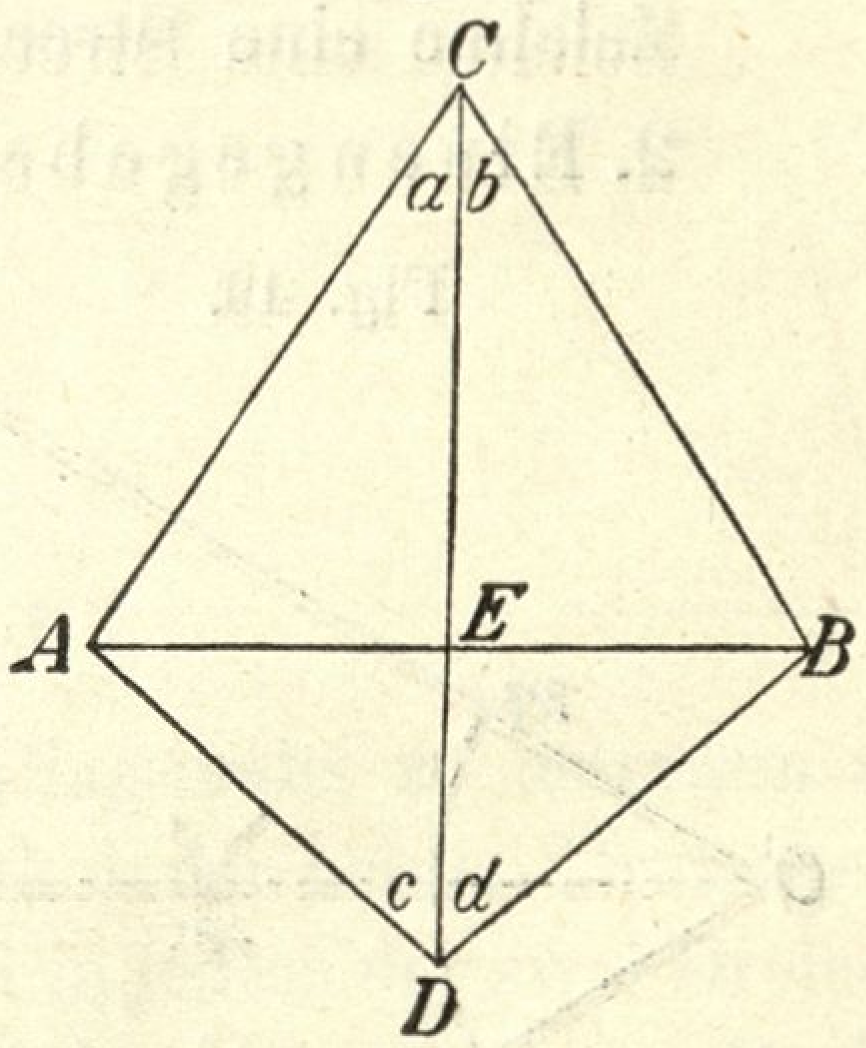
Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?

Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkeligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie *a)* 52^{0}, *b)* $37^{0}\,12'\,50''$ ist?

Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes, wenn der Winkel am Schenkel *a)* 71^{0}, *b)* $26^{0}\,46''$ *c)* $59^{0}\,19'\,42''$ beträgt?

Wie groß ist jeder spitze Winkel eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieckes?

Fig. 46.



Zeichnet man über der Grundlinie AB (Fig. 46) zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC und ABD und zieht durch die Scheitel C und D die Strecke CD, so sind die Dreiecke ACD und BCD kongruent (warum?). Aus der Deckung dieser Dreiecke folgt Winkel $a = b$ und $c = d$; ferner $AE = BE$. Endlich ist Winkel $AEC = BEC$, d. h. $CE \perp AB$. Hieraus ergibt sich der Satz:

Zeichnet man über derselben Grundlinie zwei gleichschenkelige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbiert 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf der Grundlinie senkrecht.

Konstruktionsaufgaben:

1. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 47) zu halbieren. Die Auflösung beruht auf dem eben mitgeteilten Satze.

Man braucht nur über AB zwei gleichschenkelige Dreiecke zu konstruieren und ihre Scheitel C und D durch eine Gerade zu verbinden.

Fig. 47.

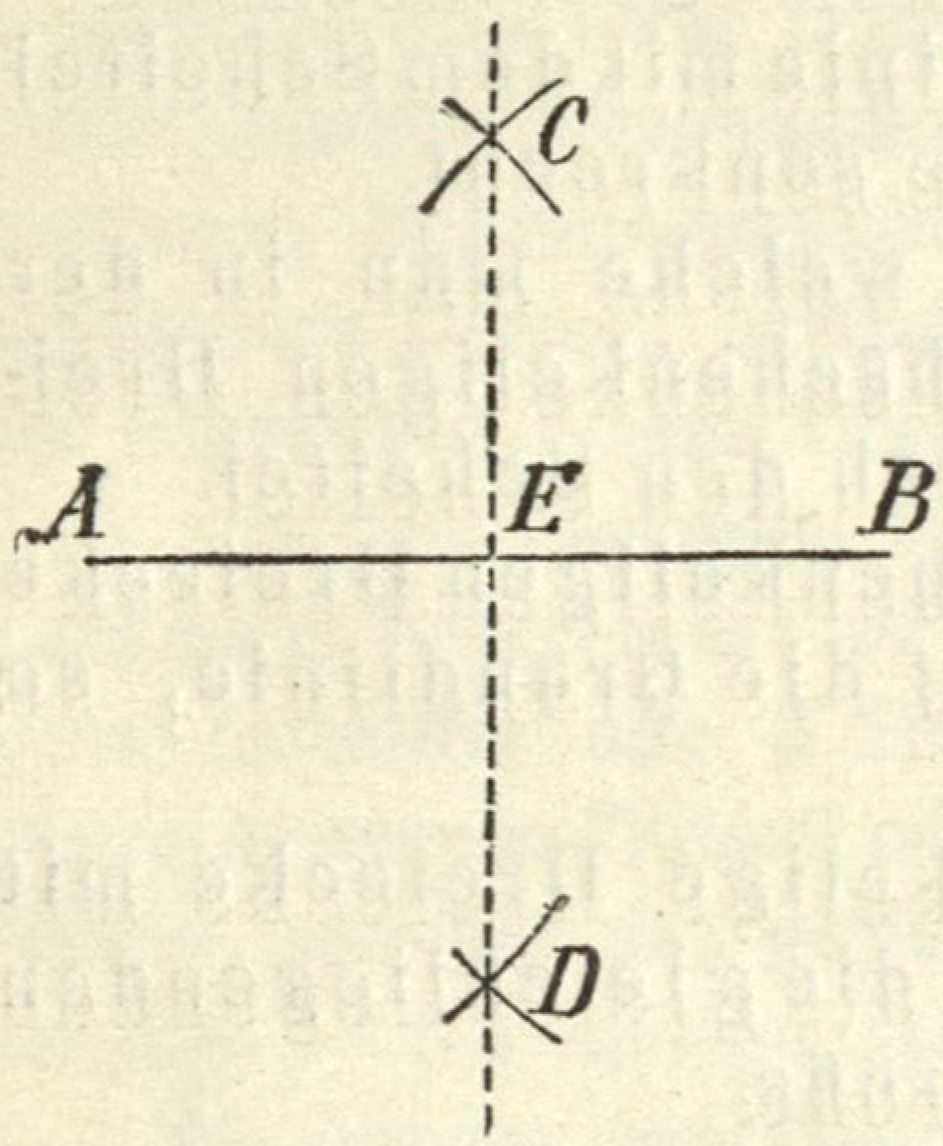
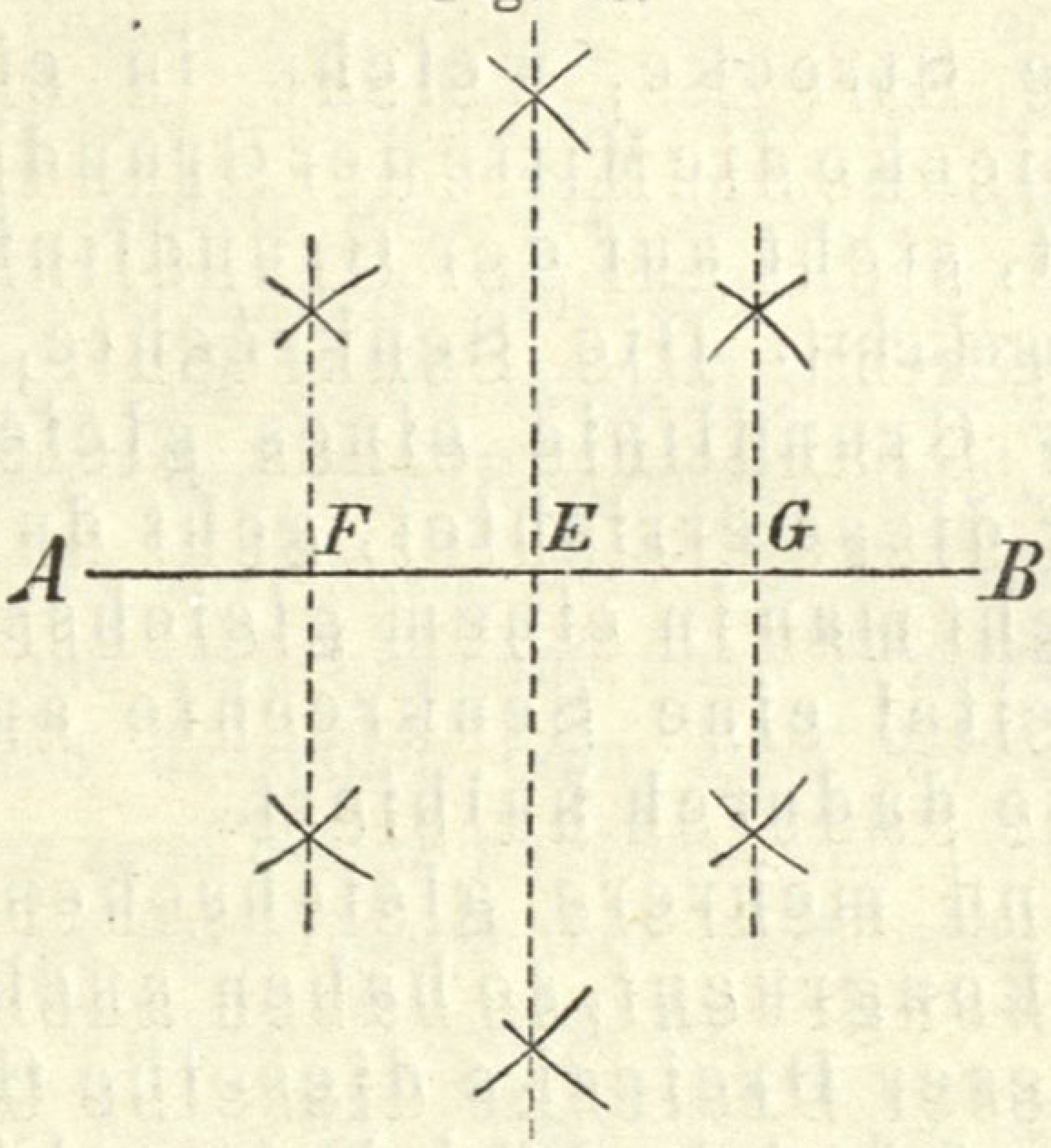


Fig. 48.



Dabei sind jedoch die Schenkel der gleichschenkeligen Dreiecke für die Lösung der Aufgabe entbehrlich.

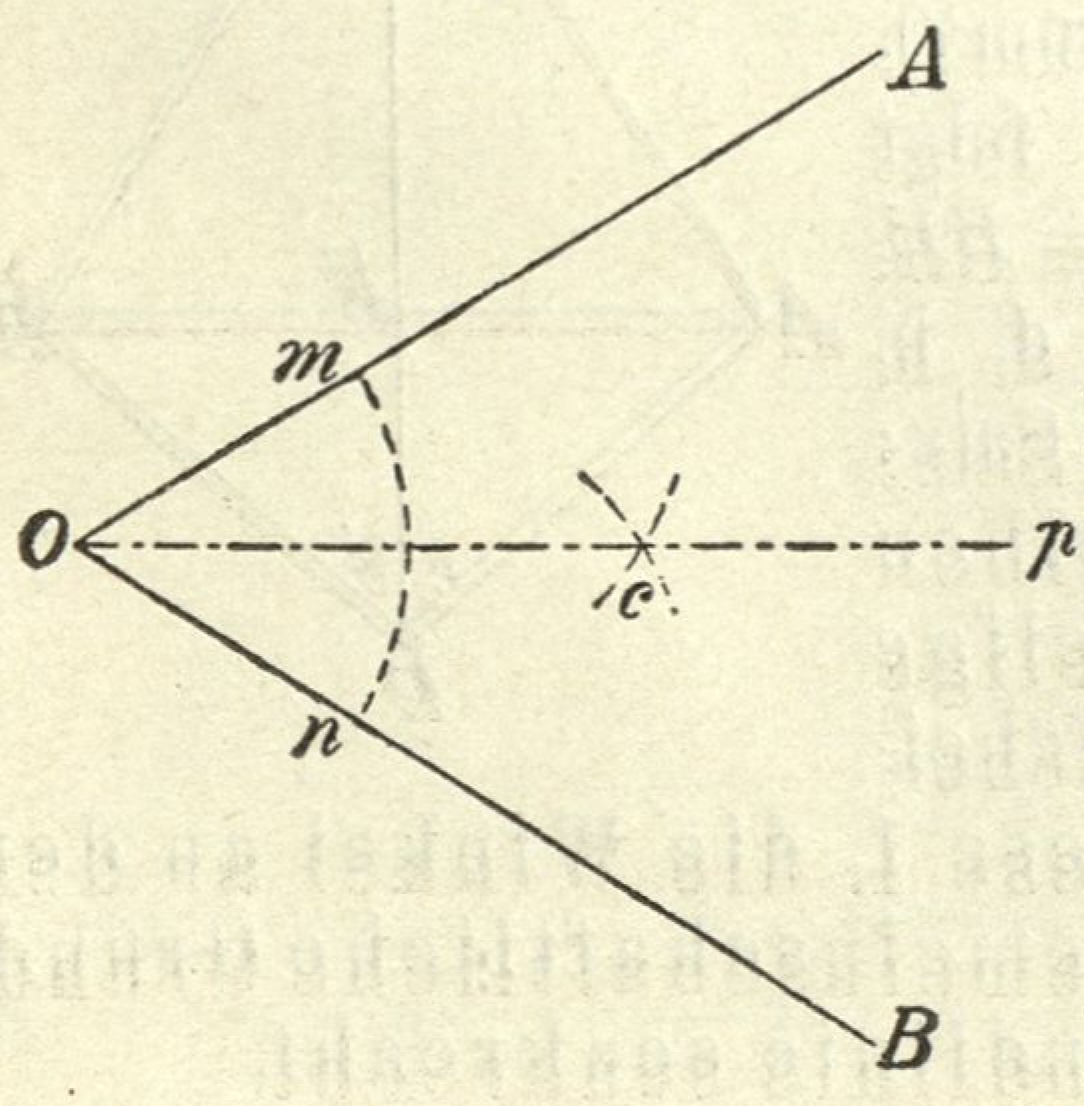
Auflösung: Man beschreibe aus den Endpunkten der Strecke mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch beide Punkte eine Gerade; diese Gerade halbiert die gegebene Strecke.

Wird nun weiter jede Hälfte (AE und EB, Fig. 48) auf die eben angegebene Weise neuerdings halbiert, so hat man die Gerade AB in 4 gleiche Teile zerlegt.

Zeichne verschiedene Strecken und halbiere jede derselben!
Zeichne eine Strecke und teile sie in 4, 8 gleiche Teile!

2. Einen gegebenen Winkel AOB (Fig. 49) zu halbieren.

Fig. 49.



Um einen Winkel zu halbieren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel schneidet; aus den Durchschnittspunkten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe dann durch diesen Punkt und den Scheitel des Winkels eine Gerade; letztere halbiert den gegebenen Winkel.

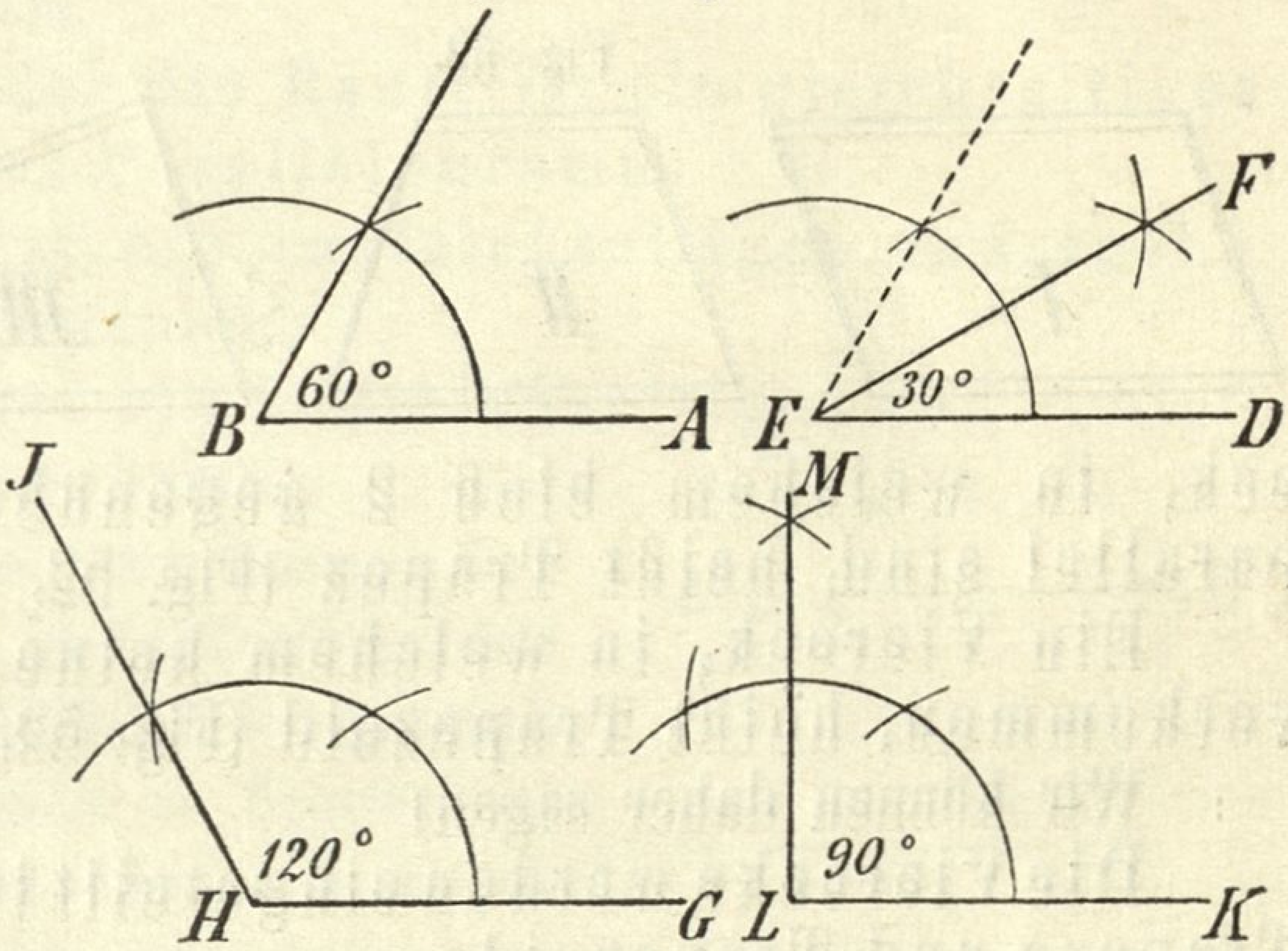
Zeichne verschiedene Winkel und halbiere sie!

Zeichne einen Winkel und teile ihn in 4 gleiche Teile.

3. Geometrische Konstruktion einzelner Winkel.

A. Einen Winkel von *a*) 60°, *b*) 30°, *c*) 120°, *d*) 90° geometrisch zu konstruieren. (Fig. 50.)

Fig. 50.



a) Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes.

b) Durch Halbierung des Winkels von 60°.

c) und *d*) Durch Konstruktion zweier Winkel von je 60°, bezüglich von 60° und 30°.

B. Einen Winkel von *a*) 45°, *b*) $22\frac{1}{2}$°, *c*) 135° geometrisch zu konstruieren.

Durch Halbierung des Winkels von 90°, bezüglich 45° und durch Konstruktion des Nebenwinkels von 45°.

19. Das Viereck.

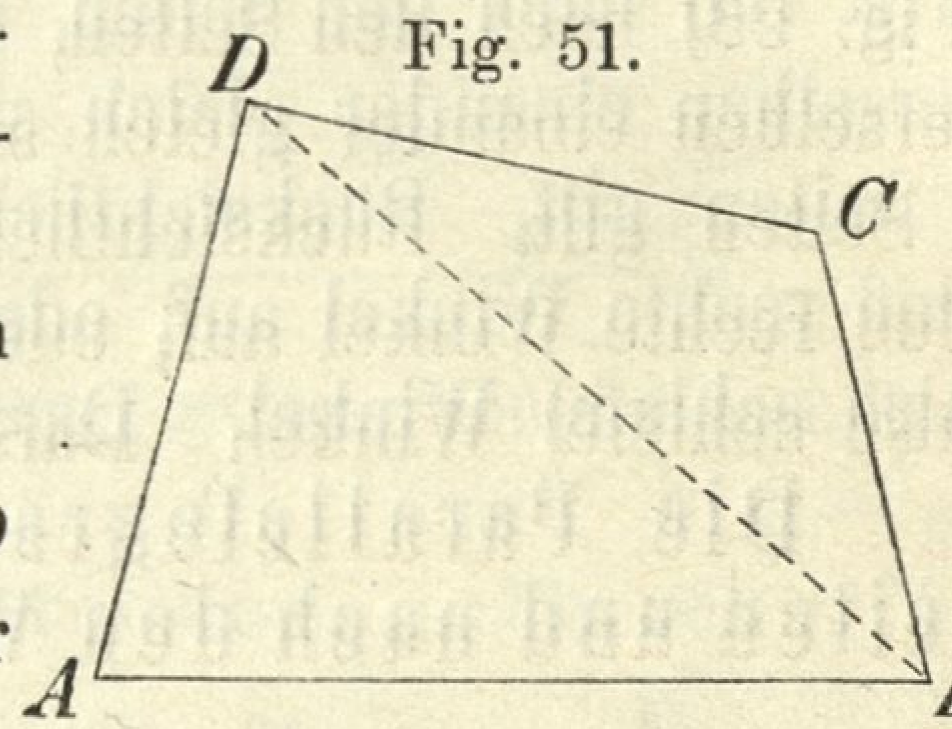
(Betrachtung von vierseitigen Prismen, deren Grundflächen Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide sind.)

Eine von vier Strecken begrenzte Figur heißt Viereck.

Jedes Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Die Strecke, welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale.

Fig. 51.



Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

Nenne in dem Vierecke *ABCD* (Fig. 51) alle vier Seiten und alle vier Winkel! Nenne die Diagonale!

Zieht man in einem Vierecke eine Diagonale, so betragen alle Winkel des Viereckes ebensoviel als die Winkel der beiden Dreiecke, in welche das Viereck zerlegt wird; die Winkel in jedem der zwei Dreiecke betragen nun zwei Rechte, daher die Winkel des Viereckes vier Rechte.

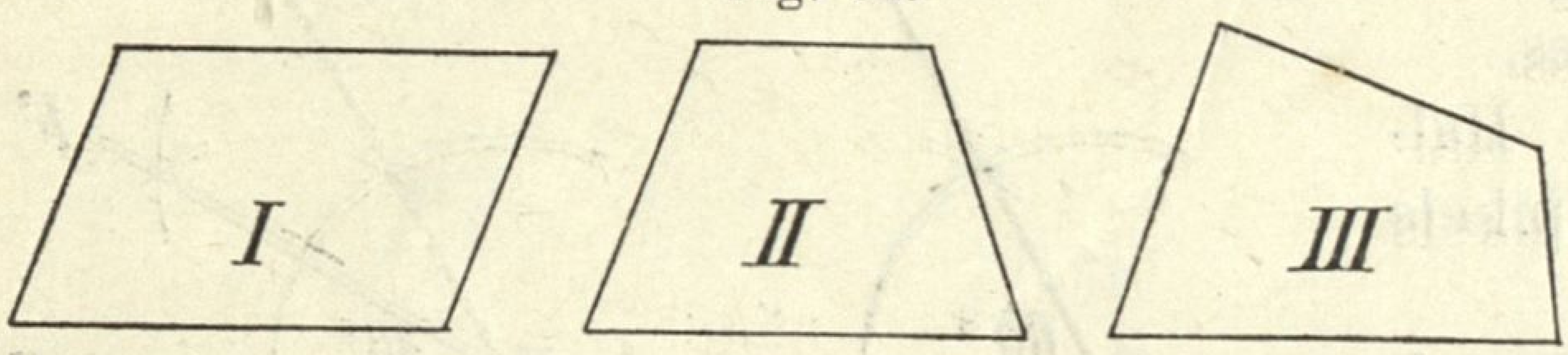
In einem Vierecke beträgt die Summe aller Winkel vier Rechte oder 360°.

In einem Vierecke sind alle Winkel gleich; wie groß ist jeder? —

Die einzelnen Vierecke der vorstehenden Prismen zeigen wesentliche Verschiedenheiten. Während bei einigen derselben je 2 Gegenseiten parallel sind, gibt es auch Vierecke, wo nur 2 Seiten diese Eigenschaft haben, oder wo gar keine Seiten zu einander parallel sind.

Ein Viereck, in welchem je 2 gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm (Fig. 52, I).

Fig. 52.



Ein Viereck, in welchem bloß 2 gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt Trapez (Fig. 52, II).

Ein Viereck, in welchem keine parallelen Seiten vorkommen, heißt Trapezoid (Fig. 52, III).

Wir können daher sagen:

Die Vierecke werden eingeteilt in Parallelogramme Trapeze und Trapezoide.

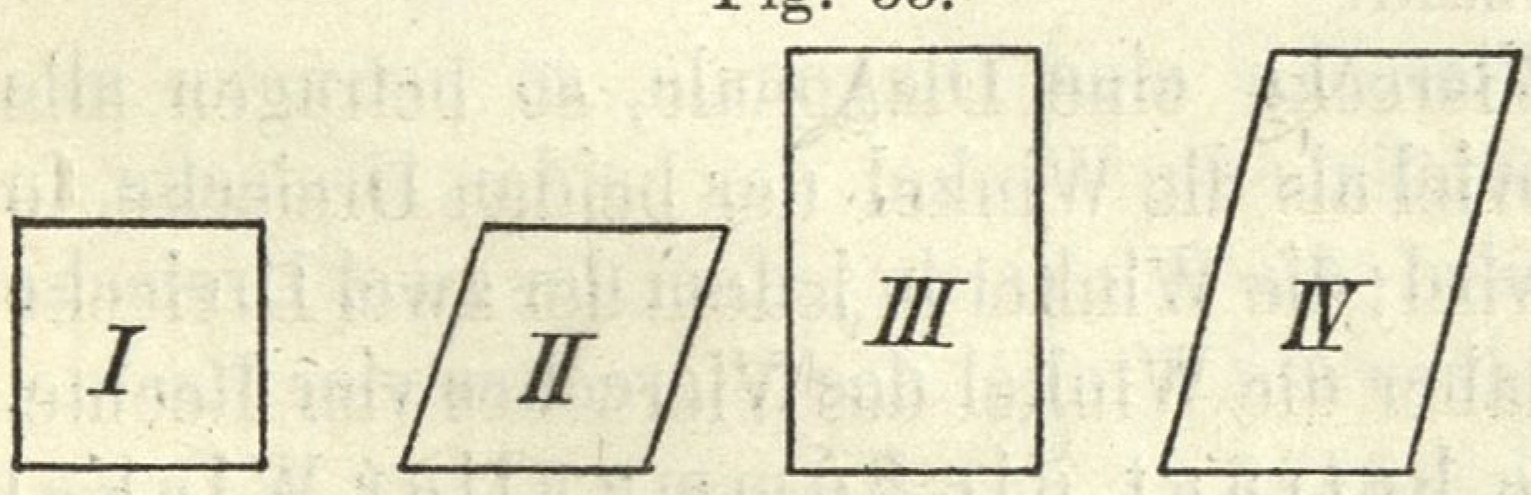
Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenkelig.

In einem Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, die darauf von der gegenüberliegenden Seite gefällt wird, ist dann die Höhe. In einem Trapeze versteht man unter der Höhe eine Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gefällt wird.

Betrachtet man nun die verschiedenen Arten der Parallelogramme (Fig. 53) nach den Seiten, so ergibt sich, daß entweder alle 4 Seiten derselben einander gleich sind, oder daß dieses nur bezüglich von je 2 Seiten gilt. Rücksichtlich der Winkel weisen dieselben entweder bloß rechte Winkel auf, oder sie enthalten neben spitzen auch stumpfe (also schiefe) Winkel. Daraus ergibt sich:

Die Parallelogramme werden eingeteilt nach den Seiten und nach den Winkeln.

Fig. 53.



Den Seiten nach unterscheidet man gleichseitige (I und II) und ungleichseitige Parallelogramme (III und IV).

Den Winkeln nach gibt es rechtwinkelige (I und III) und schiefwinkelige Parallelogramme (II und IV).

Jedes der 4 in Fig. 53 abgebildeten Parallelogramme führt einen eigenen Namen.

I stellt das Quadrat vor, II den Rhombus oder die Raute, III das Rechteck und IV das Rhomboid.

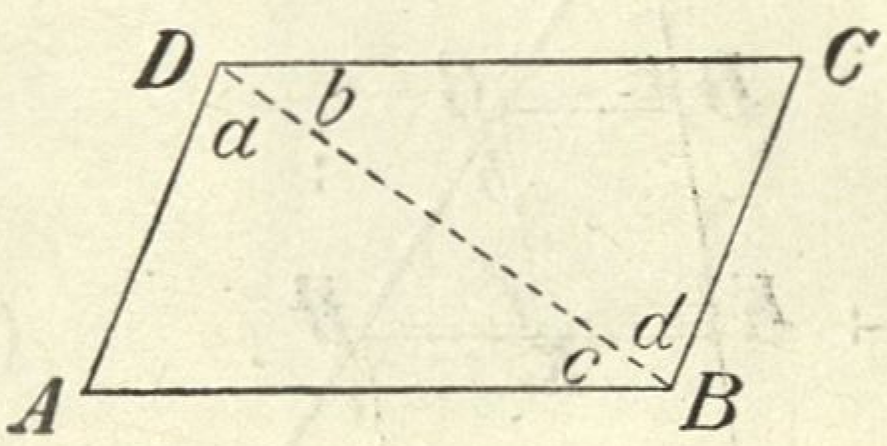
Das Quadrat ist ein gleichseitiges und rechtwinkeliges Parallelogramm.

Der Rhombus oder die Raute ist ein gleichseitiges und schiefwinkeliges Parallelogramm.

Das Rechteck ist ein ungleichseitiges und rechtwinkeliges Parallelogramm.

Das Rhomboid ist ein ungleichseitiges und schiefwinkeliges Parallelogramm.

Fig. 54.



Nach welchem Kongruenzsatze sind in dem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 54) die beiden $\triangle ABD$ und BDC kongruent? — Suche nachfolgende Sätze zu begründen:

1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

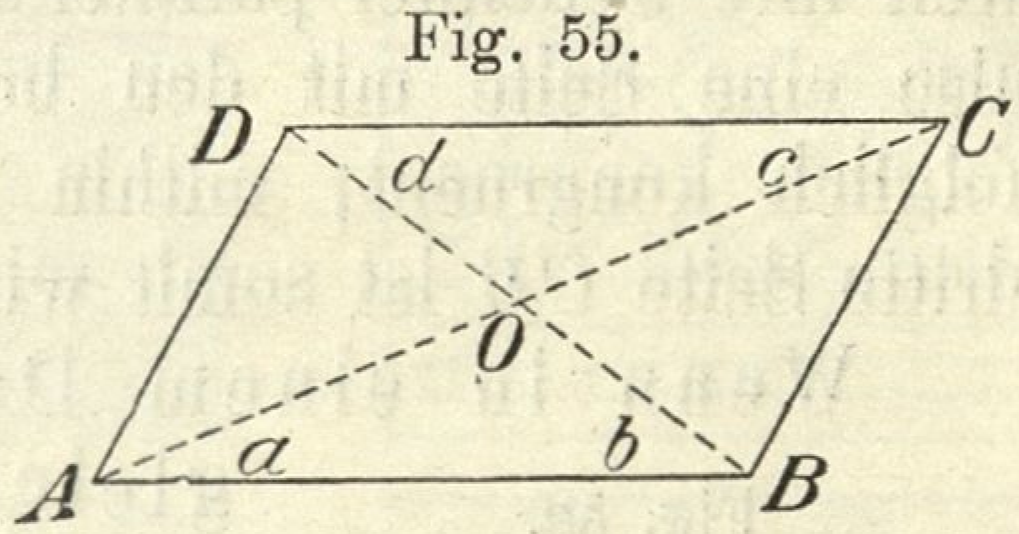
2. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

3. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich; oder:

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Es sei $ABCD$ (Fig. 55) ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist wegen $AB = CD$, $a = c$ und $b = d$ das Dreieck $ABO \cong CDO$, folglich $AO = CO$, $BO = DO$; d. i. die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbieren einander.

Fig. 55.



Von den Diagonalen der Parallelogramme gelten noch folgende Sätze:

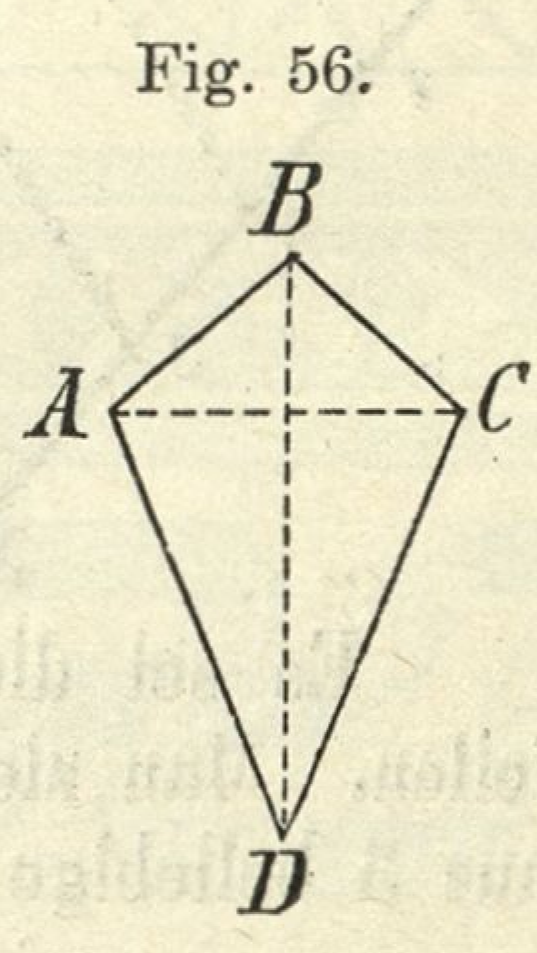
1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

2. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander.

3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht auf einander.

Von den Trapezoiden ist das in Fig. 56 dargestellte Deltoid besonders wichtig.

Fig. 56.



In was für Dreiecke zerfällt es durch die Diagonale AC?

Zieh die Diagonale BD! Die beiden Dreiecke ABD und BCD sind kongruent. (Warum?)

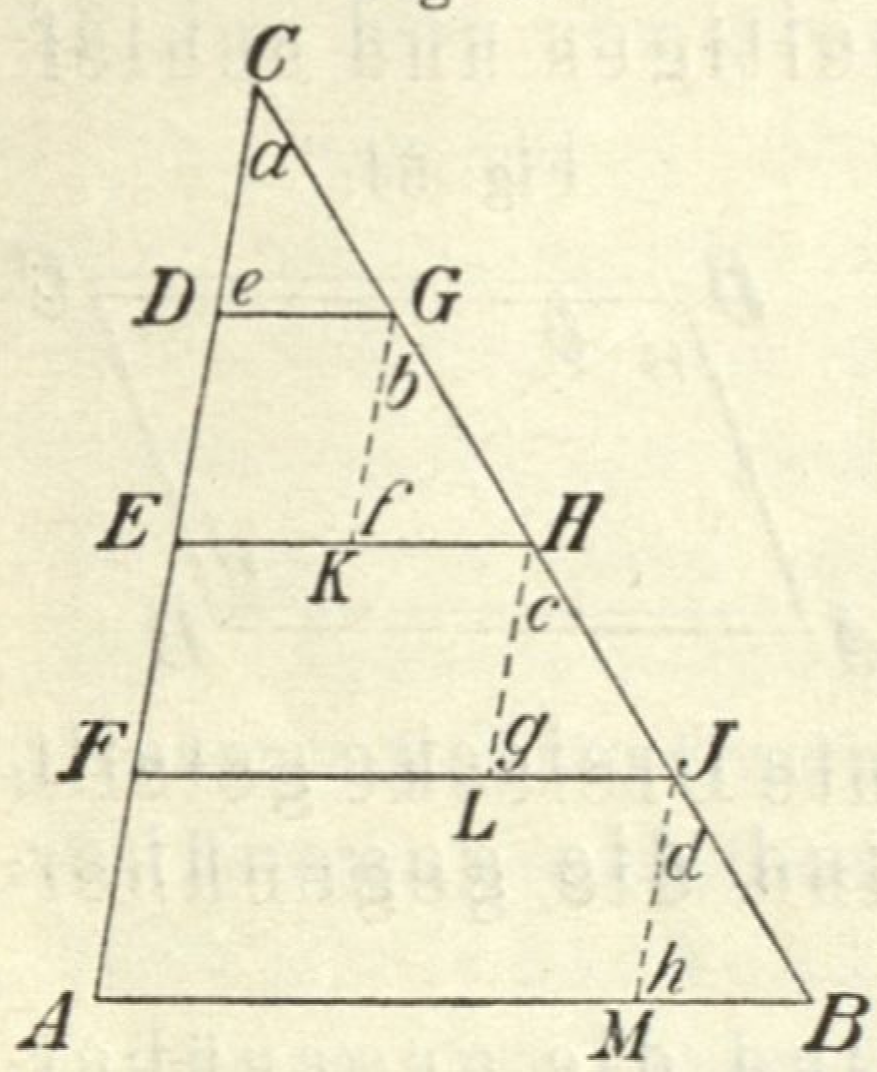
Eine Figur, welche sich durch eine Mittellinie in 2 kongruente Hälften zerlegen läßt, heißt symmetrisch.

Wir sagen:

Das Deltoid ist ein symmetrisches Trapezoid.

(Ausschneiden aus Papier und Zusammenfalten längs BD zur Unterstützung der Anschauung.)

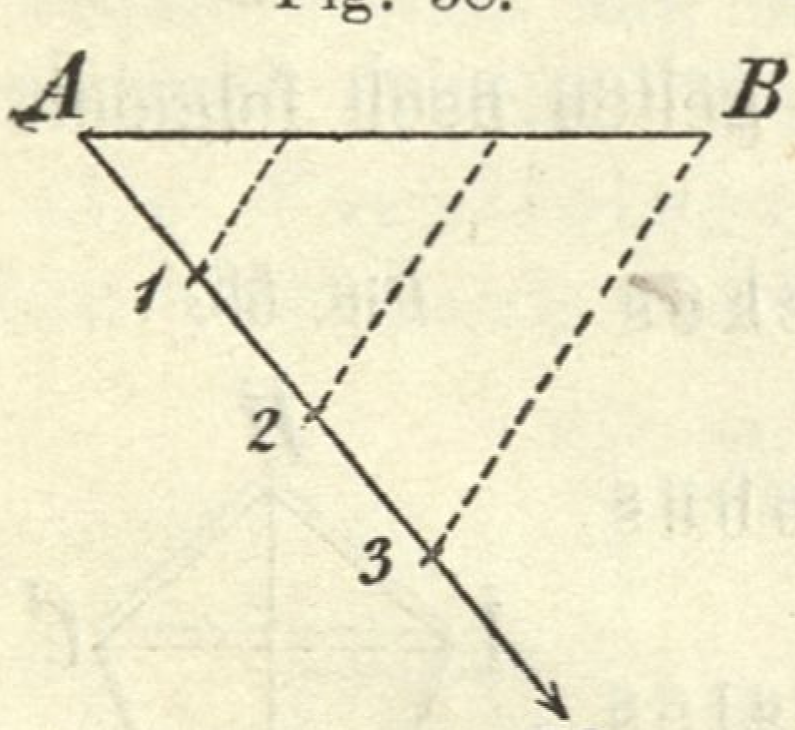
Fig. 57.



Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 57) die Seite AC in mehrere, z. B. in 4 gleiche Teile geteilt, also $CD = DE = EF = FA$. Man ziehe DG, EH und FJ sämtlich parallel mit der Seite AB. Nun läßt sich zeigen, daß dadurch auch CB in 4 gleiche Teile geteilt wird. — Man ziehe die Linien GK, HL und JM parallel mit AC. Weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, so ist $GK = DE$, $HL = EF$ und $JM = FA$. Nach der Voraussetzung sind die Strecken CD, DE, EF und FA gleich, daher müssen auch die Strecken CD, GK, HL und JM gleich sein; in den Dreiecken CDG, GKH, HLJ und JMB sind überdies die Winkel a, b, c und d als Gegenwinkel gleich, ferner sind die Winkel e, f, g und h gleich, weil ihre Schenkel parallel sind. Die genannten vier Dreiecke haben also eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, sind folglich kongruent; mithin ist $CG = GH = HJ = JB$. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in 4 gleiche Teile geteilt worden.

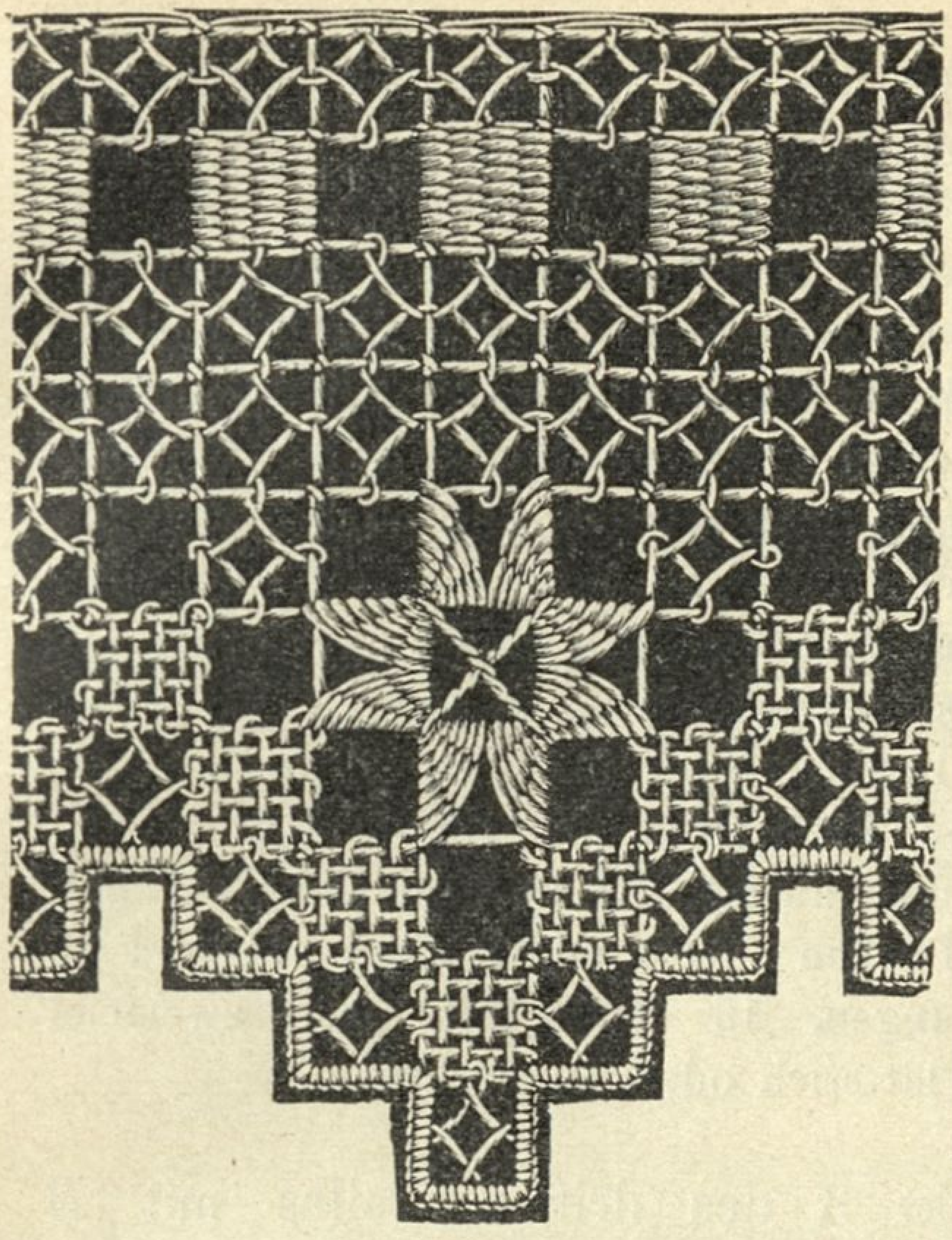
Wenn in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Teile geteilt ist und man zieht durch jeden Teilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in ebenso viele unter einander gleiche Teile geteilt.

Fig. 58.

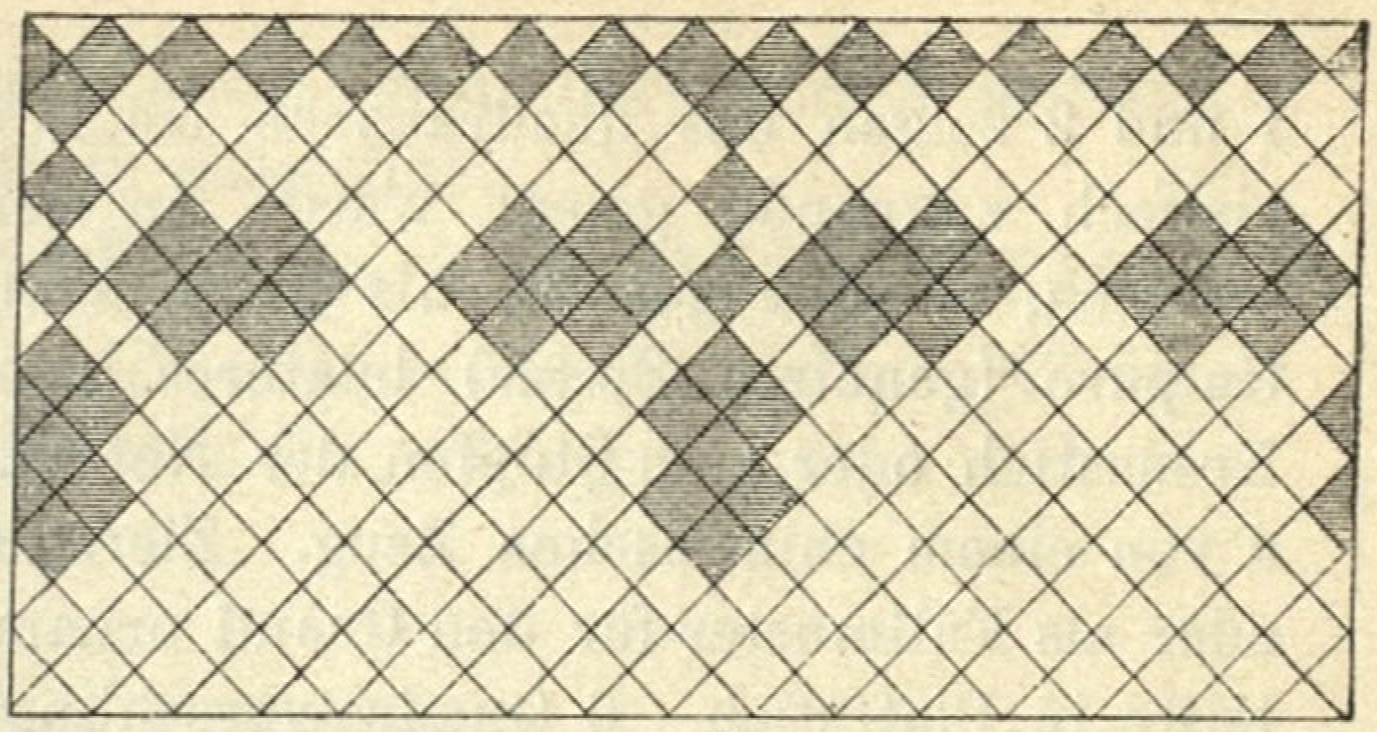


Hierauf beruht die Aufgabe, eine gegebene Strecke in beliebig viele gleiche Teile zu teilen.

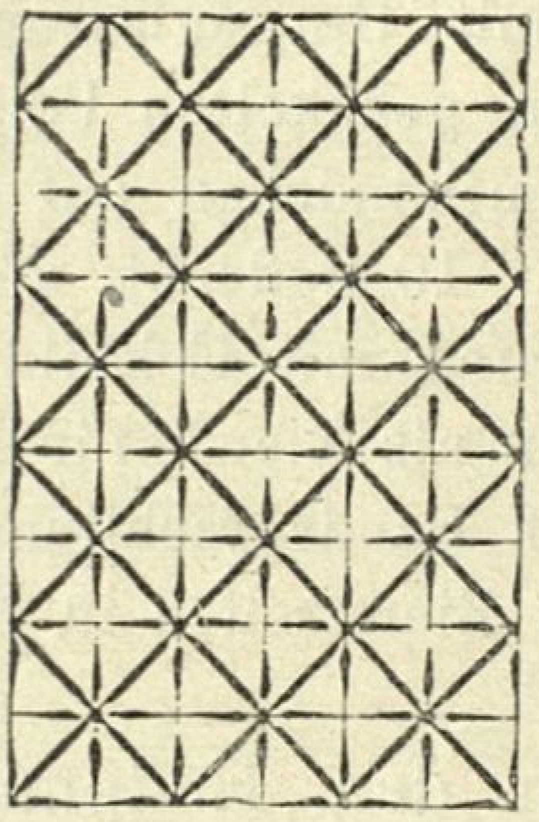
Es sei die Strecke AB (Fig. 58) z. B. in 3 gleiche Teile zu teilen. Man ziehe durch A den Strahl AX und trage darauf von A aus 3 beliebige gleiche Teile auf.



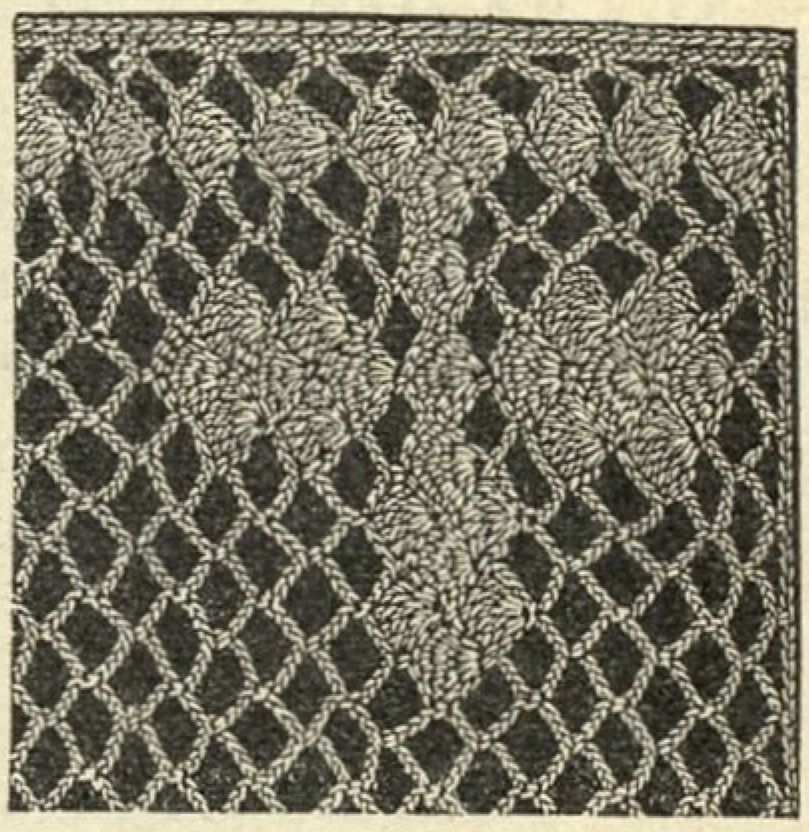
1



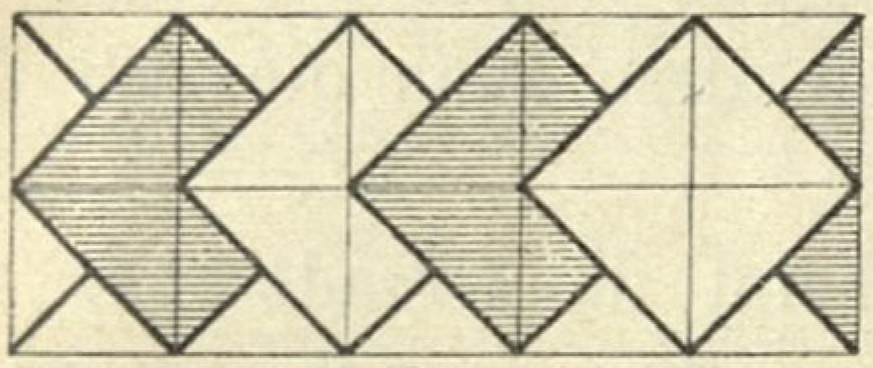
2



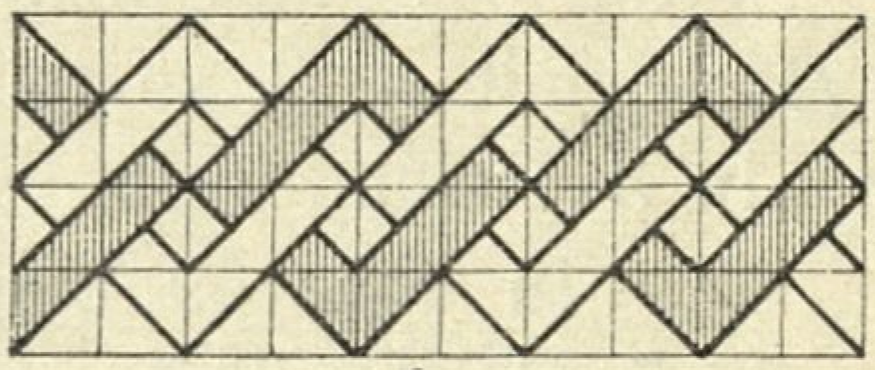
3



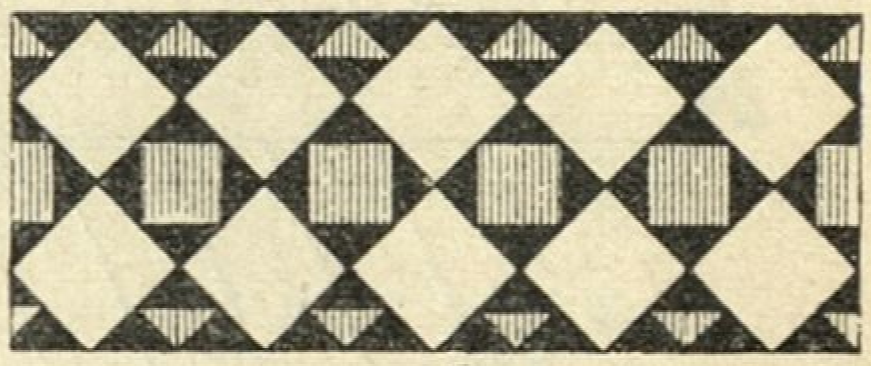
4



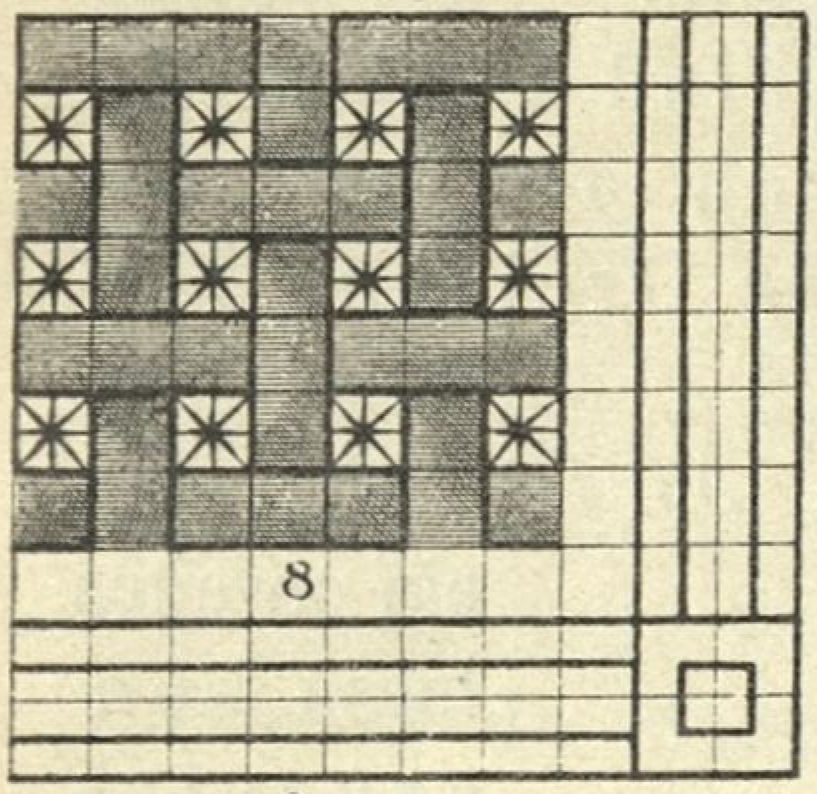
5



6

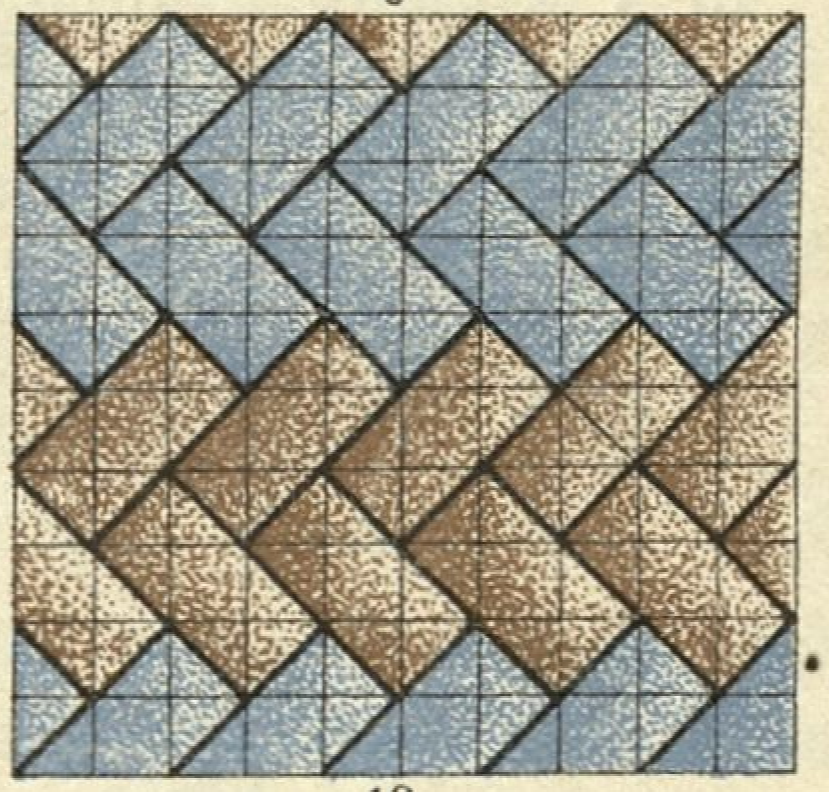


7

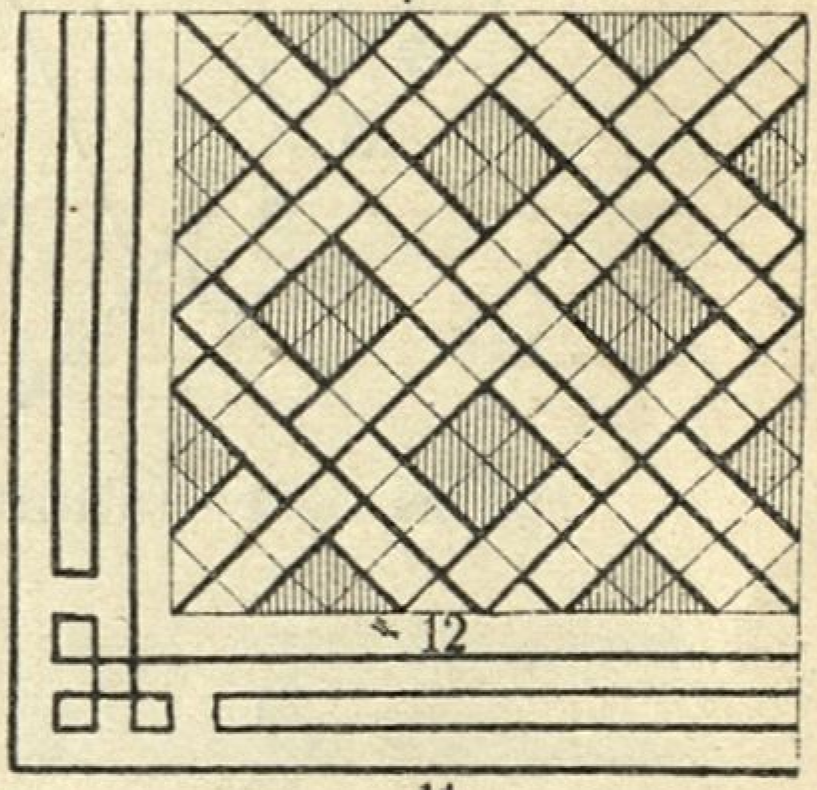


8

9

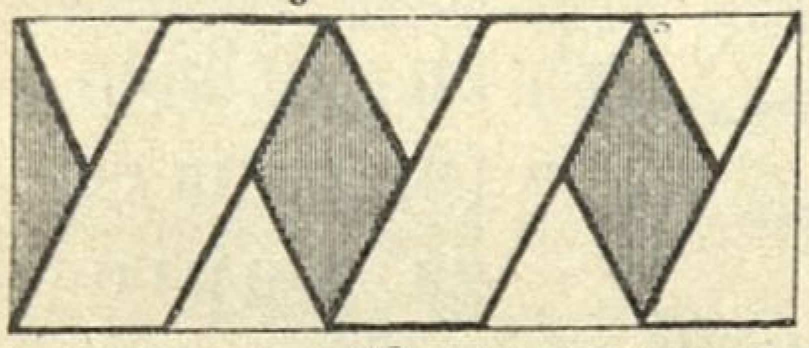


10

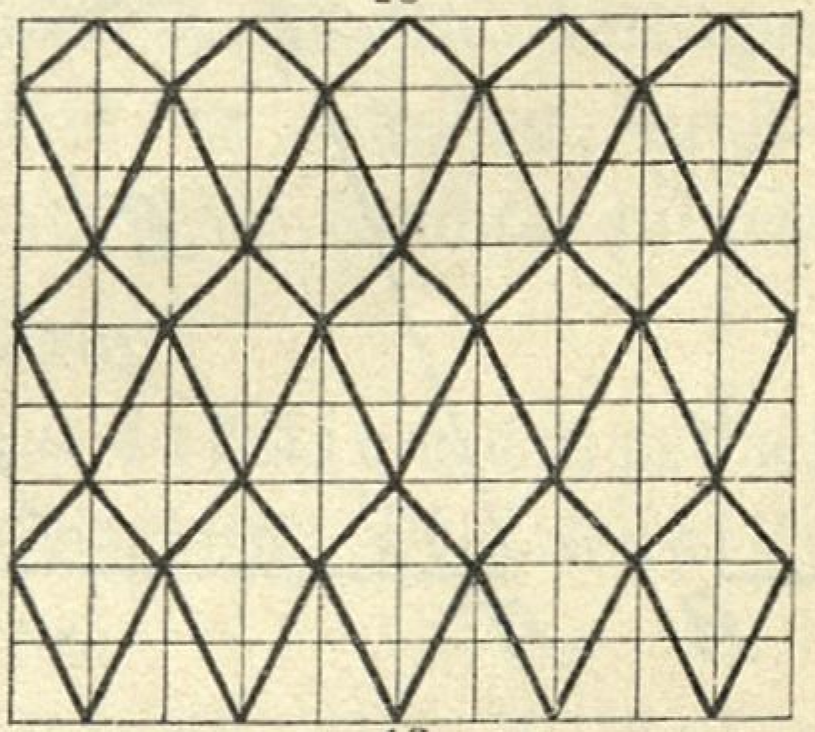


12

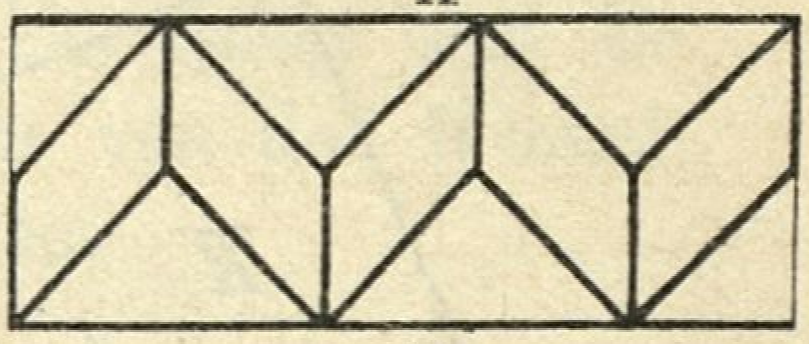
11



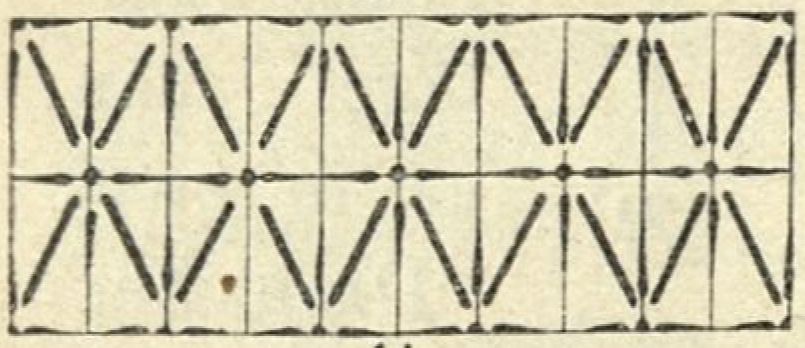
13



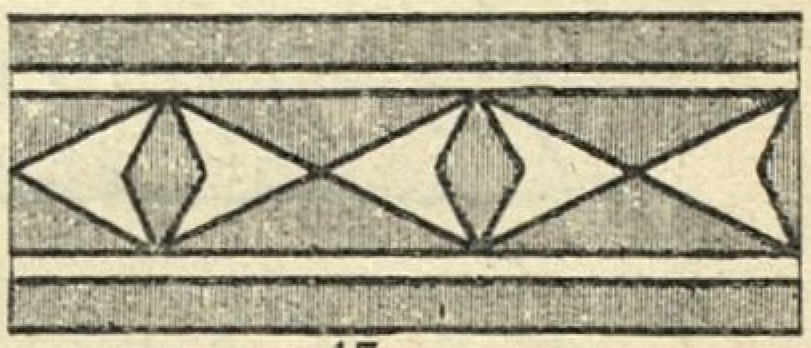
16



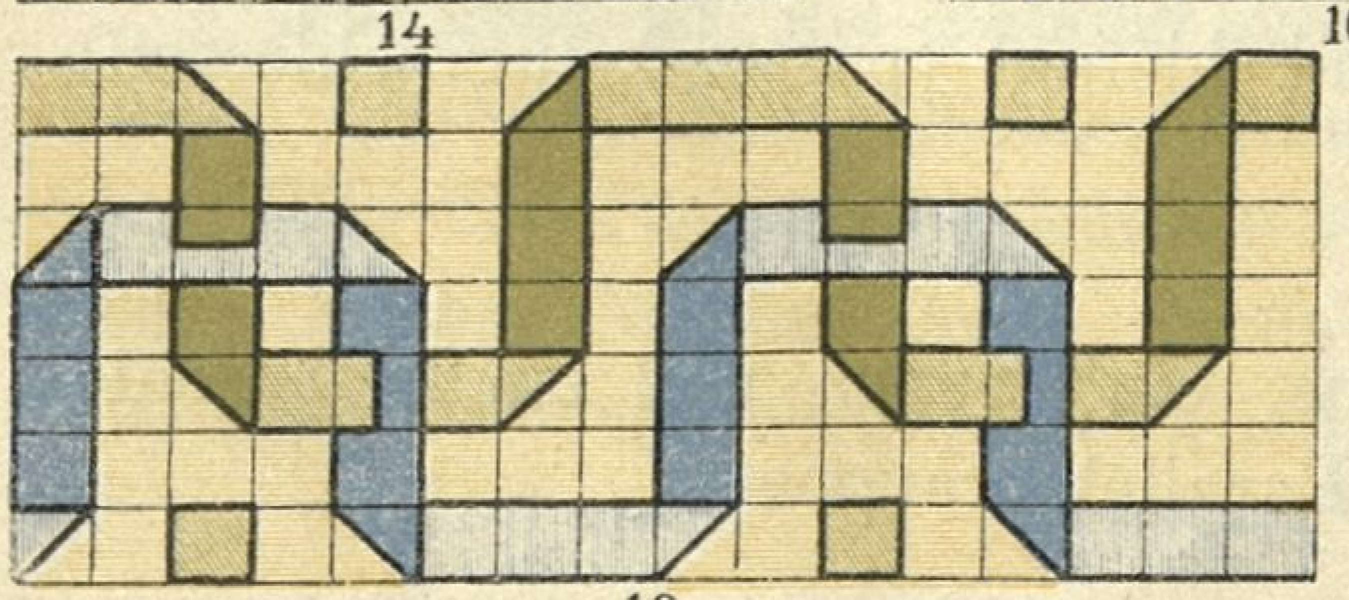
15



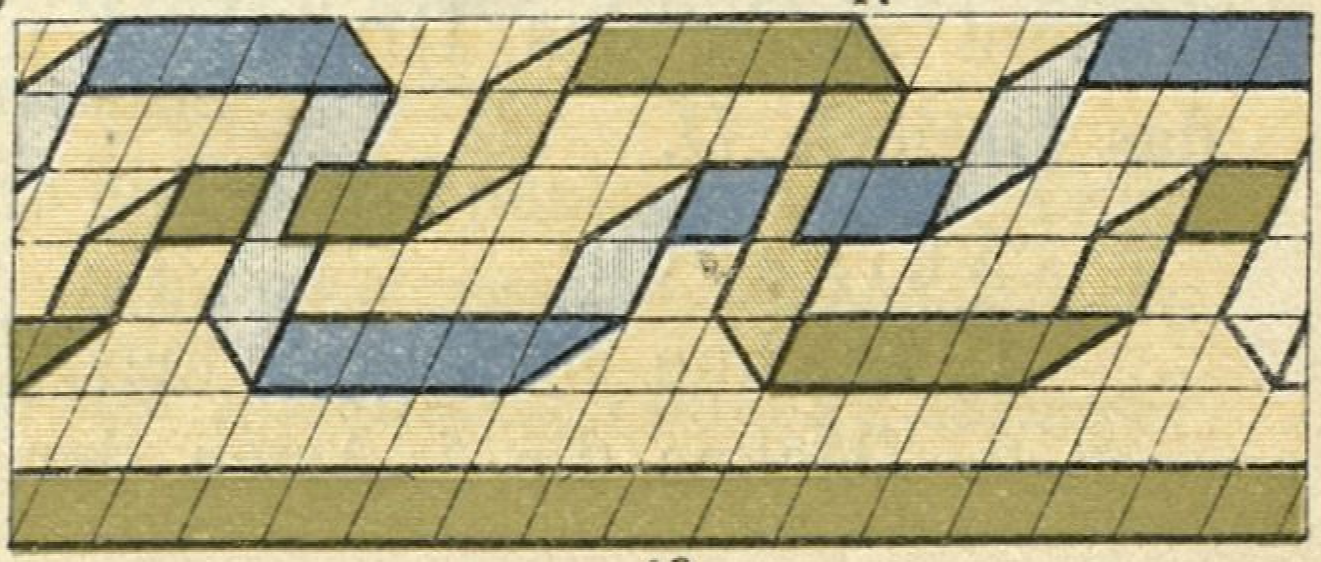
14



17



18

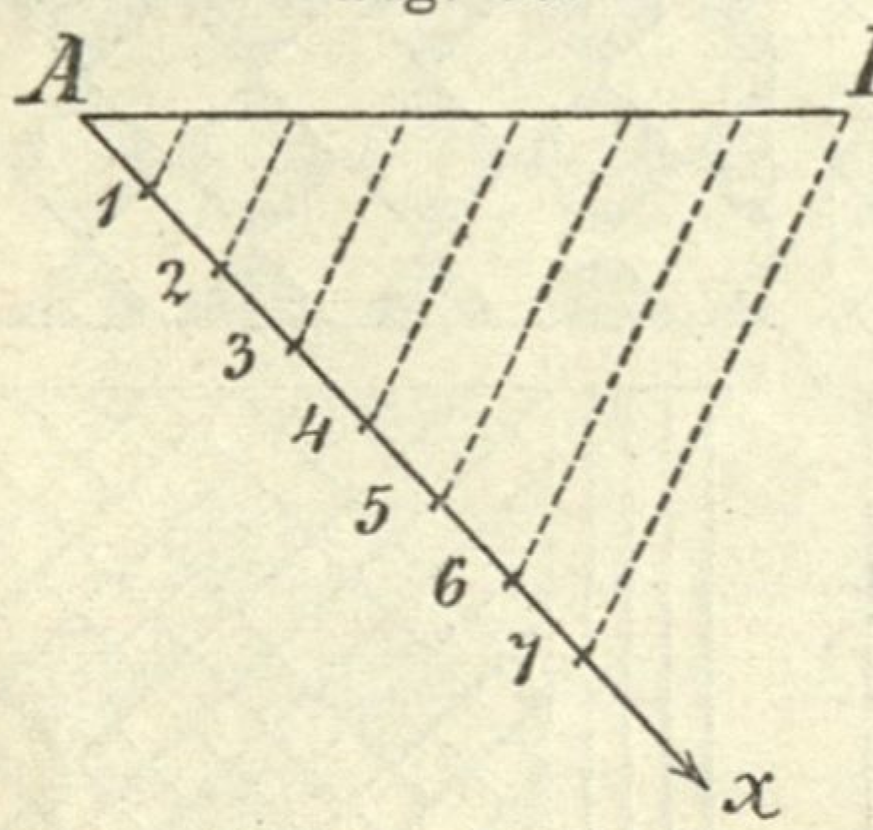


19

1 und 2 zeigen das quadratische Netz, das den vorhergegangenen Ornamenten vielfach zugrunde gelegt wurde, in seiner Verwendung für weibliche Handarbeiten, sowohl gerade, als auch über Eck gestellt, u. z. ersteres für Filet Guipure (genetzte Spitze) letzteres als Tupf für Häkelarbeit, aber auch für Kreuzstich oder zum Stopfen des Netzes. 3 zeigt obiges Muster in Häkelarbeit. 4 von einem chinesischen Zeug. Zierstich als Flächenfüllung für Kleidereinsätze oder als Füllmuster für den Grund ornamental verzierter Handarbeiten. 5 Randleiste in Plattstich. 6 Quadratverschlingung, in Plattstich oder auch als Häkelarbeit leicht ausführbar und als Einsatz oder Spitze zu verwenden. 7 arabischer Mosaikfußboden; gibt mit Hinweglassung der Dreiecke und eingeschriebenen Vierecke einen beliebten gehäkelten Polsterzwischensatz. 8 und 12 Verschlingung von schwarzen Samtbändchen auf lichtem Stoff für Kleiderputz oder als Bezug für Luxuspolster. 10 Geflecht von Tuchresten für Teppiche aller Art. 9 und 11 Linienverzierung mit Eckbildung, ausführbar in Stiel- oder Schnurstich. 13 Bändchenlegen als Zierde für Decken oder Kinderkleider. 14 und 15 Zierstiche. 18 und 19 Bandverschlingungen. 16 Netzarbeit über zweierlei Walzen. 17 Zierstreifen in Plattstich oder Auflegearbeit.

Verbindet man den Endpunkt 3 des dritten Teiles mit B durch $3\,B$ und zieht durch 2 und 1 Parallele mit $3\,B$, so teilen diese auch die AB in 3 gleiche Teile.

Fig. 59.

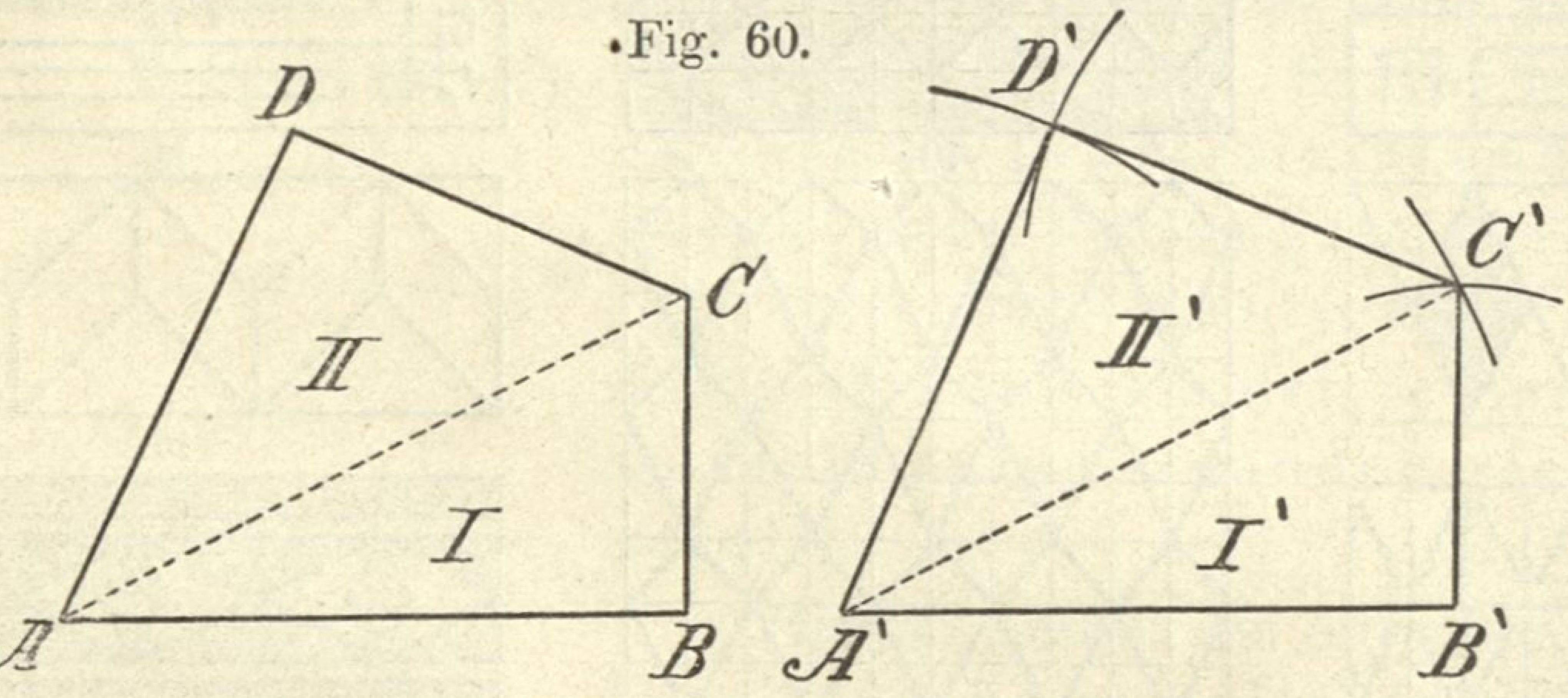


In Fig. 59 erscheint die Gerade AB in 7 gleiche Teile eingeteilt. —

Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie sich durch eine Diagonale in 2 kongruente Dreiecke zerlegen lassen.

Um zu einem gegebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 60) ein zweites hiezu kongruentes zu zeichnen (d. h. um es zu kopieren), zerlege man es in zwei Dreiecke, kopiere zuerst das Dreieck I und hierauf (passend angeschlossen) das Dreieck II.

Fig. 60.



Aufgaben:

1. Zeichne ein Parallelogramm, ein Trapez und ein Trapezoid!
2. Zeichne die 4 Arten der Parallelogramme!

3. Konstruiere ein Deltoid, indem du von den beiden auf einander senkrecht stehenden Diagonalen ausgehst!

4. Teile eine Strecke geometrisch genau in 9 gleiche Teile!

5. Zeichne ein beliebiges Trapezoid und kopiere dasselbe! (Welche Vereinfachungen sind beim Kopieren von Parallelogrammen und von Deltoiden möglich?)

20. Das Vieleck (Polygon).

(Betrachtung von mehrseitigen Prismen.)

Die einzelnen Grundflächen der vorstehenden Prismen enthalten mehr als 4 Seiten; sie sind Vielecke oder Polygone.

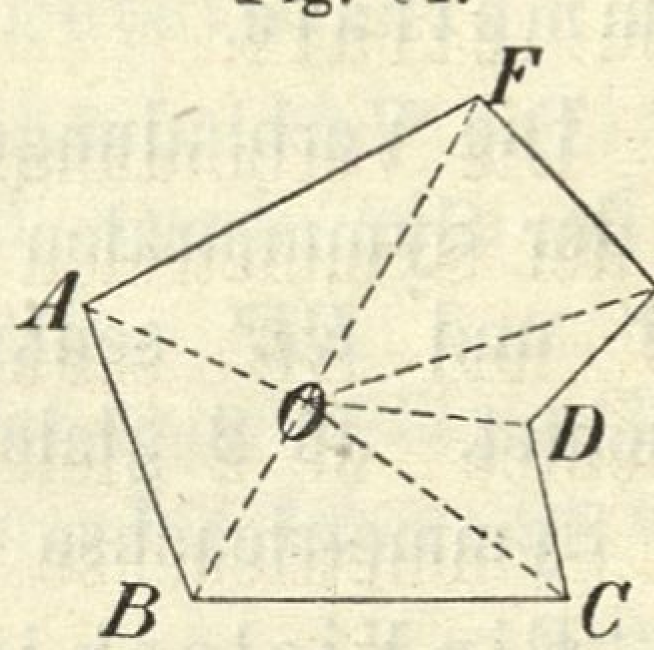
Eine von mehr als vier Strecken begrenzte geradlinige Figur heißt Vieleck oder Polygon.

Auch die Vielecke zeigen rücksichtlich der Seiten und Winkel eine große Verschiedenheit.

Nach der Zahl der Seiten gibt es Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke u. s. w.

Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt Diagonale.

Fig. 61.



Nimmt man innerhalb des Vieleckes *ABCDEF* (Fig. 61) einen beliebigen Punkt *O* an und zieht von diesem zu allen Endpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal 2 Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Unter den Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt *O* herum, die nicht Vieleckswinkel sind und zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muß man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch vier Rechte subtrahieren.

Man kann daher sagen:

In jedem Vieleck ist die Summe aller Winkel gleich so vielmal zwei Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechten.

Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes? eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneckes?

Wie viel Diagonalen können von einem Eckpunkt in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wie viele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

Der Form nach unterscheidet man regelmäßige, symmetrische und unregelmäßige Vielecke.

Ein Vieleck ist regelmäßig, wenn alle Seiten desselben gleich lang sind und alle Winkel dieselbe Größe haben (Fig. 62).

Fig. 62.

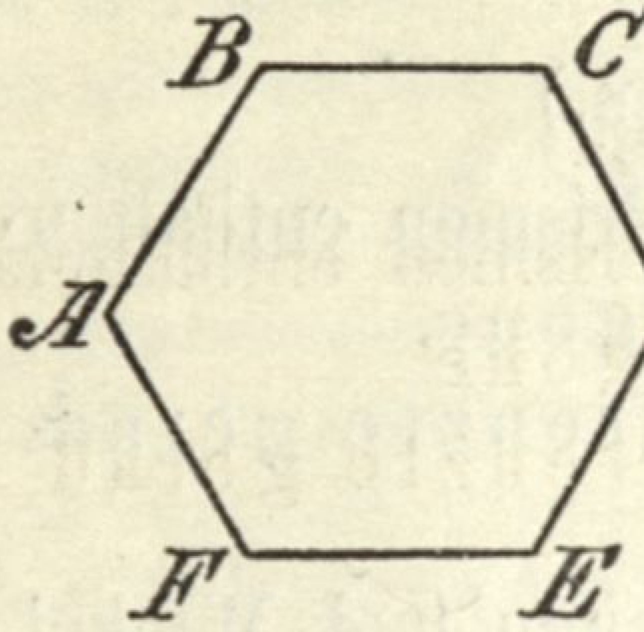


Fig. 63.

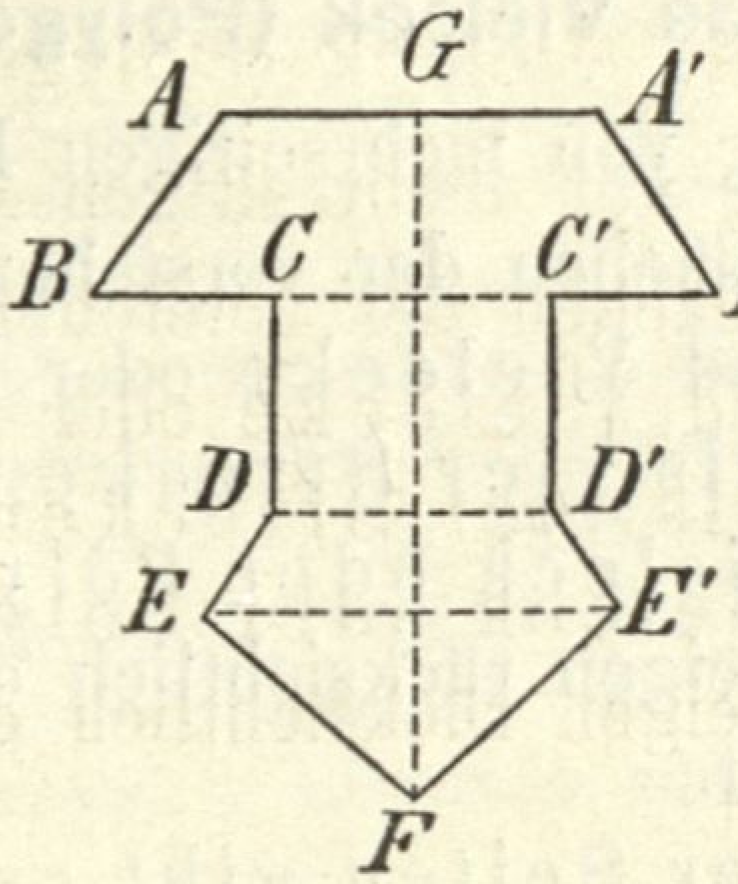
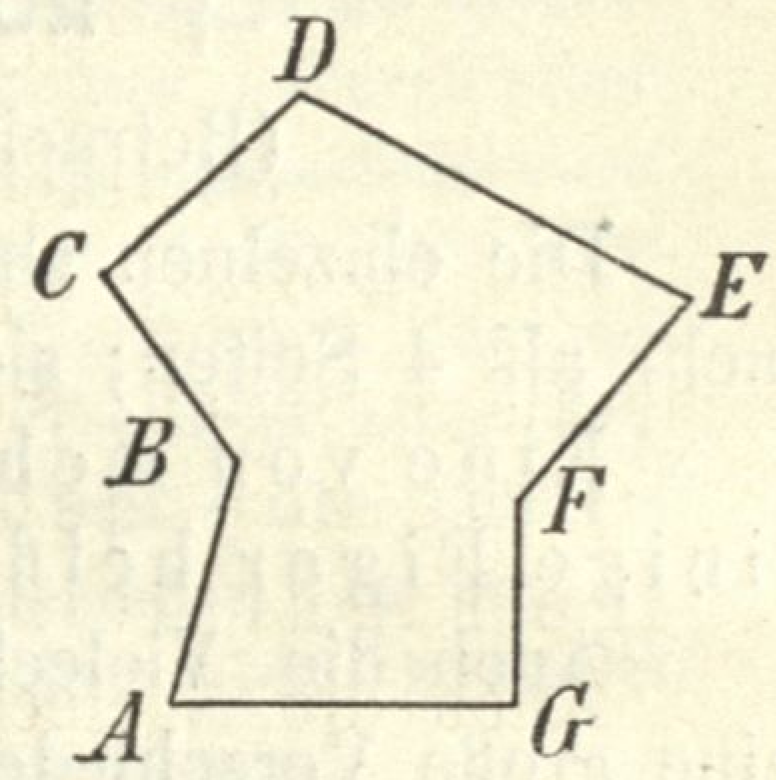


Fig. 64.



Ein Vieleck ist symmetrisch, wenn sich dasselbe durch eine Mittellinie in 2 kongruente Teile zerlegen läßt (Fig. 63).

Die Mittellinie FG heißt die Symmetrieachse oder auch Symmetrale.

Die Verbindungslinien je zweier gleichgelegenen Punkte stehen auf der Symmetralen senkrecht. So sind die Geraden AA', BB', CC', DD' und EE' senkrecht oder normal gegen die Symmetrale FG gerichtet. Je 2 gleichgelegene Punkte (wie A und A') haben von der Symmetrieachse einen gleichen Abstand.

Ein Vieleck ist unregelmäßig, wenn nicht alle Seiten desselben die gleiche Länge und nicht alle Winkel dieselbe Größe besitzen (Fig. 64).

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt und dann dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiert. So beträgt

ein Winkel des regelmäßigen Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

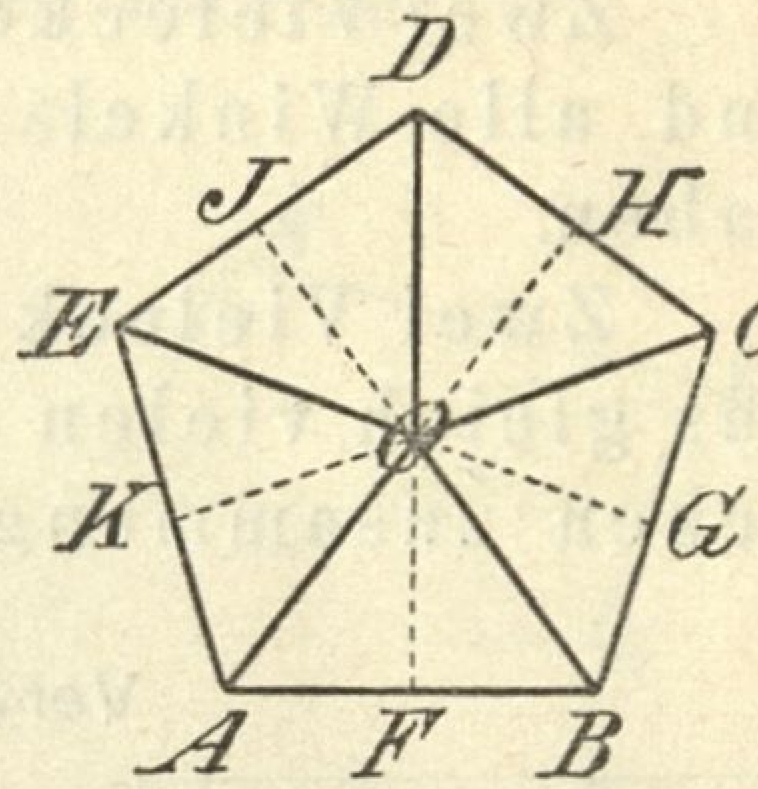
" " " " Sechseckes . . $\frac{720^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

Suche auf gleiche Weise den Winkel für das regelmäßige Achteck, Neuneck und Zehneck!

Es sei das Vieleck $ABCDE$ (Fig. 65) regelmäßig, also $AB = BC = CD = DE = EA$, und $\angle A = B = C = D = E$.

Halbiert man zwei Winkel A und B, die an einer Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck ABO. Zieht man von dem Scheitel O desselben zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD und OE, so wird dadurch das Vieleck in lauter kongruente gleichschenkelige Dreiecke geteilt; denn legt man das erste Dreieck ABO um die Seite OB, so deckt es das Dreieck BCO, dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden u. s. f. Die Strecken OA, OB, OC, . . . sind also einander gleich. Da kongruente gleichschenkelige Dreiecke auch gleiche Höhen haben, so sind auch die von O auf die Seiten gefällten Senkrechten OF, OG, OH, . . . einander gleich. Daraus folgt:

Fig. 65.



1. Halbiert man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Umfangswinkel und verbindet den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes durch Strecken, so wird dadurch das Vieleck in lauter kongruente gleichschenkelige Dreiecke geteilt.

2. In jedem regelmäßigen Vielecke gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

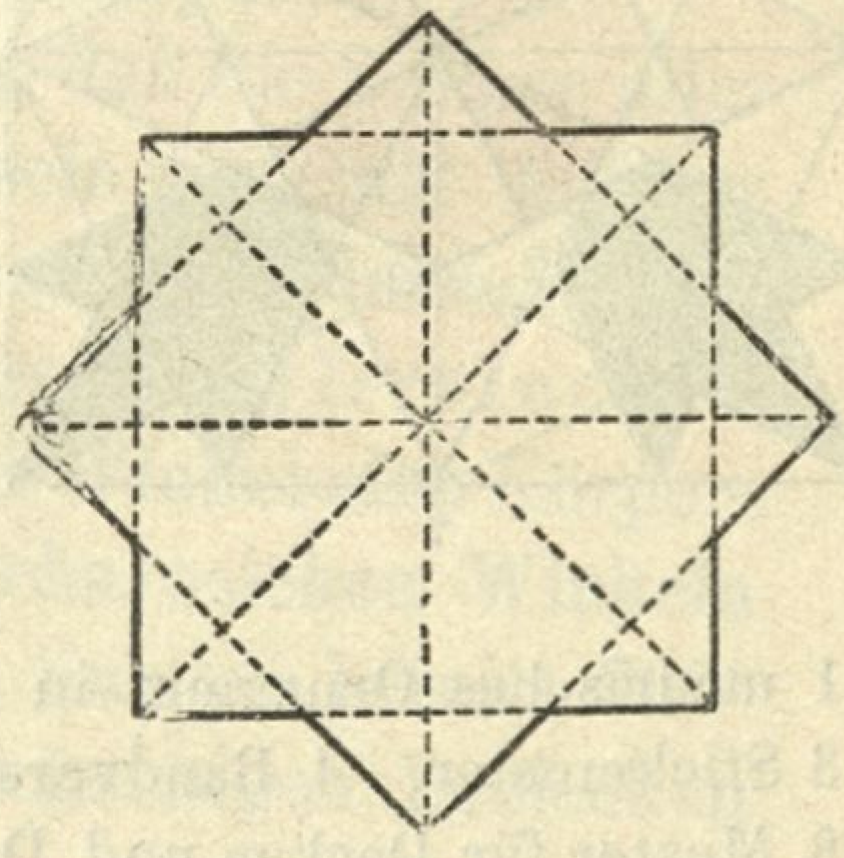
Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes. Man findet ihn, indem man zwei aufeinander folgende Vieleckswinkel halbiert.

Die kongruenten und gleichschenkeligen Dreiecke AOB, BOC, COD u. s. w., welche mit ihren Spitzen im Mittelpunkte zusammenstoßen, heißen auch Mittelpunktsdreiecke.

Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Man bestimme die Größe eines Vieleckswinkels, zeichne eine Strecke, welche der Seite des Vieleckes gleich ist, und trage in den Endpunkten derselben den Vieleckswinkel auf; von den neuen Schenkeln schneide man Stücke ab, welche der angenommenen Vielecksseite gleich sind, trage in den Endpunkten wieder den Vieleckswinkel auf und setze dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist. —

Fig. 66.

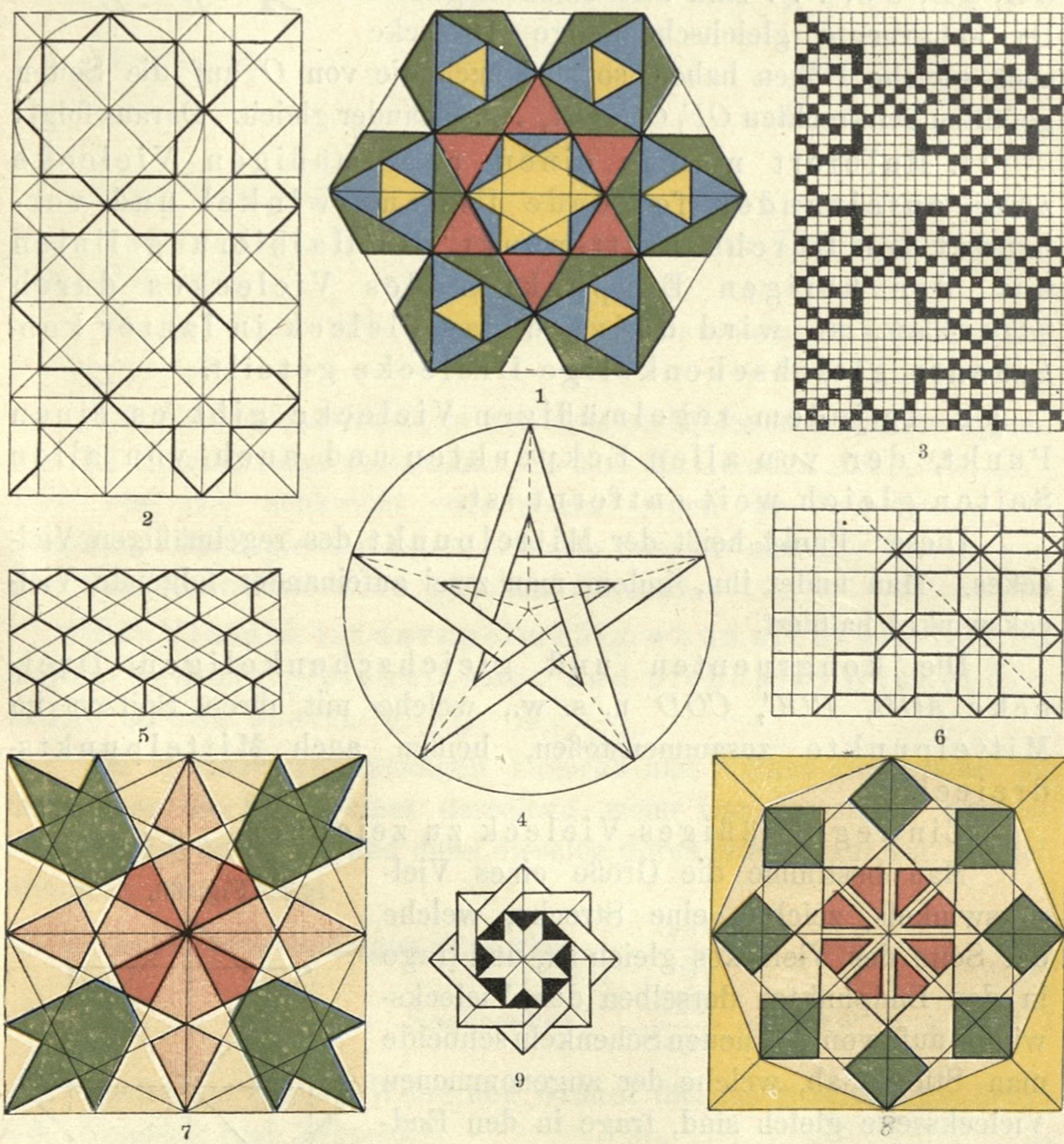


Schneiden sich 2 kongruente reguläre geradlinige Figuren so, daß die nicht gemeinsamen Flächenstücke als gleich große gleichschenkelige Dreiecke hervorragen, so erhält man ein Sternpolygon (Fig. 66).

Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke *ABCDEF* und *GHJKLM* (Fig. 66), welche aus gleich vielen der Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst kongruent.

Verwendungsbeispiele (Gruppe XI).

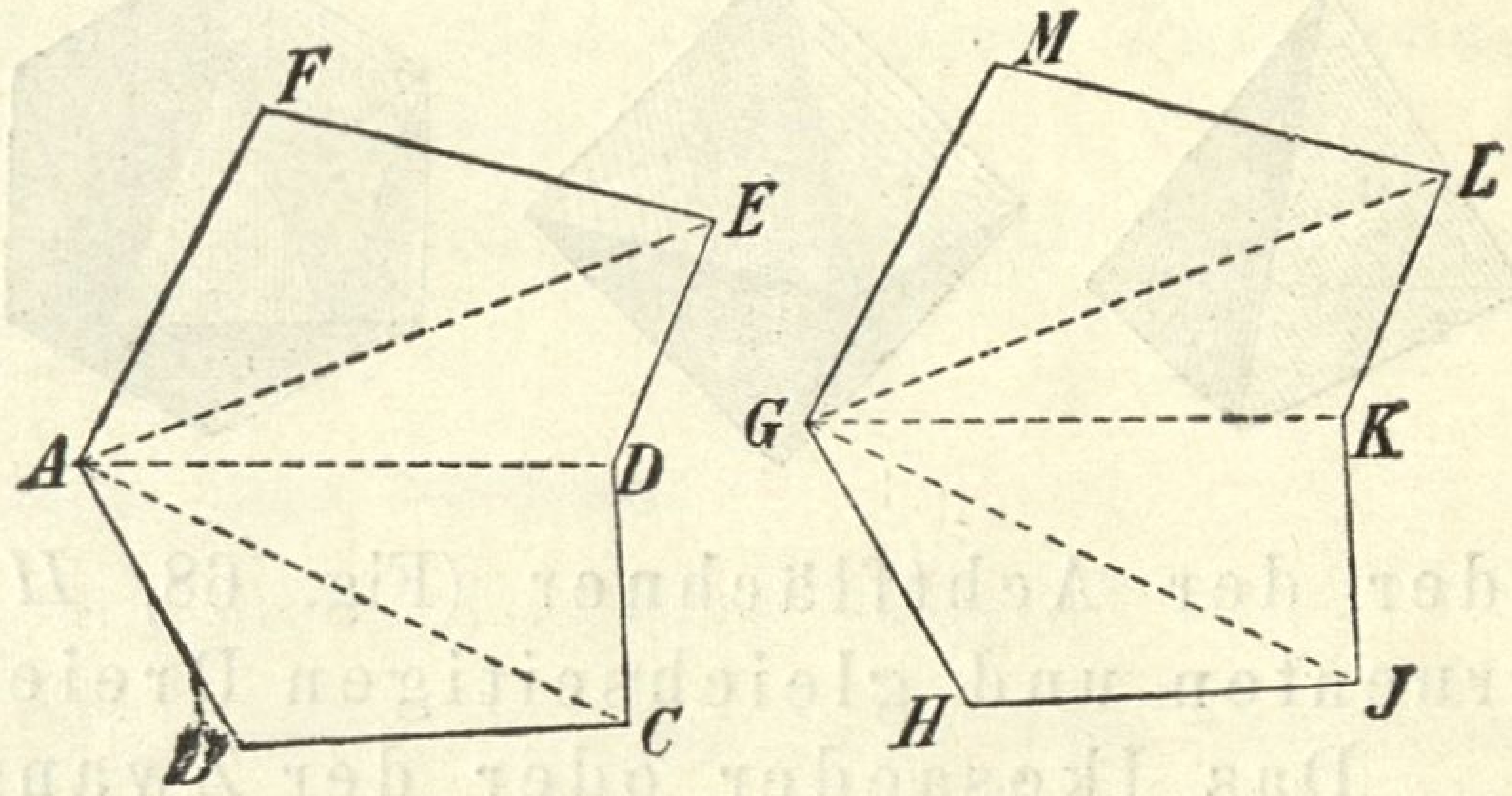


1 maurisches Ornament in modernen Farben. 2 Netz für maurische Ornamente. 3 Stickmuster. 4 Bandverschlingung. 5 und 6 Netze mit Stichmustern. 7 und 8 Muster für Decken und Deckchen. 9 Stern- und Bandverschlingung im Vieleck.

Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, daß zwei gleichliegende Dreiecke auf einander fallen, z. B. *ABC* auf *GHJ*, so muß auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, . . .; daher decken sich auch die ganzen Vielecke.

Ein Vieleck *ABCDEF* (Fig. 67) zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, welches mit dem Vielecke *ABCDEF* kongruent ist.

Fig. 67.



Man zerlege das gegebene Vieleck von *A* aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes kongruent sind. Die dadurch entstehende Figur *GHJKLM* ist mit der gegebenen kongruent. Es ist hier nicht nötig, die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

Aufgaben.

1. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck, Sechseck und Achteck!
2. Es ist ein symmetrisches Vieleck zu konstruieren!
3. Zeichne aus 2 kongruenten gleichseitigen Dreiecken das hier mögliche Sternpolygon!
4. Kopiere ein gegebenes Fünfeck, indem du dasselbe zuerst von einer Ecke aus durch Diagonalen in Dreiecke zerlegst!
5. Zeichne ein Sechseck, nimm innerhalb der Fläche desselben einen Punkt an und ziehe zu jeder Ecke eine Gerade! Das so zerlegte Sechseck ist zu kopieren.

21. Die regelmäßigen Körper.

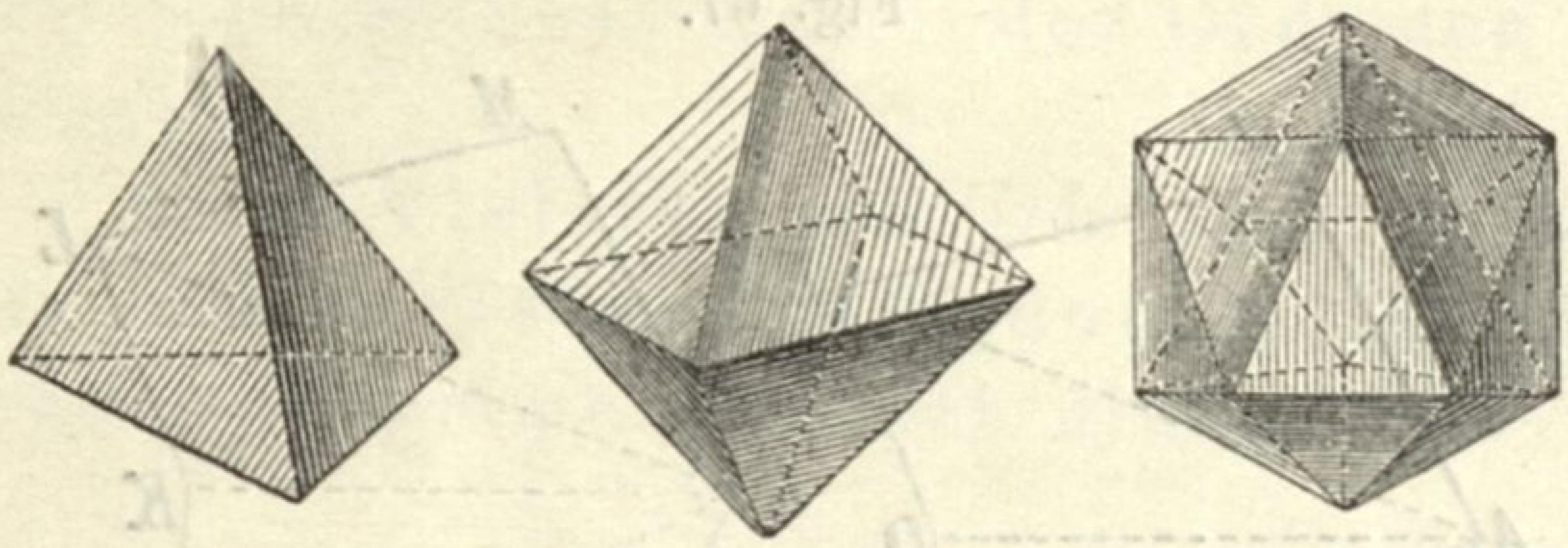
(Betrachtung der fünf regelmäßigen Körper.)

Wir wissen bereits aus dem Vorhergehenden, daß die Summe aller Kantenwinkel einer Körperecke kleiner als 360° sein muß und daß zur Bildung einer körperlichen Ecke mindestens 3 Ebenen erforderlich sind.

Da nun ein Winkel des regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes 60° mißt, so können drei, vier und auch fünf solcher Winkel eine Körperecke bilden; aus sechs oder aus mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da hier die Summe bereits 360° oder mehr als 360° betragen würde. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper gebildet werden, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder (Fig. 68).

Fig. 68.

I II III



Das Tetraeder oder der Vierflächner (Fig. 68, *I*) wird von 4 kongruenten und gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Das Oktaeder oder der Achtflächner (Fig. 68, *II*) wird von 8 kongruenten und gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Das Ikosaeder oder der Zwanzigflächner (Fig. 68, *III*) wird von 20 kongruenten und gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Jeder Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammentreffen; aus 4 oder mehr als 4 rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden, da ihre Summe bereits 360^0 oder mehr als 360^0 beträgt. Es gibt daher nur einen einzigen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt Würfel, Kubus, auch Hexaeder oder Sechsflächner.

Das Hexaeder, der Sechsflächner, Kubus oder Würfel (Fig. 69) wird von sechs kongruenten Quadraten eingeschlossen.

Fig. 69.

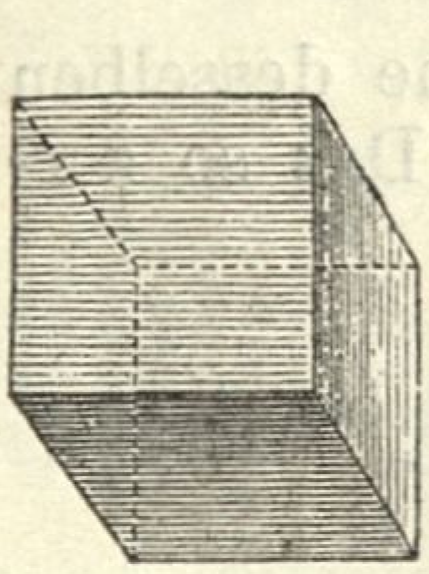
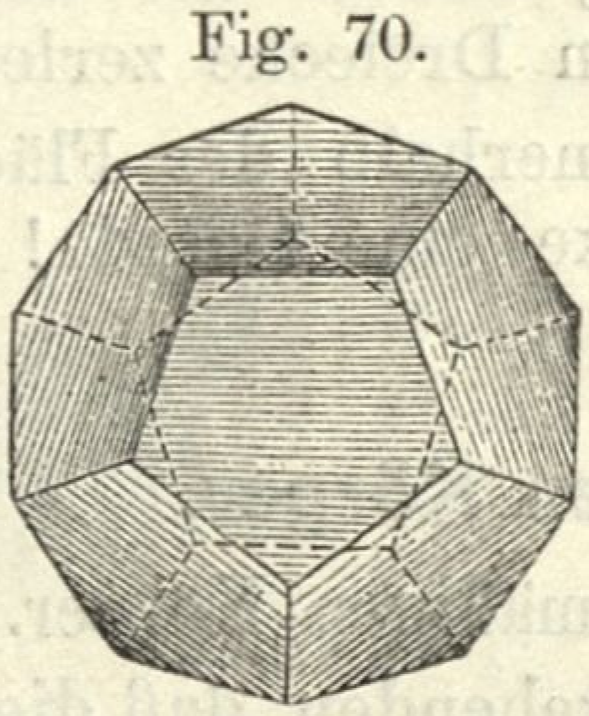


Fig. 70.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108^0; von solchen Winkeln können nur 3 eine Ecke bilden. Es gibt daher nur einen einzigen, von regelmäßigen Fünfecken begrenzten Körper, welcher Dodekaeder genannt wird.

Das Dodekaeder oder der Zwölfflächner (Fig. 70) wird von 12 kongruenten und regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel bereits 120^0. Von solchen Winkeln wie auch von den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten kann keine Ecke gebildet werden.

Es sind daher nur 5 Körper mit regelmäßigen geradlinigen Figuren möglich. Weil diese Körper nur von regelmäßigen Figuren eingeschlossen werden, nennt man sie regelmäßige Körper.

Regelmäßige Körper sind solche Körper, welche nur von regelmäßigen und kongruenten geradlinigen Figuren begrenzt werden. Es gibt 5 regelmäßige Körper; diese heißen: das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder, das Hexaeder und das Dodekaeder.

Wie viele Kanten und wie viele Ecken enthält jeder der 5 regelmäßigen Körper?

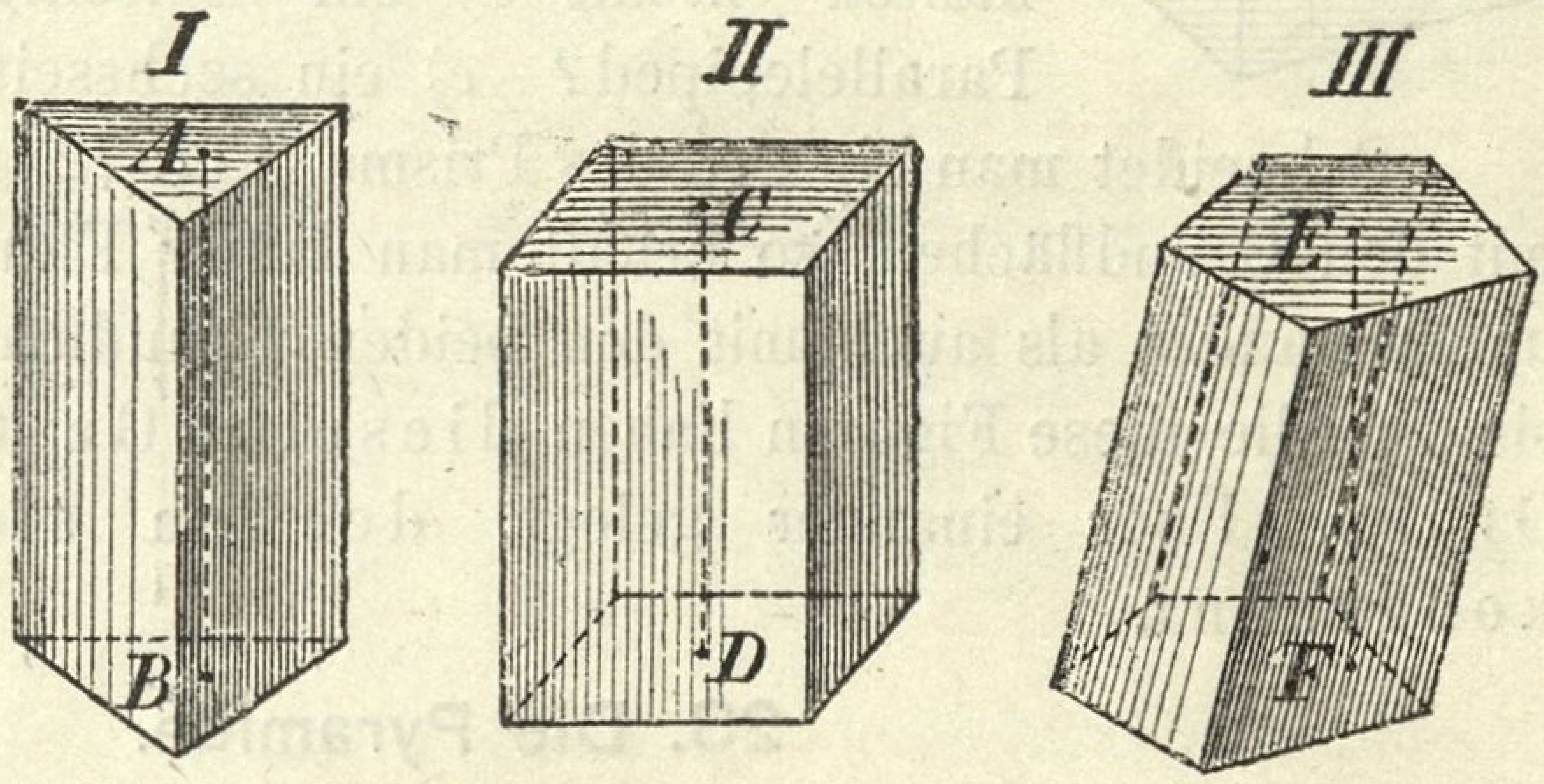
22. Das Prisma.

(Betrachtung gerader und schiefer Prismen.)

Jedes Prisma (Fig. 71) enhält (oben und unten) zwei kongruente und parallel gestellte geradlinige Figuren; man nennt sie Grundflächen. An den Seiten wird es von ebenso vielen Parallelogrammen begrenzt, als eine der Grundflächen Seiten hat; man heißt diese Flächen Seitenflächen.

Ein Prisma ist ein Körper, welcher von zwei parallelen und kongruenten geradlinigen Figuren als Grundflächen und an der Seite von so vielen Parallelogrammen eingeschlossen wird, als eine der Grundflächen Seiten hat.

Fig. 71.



Man kann sich ein Prisma dadurch entstanden denken, daß sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, daß ihre Eckpunkte gerade, mit einander parallele Linien beschreiben.

Alle Seitenflächen zusammen nennt man den Mantel und die Seitenflächen samt den beiden Grundflächen die Oberfläche des Prismas.

Jene Kanten, welche die Grundfläche begrenzen, heißen Grundkanten. Diejenigen Kanten, in welchen sich je 2 benachbarte Seitenflächen schneiden, werden Seitenkanten genannt.

Alle Seitenkanten eines Prismas sind gleich lang und zu einander parallel. (Warum?)

Mit Rücksicht auf die Zahl der Seitenflächen unterscheidet man drei-, vier und mehrseitige Prismen (Fig. 71).

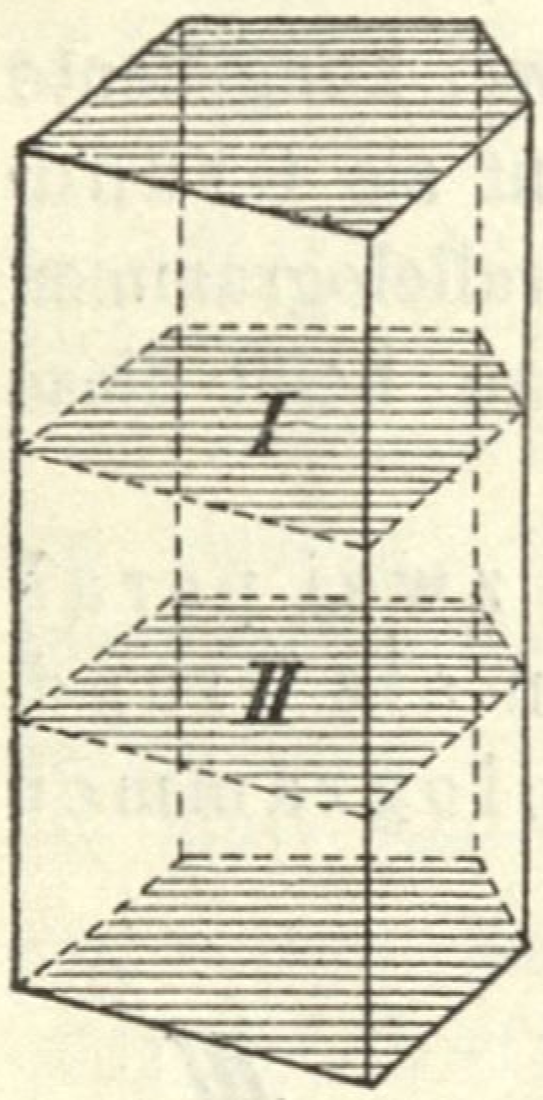
Die Seitenkanten stehen entweder auf der Grundfläche senkrecht (Fig. 70, I und II), oder sie sind zu ihr geneigt (Fig. 71, III).

In Hinsicht auf die Stellung der Seitenkanten unterscheidet man gerade (senkrechte) und schiefe Prismen.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas (Fig. 71, *AB*, *CD* und *EF*).

Bei jedem geraden Prisma stellt eine Seitenkante zugleich auch die Höhe vor.

Fig. 72.



Gerade Prismen, deren Grundflächen regelmäßige Figuren sind, heißen regelmäßige Prismen.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird nur von Parallelogrammen (u. zw. immer von 6 Parallelogrammen) eingeschlossen; es heißt darum auch Parallelepiped.

Beim Parallelepiped kann jede Seitenfläche als Grundfläche angesehen werden.

Der Würfel ist ein gerades Parallelepiped.

Wie viele Grundkanten und wie viele Seitenkanten enthält *a)* ein dreiseitiges Prisma? *b)* ein Parallelepiped? *c)* ein sechsseitiges Prisma?

Schneidet man ein gerades Prisma (Fig. 72) mehrmals parallel mit den Grundflächen, so erhält man lauter Figuren, welche sowohl untereinander als auch mit den beiden Grundflächen gleich groß sind. Alle diese Figuren haben dieselbe Gestalt und dieselbe Größe. Über einander gelegt, decken sie sich; sie sind kongruent.

23. Die Pyramide.

(Betrachtung von geraden und von schiefen Pyramiden.)

Jede Pyramide (Fig. 73) enthält bloß eine Grundfläche. Außerdem wird sie noch von so vielen Dreiecken (als Seitenflächen) begrenzt, als die Grundfläche Seiten hat. Diese Dreiecke laufen in einem Punkte, der Spitze, zusammen.

Eine Pyramide ist ein Körper, der von einer geradlinigen Figur als Grundfläche und an der Seite von ebenso vielen sich in einer Spitze vereinigenden Dreiecken eingeschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat.

Man kann sich eine Pyramide dadurch entstanden denken, daß sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel, in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, daß ihre Endpunkte gerade, in einer Spitze zusammentreffende Linien beschreiben.

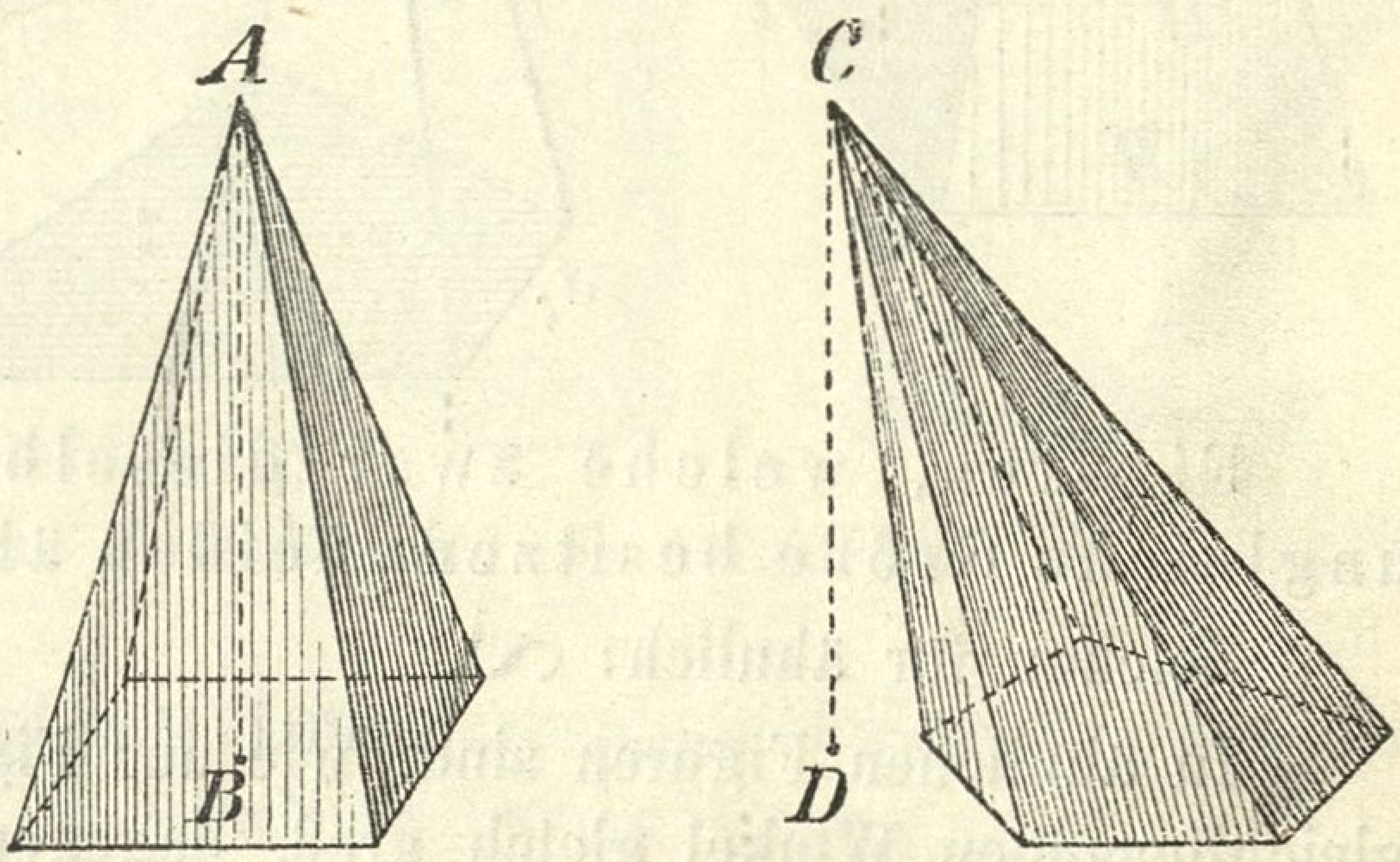
Alle Seitenflächen zusammen nennt man den Mantel und die Seitenflächen samt der Grundfläche die Oberfläche der Pyramide.

Jene Kanten, welche die Grundfläche einschließen, heißen Grundkanten. Diejenigen Kanten, in welchen sich je 2 benachbarte Seitenflächen treffen, werden Seitenkanten genannt.

Mit Rücksicht auf die Zahl der Seitenflächen gibt es drei-, vier- und mehrseitige Pyramiden.

In einer dreiseitigen Pyramide kann jede Seitenfläche auch als Grundfläche angenommen werden.

Fig. 73.



Eine Pyramide, bei welcher alle Seitenkanten gleich lang sind, heißt gerade; ist dieses nicht der Fall, so heißt die Pyramide schief.

Nach der Länge der Seitenkanten gibt es gerade und schiefe Pyramiden.

Der Abstand zwischen Grundfläche und Spitze der Pyramide wird ihre Höhe genannt (Fig. 73, *AB* und *CD*).

Gerade Pyramiden, deren Grundflächen regelmäßige Figuren sind, heißen regelmäßige Pyramiden.

Das Tetraeder ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide.

Das Oktaeder ist eine quadratische Doppelpyramide.

Wie viele Grundkanten und wie viele Seitenkanten enthält *a)* eine dreiseitige Pyramide? *b)* eine vierseitige Pyramide? *c)* eine fünfseitige Pyramide?

24. Ähnlichkeit.

Schneidet man eine Pyramide parallel zur Grundfläche, so erhält man zwei Teile: eine kleinere Pyramide (Fig. 74, I) und den Pyramidenstumpf oder die abgekürzte Pyramide (Fig. 74, II).

Betrachtet man nun die Schnittfläche *(abcd)*, so sieht man, daß sie zwar mit der Grundfläche *(ABCD)* dieselbe Gestalt oder Form, aber nicht dieselbe Größe hat.

Fig. 74.

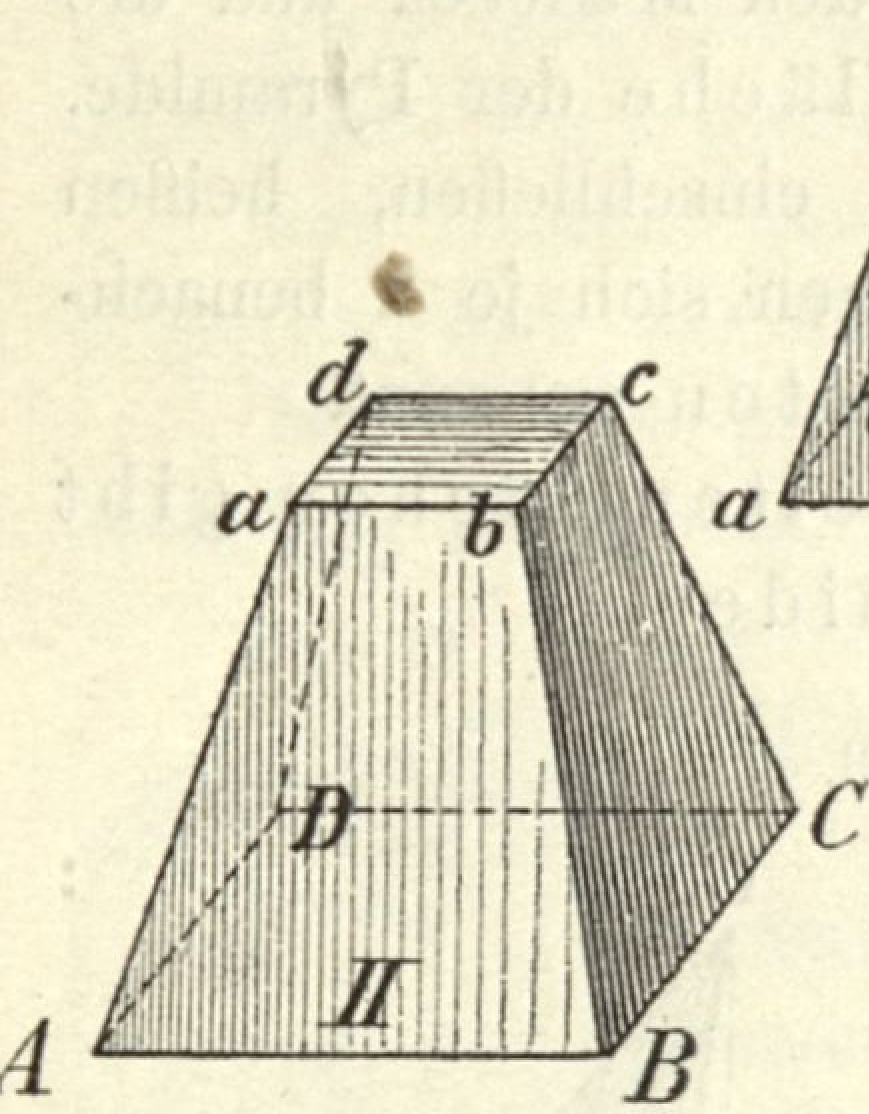
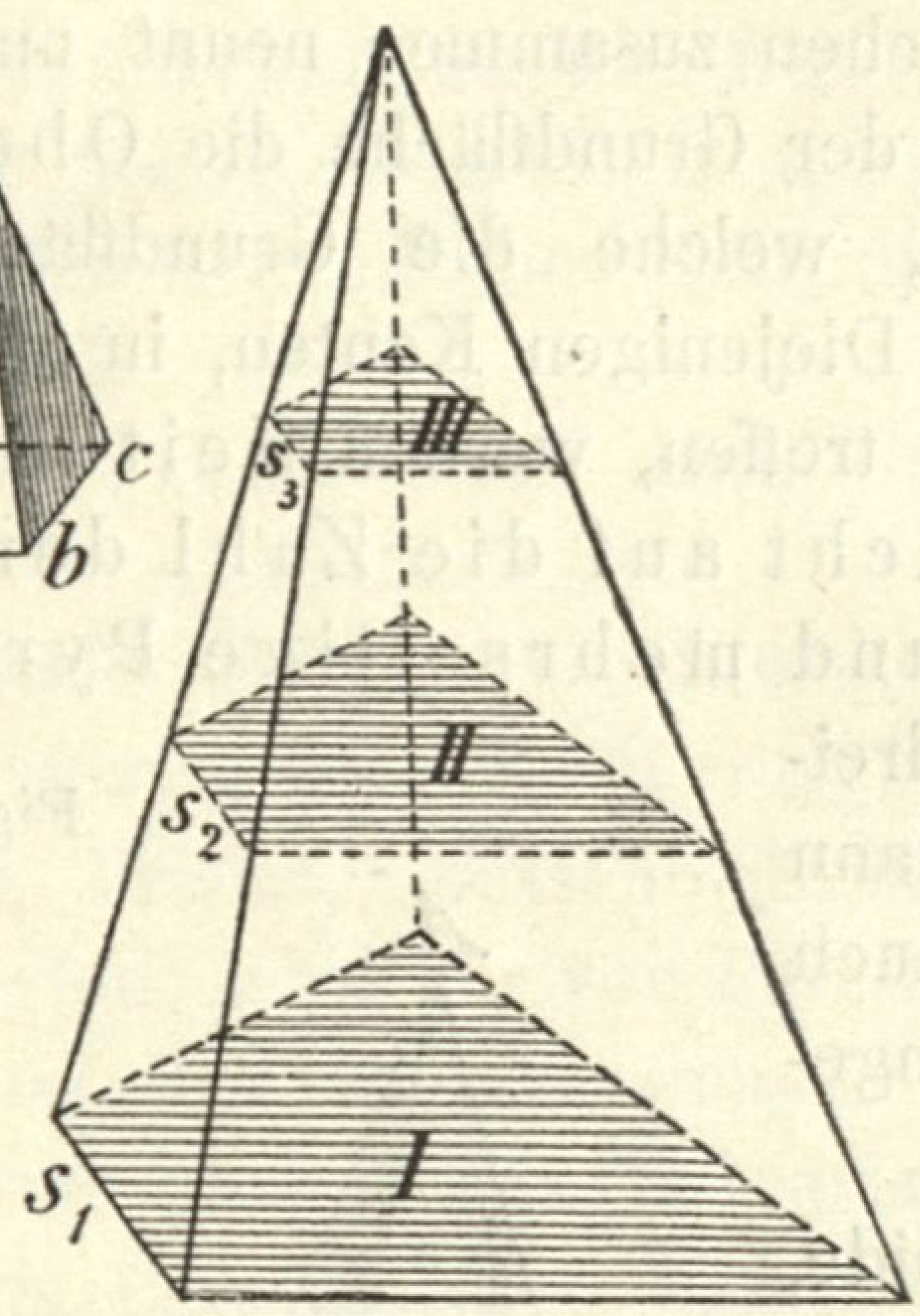


Fig. 75.



Nimmt man bei einer Pyramide den parallelen Schnitt mehrmals an verschiedenen Stellen vor, so ist leicht einzusehen, daß derselbe um so kleinere Figuren gibt, je weiter er gegen die Spitze der Pyramide geschieht (Fig. 75).

Figuren, welche zwar dieselbe Form, aber eine ungleiche Größe besitzen, heißen ähnlich.

Zeichen für ähnlich: ∾.

In ähnlichen Figuren sind, wie aus Fig. 75 ersichtlich ist, die gleichliegenden Winkel gleich groß, dagegen nimmt die Größe der Seiten in einem bestimmten Verhältnisse ab. Hätte man beispielsweise die Höhe der Pyramide in 3 gleiche Teile zerlegt und durch jeden Teilpunkt einen parallelen Schnitt zur Grundfläche vorgenommen, so wäre die Seite s_3 der Schnittfigur III gleich einem Drittel der Seite s_1 der Grundfläche, dagegen die Seite s_2 der Schnittfigur II gleich zwei Dritteln der Seite s_1.

In welchem Verhältnisse würden die einzelnen Seiten der Schnittflächen zu den gleichgelegenen Seiten der Grundfläche stehen, wenn man eine Pyramide in jedem Fünftel ihrer Höhe parallel zur Basis geschnitten hätte?

25. Der Zylinder.

(Betrachtung eines geraden und eines schiefen Zylinders.)

Ein Zylinder ist ein Körper, welcher von zwei kongruenten und parallelen krummlinigen Figuren als Grundflächen und von einer einseitig gekrümmten Fläche als Mantelfläche eingeschlossen wird.

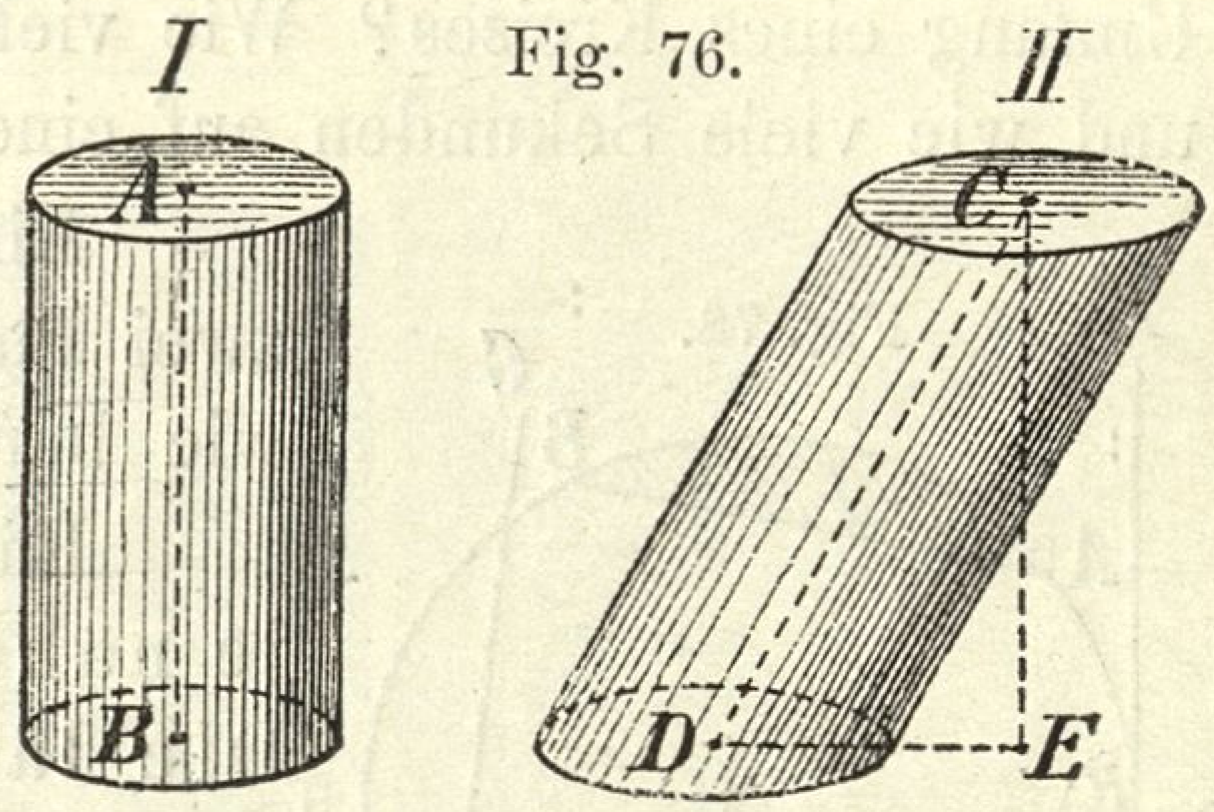
Am häufigsten sind jene Zylinder, deren Grundflächen Kreise sind; man nennt sie Kreiszylinder oder auch Zylinder schlechtweg. Wir wollen im folgenden nur Kreiszylinder voraussetzen.

Man kann sich einen Zylinder dadurch entstanden denken, daß sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer ursprünglichen Lage parallel, in unveränderter Größe so fortbewegt, daß der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt.

Die gekrümmte Seitenfläche des Zylinders heißt der Mantel desselben.

Jede gerade Linie, welche auf der Mantelfläche von der obern zu der untern Grundfläche gezogen wird, heißt Mantellinie oder Seite des Zylinders.

Fig. 76.



Die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Kreisflächen verbindet, wird die Achse des Zylinders genannt. Z. B. *AB* und *CD* (Fig. 76).

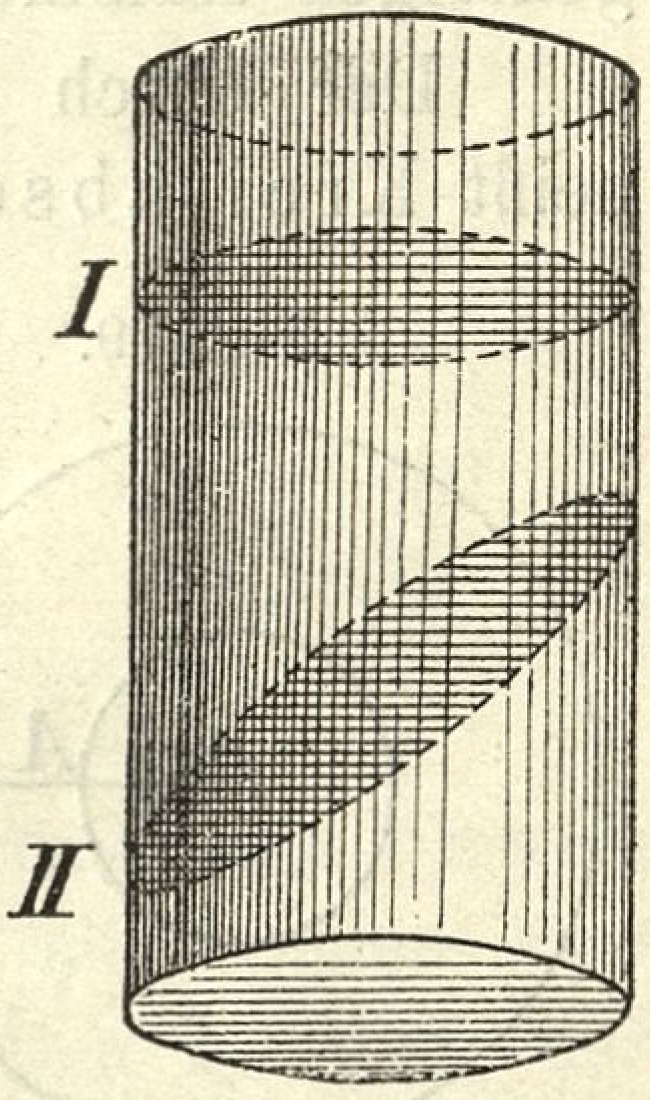
Unter Höhe versteht man den Abstand der beiden Kreisflächen von einander. Z. B. *AB* und *CE* (Fig. 76).

Steht die Achse auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Zylinder ein gerader, sonst ein schiefer.

Es gibt gerade und schiefe Zylinder (Fig. 76, I und II).

Beim geraden Zylinder fallen Achse und Höhe zusammen; beim schiefen Zylinder ist dies nicht der Fall.

Fig. 77.



Ist bei einem geraden Zylinder die Achse gerade so groß wie der Durchmesser der Grundfläche, so heißt er ein gleichseitiger Zylinder.

Einen geraden Zylinder kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Rechteck um eine seiner Seiten herumdreht; er ist ein Umdrehungskörper.

Schneidet man einen geraden Zylinder (Fig. 77) parallel zur Grundfläche, oder, was dasselbe ist, senkrecht gegen die Achse, so erhält man stets einen Kreis (I).

Alle auf diese Weise erhaltenen Kreise sind untereinander kongruent. (Siehe Seite 50.)

Erfolgt der Schnitt schräg gegen die Achse, so bekommt man eine Ellipse (II).

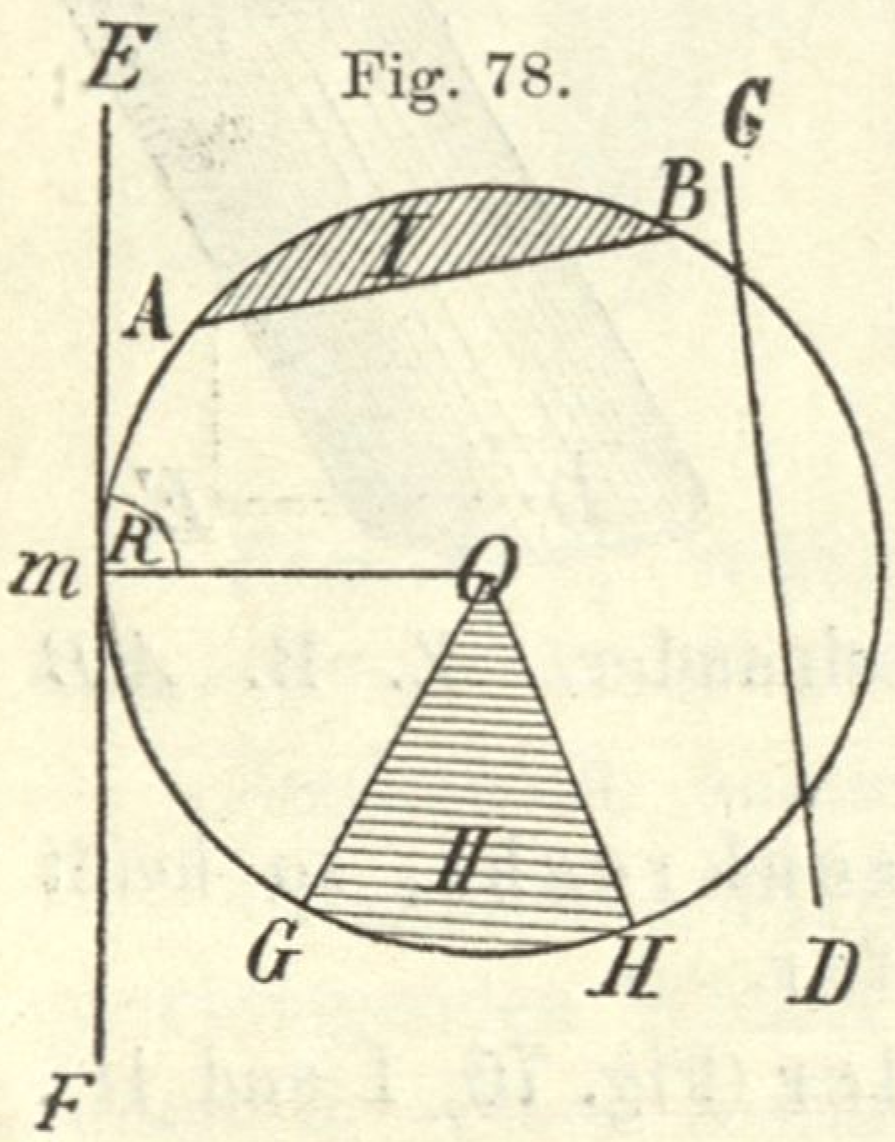
Beide Schnittfiguren erhält man auch in der freien Oberfläche einer Flüssigkeit, welche man in ein zylindrisches Glasgefäß gießt; bei gewöhnlicher Stellung des Gefäßes bildet die freie Oberfläche einen Kreis, wird dasselbe aber geneigt, so erhält man eine Ellipse.

26. Nähere Betrachtung des Kreises.

(Siehe Seite 8.)

Was ist ein Kreis? Was versteht man unter Kreislinie, was unter Kreisfläche? Was ist ein Halbmesser oder Radius? Was ist ein Durchmesser oder Diameter? Wie viele Bogengrade enthält der Umfang eines Kreises? Wie viele Minuten kommen auf einen Grad und wie viele Sekunden auf eine Minute?

Fig. 78.



Eine Strecke AB (Fig. 78), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt, wie bereits früher gesagt wurde, Sehne.

Eine Sehne ist um so größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt. Die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht; das ist der Durchmesser.

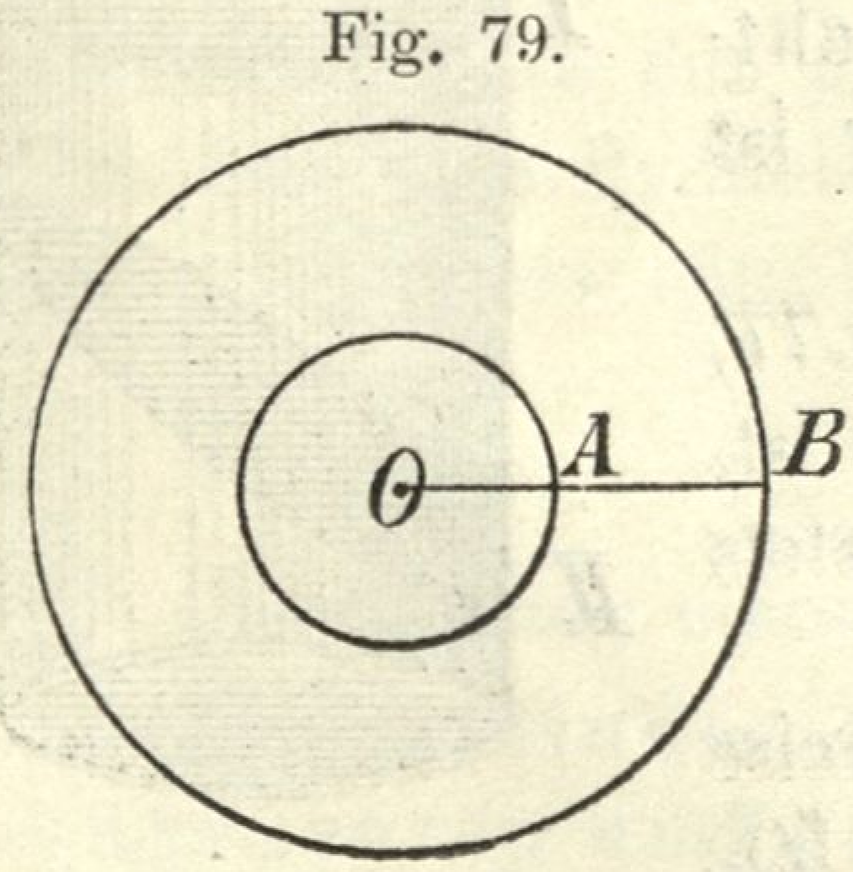
Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne entsteht, heißt eine Sekante.

Eine Gerade EF, welche den Kreis in einem Punkte (m) berührt, heißt Berührungslinie oder Tangente.

Welchen Winkel bildet eine Tangente (EF) mit dem dazugehörigen Halbmesser (mO)?

Der durch eine Sehne abgeschnittene Teil eines Kreises (I) heißt Kreisabschnitt oder Kreissegment.

Fig. 79.



Ein Teil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen eingeschlossen wird, heißt Kreisausschnitt oder Kreissektor (II).

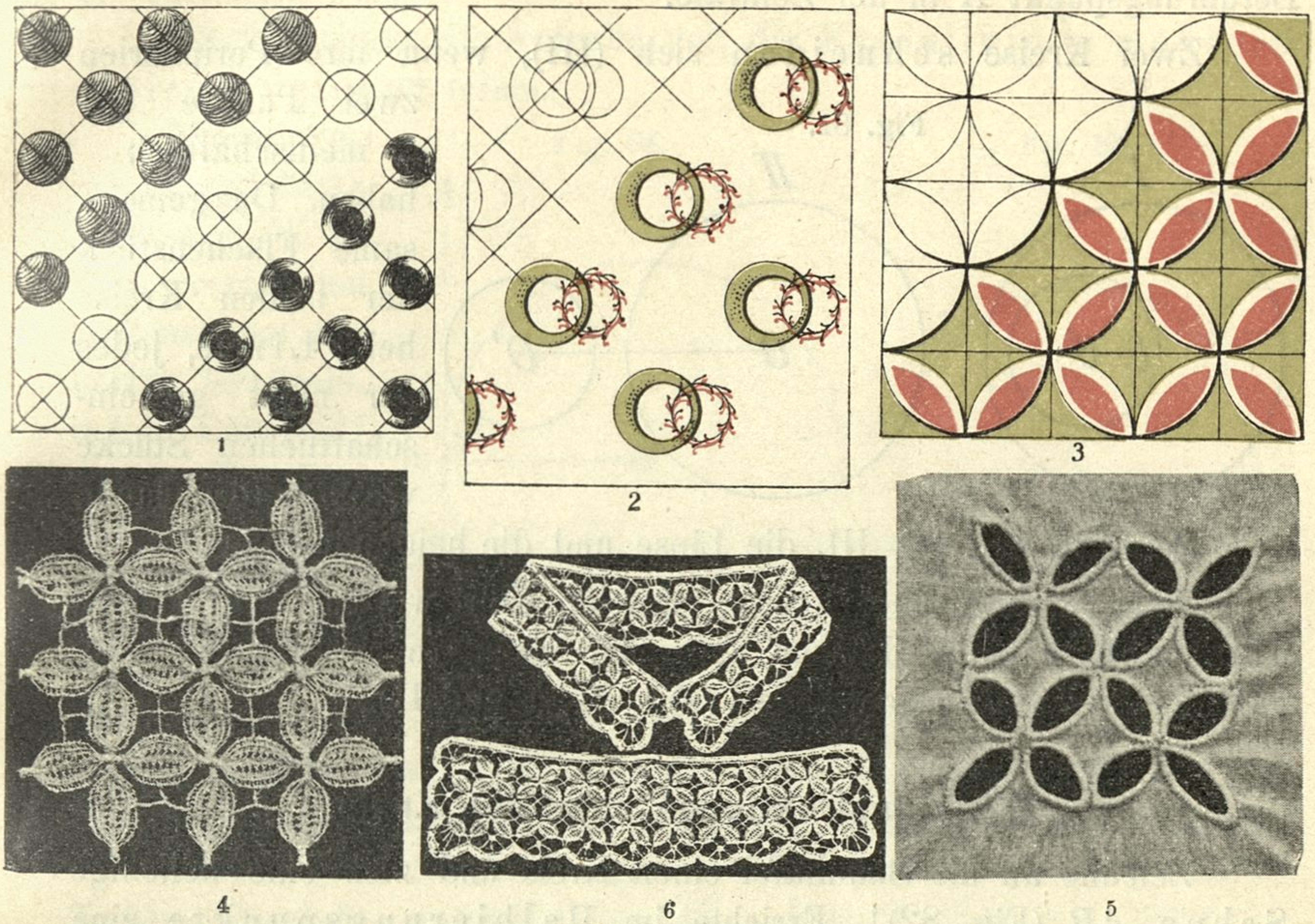
Zwei Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen konzentrische Kreise (Fig. 79).

Die zwischen den beiden Kreisen liegende Fläche heißt Kreisring.

AB wird die Breite des Kreisringes genannt.

Wo finden sich konzentrische Kreise vor?

Verwendungsbeispiele (Gruppe XII).

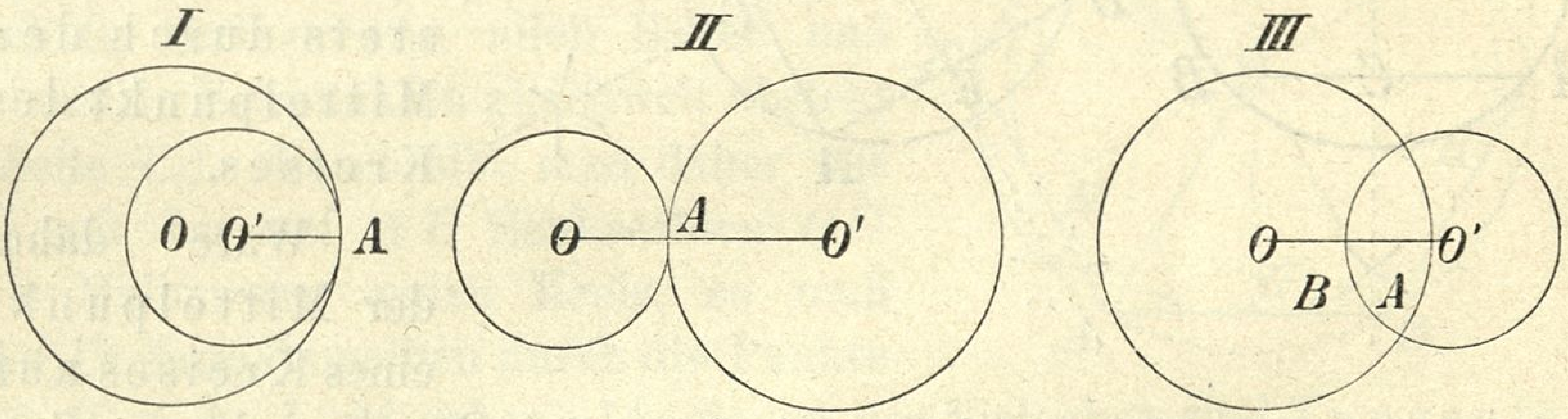


1 Verwendung des Kreises in der Weißstickerei. 2 Stickmuster auf Seide. 3 in allen Stilarten verwendete Kreisverschlingung. 4 und 5 praktische Verwertung derselben für Handarbeiten. 6 aus der Gartenlaube (August 1901).

Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen e x z e n t r i s c h e K r e i s e (Fig. 80 u. 81).

Jene Gerade, welche die Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise verbindet, heißt die Z e n t r a l e der beiden Kreise.

Fig. 80.

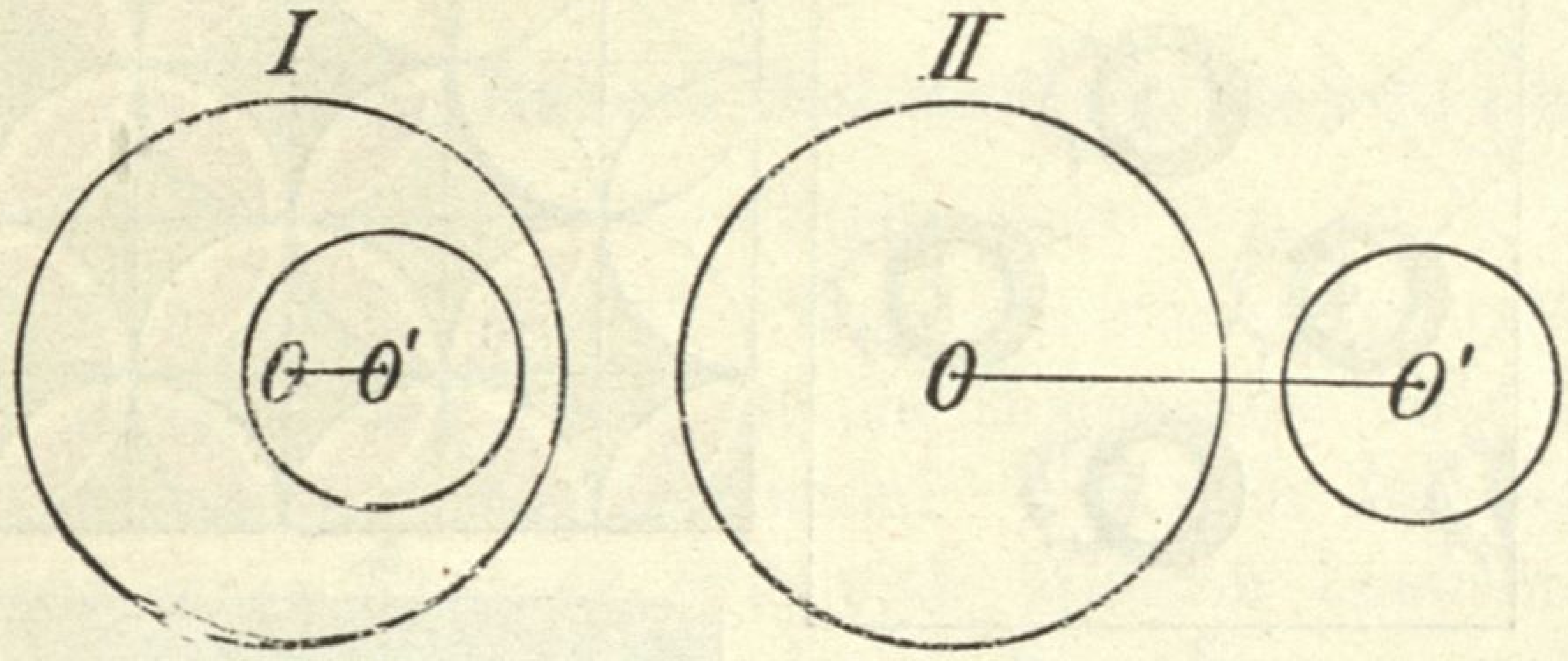


Zwei exzentrische Kreise können sich entweder von i n n e n oder a u ß e n berühren (Fig. 80, I und II), oder sie können sich s c h n e i d e n (Fig. 80, III), oder es ist k e i n e s v o n b e i d e n der Fall (Fig. 81).

Bei der i n n e r e n B e r ü h r u n g (I) ist die Zentrale gleich der Differenz der beiden Halbmesser; bei der ä u ß e r n B e r ü h r u n g (II) ist die Zentrale gleich deren Summe. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt *A* in der Zentrale.

Zwei Kreise schneiden sich (III), wenn ihre Peripherien zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinsame Flächenstück der beiden Kreise heißt Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke wird Mond genannt.

Fig. 81.



Zeige in Fig. 80, III, die Linse und die beiden Monde!

Zwei exzentrische Kreise, welche sich weder berühren noch schneiden, können entweder ganz in einander oder ganz außer einander liegen (Fig. 81, I und II).

27. Konstruktionen über den Kreis.

Zeichne an die Schultafel einen Kreis und zieh eine beliebige Sehne *AB* (Fig. 82)! Errichte im Halbierungspunkte eine Senkrechte *Cx*! Diese Linie geht durch den Mittelpunkt des Kreises *O*. (Warum?)

Fig. 82.

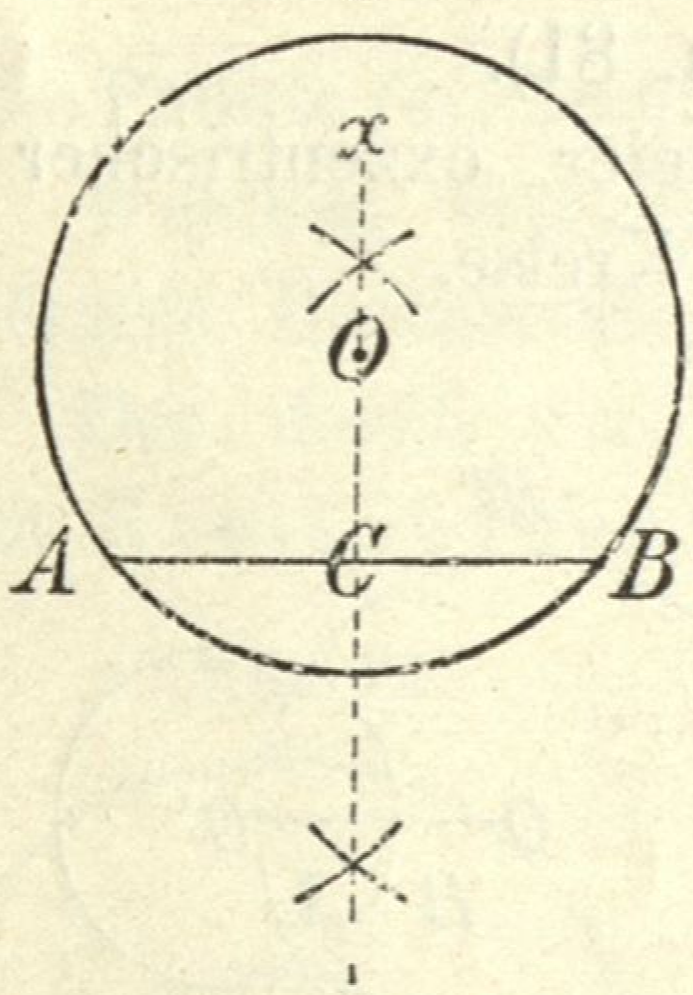
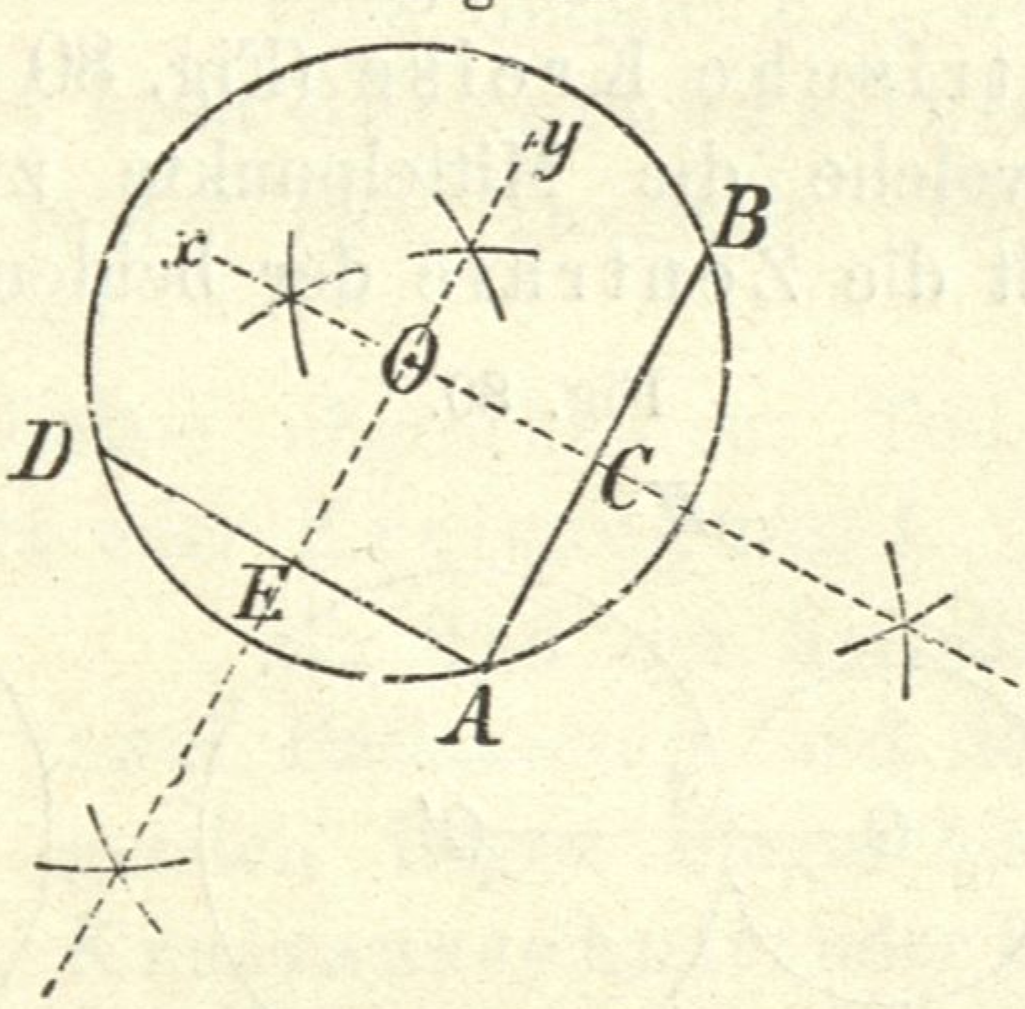


Fig. 83.



Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Sehne eines Kreises errichtet, geht stets durch den Mittelpunkt des Kreises.

Wäre daher der Mittelpunkt eines Kreises aufzusuchen (Fig. 83), so ziehe man in demselben 2 zu einander geneigte Sehnen (*AB* und *AD*) und errichte auf diese in ihren Halbierungspunkten (*C* und *E*) zwei Senkrechte (*Cx* und *Ey*); der Durchschnittspunkt (*O*) dieser Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt.

Soll zu einem Punkte *m* (Fig. 84) eine Tangente konstruiert werden, so zeichne man erst den dazu gehörigen Halbmesser *mO* und errichte auf denselben in m eine Senkrechte AB; letztere stellt die verlangte Tangente vor.

Häufig kommt die Aufgabe vor, die Kreislinie in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Fig. 84.

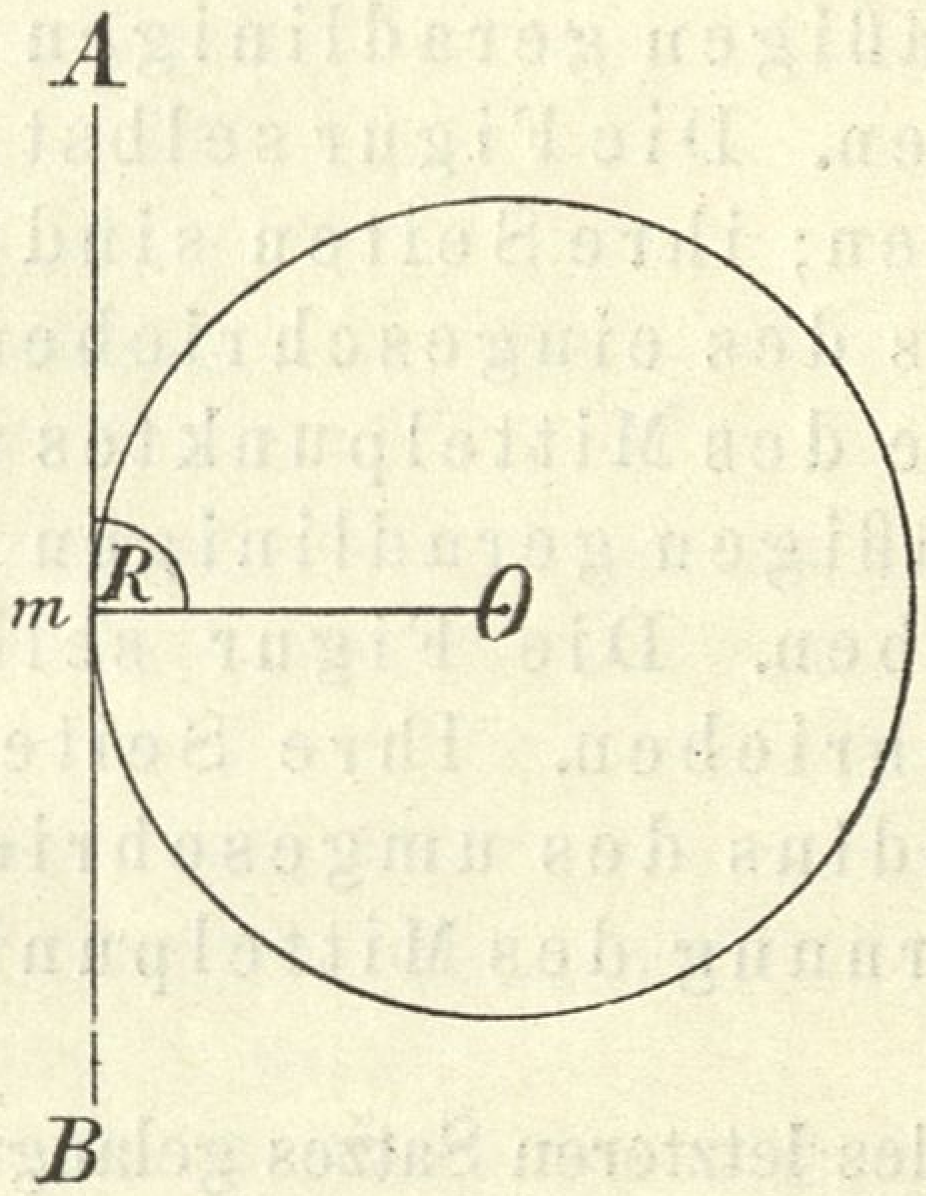
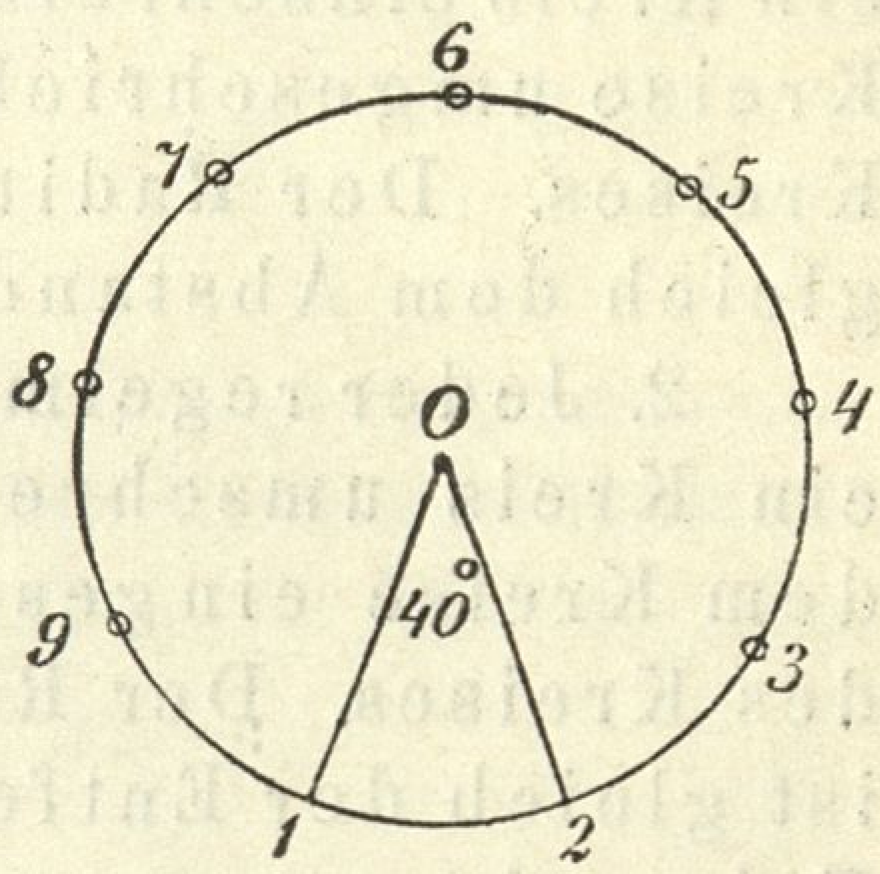


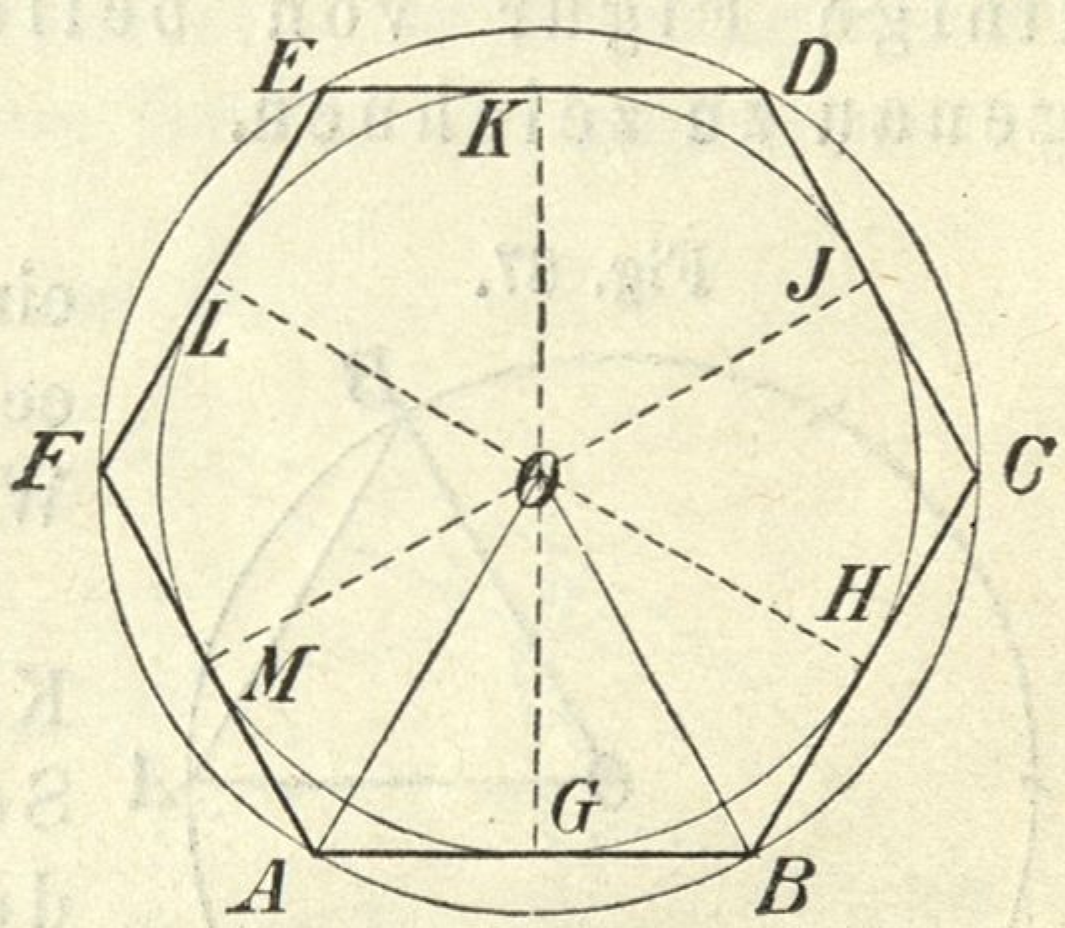
Fig. 85.



Man bestimme vorerst durch Rechnung die zu dem verlangten Bogenstücke gehörige Gradzahl, indem man 360° durch die Zahl der verlangten Teile dividiert, konstruiere mit Hilfe des Transporteurs den dazu gehörigen Winkel am Mittelpunkte (Zentriwinkel) und trage den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bogen in der Peripherie gehörig auf.

Gesetzt, es soll die Peripherie eines Kreises in 9 gleiche Teile eingeteilt werden (Fig. 85). Der 9. Teil von 360° ist gleich 40°. Nun zeichne man mittelst des Transporteurs am Mittelpunkte O einen Winkel von 40°; der zwischen 1 und 2 liegende Bogen läßt sich gerade 9mal auf der Peripherie auftragen.

Fig. 86.



Es sei (Fig. 86) ein regelmäßiges Vieleck gegeben. Halbiert man zwei benachbarte Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbierungslinien die Eigenschaft, daß er von allen Seiten und von allen Eckpunkten gleichweit absteht (Seite 45). Beschreibt man daher aus O mit der auf AB Senkrechten OG als Halbmesser einen Kreis, so muß der Umfang desselben durch die Punkte G, H, J, K, L, M gehen. Die Seiten des Vieleckes sind Tangenten zu diesem Kreise. Wir sagen: Der Kreis ist dem Vielecke eingeschrieben, oder das Vieleck ist dem Kreise umgeschrieben.

Beschreibt man ebenso aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO einen Kreis, so muß derselbe durch alle Eckpunkte A,

B, C, D, E, F gehen. Die Seiten des Vieleckes sind Sehnen zu diesem Kreise. Wir sagen: Der Kreis ist dem Vielecke umgeschrieben, oder das Vieleck ist dem Kreise eingeschrieben.

Hieraus folgt:

1. Jeder regelmäßigen geradlinigen Figur läßt sich ein Kreis einschreiben. Die Figur selbst heißt dann dem Kreise umgeschrieben; ihre Seiten sind Tangenten des Kreises. Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist gleich dem Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

2. Jeder regelmäßigen geradlinigen Figur läßt sich ein Kreis umschreiben. Die Figur selbst heißt dann dem Kreise eingeschrieben. Ihre Seiten sind Sehnen des Kreises. Der Radius des umgeschriebenen Kreises ist gleich der Entfernung des Mittelpunktes von einem Eckpunkte.

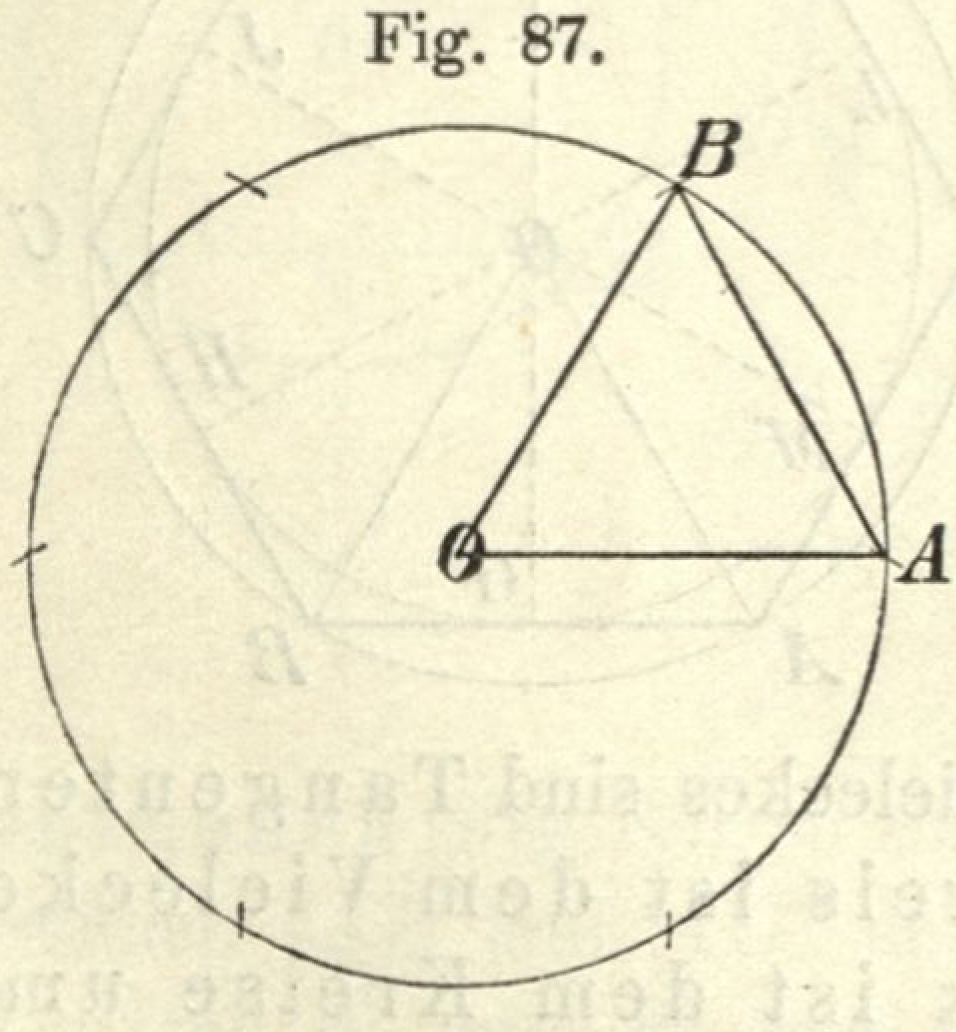
Durch Umkehrung des letzteren Satzes gelangt man zu folgendem für das geometrische Zeichnen sehr wichtigen Satze:

Teilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Teile und zieht durch je zwei auf einander folgende Teilpunkte die entsprechende Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

Würde man daher in Fig. 85 je 2 benachbarte Teilpunkte durch Sehnen verbinden, so bekäme man ein regelmäßiges Neuneck.

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, eine regelmäßige geradlinige Figur von beliebiger Seitenzahl vollständig genau zu zeichnen.

Fig. 87.



Es sei (Fig. 87) O der Mittelpunkt eines Kreises und $AB = AO$. Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60°.

Schneidet man also in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen ab, so beträgt der dazu gehörige Zentriwinkel 60°, und der Bogen selbst ist der sechste Teil der Peripherie.

Hieraus folgt:

Der Halbmesser eines Kreises läßt sich auf dem Umfange desselben genau sechsmal als Sehne auftragen. (Fig. 88.)

Fig. 88.

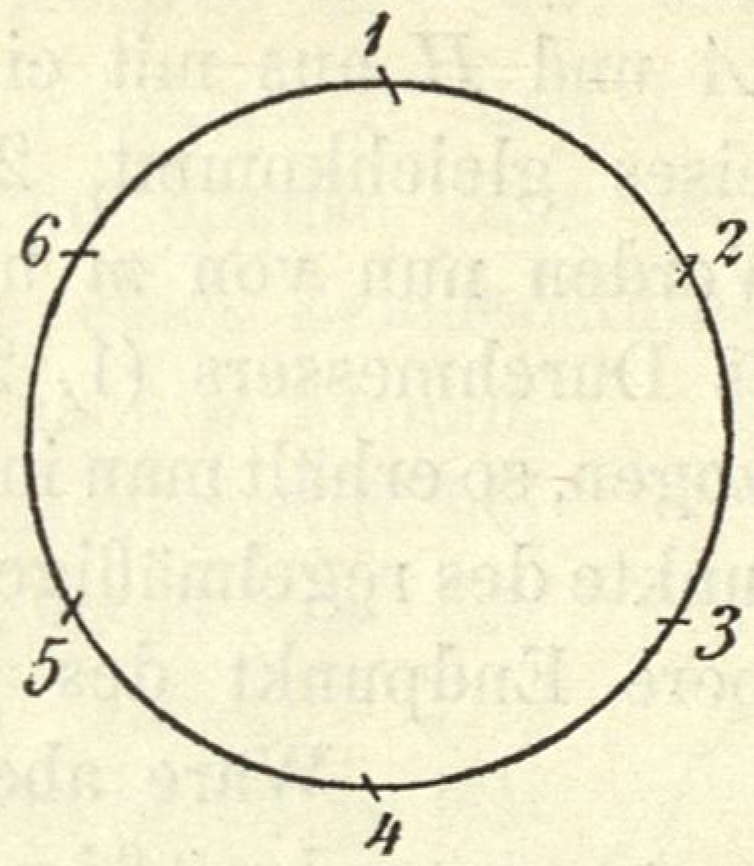
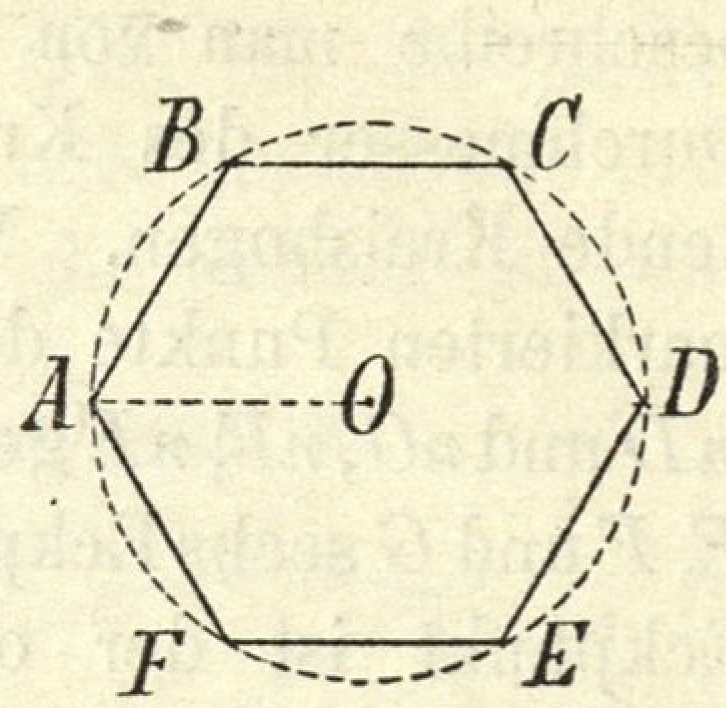


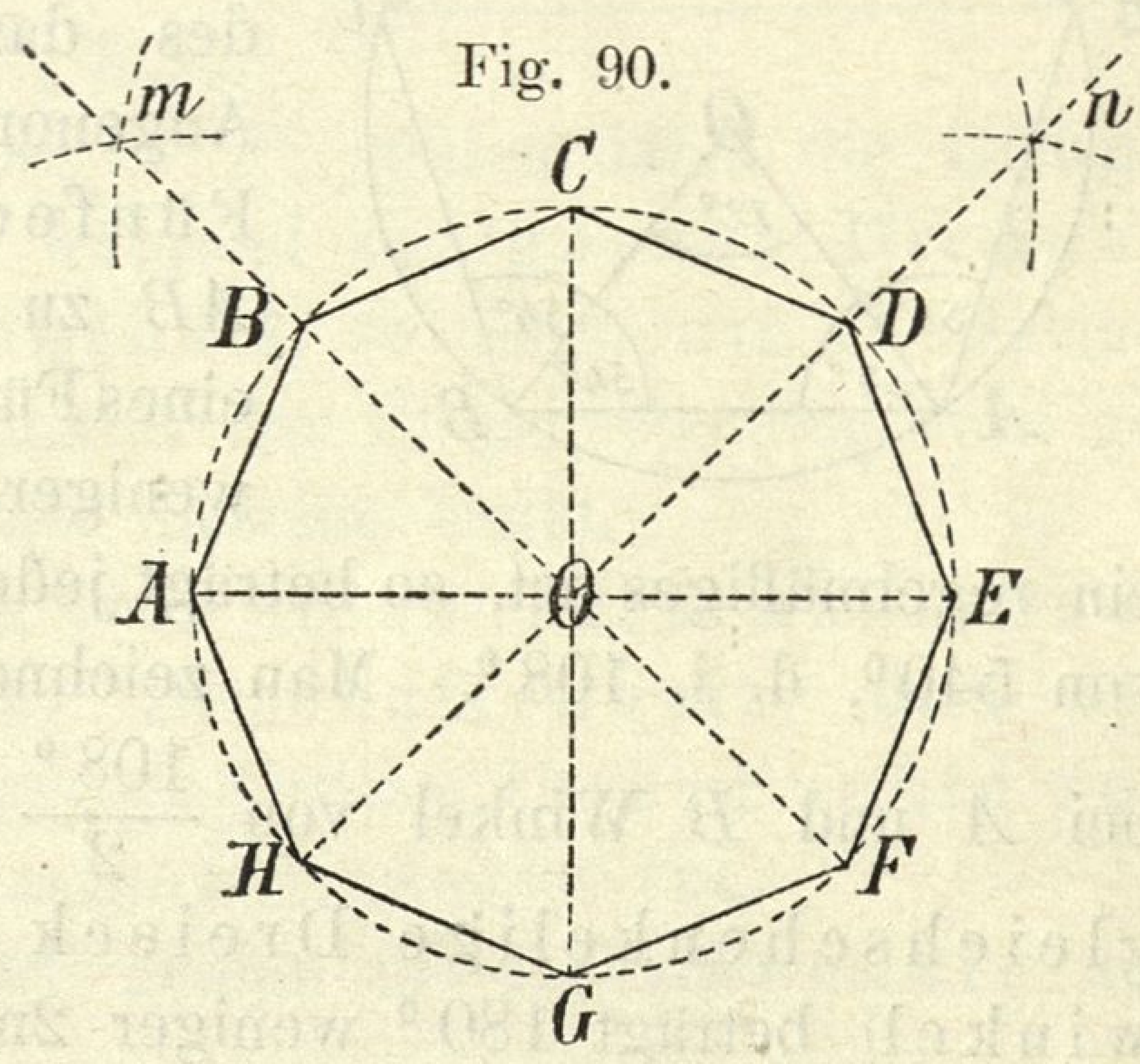
Fig. 89.



Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich leicht ein **regelmäßiges Sechseck** konstruieren; man braucht nur den Halbmesser sechsmal als Sehne auf der Peripherie des Kreises aufzutragen und die einzelnen Teilpunkte der Reihe nach geradlinig zu verbinden. (Fig. 89.)

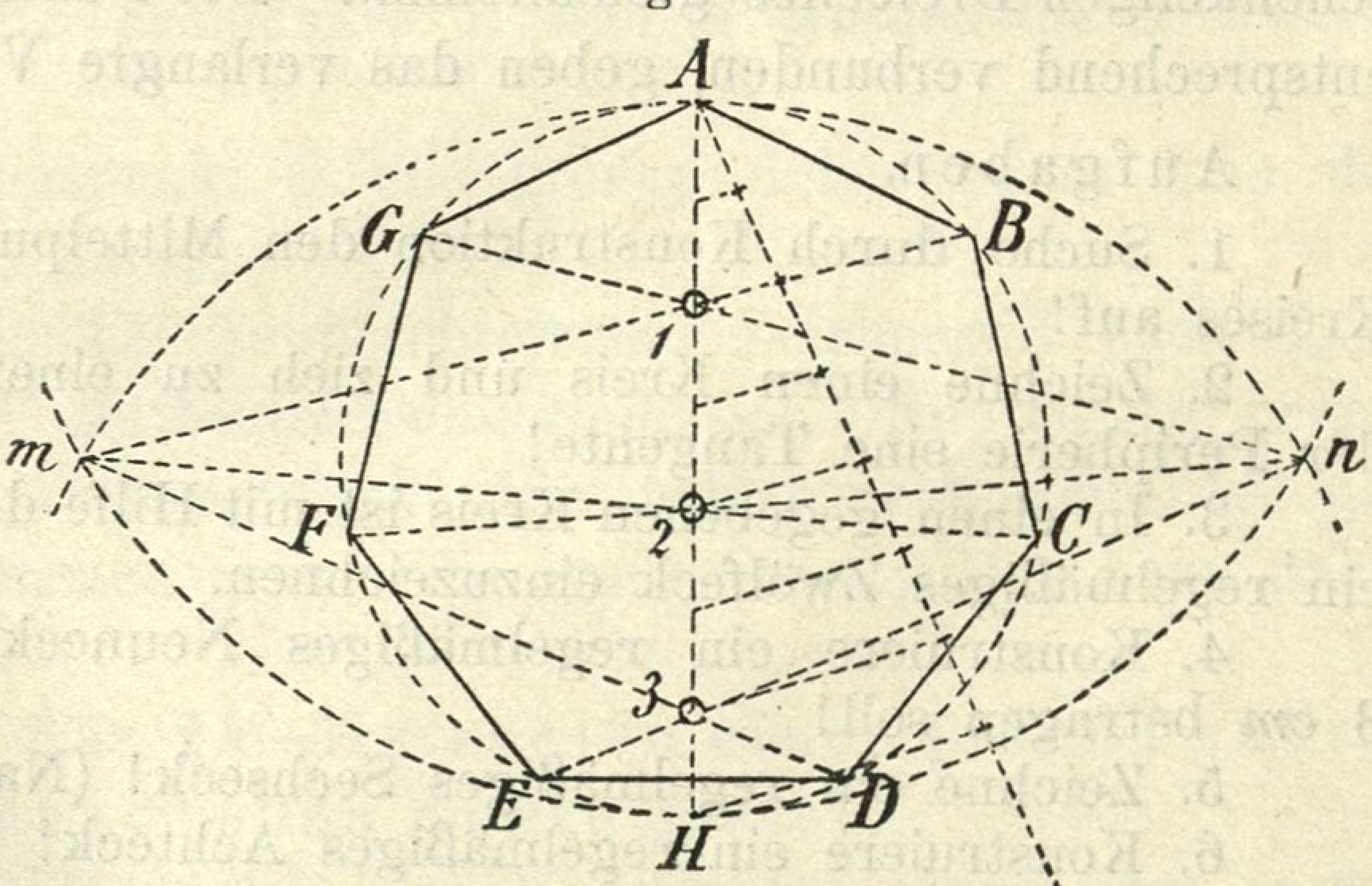
Ist die Aufgabe gegeben, ein **regelmäßiges Achteck** (Fig. 90) zu konstruieren, so zeichne man einen Kreis und in demselben 2 aufeinander senkrecht stehende Durchmesser AE und CG. Nun beschreibe man von den Punkten A, C und E mit derselben Zirkelöffnung Kreisbogen, welche sich in m und n schneiden. Hierauf ziehe man durch diese Punkte und durch den Mittelpunkt des Kreises die Geraden mF und nH. Es sind nun nur noch die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H entsprechend zu verbinden.

Fig. 90.



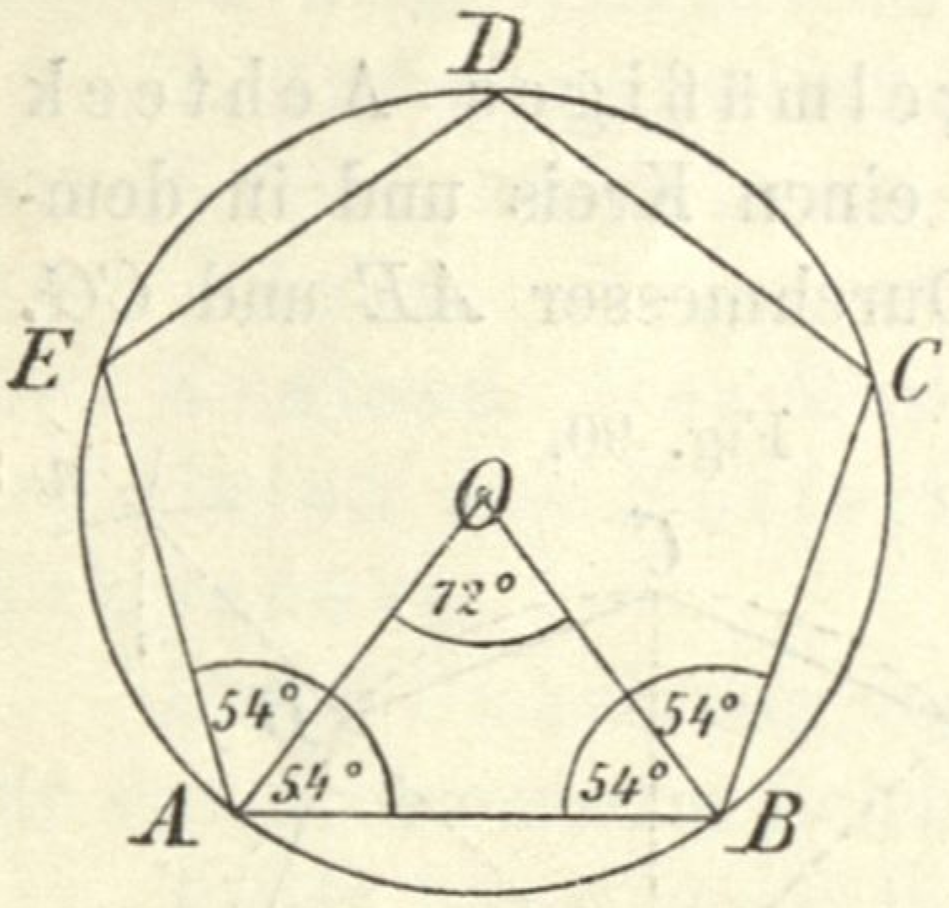
Um ein **regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl**, z. B. ein regelmäßiges Siebeneck, annäherungsweise zu erhalten, bediene man sich folgender von **Renaldin** angegebenen Konstruktion (Fig. 91):

Fig. 91.



Man zeichne einen Kreis und in demselben einen lotrechten Durchmesser AH. Nun teile man denselben (nach dem auf Seite 42, Fig. 59, angegebenen Verfahren) in so viele Teile, als das verlangte Vieleck Seiten haben soll (in unserem Falle in 7 gleiche Teile). Jeder zweite Teilpunkt wird nun eigens markiert, etwa durch Ziffern (1, 2, 3). Hierauf beschreibe man von A und H aus mit einer Zirkelöffnung, die dem Durchmesser des Kreises gleichkommt, 2 sich in m und n schneidende Kreisbogen. Werden nun von m und n aus durch die früher markierten Punkte des Durchmessers (1, 2, 3) die Geraden mB, mC, mD und nG, nF, nE gezogen, so erhält man in den Schnittpunkten B, C, D E, F und G sechs Eckpunkte des regelmäßigen Siebenecks; der siebente Eckpunkt ist der obere Endpunkt des Durchmessers, nämlich A.

Fig. 92.



Wäre aber die Aufgabe gestellt, eine regelmäßige geradlinige Figur zu konstruieren, deren Seiten eine bestimmte Länge haben sollen, so käme es nur darauf an, den Halbmesser des dazugehörigen Kreises zu finden. Angenommen, es wäre ein regelmäßiges Fünfeck (Fig. 92) von der Seitenlänge AB zu konstruieren. Die Winkelsumme eines Fünfeckes beträgt (Seite 43) 5mal 180° weniger 360°, d. i. 540°. Da unser Fünfeck ein regelmäßiges ist, so beträgt jeder Fünfeckswinkel den fünften Teil von 540°, d. i. 108°. Man zeichne daher mit Hilfe des Transporteurs bei A und B Winkel von $\frac{108^0}{2} = 54^0$ und konstruiere so das gleichschenkelige Dreieck AOB. Der 3. Winkel (Zentriwinkel) beträgt 180° weniger 2mal 54°, d. i. 72°. Da nun 72° der fünfte Teil von 360° ist, so läßt sich die Sehne AB 5mal auf der Peripherie des Kreises auftragen, dessen Mittelpunkt in O liegt und dessen Halbmesser den Schenkeln AO und BO des gleichschenkeligen Dreieckes gleichkommt. Die Punkte B, C, D, E und A, entsprechend verbunden, geben das verlangte Vieleck.

Aufgaben.

1. Suche durch Konstruktion den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises auf!

2. Zeichne einen Kreis und zieh zu einem beliebigen Punkte der Peripherie eine Tangente!

3. In einen gegebenen Kreis ist mit Hilfe des Mittelpunktwinkels ein regelmäßiges Zwölfeck einzuzeichnen.

4. Konstruiere ein regelmäßiges Neuneck, dessen Seitenlänge 3 *cm* betragen soll!

5. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck! (Nach Fig. 89).

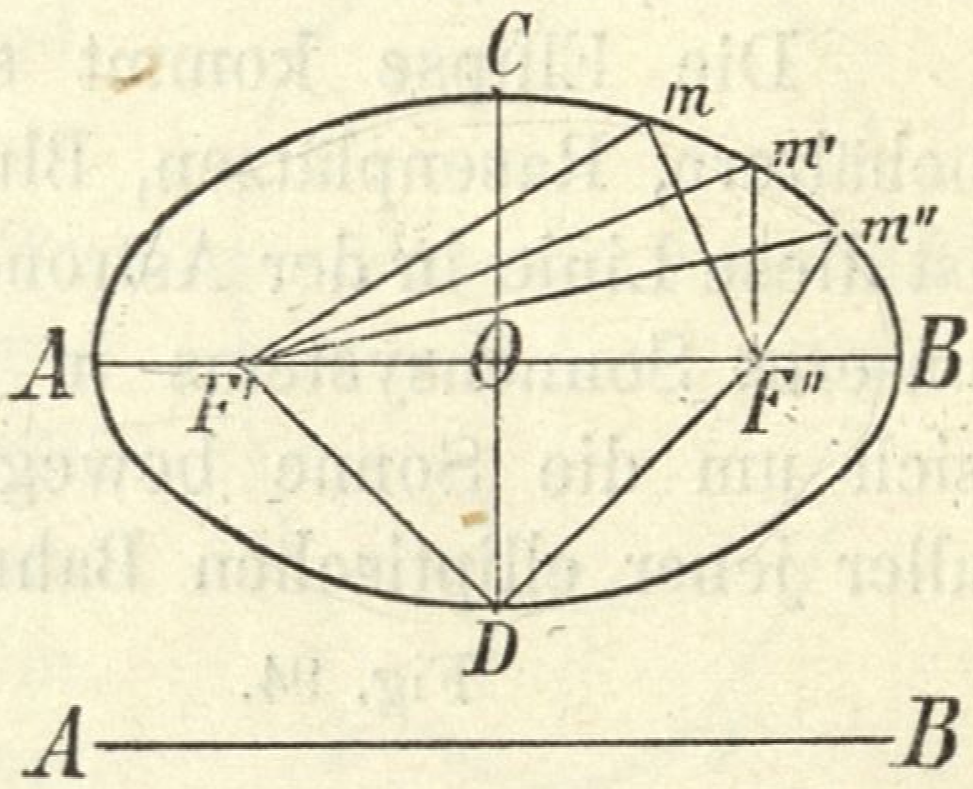
6. Konstruiere ein regelmäßiges Achteck! (Nach Fig. 90.)

7. Es soll ein regelmäßiges Fünfeck gezeichnet werden! (Nach Fig. 91.)

28. Die Ellipse und die Eilinie.

Man befestige in 2 Punkten F' und F'' (Fig. 93) die beiden Enden einer Schnur, welche ebenso lang ist wie die Gerade AB. Nun spanne man mit Hilfe eines Zeichenstiftes die Schnur so, daß die Spitze des Stiftes etwa nach m kommt, und bewege sodann den Zeichenstift bei immer straff gespannter Schnur um die beiden Punkte allmählich herum. Die Spitze kommt nun der Reihe nach in die Lagen m', m'', B, D, A, C und kehrt endlich wieder nach m zurück; sie beschreibt eine krumme Linie, die wir Ellipse nennen.

Fig. 93.



Die Geraden $F'm$ und mF'', ferner $F'm'$ und $m'F''$, dann $F'm''$ und $m''F'$, stellen dabei die Länge der Schnur vor; da letztere während der ganzen Drehung immer dieselbe Länge beibehält, so folgt, daß die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den zwei gegebenen Punkten F' und F'' immer dieselbe bleibt.

Eine Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten immer dieselbe ist.

Die zwei Punkte F' und F'' heißen die Brennpunkte der Ellipse.

Die zwei Entfernungen eines Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten werden Leitstrahlen dieses Punktes genannt. Die Gerade AB, welche durch die beiden Brennpunkte geht, heißt die große Achse; ihre Endpunkte A und B werden die Scheitel der Ellipse genannt.

Den Halbierungspunkt O der großen Achse nennt man den Mittelpunkt der Ellipse.

Kommt der die Ellipse beschreibende Zeichenstift nach A, so stellen AF' und AF'' die beiden Schnurteile dar. Nun ist AF' gerade so groß wie $F''B$. Demnach geben die beiden Schnurteile AF' und AF'' zusammengenommen gerade die große Achse. Man kann daher sagen:

Die Summe der 2 Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Achse gleich.

Die Normale CD, welche im Mittelpunkte O auf der großen Achse errichtet wird, heißt die kleine Achse.

Die Entfernung eines Brennpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte derselben wird die Exzentrizität der Ellipse genannt.

Je kleiner die Exzentrizität einer Ellipse ist, desto mehr nähert sie sich einem Kreise. Ein Kreis kann daher als eine Ellipse, deren Exzentrizität gleich null ist, angesehen werden.

Die Ellipse kommt sehr oft vor; so bei Gewölben, Wasserbehältern, Rasenplätzen, Blumenbeeten u. dgl. Am wichtigsten aber ist diese Linie in der Astronomie, indem unsere Erde und alle Planeten unseres Sonnensystems in mehr oder weniger gestreckten Ellipsen sich um die Sonne bewegen, die sich in einem der Brennpunkte aller jener elliptischen Bahnen befindet.

Fig. 94.

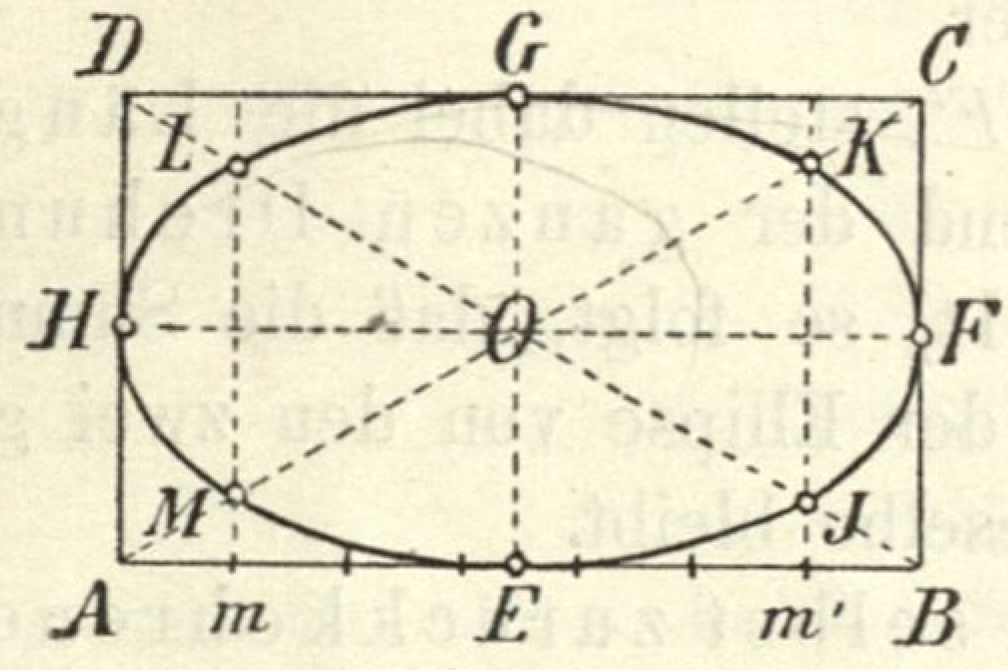
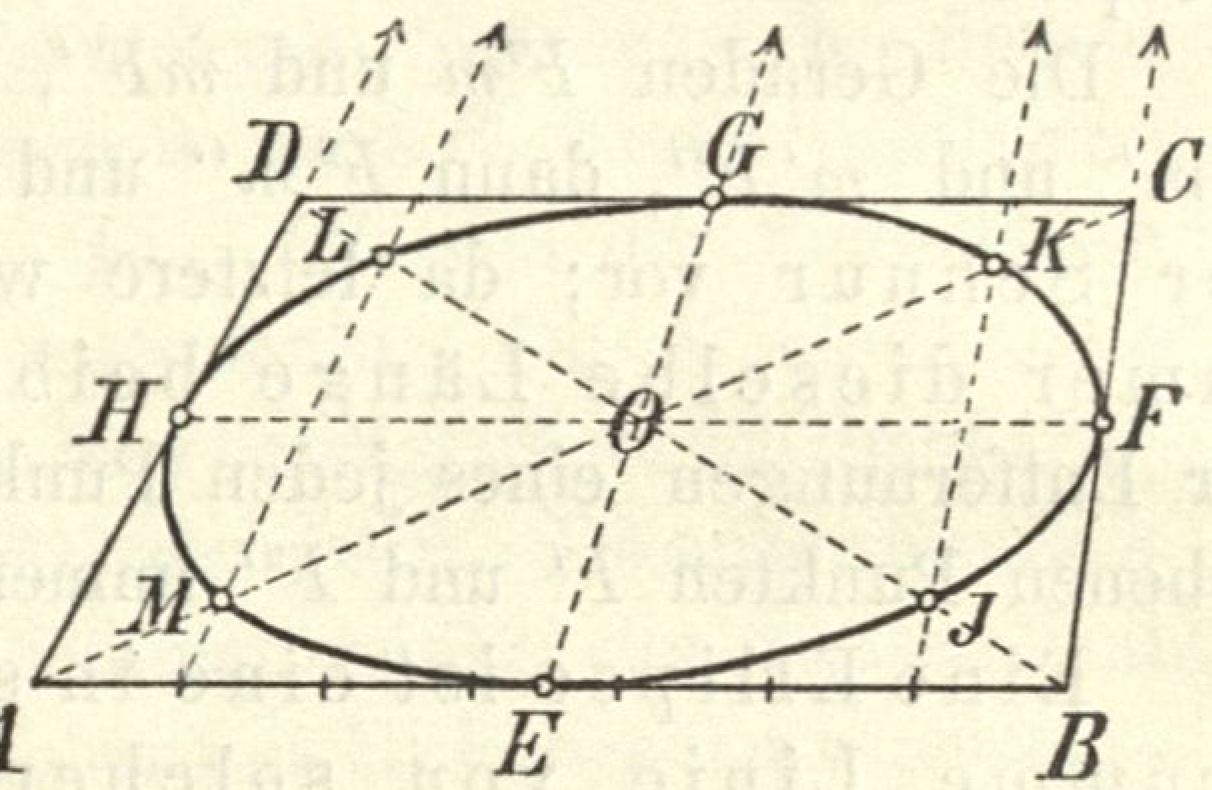
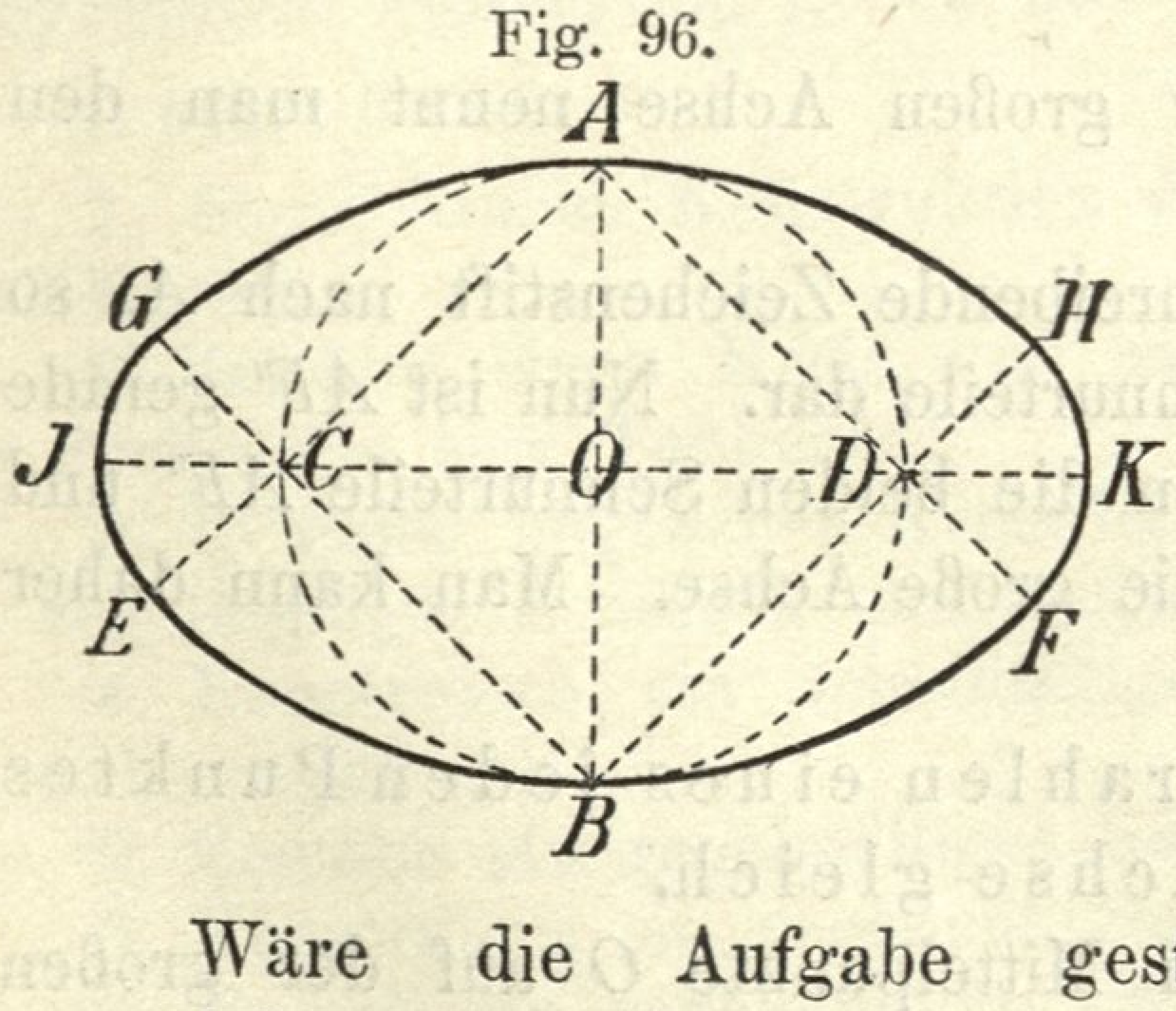


Fig. 95.



Soll in ein gegebenes Rechteck *ABCD* (Fig. 94) eine Ellipse gezeichnet werden, so ziehe man zuerst die beiden Diagonalen und durch ihren Schnittpunkt *O* die beiden Mittellinien des Rechteckes. Die Punkte *E*, *F*, *G* und *H* geben 4 Punkte der Ellipse. Vier weitere Punkte erhält man, wenn man die Gerade *AB* in 7 gleiche Teile einteilt und durch den ersten und letzten Teilpunkt (*m* und *m'*) parallele Linien zu *AD* und *BC* zieht; ihre Durchschnittspunkte *J*, *K*, *L* und *M* sind gleichfalls Ellipsenpunkte.

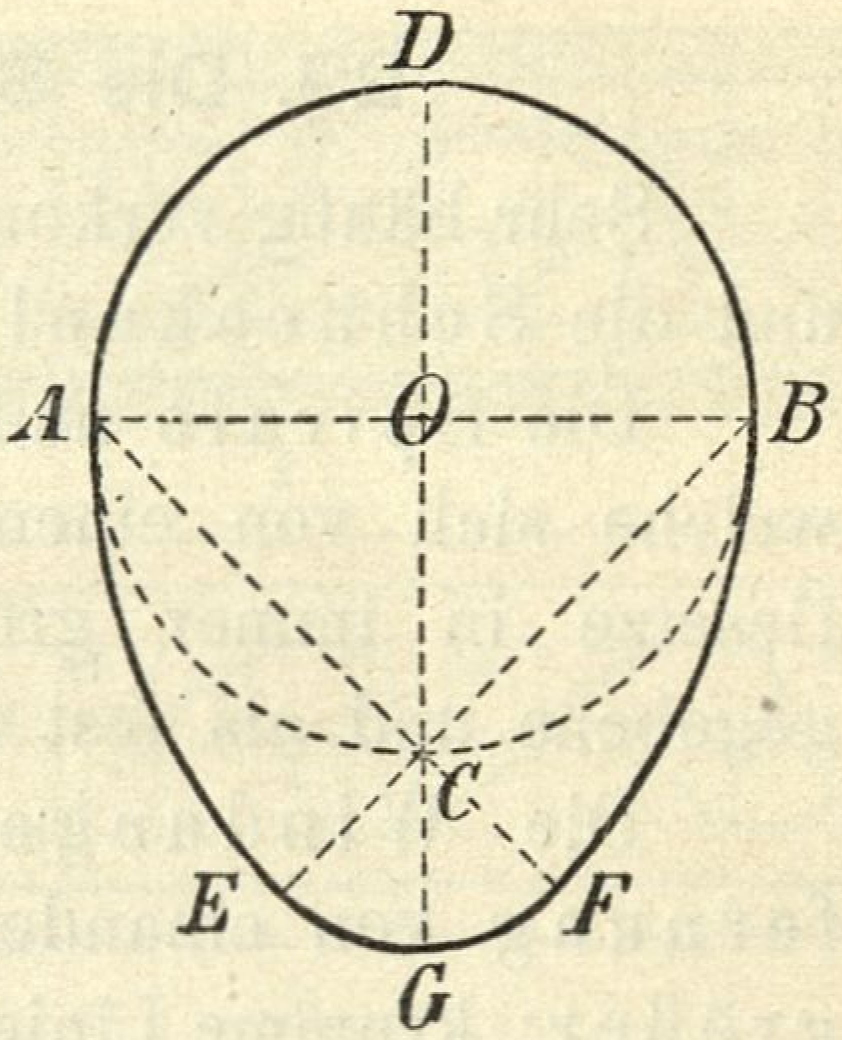
Fig. 96.



Ein ähnlicher Vorgang ist einzuhalten, wenn in ein Trapez (Fig. 95) eine Ellipse einzuzeichnen ist; nur muß man hierbei beide parallelen Seiten (*AB* und *CD*) in je 7 gleiche Teile einteilen. (Man beachte ferner, daß die Geraden *AD*, *ML*, *EG*, *JK* und *BC*, hinlänglich verlängert, sich in einem Punkte, dem Fluchtpunkte, treffen würden.)

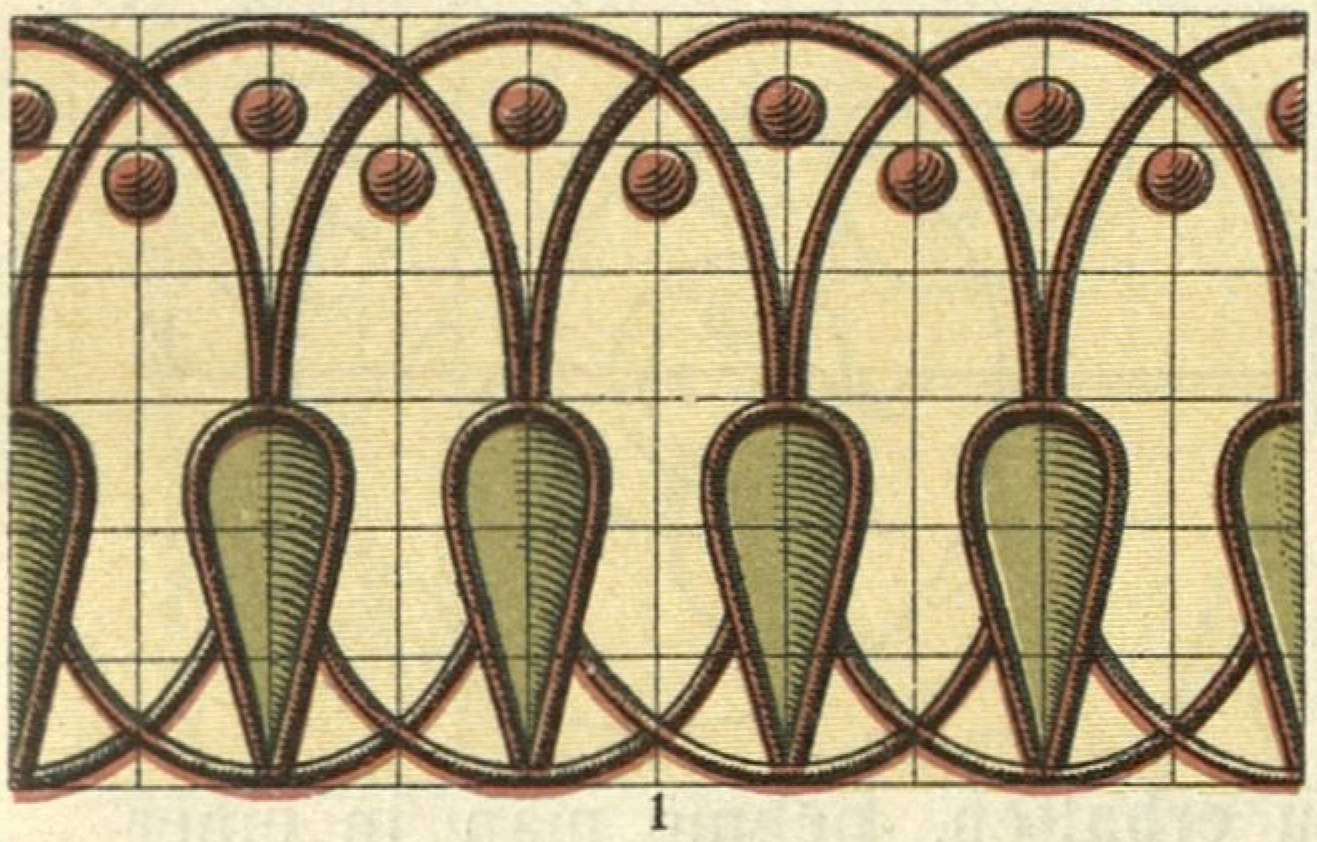
Wäre die Aufgabe gestellt, aus Kreisbogen eine geschlossene krumme Linie (Langrund) (Fig. 96) zu konstruieren, welche sich an Gestalt einer Ellipse nähert, so verfahre man auf folgende Weise: Man zeichne einen Kreis und in denselben die Durchmesser AB und CD sowie das auf der Spitze stehende Quadrat $ACBD$. Nun beschreibe man von A und B aus mit dem Durchmesser des Kreises zwei Bogen, welche die verlängerten Quadratseiten in den Punkten E, F, G und H treffen. Werden noch von C und D aus die Viertelkreise GJE und HKF angeschlossen, so erscheint die Aufgabe gelöst.

Fig. 97.

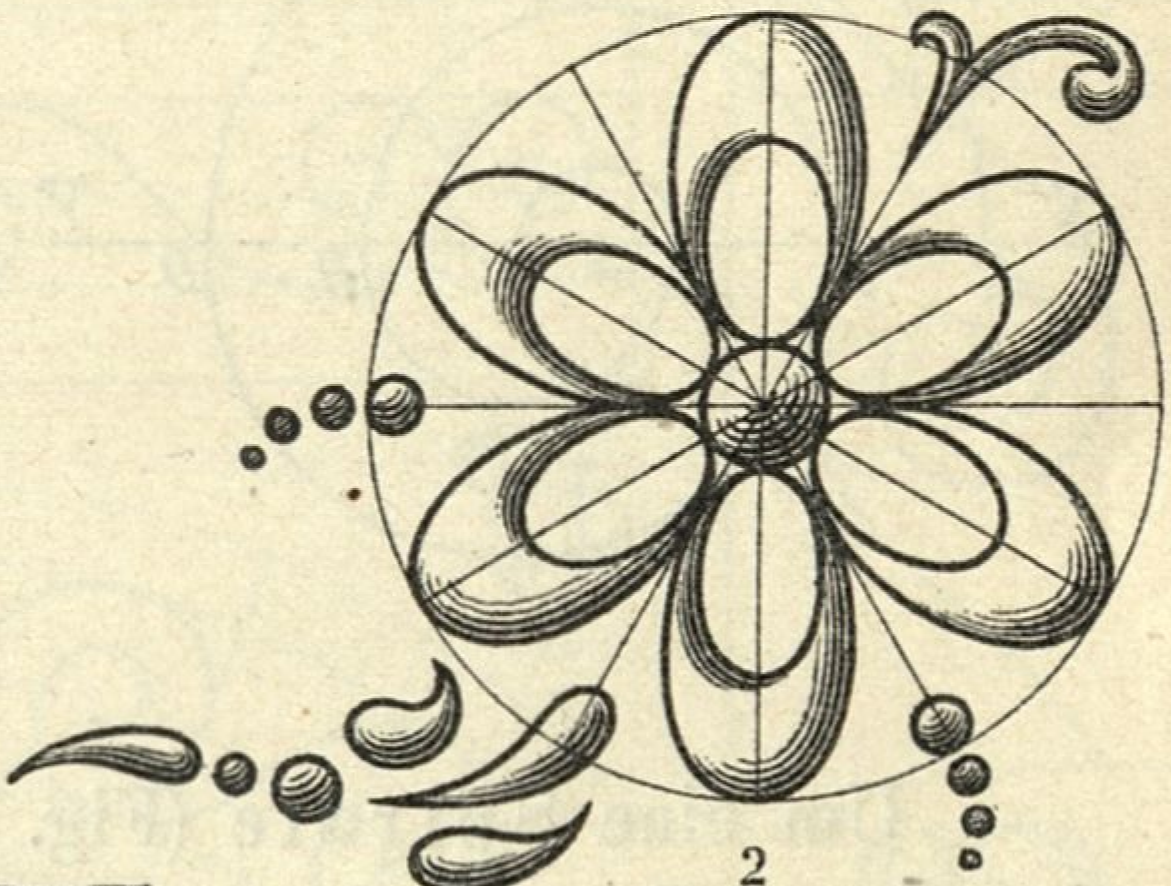


Die Eilinie oder das Oval (Fig. 97) setzt sich aus einem Halbkreise und aus einem halben Langrund zusammen. Um diese Kurve zu erhalten, zeichne man vorerst einen Kreis und ziehe in demselben einen lotrechten und einen wagrechten Durchmesser. Nun wiederhole man die beim Langrund eingehaltene Konstruktion mit dem Unterschiede, daß dieselbe nur auf einer Seite des Kreises vorzunehmen ist.

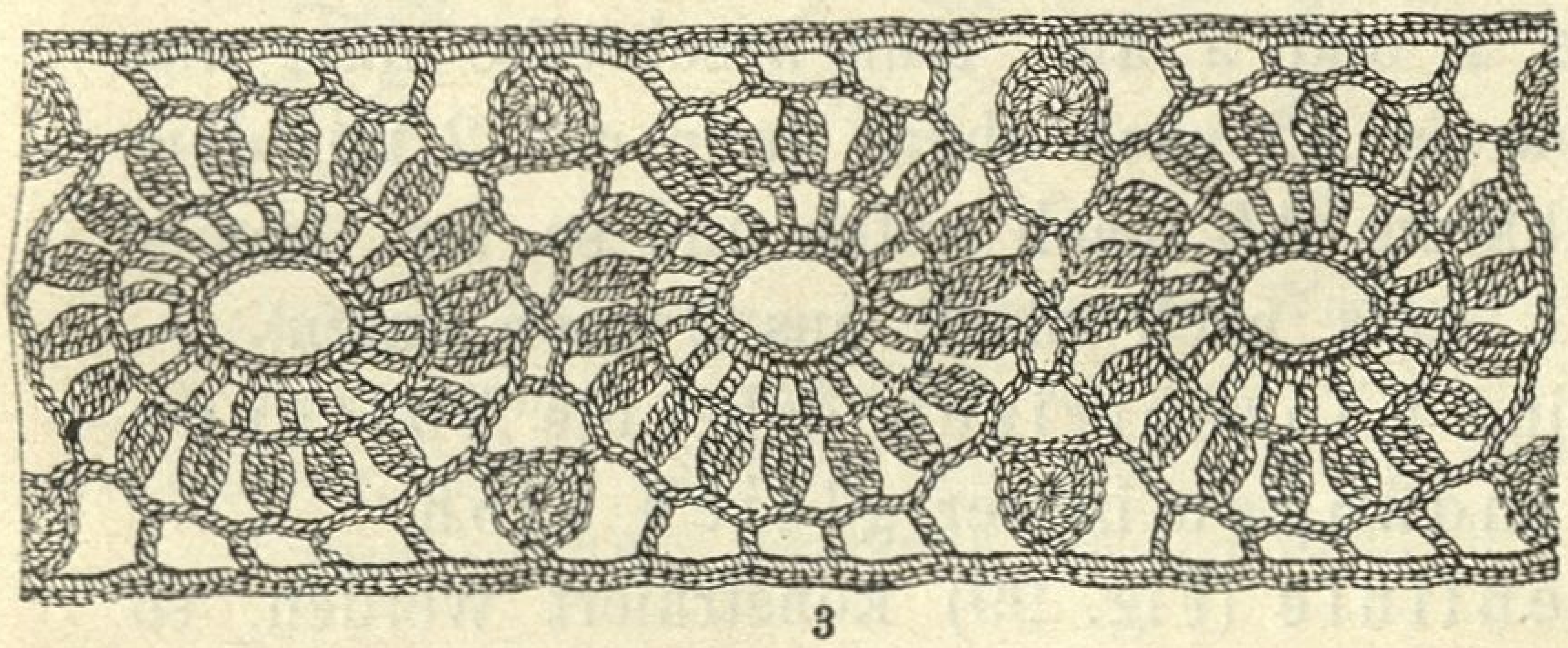
Verwendungsbeispiele (Gruppe XIII).



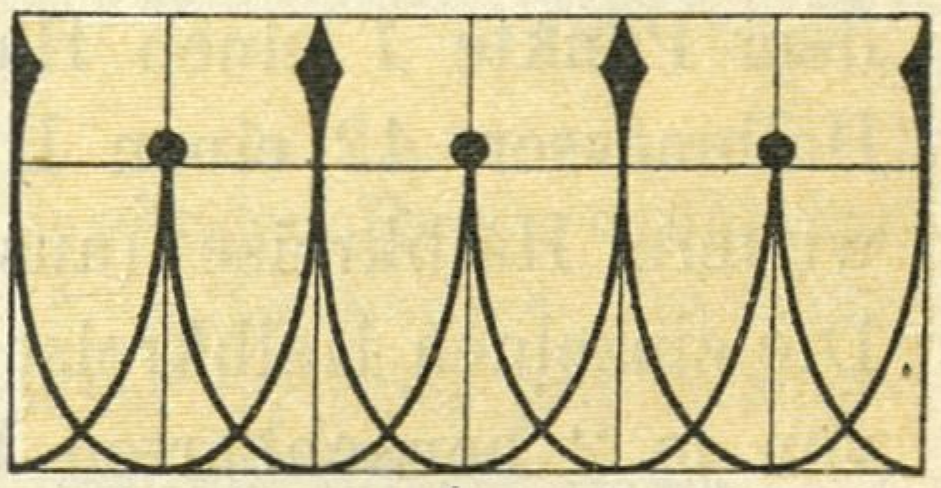
1



2



3



4

1 Ellipsenreihe. Aufnäharbeit. 2 das Eirund. Weißstickerei. 3 die Ellipse. Häkelarbeit. 4 elliptische Bogen zur Randverzierung, ausführbar in Schnur- und Plattstich, verwendbar als Kleiderputz u. s. w.

Aufgaben.

1. In ein gegebenes Rechteck ist eine Ellipse einzuzeichnen!

2. Zeichne ein Trapez und konstruiere die dazu gehörige eingeschriebene Ellipse!

3. Konstruiere ein Langrund!

4. Zeichne ein Oval!

29. Die Spirale und die Schneckenlinie.

Sehr häufig vorkommende krumme Linien sind noch die Spirale und die Schneckenlinie.

Die Spirale und die Schneckenlinie sind krumme Linien, welche sich von einem gegebenen Punkte nach einem bestimmten Gesetze in immer größer werdenden Windungen entfernen. Der gegebene und als fest anzusehende Punkt heißt Pol.

Die Windungen haben entweder stets dieselbe Entfernung von einander, oder der Abstand derselben wird immer größer; krumme Linien der ersten Art heißen Spiralen (Fig. 98), während solche mit immer weiter abstehenden Windungen Schneckenlinien genannt werden (Fig. 99).

Fig. 98.

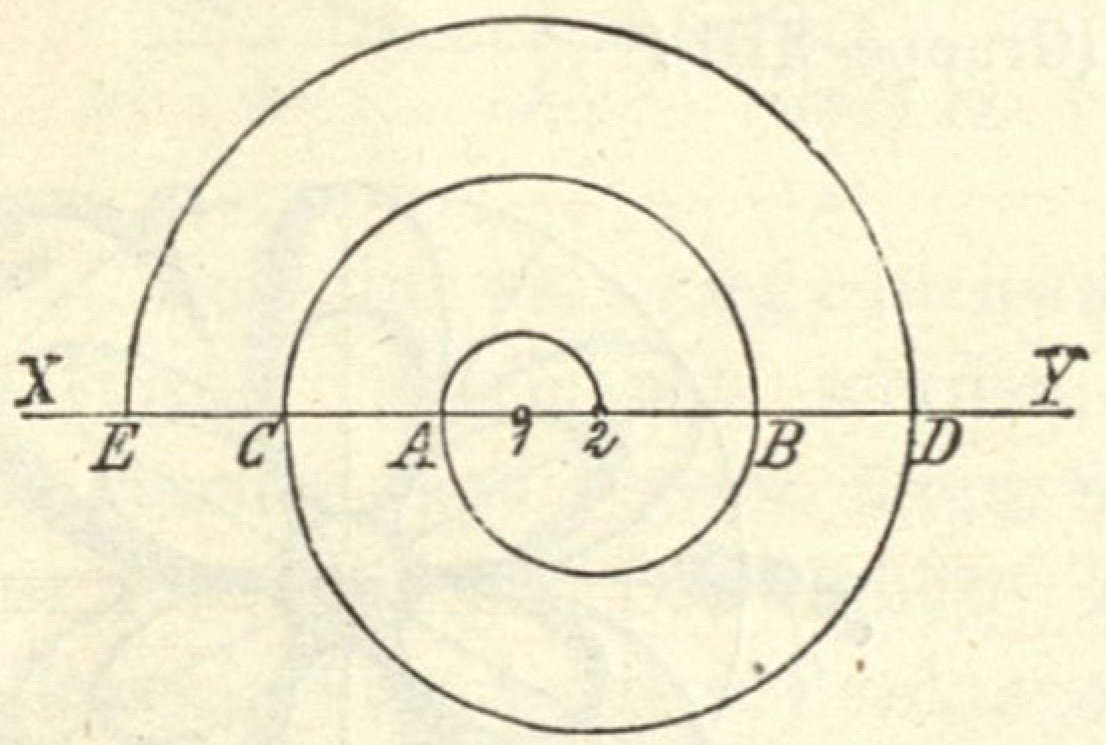
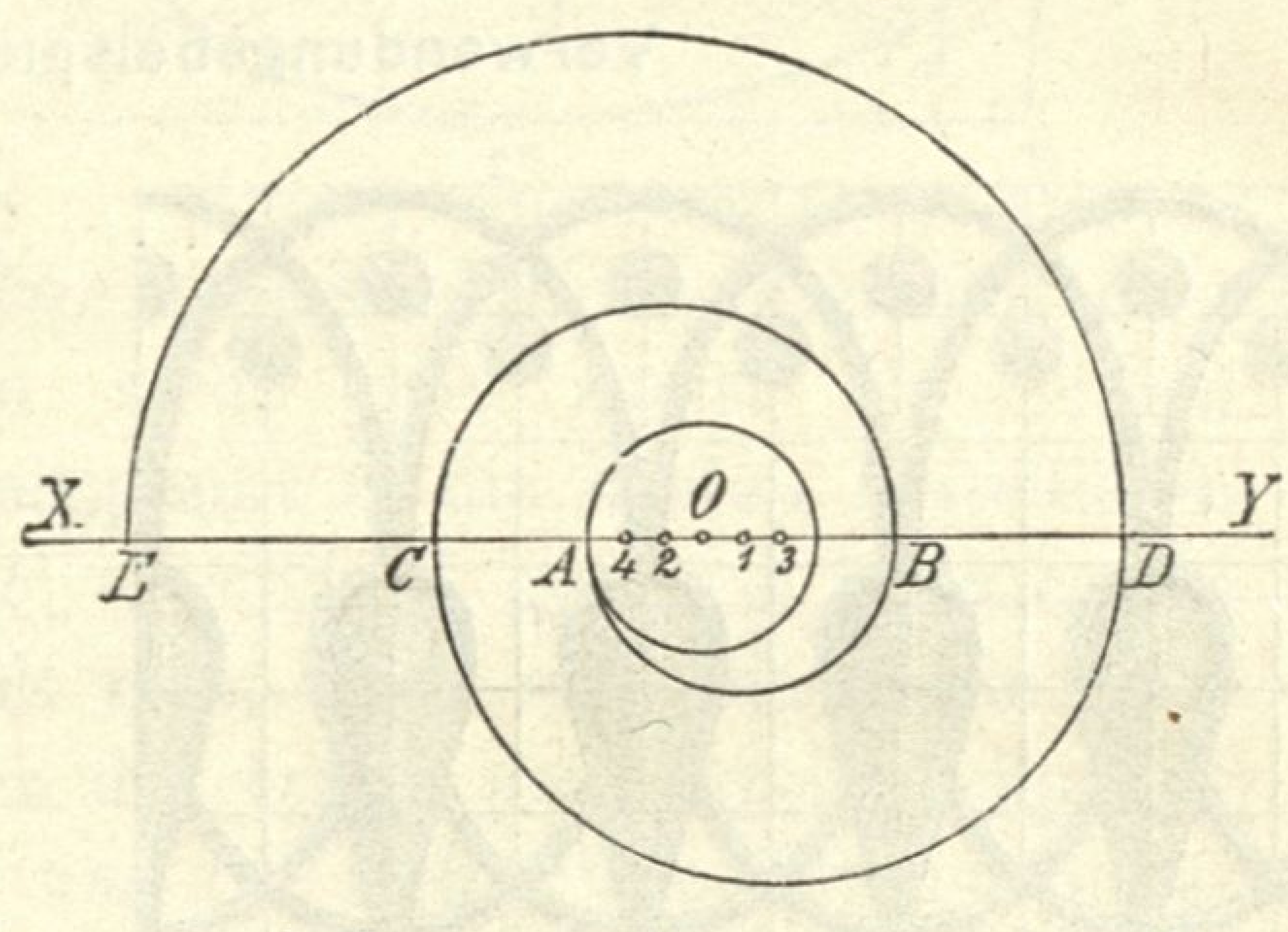


Fig. 99.

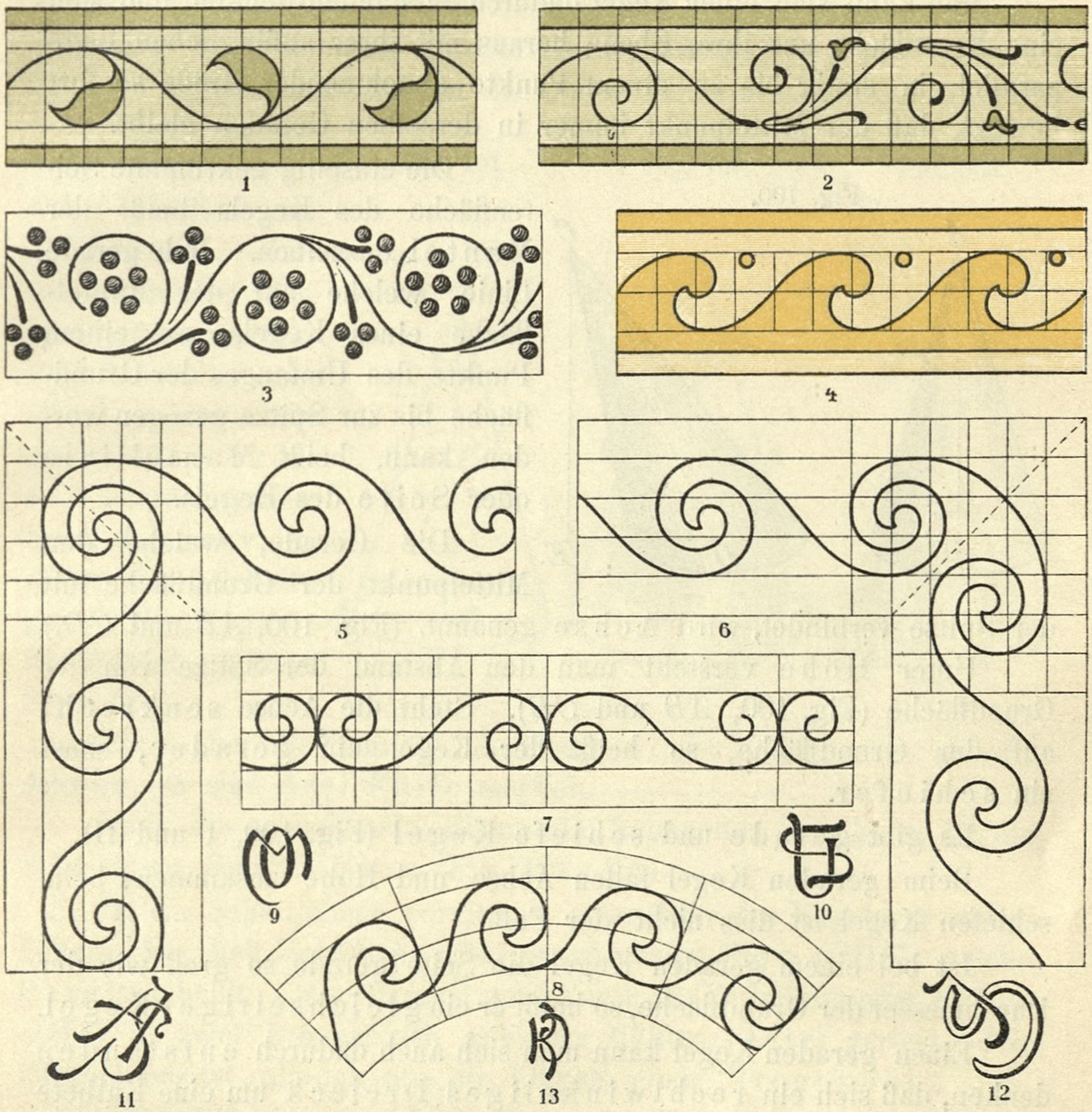


Um eine Spirale (Fig. 98) zu erhalten, nehme man in einer Geraden XY zwei Punkte 1 und 2 an. Nun beschreibe man aus dem Punkte 1 einen Halbkreis $A2$ nach oben, dann aus 2 mit dem Halbmesser $A2$ einen Halbkreis AB nach unten und so fort immer weitere Halbkreise (aus 1 stets nach oben, aus 2 nach unten). — Die einzelnen Halbkreise sind konzentrisch, daher die Abstände von je 2 benachbarten Windungen immer gleich groß.

Soll eine Schneckenlinie (Fig. 99) konstruiert werden, so trage man auf der Geraden XY von einem Punkte O aus beliebig mehrere (z. B. 3) gleiche Strecken nach rechts und links auf und beschreibe zuerst aus O mit dem Halbmesser AO einen Kreis (das Auge). Dann zeichne man, immer abwechselnd nach unten und nach oben, aus 1, 2, 3, 4 die Halbkreise AB, BC, CD, DE u. s. w.

Aufgabe.
Konstruiere eine Spirale, eine Schneckenlinie!

Verwendungsbeispiele (Gruppe XIV).



1—3 Weißstickereien. 4 griechische Welle, auch laufender Hund, ausführbar in Auflegearbeit, verwendbar als Randverzierung. 5—8 Linienzüge mit Eckbildung, Schluß zur Mitte und Kreisbiegung, verwendbar für Stiel- und Schnurstich oder zur Benähung mit Börtchen. 9—13 moderne Monogramme.

30. Der Kegel.

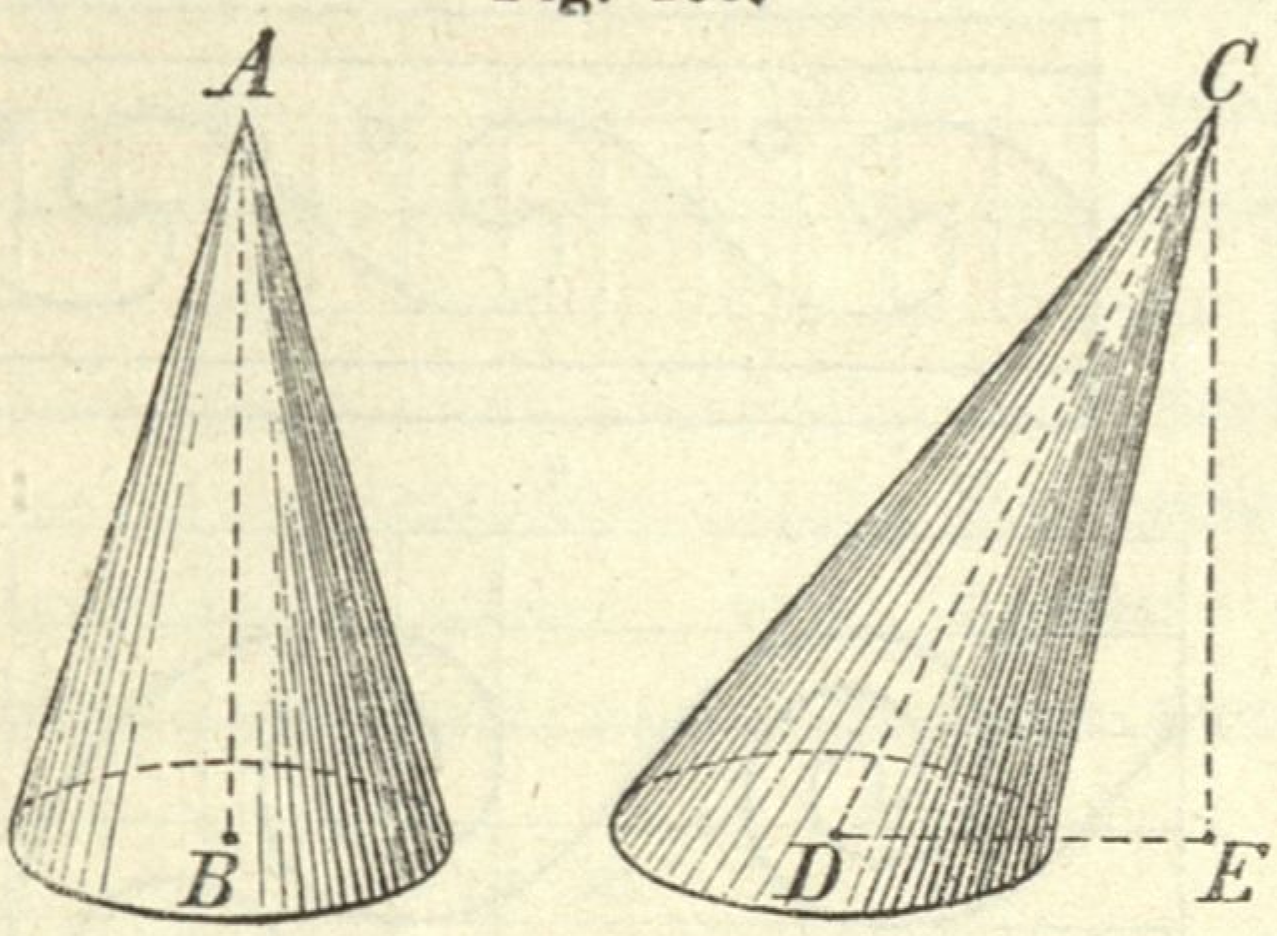
(Betrachtung eines geraden und eines schiefen Kegels.)

Ein Kegel ist ein Körper, welcher von einer krummlinigen Figur als Grundfläche und von einer einseitig gekrümmten, in eine Spitze auslaufenden Fläche als Mantelfläche eingeschlossen wird (Fig. 100).

Am häufigsten sind jene Kegel, deren Grundflächen *Kreise* sind. Man nennt sie *Kreiskegel* oder auch *Kegel* schlechtweg. Wir wollen im folgenden nur Kreiskegel voraussetzen.

Man kann sich einen Kegel dadurch entstanden denken, daß sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel, in stetig bis zu einem Punkte abnehmender Größe so fort bewegt, daß der Mittelpunkt immer in derselben Geraden bleibt.

Fig. 100.



Die einseitig gekrümmte Seitenfläche des Kegels heißt der *Mantel* desselben. Jede gerade Linie, welche auf der Mantelfläche eines Kegels von einem Punkte des Umfanges der Grundfläche bis zur Spitze gezogen werden kann, heißt *Mantellinie* oder *Seite* des Kegels.

Die Gerade, welche den Mittelpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet, wird *Achse* genannt. (Fig. 100, AB und CD.)

Unter *Höhe* versteht man den Abstand der Spitze von der Grundfläche (Fig. 100, AB und CE). Steht die Achse *senkrecht* auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein *gerader*, sonst ein *schiefer*.

Es gibt *gerade* und *schiefe Kegel* (Fig. 100, I und II).

Beim geraden Kegel fallen Achse und Höhe zusammen; beim schiefen Kegel ist dies nicht der Fall.

Ist bei einem geraden Kegel die Seite gerade so groß wie der Durchmesser der Grundfläche, so heißt er ein *gleichseitiger Kegel*.

Einen geraden Kegel kann man sich auch dadurch *entstanden* denken, daß sich ein *rechtwinkeliges Dreieck* um eine Kathete herumdreht; er ist ein *Umdrehungskörper*.

31. Schnitte am geraden Kegel.

Wird ein gerader Kegel durch eine Ebene, welche mit der Grundfläche parallel ist, geschnitten, so entstehen zwei Körper, u. zw. ein kleiner Kegel und der zwischen den zwei parallelen Kreisflächen enthaltene Körper, welcher *abgekürzter Kegel* oder *Kegelstumpf* genannt wird (Fig. 101).

Die Entfernung Pp der beiden Kreisflächen bestimmt die *Höhe* des Kegelstumpfes.

Eine Strecke (wie *Aa*), welche von dem Umfange der obern Grundfläche längs der Mantelfläche bis zum Umfange der untern Grundfläche gezogen wird, nennt man eine Seite des abgekürzten Kegels.

Erfolgt, wie oben angenommen wurde, der Schnitt parallel zur Grundfläche, so ist der obere Teil des Kegels selbst wieder ein gerader Kegel; wird dagegen der Schnitt schräg zur Grundfläche vorgenommen, so ist der obere Teil ein schiefer Kegel. +

Wird ein gerader Kegel mehrmals parallel zur Grundfläche, oder, was dasselbe ist, senkrecht gegen seine Achse geschnitten, so erhält man lauter Kreise. Diese werden umso kleiner, je näher der Schnitt gegen die Spitze zu erfolgt. (Siehe Seite 52.)

Fig. 101.

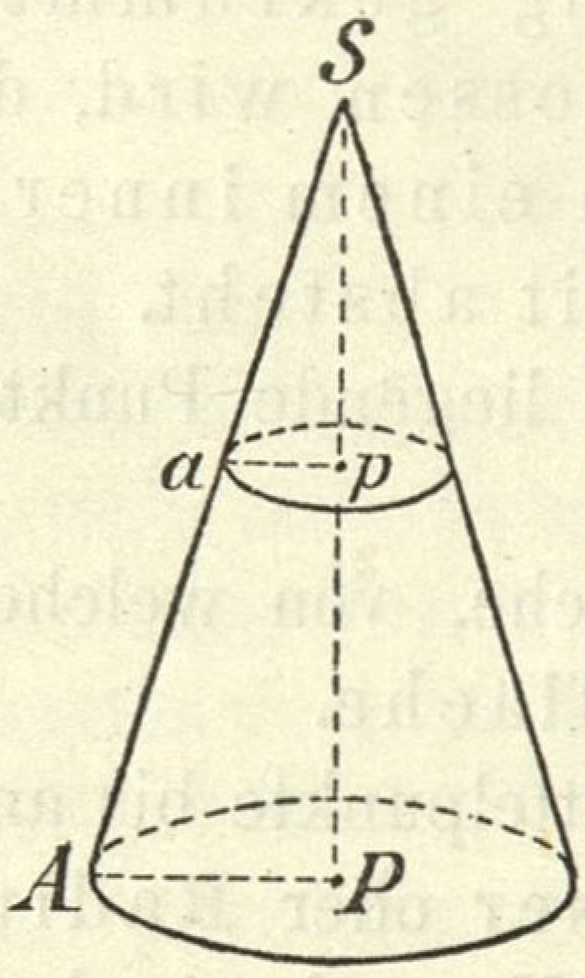


Fig. 102.

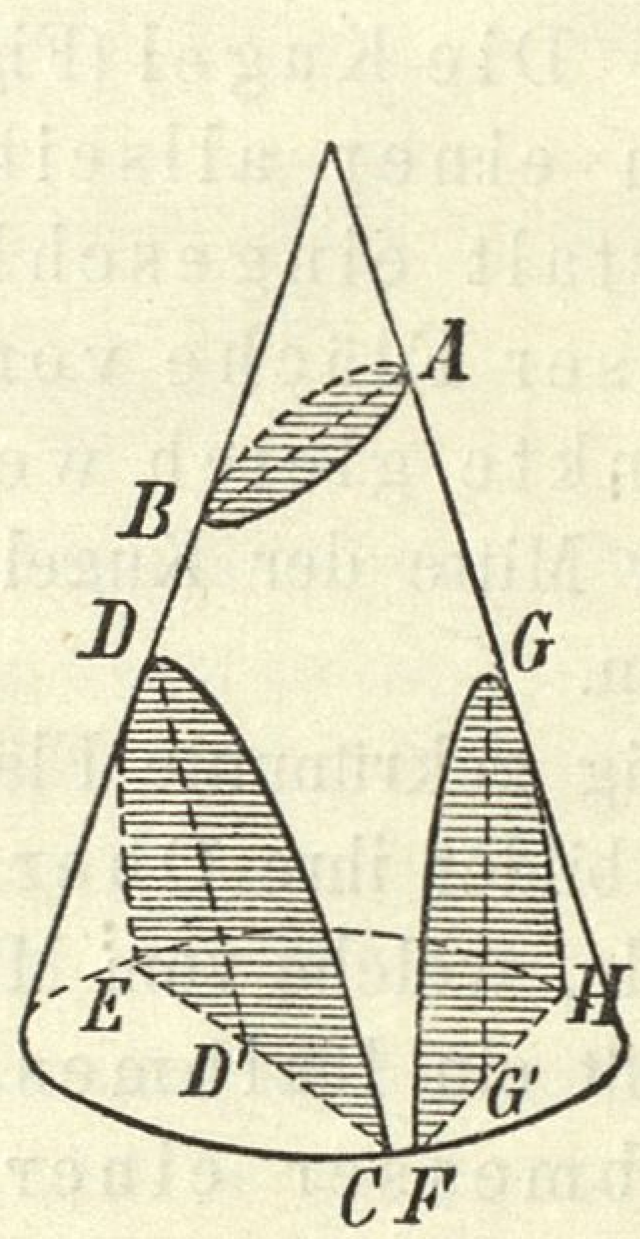
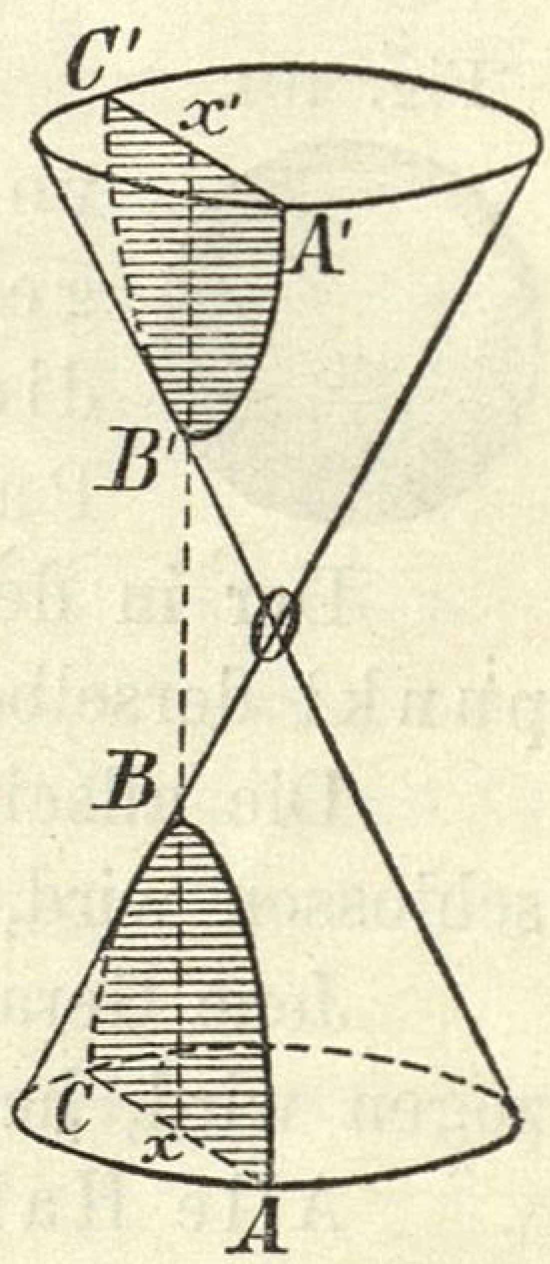


Fig. 103.



Steht aber die schneidende Ebene nicht senkrecht auf der Achse, so sind drei Fälle möglich.

Trifft die schneidende Ebene alle Seiten des Kegels, so ist die Schnittfigur einer Ellipse (Fig. 102, *AB*).

Ist die Schnittebene parallel zu einer Seite des Kegels, so ist der Schnitt eine nach einer Seite offene krummlinige Figur (*CDE*), welche Parabel heißt. Jede Parabel wird durch die Mittellinie oder Achse (*DD'*) in zwei symmetrisch gelegene Hälften (Äste) zerlegt. Die Parabel besitzt (ähnlich wie die Ellipse) einen Brennpunkt.

Ist endlich die schneidende Ebene parallel zur Achse des Kegels, so ist der Schnitt ebenfalls eine nach einer Seite offene krummlinige Figur (*FGH*), welche Hyperbel heißt; man erhält jedoch hierbei nur die eine Hälfte dieser Kurve. Will man die ganze Hyperbel bekommen, so erweitere man die Mantelfläche eines geraden Kegels über die Spitze hinaus (Fig. 103) und schneide den so erhaltenen Doppelkegel durch eine Ebene parallel zur Achse. Die vollständige Hyperbel besteht aus zwei Ästen (*ABC* und *A'B'C'*). Die gemeinschaftliche Mittellinie heißt Achse (*xx'*). Jeder Ast besitzt einen Brennpunkt.

Der Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel heißen auch Kegelschnittslinien, weil sie durch den Schnitt des Kegels mit einer Ebene entstehen.

(Die Kegelschnittslinien lassen sich auf eine sehr anschauliche Weise darstellen, wenn man ein kegelförmig zugespitztes Trinkglas zum Teile mit gefärbtem Wasser füllt, dann oben verschließt und entsprechend neigt.)

32. Die Kugel.

(Betrachtung der zerlegbaren Kugel.)

Fig. 104.

Die Kugel (Fig. 104) ist ein Körper, welcher von einer allseitig gekrümmten Fläche dergestalt eingeschlossen wird, daß jeder Punkt dieser Fläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit absteht.

Der in der Mitte der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt derselben.

Die allseitig gekrümmte Fläche, von welcher die Kugel eingeschlossen wird, bildet ihre Oberfläche.

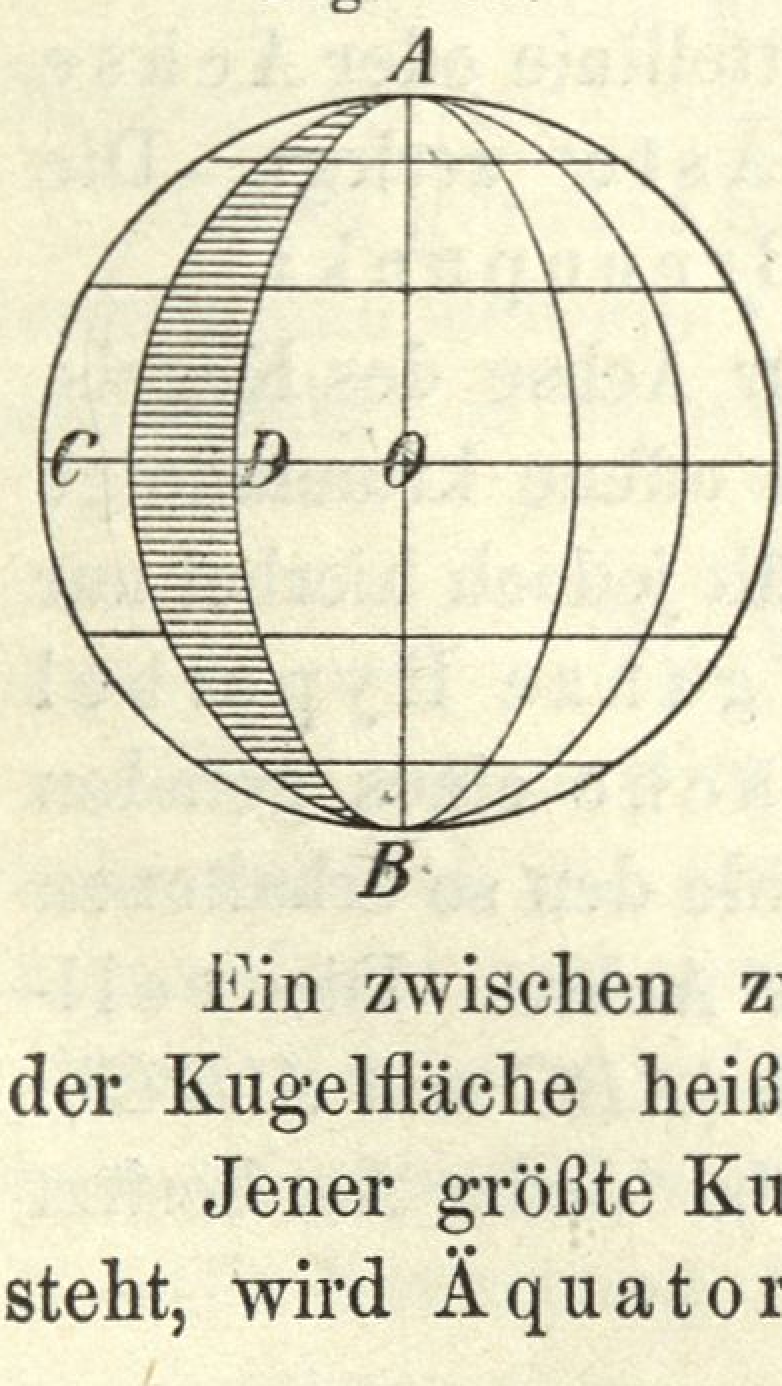
Jene Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser oder Radius der Kugel.

Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich. Warum?

Jede Gerade, welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zum entgegengesetzten Punkte der Oberfläche geht, heißt Durchmesser oder Diameter der Kugel.

Alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich. Warum?

Fig. 105.



Man kann sich jede Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden denken. Die Kugel ist also ein Umdrehungskörper. Dieser Durchmesser heißt Achse (Fig. 105, *AB*); seine Endpunkte werden Pole der Kugel genannt (*A* und *B*).

Jeder größte Kreis, welcher durch die beiden Pole geht, heißt Meridian.

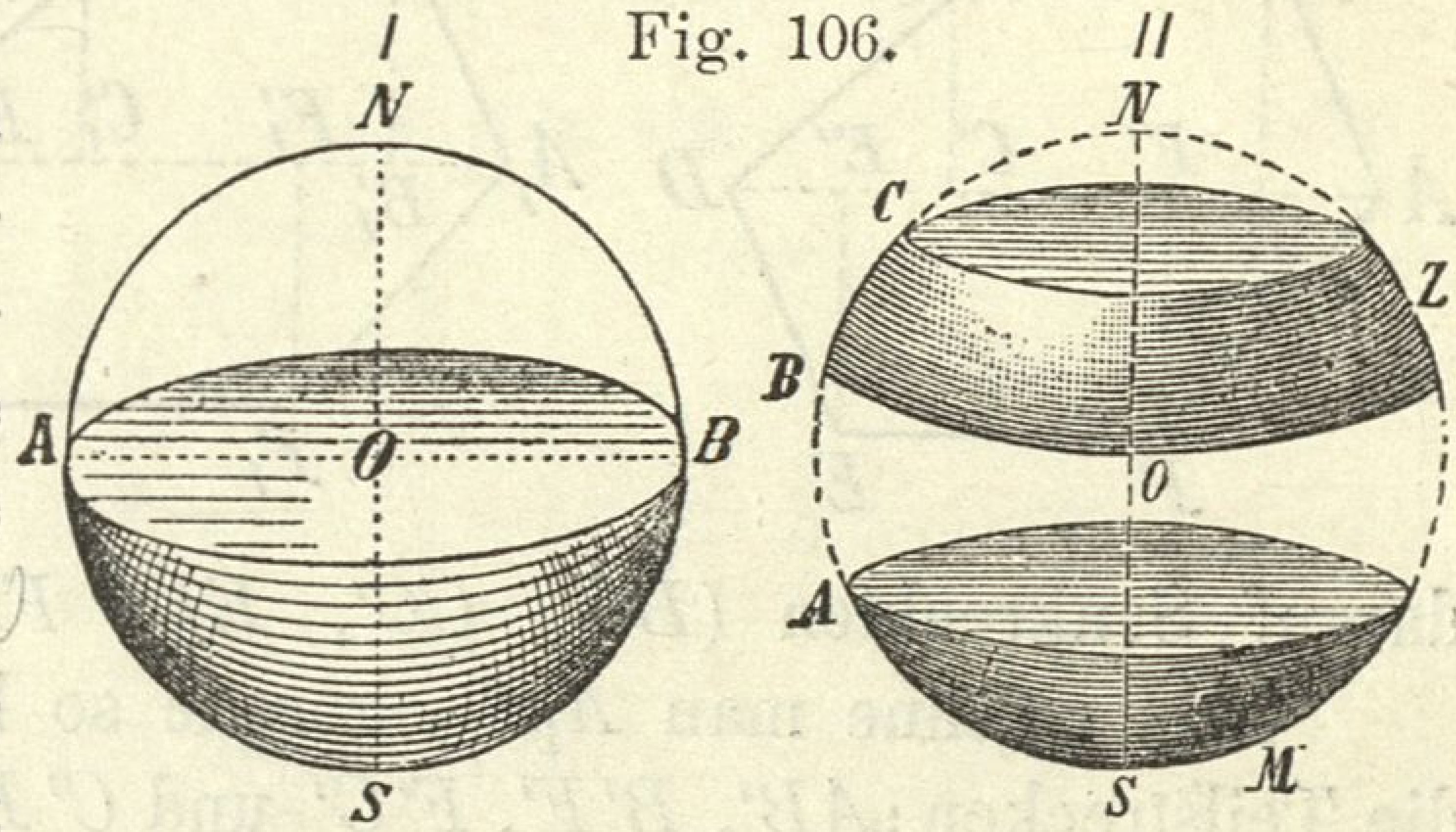
Alle Meridiane treffen sich in den beiden Polen und sind gleich groß.

Ein zwischen zwei benachbarten Meridianen gelegenes Stück der Kugelfläche heißt ein sphärisches Zweieck, z. B. *ACBD*.

Jener größte Kugelkreis, welcher von den Polen gleich weit absteht, wird Äquator genannt. Die Ebene des Äquators steht senkrecht auf der Achse und trifft diese im Mittelpunkte der Kugel. Alle Kreise, welche auf der Kugelfläche parallel zum Äquator gezeichnet werden können, heißen Parallelkreise. Die Parallelkreise werden gegen die Pole zu immer kleiner.

Durch die eben besprochenen Kreise erhält man auf der Oberfläche der Kugel ein Netz, welches sich aus dreieckigen und viereckigen Flächen zusammensetzt; diese Flächenstücke heißen sphärische Dreiecke, beziehungsweise sphärische Vierecke.

Fig. 106.



Durch den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene zerfällt die Kugel in zwei Teile, welche man Kugelabschnitte heißt. Letztere sind einander gleich oder haben verschiedene Größe, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel oder außerhalb desselben geht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel (Fig. 106, I).

Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes (Fig. 106, II, *ASM*) wird Kugelmütze oder Kalotte genannt.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen durchschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Teil der Kugel eine Kugelschicht; der dazugehörige Teil der Kugeloberfläche wird Kugelzone oder Gürtel genannt (Fig. 106, II, *BCZ*).

II. Abschnitt.

Kopieren, Vergrößern und Verkleinern der Figuren.

---

33. Kopieren der Figuren.

(Siehe Seite 34, 42 und 47.)

Eine Figur kopieren heißt eine Figur zeichnen, welche mit einer gegebenen Figur kongruent ist.

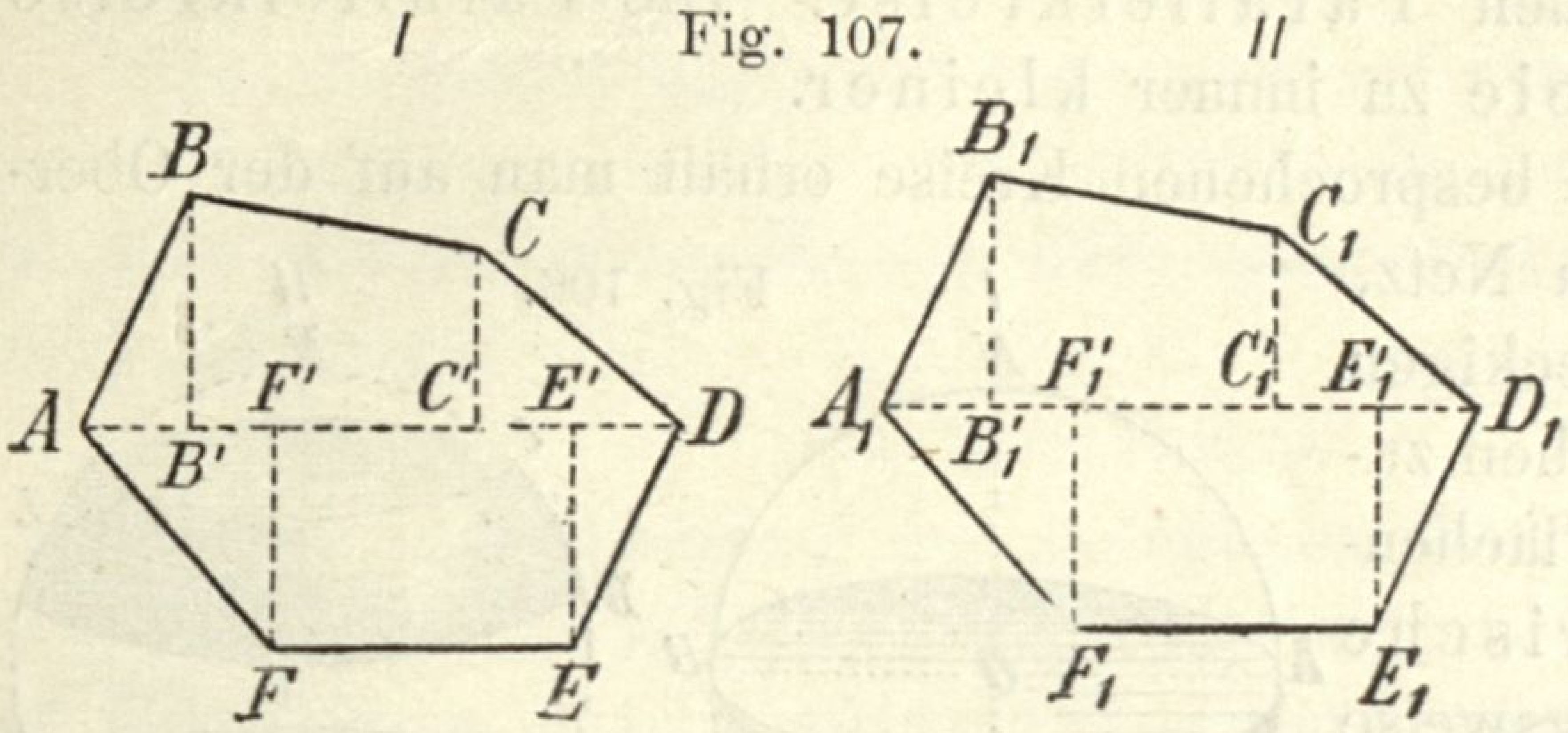
Die vorgelegte Figur, nach der man zeichnet, heißt Muster oder Original, die Nachahmung davon Kopie.

Wie wird ein gegebenes Dreieck kopiert? Wie ein gegebenes Viereck?

Wie kopiert man geradlinige Figuren von mehr als 4 Seiten?

Geradlinige Figuren von mehr als 3 Seiten lassen sich auch auf folgende Art kopieren.

Fig. 107.



Man ziehe im Originale (Fig. 107, I) eine Diagonale AD und fälle von den einzelnen Eckpunkten Senkrechte auf AD. Die Gerade AD wird auch Abszisse genannt, die darauf Senkrechten (BB', CC', EE', FF') heißen die Ordinaten.

Nun zeichne man A_1D_1 gerade so lang wie AD und übertrage die Teilstrecken AB', $B'F'$, $F'C'$ und $C'E'$ nach A_1D_1, wodurch man hier die Punkte B'_1 F'_1, C'_1 und E'_1 erhält.

Hierauf errichte man in diesen Punkten die Senkrechten B'_1B_1, F'_1F_1, C'_1C_1, E'_1E_1, welche gerade so lang sein müssen wie die entsprechenden Strecken im Originale.

$$BB' = B_1B'_1,\ CC' = C_1C'_1,\ EE' = E_1E'_1,\ FF' = F_1F'_1.$$

Durch gehörige Verbindung der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 mit einander ergibt sich die Kopie in II.

Dieses Verfahren läßt sich mit Vorteil auch dann anwenden, wenn die zu übertragende Figur eine krummlinige ist. Man überträgt hierbei, wie dies später gezeigt werden soll, in gleicher Weise die vorzüglichsten Brech- und Krümmungspunkte des Originales auf das Kopierblatt und zieht die krummen Linien nach dem Augenmaße mit freier Hand.

Aufgaben.

1. Zeichne ein beliebiges Dreieck und übertrage es an eine andere Stelle der Schultafel!

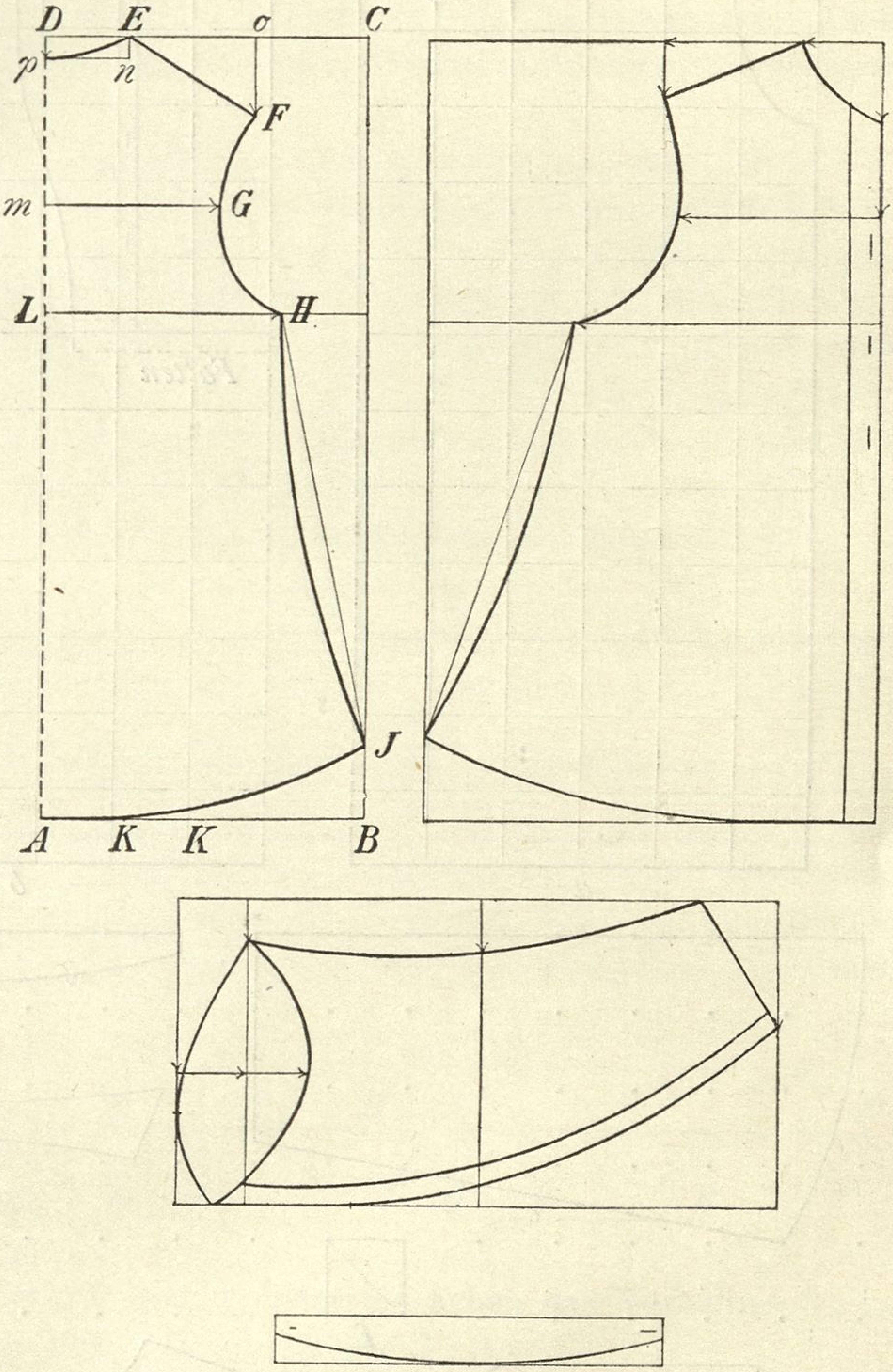
2. Zeichne ein Fünfeck, zerlege es durch Diagonalen von einem beliebigen Eckpunkte aus in Dreiecke und übertrage dies der Ordnung nach an eine andere Stelle der Zeichenfläche!

3. Ein gegebenes Siebeneck soll mittelst der eingezeichneten Abszisse und der entsprechenden Ordinaten kopiert werden.

34. Kopieren von Schnittmustern.

Um ein gegebenes Schnittmuster (Fig. 108, Rückenteil einer Nachtjacke) zu kopieren, zeichne man um dasselbe vorerst ein Rechteck so, daß sich das letztere den geraden Linien des Schnittmusters möglichst anschließt und auch besonders wichtige Eck- oder Krümmungspunkte desselben aufnimmt. Hierauf fälle man von allen innerhalb des Rechteckes gelegenen Eckpunkten des Schnittmusters (*F* und *H*) Senkrechte auf die ihnen zunächst liegenden Seiten des Rechteckes. Dasselbe muß auch mit jenen hervorragenden Krümmungspunkten geschehen, welche für die Form der einzelnen krummen Linien von besonderer Bedeutung sind (wie *G*).

Fig. 108.



Nun zeichne man auf dem Kopierblatte ein eben so großes Rechteck wie *ABCD*, übertrage der Ordnung nach mit Hilfe des Zirkels oder eines Maßstabes die in den 4 Seiten gelegenen Punkte und errichte die entsprechenden Senkrechten, deren Größe man vom Originale abnimmt. Hierdurch ist die Lage aller Punkte in der Kopie bestimmt.

Die einzelnen geraden Linien werden mit Hilfe eines Lineals gezeichnet, während man die krummen Linien mit freier Hand einträgt.

Nicht selten überzieht man das Original mit einem entsprechenden Quadratnetze, welche Einteilung auch auf der zur Kopie bestimmten Fläche zu zeichnen ist. Nun beginnt das Kopieren, indem man von Quadrat zu Quadrat die einzelnen Linien entweder durch bloße Abschätzung oder der größeren Genauigkeit wegen mit Hilfe eines Zirkels so auf die Kopie überträgt, wie sie im Originale vorliegen. Man fängt gewöhnlich bei der linken obern Ecke zu zeichnen an.

Fig. 109.

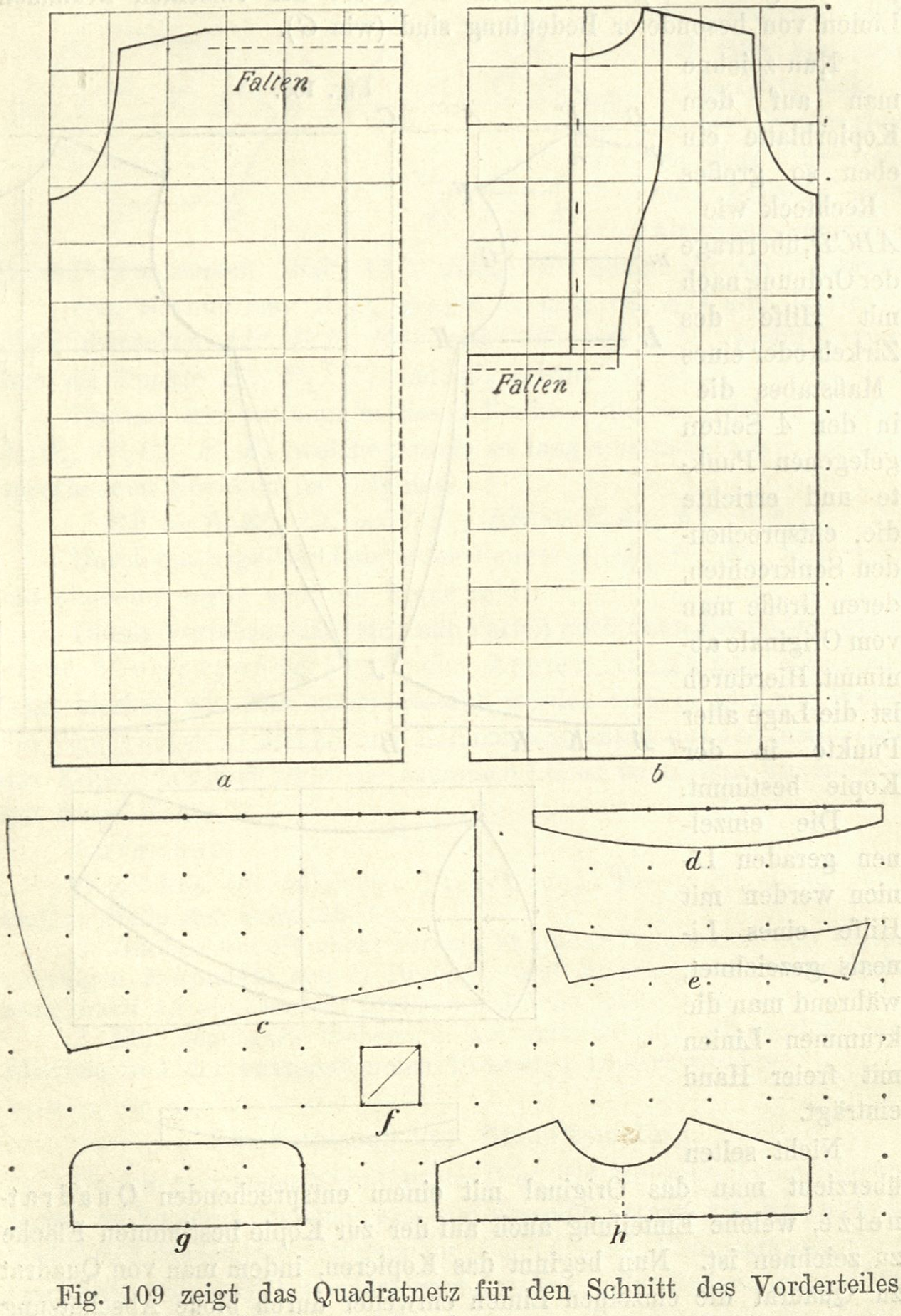


Fig. 109 zeigt das Quadratnetz für den Schnitt des Vorderteiles und Rückenteiles eines Herrenhemdes.

Öfters bedient man sich auch stigmographischer (punktierter) Netze. Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß man sowohl das Original als das Kopierblatt mit quadratisch angeordneten Punkten statt mit Quadratnetzen überzieht. Fig. 109 zeigt auch das stigmographische Netz für den Schnitt der übrigen Teile des Herrenhemdes.

Die Übertragung krummliniger Figuren mittelst der Netze findet hauptsächlich Anwendung bei Anfertigung von Kartenskizzen. Auch Monogramme, Schling- und Stickmuster lassen sich mit Quadratnetzen leicht kopieren.

Hierher gehört auch das Pausen, wobei man sich vorerst mit Transparentpapier oder Pausleinwand eine möglichst genaue Kopie vom Originale verschafft und letztere sodann auf die Kopierfläche überträgt.

Am häufigsten aber erfolgt das Übertragen des Schnittes unmittelbar auf den Stoff. Hierbei befestigt man vorerst das Schnittmuster mittelst Stecknadeln an dem Stoffe, worauf die Ränder des Schnittes mit Hilfe eines abfärbenden Körpers (etwa mittelst Kreide) auf die Unterlage übertragen werden, oder man schneidet den Stoff sofort nach dem darauf befindlichen Schnittmuster zu.

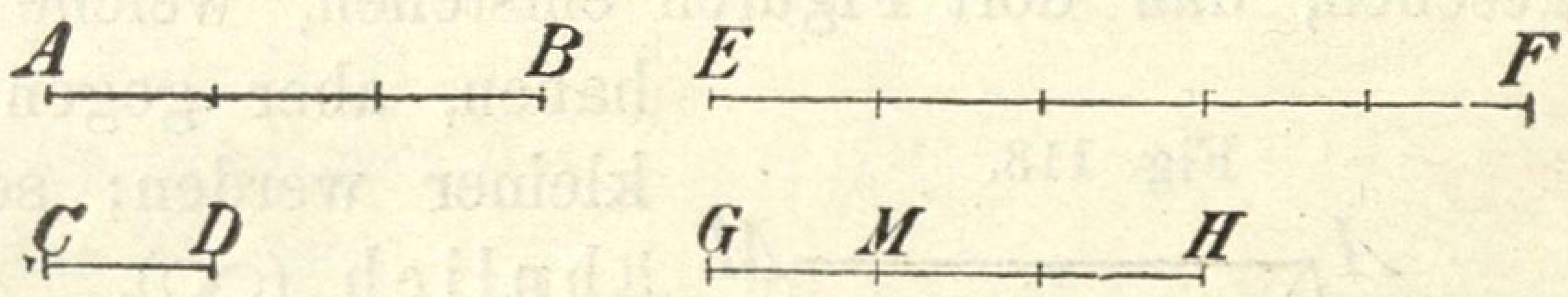
Aufgabe.

Die in den Fig. 108 und 109 dargestellten Schnittmuster sind zu kopieren.

35. Verhältnisse der Strecken. Proportionen.

Vergleicht man (Fig. 110) die zwei Strecken AB und CD mit einander, so sieht man, daß CD in AB 3mal enthalten ist. Hierdurch erhält man das Verhältnis von AB zu CD. — Schriftliche Darstellung: $AB : CD$. AB heißt das Vorderglied, CD das Hinterglied.

Fig. 110.



Da CD in AB 3mal, in CD aber 1mal enthalten ist, so verhalten sich die Strecken AB und CD wie die Zahlen 3 und 1, oder sie haben das Verhältnis $3 : 1$. Umgekehrt verhält sich CD zu AB wie $1 : 3$.

Man sagt: die Strecke AB wird durch die Strecke CD gemessen, und nennt darum auch CD ein Maß von AB.

Ist ferner die Strecke GM in EF 5mal und in GH 3mal enthalten, so haben die beiden Geraden EF und GH das Verhältnis $5 : 3$. Die Strecke GM ist ein gemeinschaftliches Maß von EF und GH.

Einfach läßt sich das **Verhältnis** zweier Strecken **ermitteln**, wenn man diese mit Hilfe eines **Maßstabes** abmißt und die erhaltenen Maßzahlen als die beiden Glieder des gesuchten Verhältnisses anschreibt.

Aufgaben.

1. Bestimme das Verhältnis zwischen der Länge und der Höhe der Schultafel!

2. Welches Verhältnis besteht zwischen der Breite und Höhe eines Fensters des Schulzimmers?

Fig. 111.

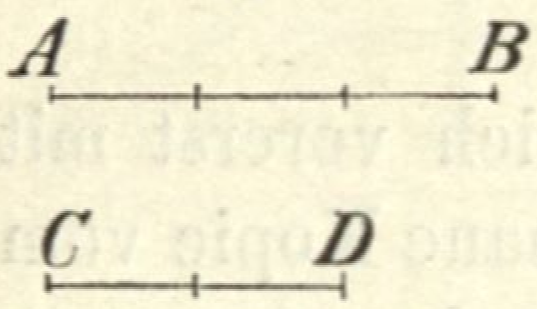
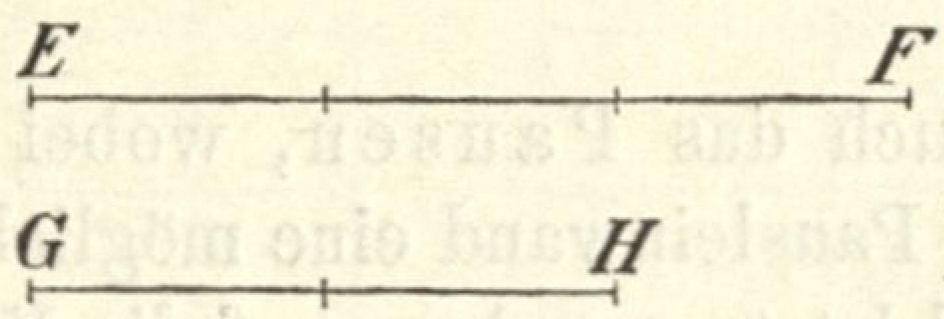


Fig. 112.



Die beiden Strecken AB und CD (Fig. 111) verhalten sich wie 3 zu 2; dasselbe Verhältnis besteht aber auch zwischen den Strecken EF und GH (Fig. 112). Man hat es also hier mit **zwei gleichen Verhältnissen** zu tun.

Daher kann man sagen, AB verhält sich zu CD gerade so, wie EF zu GH. In Zeichen:

$$AB : CD = EF : GH.$$

Man sagt in diesem Falle auch: Die Strecken AB und CD sind den Strecken EF und GH **proportioniert** oder **proportional**.

Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse wird eine Proportion genannt.

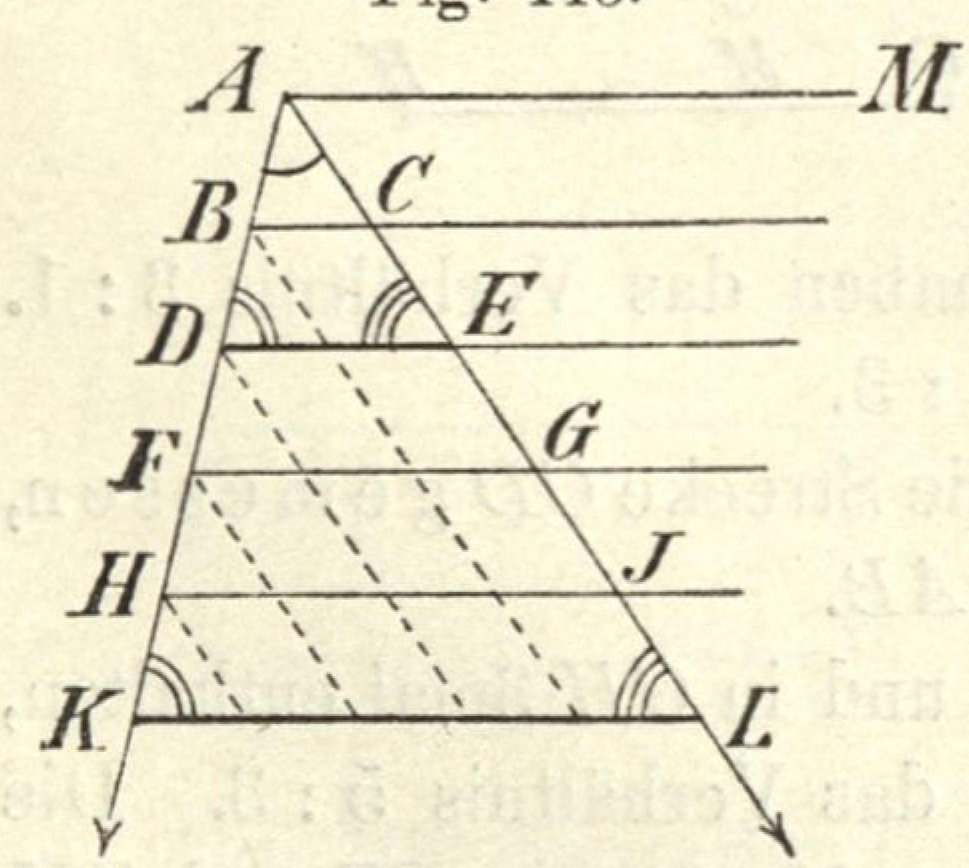
In obiger Proportion bildet AB das erste, CD das zweite, EF das dritte und GH das vierte **Glied**; AB und GH heißen die **äußern**, CD und EF die **innern Glieder** der Proportion.

36. Ähnlichkeit der Dreiecke.

(Siehe Seite 52.)

Wir haben schon bei den parallelen Schnitten an der Pyramide gesehen, daß dort Figuren entstehen, welche zwar dieselbe Gestalt haben, aber gegen die Spitze zu immer kleiner werden; solche Figuren heißen **ähnlich** (∾).

Fig. 113.



Um die Merkmale zweier **ähnlicher Dreiecke** anschaulich darzustellen, lasse man eine Gerade AM (Fig. 113) auf einem Schenkel AR des Winkels RAS immer parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreiten, daß sie auf jenem Schenkel gleiche Stücke $AB = BD = DF = FH = HK$ abschneidet; dann werden auch die Abschnitte des zweiten Schenkels unter einander gleich sein (Seite 40). $AC = CE = EG = GJ = JL$. Gleichzeitig sieht man, daß hierdurch die Dreiecke ABC, ADE, AFG, AHJ und AKL entstehen, welche zwar verschiedene Größe haben, in der Gestalt jedoch übereinstimmen, somit ähnlich sind. Vergleicht man nun irgend zwei Dreiecke, z. B. ADE und AKL, so findet man, daß sie zunächst paarweise gleiche Winkel besitzen; denn der Winkel A ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die anderen zwei Winkel aber (D und K, sowie E und L) sind als Gegenwinkel einander gleich.

Betrachtet man ferner die Seiten der beiden Dreiecke, so sieht man, daß AD zwei solcher Teile enthält, von welchen auf AK 5 kommen; die Seiten AD und AK haben also das Verhältnis $2:5$. Ebenso enthält AE 2 solcher Teile, von welchen auf AL 5 entfallen; es haben also auch die Seiten AE und AL das Verhältnis $2:5$.

Zieht man ferner durch jeden Teilpunkt von AK eine Parallele mit AL, wie dies die punktierten Linien andeuten, so zerfällt DE in 2 und KL in 5 gleiche Teile; demnach verhalten sich also auch die Seiten DE und KL wie 2 zu 5.

Man hat also:

$$AD : AK = AE : AL = DE : KL.$$

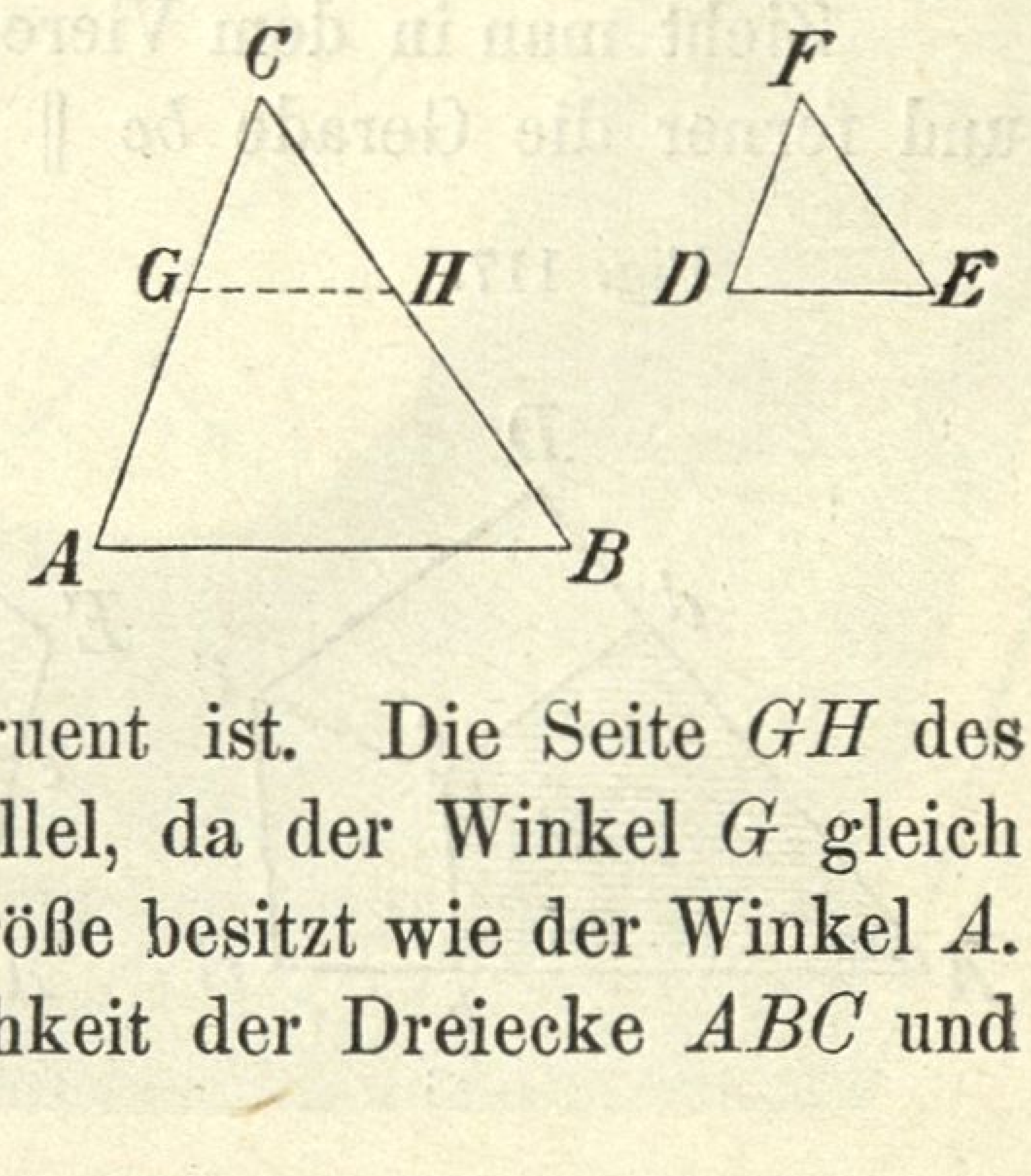
Mithin sind in den beiden Dreiecken je 2 Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional.

Hieraus folgt:

1. In ähnlichen Dreiecken sind alle 3 Winkel paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportioniert.

2. Man erhält zu einem gegebenen Dreieck ein ähnliches, wenn man in demselben eine Parallele zu einer der drei Seiten zieht.

Fig. 114.



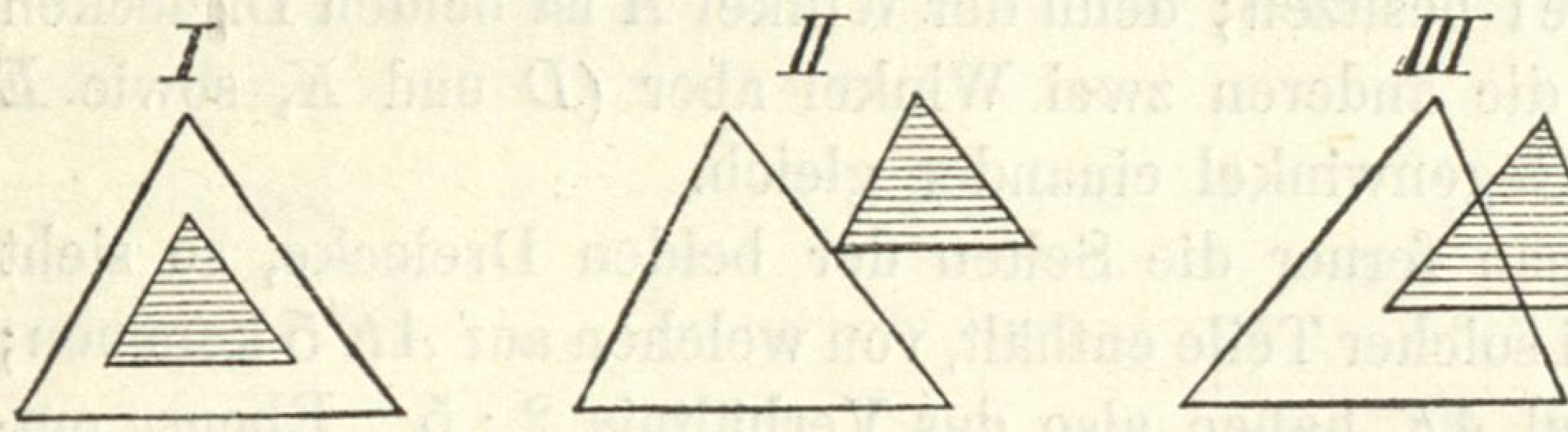
Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 114) Winkel $A = D$, $B = E$ und $C = F$. Nun denke man sich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC gelegt, daß sich die Winkel C und F decken. Die Punkte D und E fallen auf die Punkte G und H. Man erhält hierdurch ein neues Dreieck CGH, welches mit dem Dreiecke DEF kongruent ist. Die Seite GH des neuen Dreieckes ist aber mit AB parallel, da der Winkel G gleich ist dem Winkel D, also auch dieselbe Größe besitzt wie der Winkel A. Hieraus ergibt sich zunächst die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und

CGH. Nun ist aber das Dreieck *CGH* kongruent mit dem Dreiecke *DEF*, weshalb auch das Dreieck *DEF* dem Dreiecke *ABC* ähnlich sein muß.

Hieraus ergibt sich:

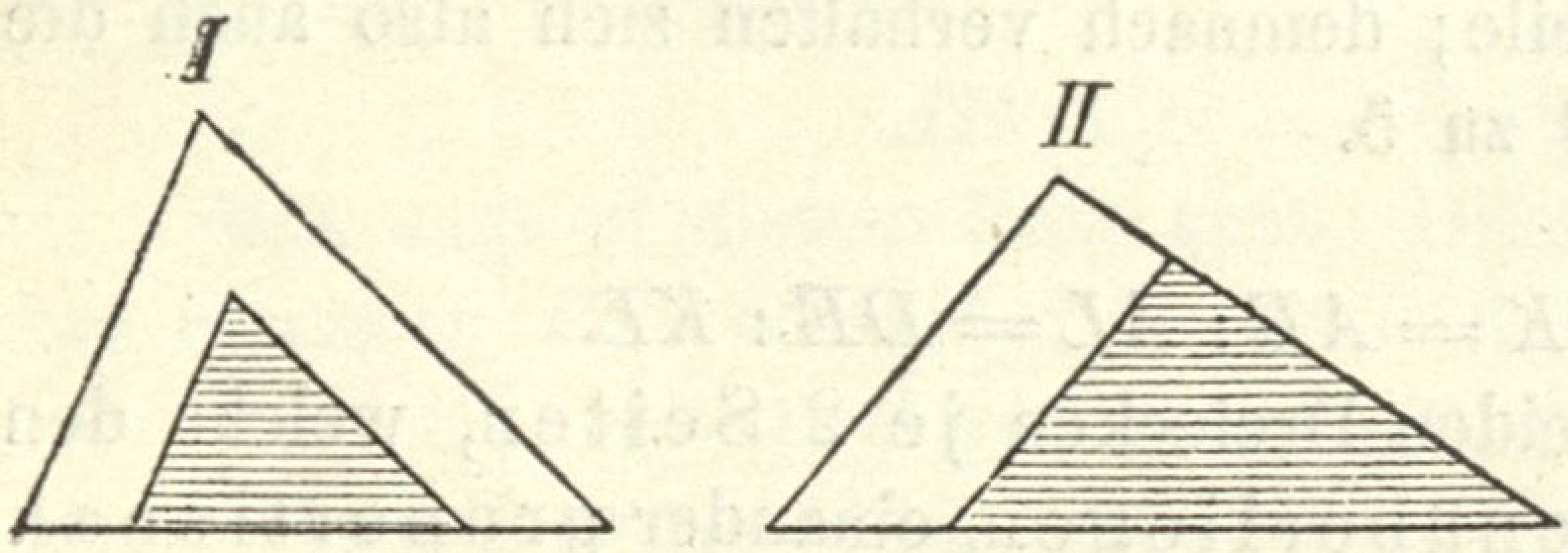
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben alle drei Winkel wechselseitig gleich sind.

Fig. 115.



Mit Rücksicht auf diesen Satz läßt sich leicht zu einem Dreiecke ein ähnliches konstruieren. Man braucht nur zu jeder Seite des gegebenen Dreieckes eine Parallele zu zeichnen (Fig. 115). Die Winkel des neuen Dreieckes sind beziehungsweise den Winkeln des gegebenen Dreieckes gleich, da ihre Schenkel parallel laufen; daher sind beide Dreiecke einander ähnlich. Hierbei sind 3 Fälle möglich: entweder umschließt das größere Dreieck das kleinere, oder die beiden Dreiecke liegen außerhalb einander, oder ihre Flächen decken sich zum Teile. — Zwei ähnliche Dreiecke können ferner auch entweder eine Seite oder auch zwei Seiten teilweise gemeinsam haben (Fig. 116).

Fig. 116.



Aufgabe.

Zeichne 5 beliebige Dreiecke und konstruiere zu jedem derselben ein ähnliches, wie dies in den Fig. 115 und 116 dargestellt ist!

37. Ähnlichkeit der Vierecke und der Polygone.

Zieht man in dem Vierecke *ABCD* (Fig. 117) die Diagonale *AC* und ferner die Gerade $bc \parallel$ zu *BC* und ebenso $cd \parallel CD$, so erhält man ein neues Viereck *Abcd*, welches dem ursprünglichen ähnlich ist. Man hat nämlich: $\triangle Abc \sim ABC$ und $\triangle Acd \sim ACD$; daher Viereck $Abcd \sim ABCD$. Die Winkel beider

Fig. 117.

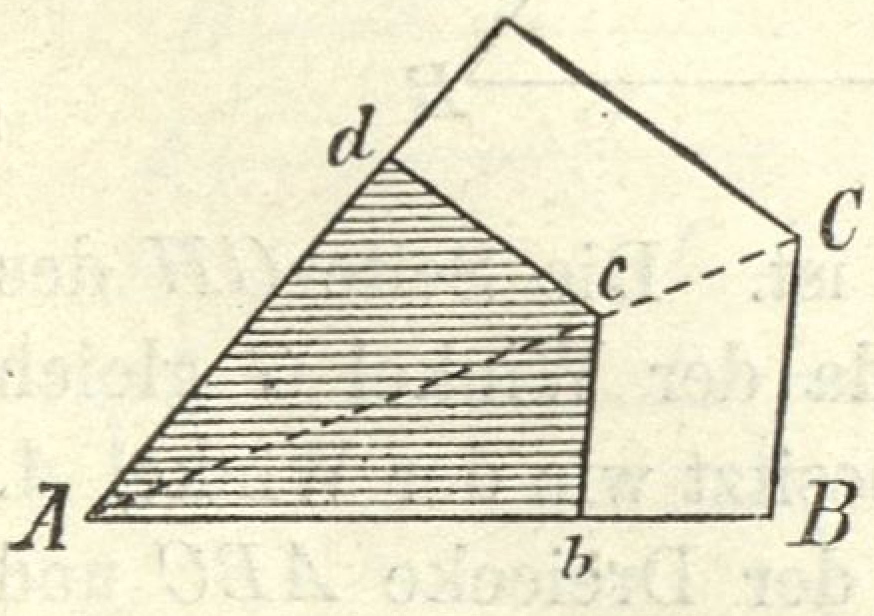
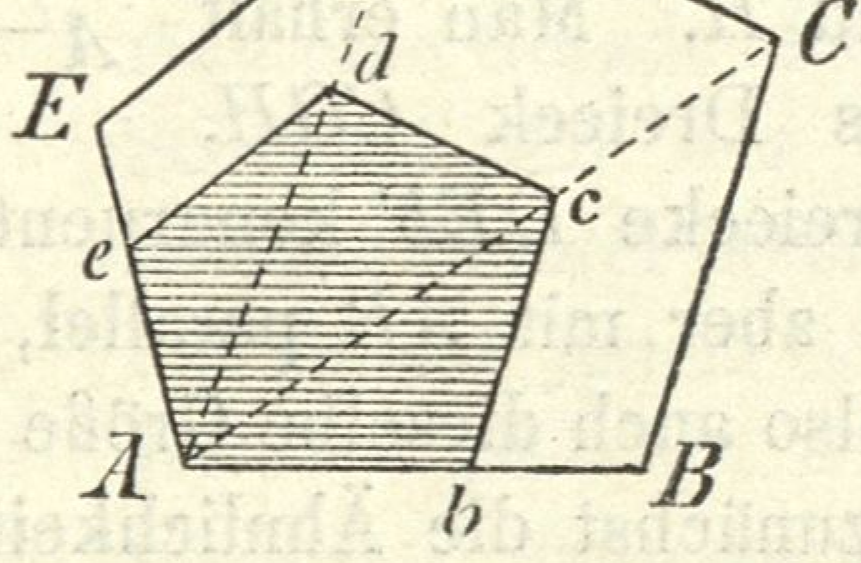


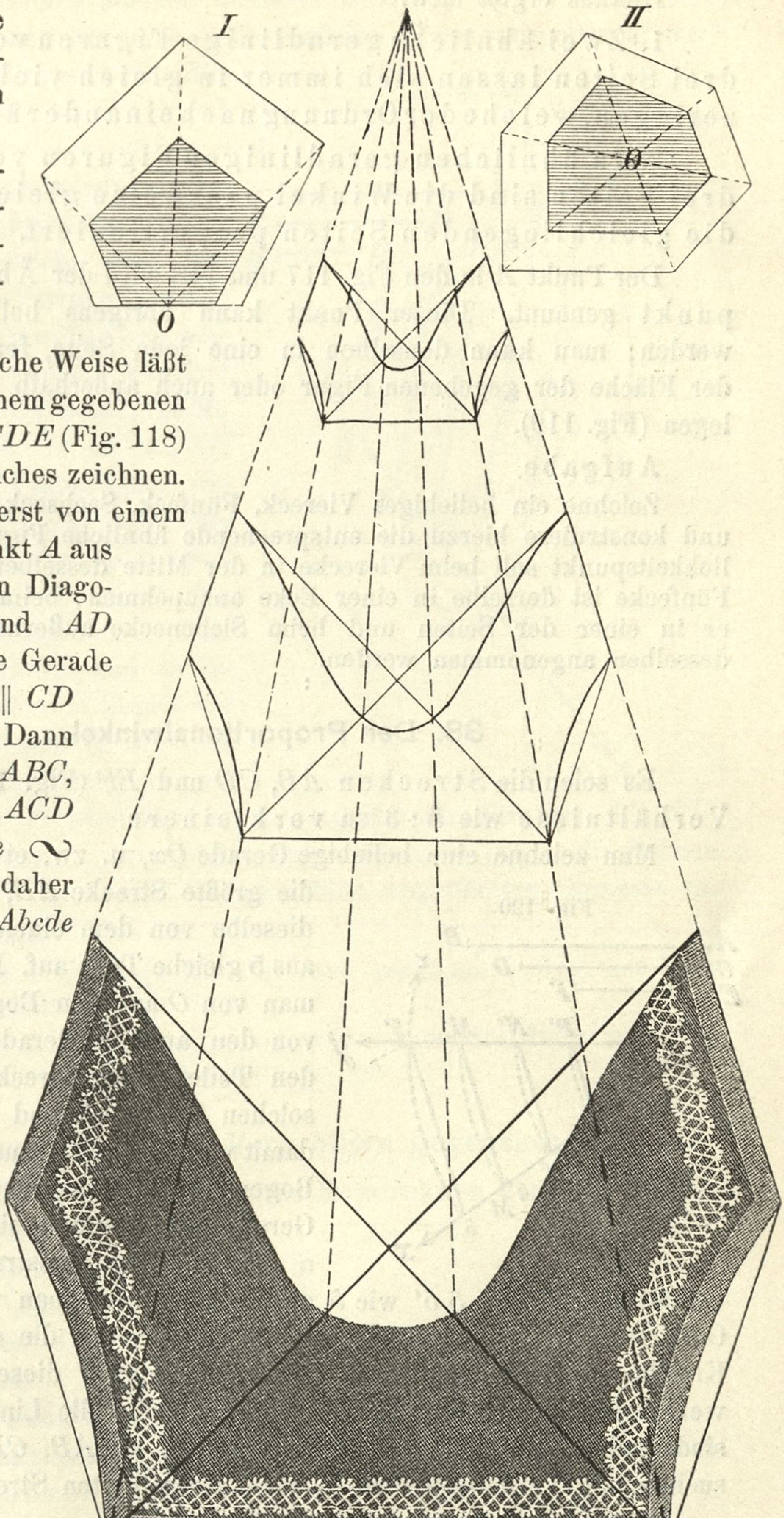
Fig. 118.



Vierecke sind paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten zu einander proportional.

Auf gleiche Weise läßt sich auch zu einem gegebenen Vielecke $ABCDE$ (Fig. 118) leicht ein ähnliches zeichnen. Man ziehe zuerst von einem beliebigen Punkt A aus alle möglichen Diagonalen AC und AD und ferner die Gerade $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ und $de \parallel DE$. Dann ist $\triangle Abc \sim ABC$, $\triangle Acd \sim ACD$ und $\triangle Ade \sim ADE$ und daher auch Vieleck $Abcde \sim ABCDE$. Ferner gilt, wie leicht einzusehen, auch bezüglich der Vielecke der Satz, daß ihre Winkel paarweise gleich groß und die gleichliegenden Seiten proportional sind.

Fig. 119.



Hieraus ergibt sich:

1. Zwei ähnliche geradlinige Figuren von mehr als drei Seiten lassen sich immer in gleich viele Dreiecke zerlegen, welche der Ordnung nach einander ähnlich sind.

2. In ähnlichen geradlinigen Figuren von mehr als drei Seiten sind die Winkel paarweise gleich groß und die gleichliegenden Seiten proportioniert.

Der Punkt A in den Fig. 117 und 118 wird der Ähnlichkeitspunkt genannt. Dieser Punkt kann übrigens beliebig gewählt werden; man kann denselben in eine jede Seite, ferner innerhalb der Fläche der gegebenen Figur oder auch außerhalb derselben verlegen (Fig. 119).

Aufgabe.

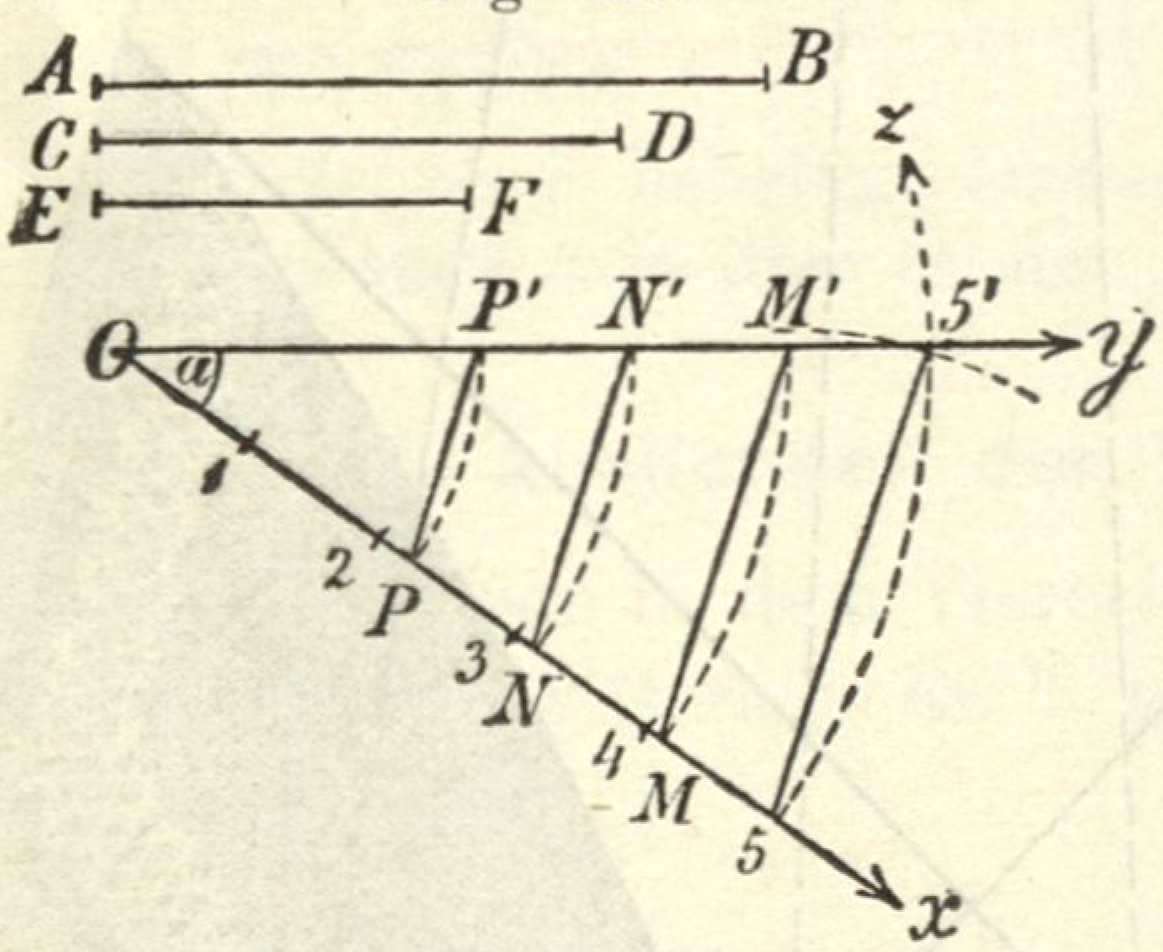
Zeichne ein beliebiges Viereck, Fünfeck, Sechseck und Siebeneck und konstruiere hierzu die entsprechende ähnliche Figur! Der Ähnlichkeitspunkt soll beim Vierecke in der Mitte desselben liegen; beim Fünfecke ist derselbe in einer Ecke anzunehmen; beim Sechsecke soll er in einer der Seiten und beim Siebenecke außerhalb der Fläche desselben angenommen werden.

38. Der Proportionalwinkel.

Es seien die Strecken AB, CD und EF (Fig. 120) nach dem Verhältnisse wie 5 : 3 zu verkleinern.

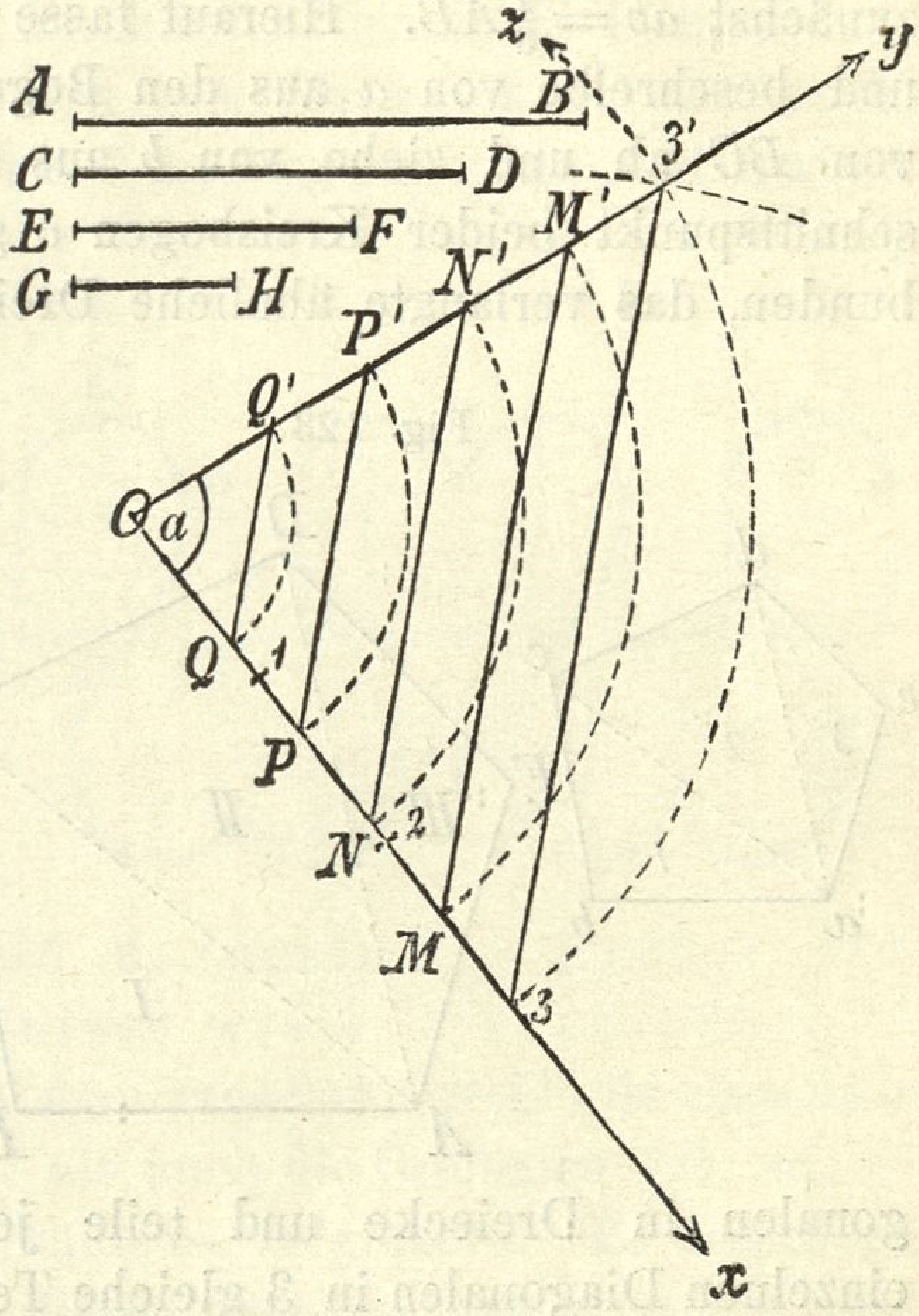
Man zeichne eine beliebige Gerade Ox, u. zw. etwas länger als die größte Strecke AB, und trage auf dieselbe von dem einen Endpunkte O aus 5 gleiche Teile auf. Nun beschreibe man von O aus den Bogen $5z$, nehme von den auf der Geraden Ox liegenden Teilen eine Strecke gleich drei solchen Teilen ab und durchschneide damit vom Punkte 5 aus den früheren Bogen in $5'$. Hierauf ziehe man die Gerade Oy, wodurch sich der Winkel a ergibt. Der Konstruktion zufolge verhält sich $O5$ zu $5\,5'$ wie 5 zu 3. Nun trage man von O aus die Geraden AB, CD und EF auf Ox auf und zeichne die entsprechenden Kreisbogen MM', NN' und PP'. Die Sehnen dieser Kreisbogen, welche in der vorstehenden Zeichnung durch volle Linien angedeutet sind, geben, wie leicht einzusehen ist, die zu AB, CD und EF gesuchten, im Verhältnisse wie 5 zu 3 verkleinerten Strecken an.

Fig. 120.



Mit Hilfe eines solchen Winkels a lassen sich also mehrere gegebene Strecken auf eine sehr einfache Weise proportional verkleinern; deshalb nennt man diesen Winkel auch **Proportionalwinkel**.

Fig. 121.



Der Proportionalwinkel kann auch für **Vergrößerungen** angewendet werden, aber nur dann, wenn die Strecken **nicht über das zweifache** vergrößert werden sollen. Warum?

Wäre die Aufgabe gestellt, die Strecken AB, CD, EF und GH (Fig. 121) im Verhältnisse wie 3 : 4 zu vergrößern, so trage man auf der Geraden Ox von O aus 3 gleiche Teile auf und ziehe den Bogen $3z$; nun fasse man 4 solche Teile in den Zirkel und durchschneide den früheren Bogen von dem Punkte 3 aus in $3'$. Die Strecke $O3$ verhält sich nun zu $3\,3'$ wie 3 : 4. Werden nun die zu vergrößernden Strecken AB, CD, EF und GH von O aus auf Ox aufgetragen, so geben die Sehnen MM', NN', PP' und QQ' die gesuchten vergrößerten Strecken an.

Aufgaben.

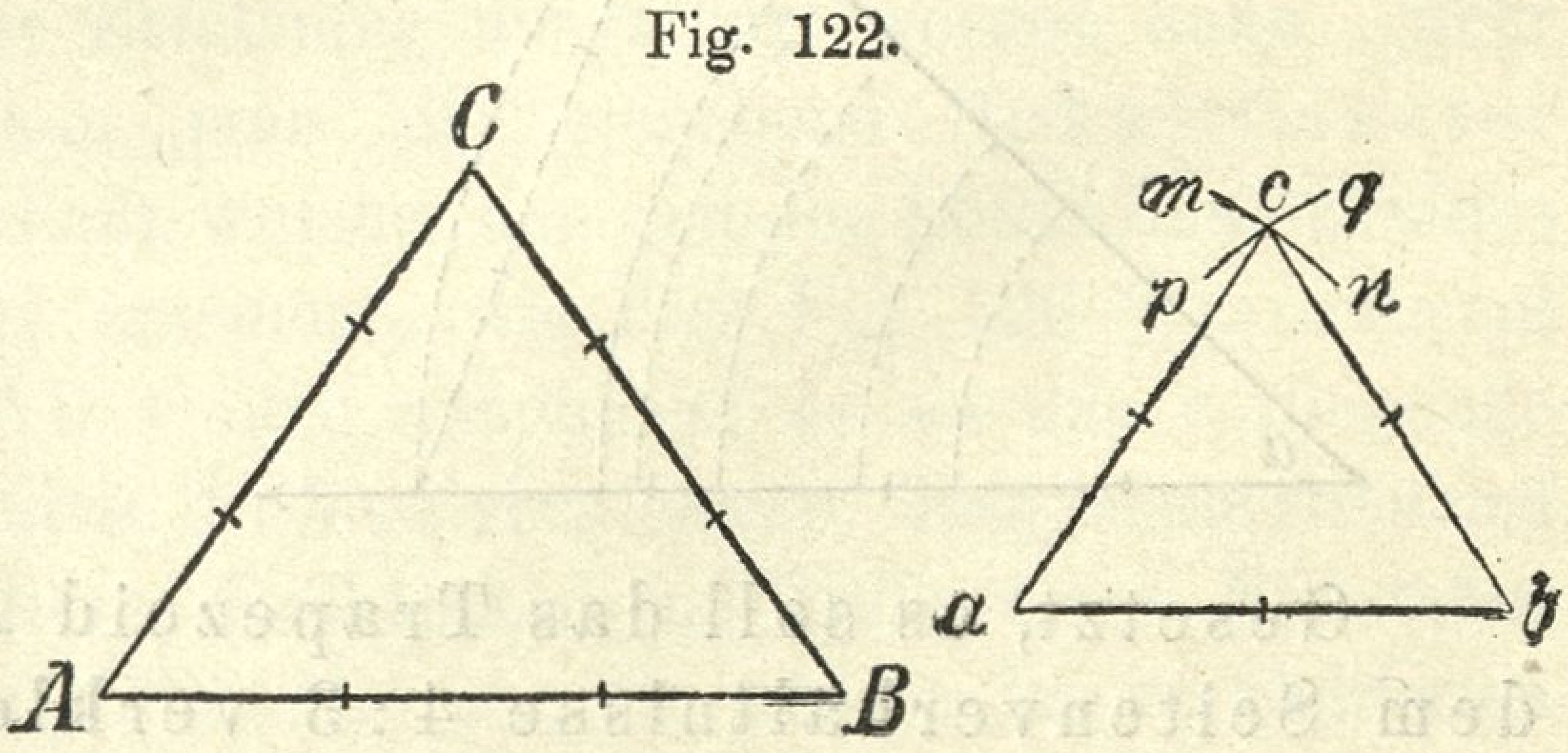
1. Zeichne 4 beliebige Strecken und verkleinere diese mit Hilfe des Proportionalwinkels wie 7 : 3!

2. Zeichne 4 beliebige Strecken und vergrößere diese mit Hilfe des Proportionalwinkels im Verhältnisse wie 2 : 3!

39. Das Verkleinern und Vergrößern gegebener Figuren.

Diese Aufgabe stützt sich auf die Konstruktion ähnlicher Figuren und kann auf verschiedene Weise bewerkstelligt werden. Einige Beispiele mögen dies veranschaulichen.

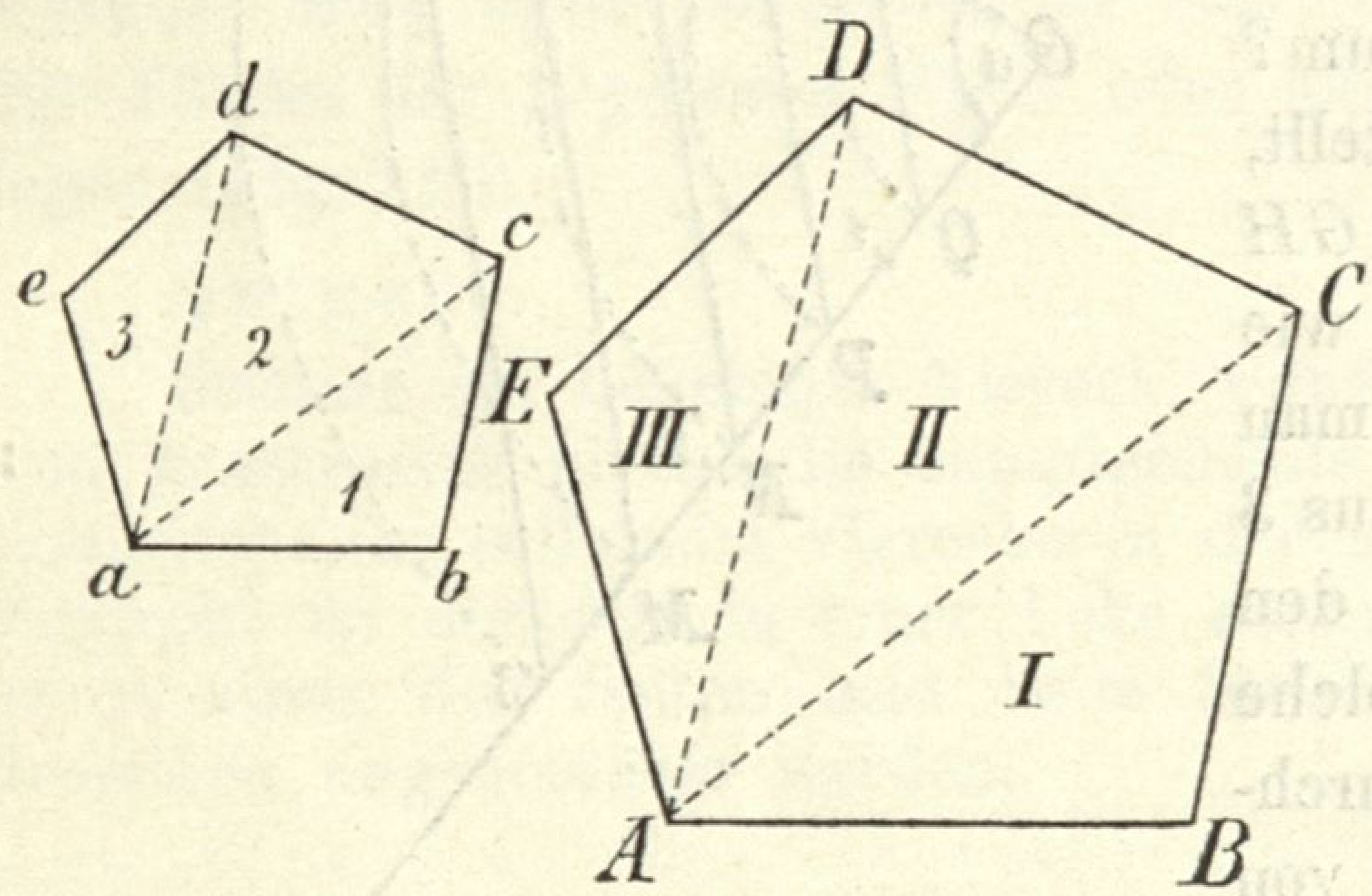
Fig. 122.



Das **Dreieck** ABC (Fig. 122) soll nach dem **Seitenver-**

hältnisse 3 : 2 verkleinert werden. Man teile zunächst jede der Dreieckseiten in 3 gleiche Teile und konstruiere nun mit je 2 solchen Teilen ein neues Dreieck *abc*. Zu diesem Zwecke mache man zunächst $ab = \frac{2}{3} AB$. Hierauf fasse man 2 Teile von *AC* in den Zirkel und beschreibe von *a* aus den Bogen *mn*, dann nehme man 2 Teile von *BC* ab und ziehe von *b* aus den Kreisbogen *pq*. Der Durchschnittspunkt beider Kreisbogen *c* gibt, mit *a* und *b* geradlinig verbunden, das verlangte ähnliche Dreieck.

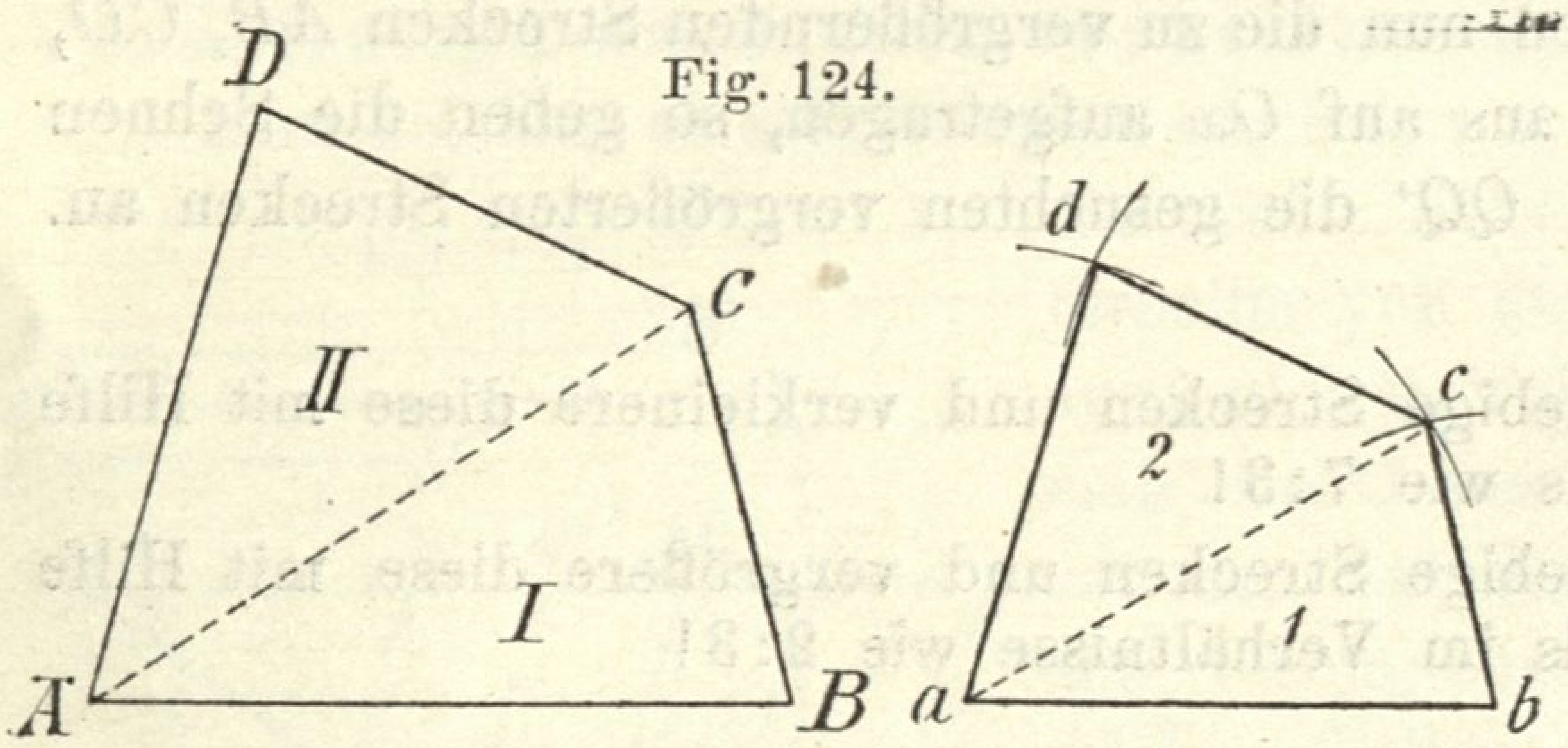
Fig. 123.

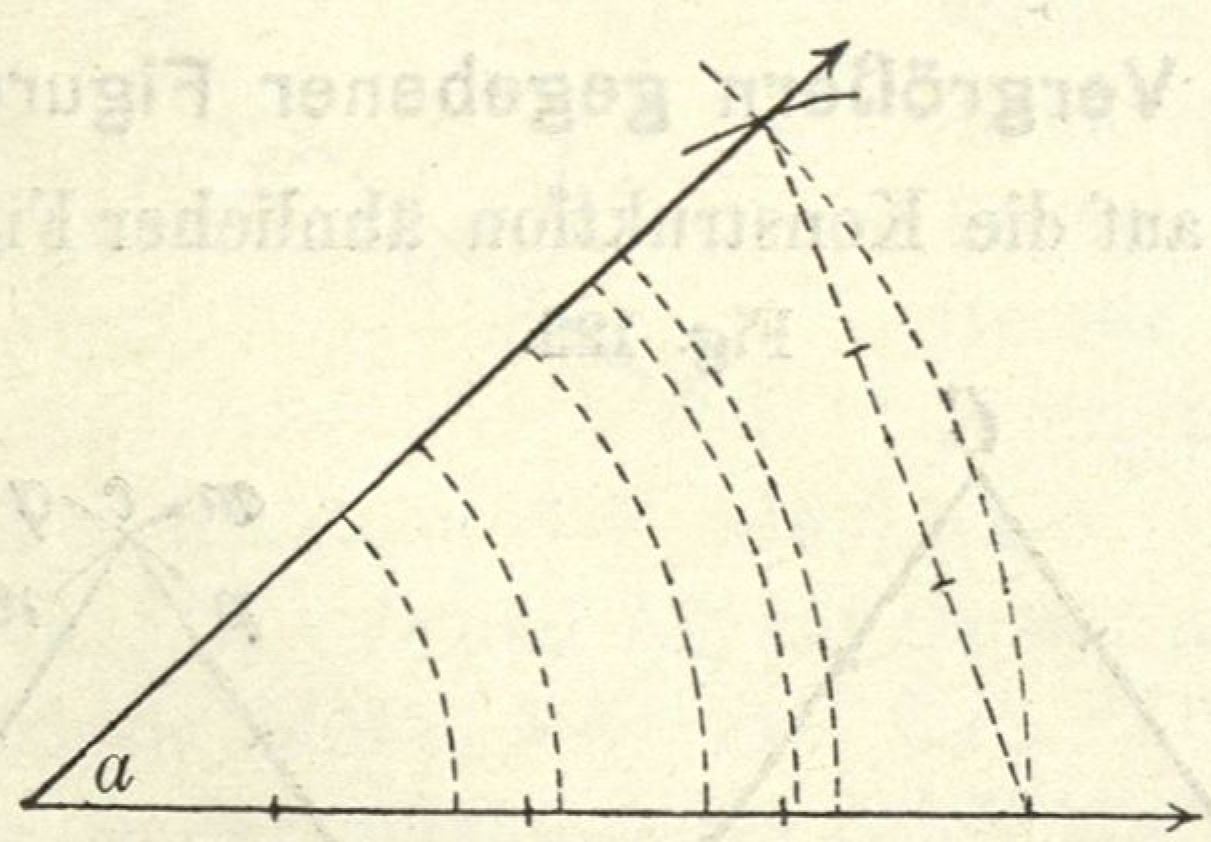


Es sei zu einem gegebenen Vielecke *abcde* (Fig. 123) ein ähnliches Vieleck so zu konstruieren, daß die Seiten der zwei Vielecke ein gegebenes Verhältnis, z. B. 3 : 5, haben.

Man zerlege das gegebene Vieleck von einem Punkte *a* aus durch Diagonalen in Dreiecke und teile jede Seite sowohl als auch die einzelnen Diagonalen in 3 gleiche Teile ein. Nun konstruiere man mit je 5 solchen Teilen zunächst das Dreieck I, hierauf anschließend das Dreieck II und endlich noch das Dreieck III. — Die Zerlegung in Dreiecke könnte auch von einem Punkte im Innern des gegebenen Vieleckes aus geschehen.

Fig. 124.



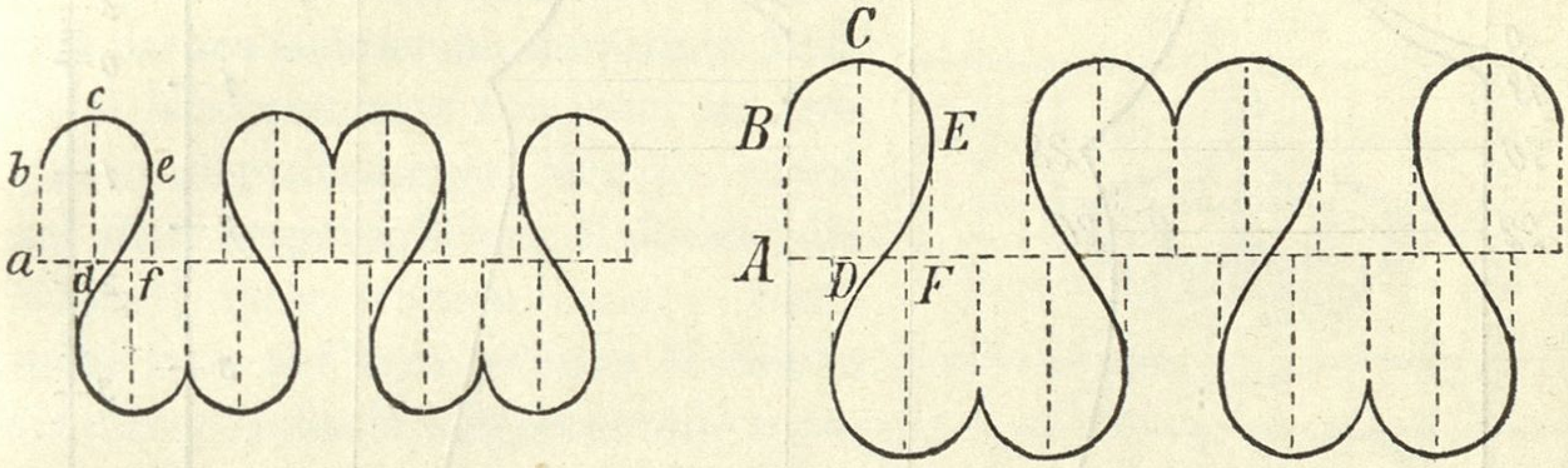


Zum Vergrößern oder zum Verkleinern der Seiten bedient man sich auch sehr vorteilhaft des Proportionalwinkels.

Gesetzt, es soll das Trapezoid *ABCD* (Fig. 124) nach dem Seitenverhältnisse 4 : 3 verkleinert werden. Man zeichne zunächst den zu diesem Verhältnisse gehörigen Proportionalwinkel a. Nun verkleinere man mit Hilfe desselben sowohl die einzelnen Seiten als auch die Diagonale AC und konstruiere aus diesen Stücken zuerst das Dreieck abc und anschließend hieran das Dreieck acd.

Das Vergrößern und Verkleinern von Figuren kann aber auch, ähnlich wie das Kopieren, mittelst Abszissen und Ordinaten durchgeführt werden.

Fig. 125.



Man soll das in Fig. 125 dargestellte Muster für Litzenaufnähen im Verhältnisse wie 5 : 7 vergrößern.

Wie leicht einzusehen ist, muß man zunächst sowohl alle einzelnen Abszissenabstände (ad, df u. s. w.) als auch die Ordinaten (ab, cd, ef u. s. w.) nach dem verlangten Verhältnisse vergrößern. Es unterliegt sodann keiner Schwierigkeit, aus diesen Stücken das verlangte vergrößerte Muster zu konstruieren.

Aufgaben.

1. Das in Fig. 107 dargestellte Vieleck soll nach dem Seitenverhältnisse 2:3 vergrößert werden.

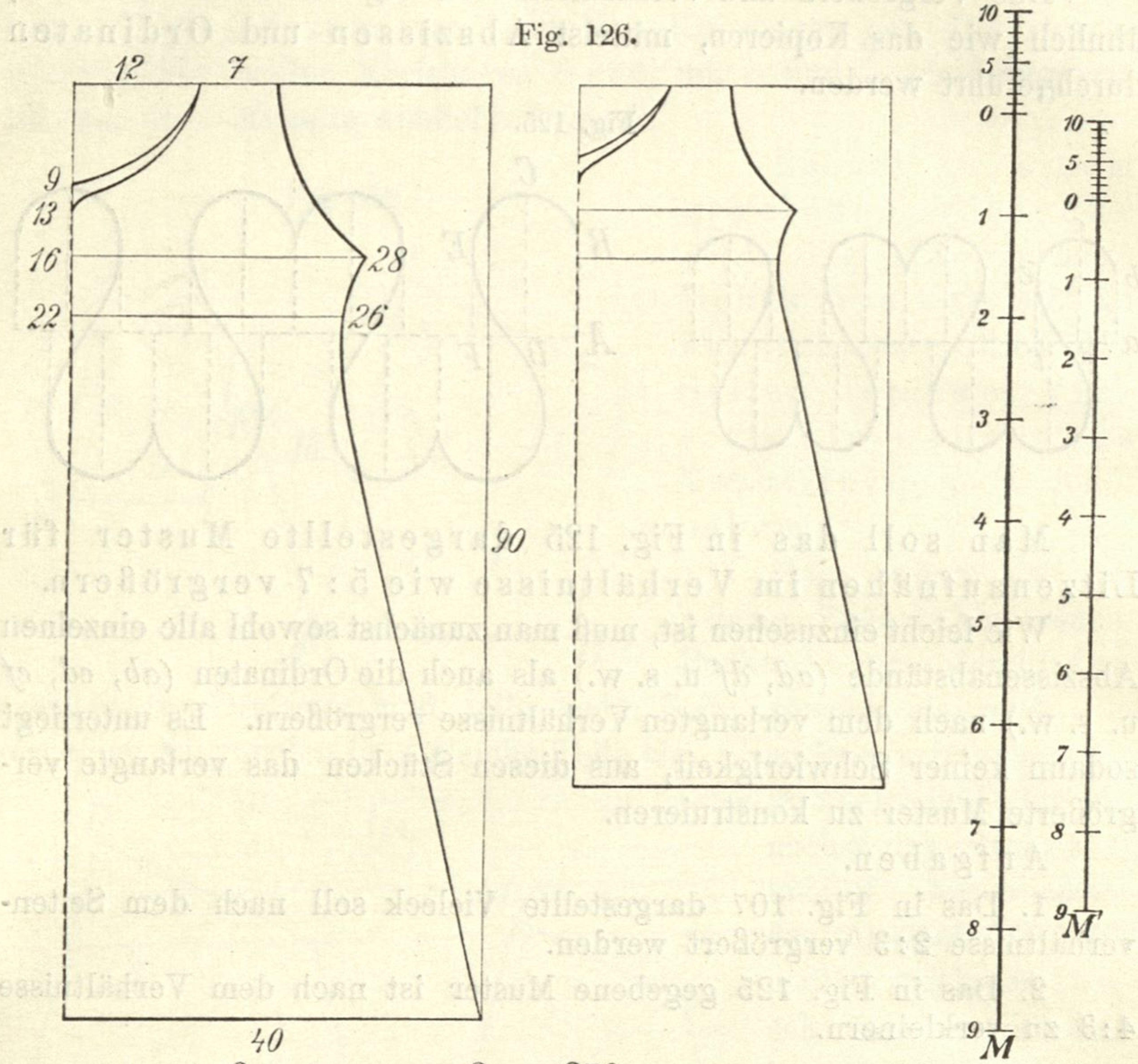
2. Das in Fig. 125 gegebene Muster ist nach dem Verhältnisse 4:3 zu verkleinern.

40. Das Verkleinern und Vergrößern von Schnittmustern.

Auch hierbei muß man in erster Linie die Längenausdehnungen des Originals nach dem gegebenen Verhältnisse verkleinern oder vergrößern, worauf mit diesen geänderten Strecken die neue Zeichnung ausgeführt werden kann. Sehr zweckmäßig ist es, wenn man das gegebene Schnittmuster in ein Rechteck einschließt, welches den geraden Linien des Schnittes möglichst angepaßt erscheint, wie dies Fig. 126 (Frauenhemd ohne Sattel) darstellt. Wir wollen annehmen, es sei das vorliegende Schnittmuster im Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern. Man messe zunächst die Länge und Breite dieses Rechteckes mit Hilfe eines Maßstabes möglichst genau (bis auf Millimeter) ab; für unsern im verkleinerten

Maßstabe gezeichneten Schnitt ergeben sich 9 *cm* und 4 *cm*. Die einzelnen Maßzahlen multipliziert man nun mit der dem gegebenen Verhältnisse entsprechenden Reduktionszahl $\left(\text{hier } \frac{3}{4}\right)$, um die Länge und Breite des neuen Rechteckes zu erhalten.

Fig. 126.



$$9\,cm \times \frac{3}{4} = 90\,mm \times \frac{3}{4} = \frac{270\ mm}{4} = 67{\cdot}5\,mm = 6\ cm\ 7\tfrac{1}{2}\,mm$$

(Länge des neuen Rechteckes).

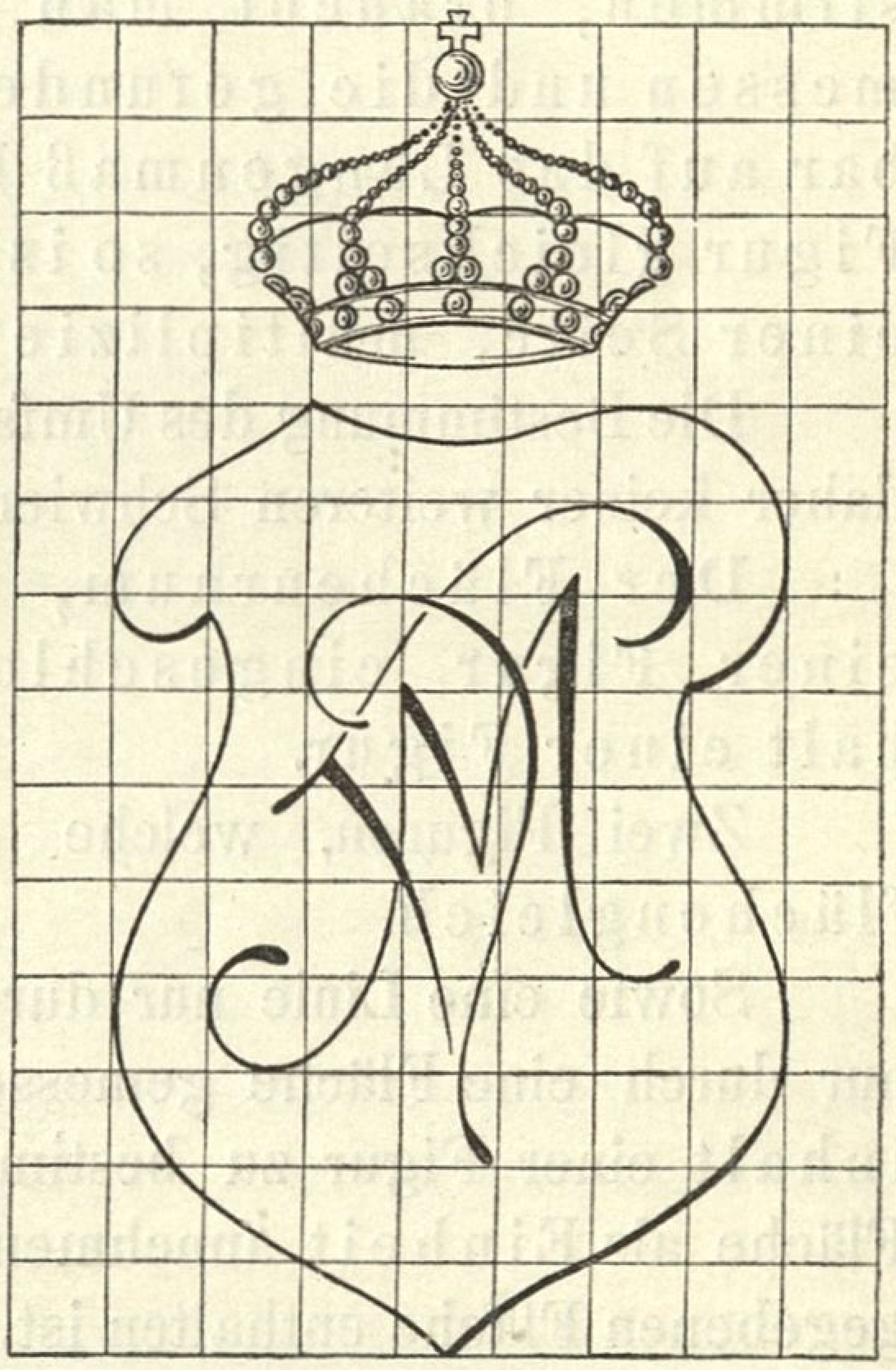
$$4\ cm \times \frac{3}{4} = 40\ mm \times \frac{3}{4} = \frac{120\ mm}{4} = 30\ mm = 3\ cm$$

(Breite des neuen Rechteckes).

Nun konstruiere man aus der so gefundenen Länge- und Breiteangabe das neue Rechteck, in welches der zu verkleinernde Schnitt eingezeichnet werden soll. Hierauf werden am Originale die einzelnen Strecken möglichst genau abgemessen und ihre Längen wieder, wie dies oben gezeigt wurde, gehörig reduziert. Man hat nun nur die eben gefundenen Längen in das neue Rechteck einzutragen, worauf mit freier Hand die noch notwendigen Verbindungslinien zu ziehen sind.

Da die Umrechnung der Maßzahlen des Originales, besonders bei verwickelteren Reduktionszahlen, eine umständliche und zeitraubende Arbeit mit sich bringt, erscheint es empfehlenswert, sich hierfür einen eigenen, der jeweiligen Verkleinerung oder Vergrößerung angepaßten Maßstab zu konstruieren. In Fig. 126 stellt M den gewöhnlichen und M' den sogenannten verjüngten Maßstab vor; in letzterem beträgt jede Längeneinheit $\frac{3}{4}$ des ursprünglichen Maßes. Beim praktischen Gebrauche derartiger Maßstäbe bestimmt man von jeder am Originale abgenommenen Strecke zuerst auf dem ursprünglichen Maßstabe die Maßzahl ihrer wahren Länge. Dann sucht man auf dem zweiten Maßstabe die dieser Maßzahl entsprechende reduzierte Länge auf und setzt nun aus den so geänderten Strecken die neue Figur zusammen.

Fig. 127.



Häufig bedient man sich auch zum Vergrößern und Verkleinern der einzelnen Strecken des früher erwähnten Proportionalwinkels.—

Ist das Original in ein Quadratnetz eingezeichnet, so hat man die Quadratseiten nur dem verlangten Verhältnisse gemäß zu verkleinern oder zu vergrößern, worauf die Eintragung der Figur in das neue Netz erfolgt. Auf ähnliche Weise muß man verfahren, wenn das Original mit einem stigmographischen Netze versehen ist.

Die Netzmethode findet namentlich im geographischen Unterrichte bei Herstellung von Kartenskizzen reichliche Anwendung.

Aufgaben.

1. Die in Fig. 108 dargestellten Muster sind im Verhältnisse 4 : 5 mit Anwendung der entsprechenden Reduktionszahl zu vergrößern.

2. Vergrößere die Schnittmuster in Fig. 109 nach dem Verhältnisse 3 : 5!

3. Vergrößere das in Fig. 127 gegebene Monogramm nach dem Verhältnisse 2 : 3!

III. Abschnitt.

Umfang und Flächeninhalt der Figuren.

41. Umfang und Flächeninhalt im allgemeinen.

Alle Grenzlinien einer Figur zusammengenommen nennt man deren Umfang.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, braucht man nur die Seiten derselben zu messen und die gefundenen Maßzahlen, die sich offenbar auf das Längenmaß beziehen, zu addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite, multipliziert mit der Anzahl der Seiten.

Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt daher keiner weiteren Schwierigkeit.

Der Flächenraum, welcher von den Grenzlinien einer Figur eingeschlossen wird, heißt Flächeninhalt einer Figur.

Zwei Figuren, welche gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

Sowie eine Linie nur durch eine Linie, ebenso kann eine Fläche nur durch eine Fläche gemessen werden. Um daher den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, muß man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft diese in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmeter (m^2), ein Quadratdezimeter (dm^2) etc., je nachdem die Seite einem Meter, Dezimeter etc. gleich ist.

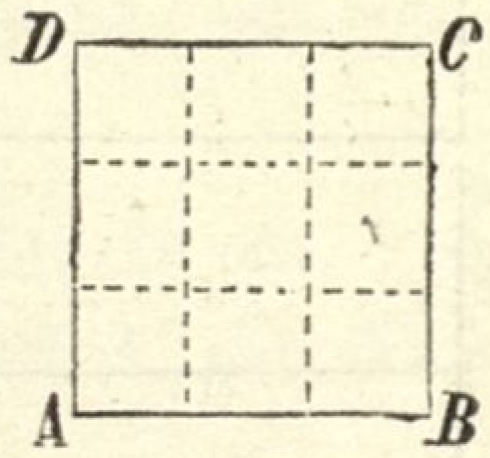
Eine Fläche messen heißt demnach untersuchen, wie viele Quadratmeter, Quadratdezimeter etc. die Fläche enthält.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht übrigens nicht durch unmittelbares Auftragen der genannten Quadratmaße auf die zu messende Fläche, da dies mühsam und meistens auch unausführbar wäre. Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt mittelbar, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße mißt und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch Rechnung ermittelt, wie im folgenden gezeigt werden soll.

42. Das Quadrat.

Die Seite des Quadrates *ABCD*, (Fig. 128) messe 3 *dm*. Teilt man jede Seite in 3 gleiche Teile, wovon jeder 1 *dm* lang ist, und verbindet dann die gegenüberliegenden Teilungspunkte durch gerade Linien, so zerfällt das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes 1 dm^2 vorstellt; und zwar enthält der Streifen längs der Seite *AB* 3 dm^2, der darüber befindliche Streifen ebenfalls 3 dm^2 und der dritte Streifen auch 3 dm^2. Man hat also im ganzen 3mal 3 $dm^2 = = 9\ dm^2$.

Fig. 128.



Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 4 *cm* ist, und bestimme auf gleiche Weise, wie viel cm^2 es enthält!

D e r F l ä c h e n i n h a l t e i n e s Q u a d r a t e s w i r d g e f u n d e n, i n d e m m a n d i e M a ß z a h l e i n e r S e i t e m i t s i c h s e l b s t m u l t i p l i z i e r t, d. i. z u r z w e i t e n P o t e n z e r h e b t.

Daher kommt es, daß man auch im Rechnen die z w e i t e P o t e n z einer Zahl das Q u a d r a t derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch *s* und den Flächeninhalt desselben durch *F*, so ist $F = s^2$.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; ist z. B. die Seite in Metern ausgedrückt, so wird die Zahl, welche man als Flächeninhalt bekommt, Quadratmeter anzeigen; ist die Seite des Quadrates in Dezimetern angegeben, so erhält man auch den Flächeninhalt in Quadratdezimetern.

(Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates bekannt ist und man die L ä n g e e i n e r S e i t e finden will, so braucht man nur eine Zahl zu suchen, welche, mit sich selbst multipliziert, den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man muß aus dem bekannten Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen. Es ist also $s = \sqrt{F}$,)

Ein Quadrat (Fig. 129), dessen jede Seite 1 dm = 10 cm beträgt, hat $10 \times 10\ cm^2 = 100\ cm^2$. Ein solches Quadrat ist nun 1 dm^2. Also ist

$$1\ dm^2 = 100\ cm^2.$$

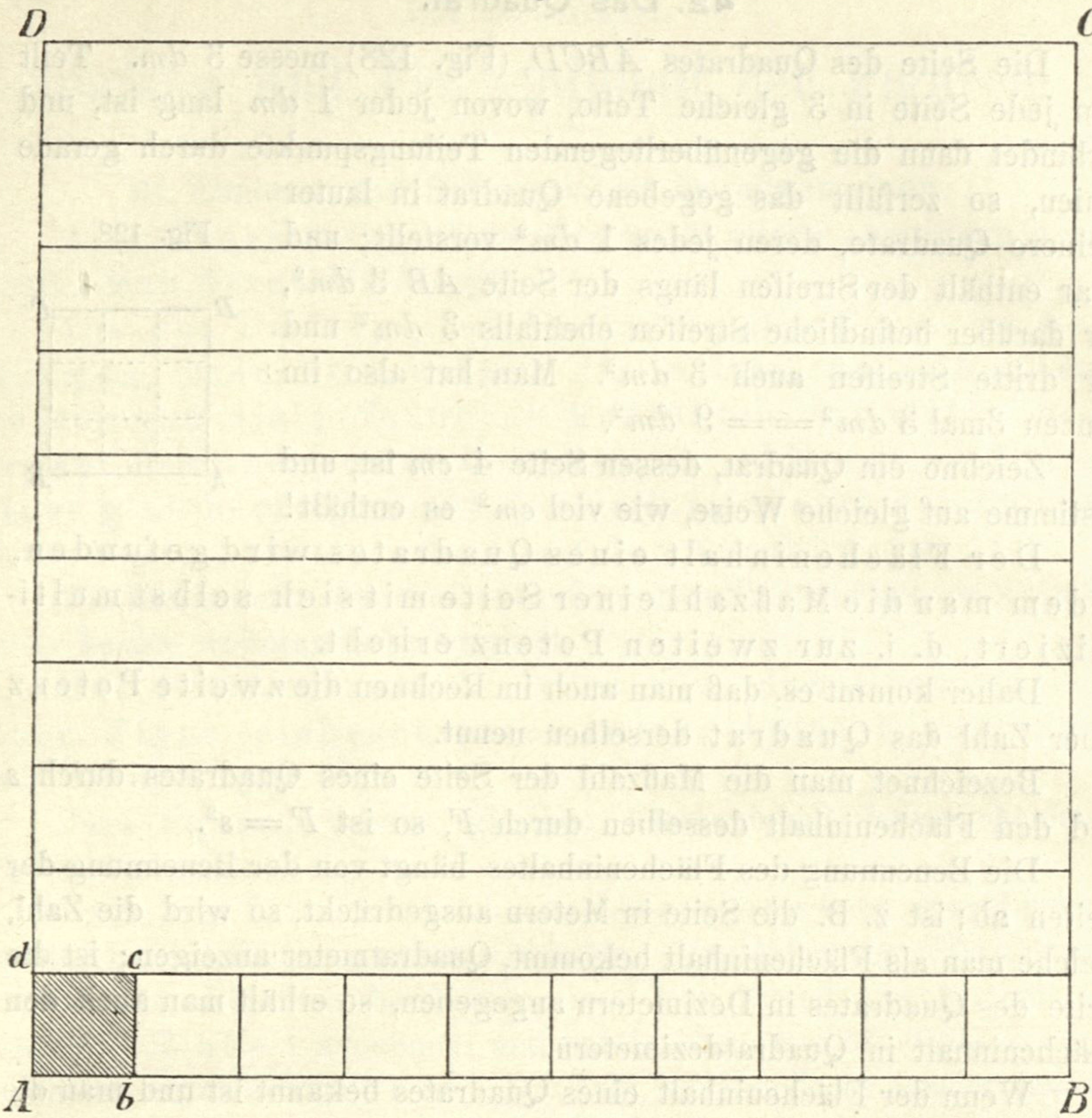
Auf gleiche Weise kann man zeigen, daß 1 $m^2 = 100\ dm^2$, 1 $cm^2 = 100\ mm^2$ ist, u. s. f.; man hat daher:

$1\ \mu m^2 = 100\ km^2$	$1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ km^2 = 1000000\ m^2$	$1\ dm^2 = 100\ cm^2$

$$1\ cm^2 = 100\ mm^2.$$

Beim B o d e n m a ß e heißt eine Fläche von 100 m^2 ein A r, eine Fläche von 100 Ar ein H e k t a r. Ein Ar ist 10 *m* lang und 10 *m* breit. Ein Hektar ist 100 *m* lang und 100 *m* breit.

Fig. 129.



Aufgaben.

1. Die Seite eines Quadrates beträgt *a)* 21 *m*, *b)* 5 *m* 4 *dm*, *c)* 3 *m* 5 *dm* 9 *cm*, *d)* 0·715 *m*; wie groß ist der Umfang, wie groß der Flächeninhalt?

2. Der Umfang eines Quadrates ist 23 *m* 2 *dm*; wie groß ist *a)* die Seite, *b)* der Flächeninhalt?

3. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist 15 m^2 52 dm^2 36 cm^2; wie groß ist die Seite, wie groß der Umfang?

4. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt *a)* 376·36 dm^2, *b)* 2 m^2 13 dm^2 16 cm^2, *c)* 12·3201 m^2 ist?

5. Wieviel Spitzen sind zur glatten Umrandung einer quadratischen Tischdecke von 1·25 *m* Seitenlänge erforderlich, wenn wegen der Ecken 24 *cm* hinzugerechnet werden müssen?

6. Wieviel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 *m* Seitenlänge, wenn man das m^2 mit 11 K bezahlt?

7. Ein quadratischer Acker kostete 1250 K; wieviel *m* beträgt eine Seite desselben, wenn 1 *a* zu 8 K gerechnet wurde?

8. Die Seite eines Quadrates ist 3 *dm*, die eines zweiten Quadrates 12 *dm*; wie verhalten sich *a)* die Umfänge, *b)* die Flächeninhalte der beiden Quadrate?

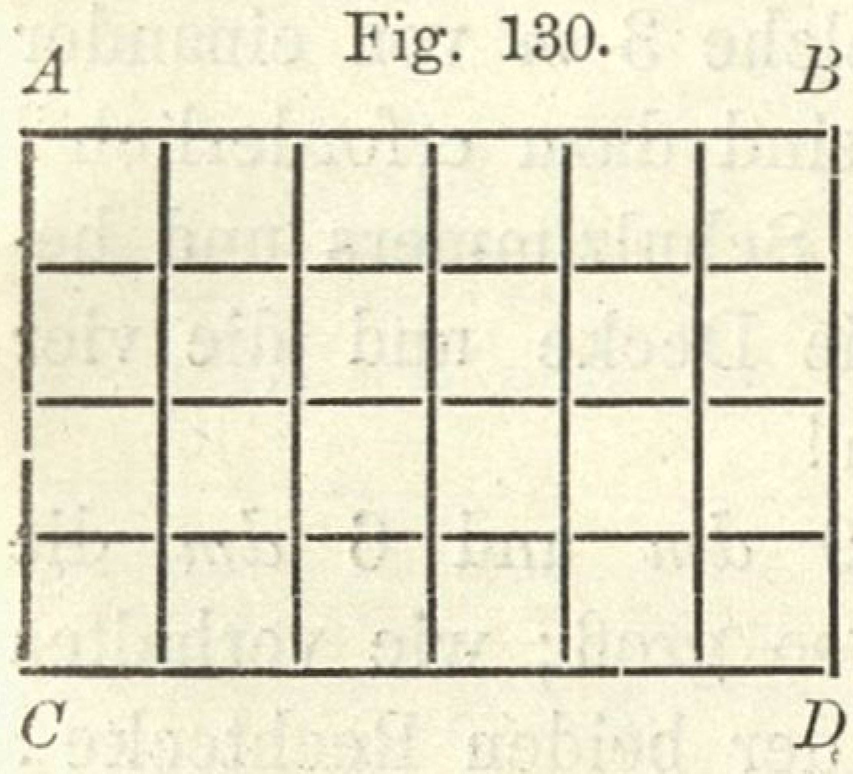
9. Ein quadratischer Hof von 12 *m* Seitenlänge soll mit quadratischen Steinplatten von 16 *dm* Umfang gepflastert werden; wieviel solche Steinplatten sind erforderlich?

10. An der Fläche eines Quadrates, dessen Seite 48 *cm* ist, wird der Rand 3 *cm* breit vergoldet; wieviel dm^2 beträgt die Vergoldung?

11. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58 *m* 5 *dm* ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1 *m* 2 *dm* haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

43. Das Rechteck.

Fig. 130.



Es sei in dem Rechtecke *ABDC* (Fig. 130) die Grundlinie $CD = 6$ *cm* und die Höhe $AC = 4$ *cm*. Teilt man nun *CD* in 6, ferner *AC* in 4 gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte mit den Seiten parallele Linien, so ist ein jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 cm^2. Man erhält 4 Streifen solcher Quadrate von je 6 cm^2; der Flächeninhalt des Rechteckes *ABDC* beträgt daher 4mal 6 cm^2 $= 24\ cm^2$.

Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse findet man, daß ein Rechteck, welches 7 *m* lang und 3 *m* breit ist, $3 \times 7\ m^2 = 21\ m^2$ enthält; daß der Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Grundlinie und Höhe 8 *dm* und 5 *dm* sind, $5 \times 8\ dm^2 = 40\ dm^2$ beträgt.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe oder der Länge mal der Breite.

Ist der Flächeninhalt eines Rechteckes und zugleich die Grundlinie bekannt, so findet man die Höhe, indem man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividiert. Ebenso wird die **Grundlinie** gefunden, indem man den Flächeninhalt durch die Höhe dividiert.

Bezeichnet G die Grundlinie, H die Höhe eines Rechteckes und F den Flächeninhalt desselben, so ist

$$F = G.H,\ G = \frac{F}{H},\ H = \frac{F}{G}.$$

Aufgaben.

1. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt folgender Rechtecke:

a) Länge $9 \cdot 2\ m$, Breite $5 \cdot 8\ m$;
b) „ $12\ m\ 3\ dm$, „ $9\ m\ 2\ dm$;
c) „ $3 \cdot 215\ m$, „ $1 \cdot 064\ m$!

2. Der Umfang eines Rechteckes beträgt $87\ m\ 4\ dm$, die kürzere Seite $18\ m\ 4\ dm$; wie groß ist *a)* die längere Seite, *b)* der Flächeninhalt?

3. Ein Spiegel mit Rahmen ist $5\ dm\ 8\ cm$ breit und $8\ dm\ 2\ cm$ hoch; wie groß ist der Umfang?

4. Längs der Hecke eines Gartens, welcher $33\ m$ lang und $21\ m$ breit ist, werden ringsum Maulbeerbäume, welche $3\ m$ von einander abstehen, gepflanzt; wie viel Maulbeerbäume sind dazu erforderlich?

5. Miß die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers und berechne wie viel Flächenraum der Boden, die Decke und die vier Wände (Tür und Fenster mitgerechnet) haben!

6. Die Seiten eines Rechteckes sind $9\ dm$ und $6\ dm$, die Seiten eines zweiten Rechteckes sind doppelt so groß; wie verhalten sich *a)* die Umfänge, *b)* die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

7. Berechne die Höhe der Rechtecke von

a) $9\ m^2$ Flächeninhalt und $3 \cdot 6\ m$ Grundlinie;
b) $46 \cdot 92\ dm^2$ „ „ $9 \cdot 2\ dm$ „ ;
c) $22 \cdot 3767\ m^2$ „ „ $5\ m\ 29\ cm$ „ !

8. Berechne die Grundlinie der Rechtecke von

a) $24\ m^2$ Flächeninhalt und $3 \cdot 2\ m$ Höhe;
b) $26\ dm^2\ 55\ cm^2$ „ „ $4\ dm\ 5\ cm$ „ ;
c) $5444 \cdot 16\ cm^2$ „ „ $63 \cdot 6\ cm$ „ !

9. Wie groß ist die Fläche einer Tischplatte, deren Länge $1 \cdot 2\ m$ und deren Breite $\frac{5}{8}$ von der Länge beträgt?

10. Eine gehäkelte Bettdecke ist aus Quadraten von je $9\ cm$ Seitenlänge zusammengesetzt; wie viel Quadrate sind erforderlich, wenn die Decke $2 \cdot 7\ m$ lang und $1 \cdot 71\ m$ breit ist?

11. Ein Bettvorleger von $75\ cm$ Breite und $1 \cdot 5\ m$ Länge soll ringsum mit einem $15\ cm$ breiten Plüschstreifen besetzt werden; wie viel

cm sind davon erforderlich, wenn der Plüsch 1·5 *m* Breite hat, und wie teuer kommt der Besatz, wenn das *m* dieses Stoffes 13·2 K kostet?

12. Wie viel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?

13. Ein Acker enthält 63·84 Ar, seine Länge ist 42·56 *m*; wie groß ist seine Breite?

14. Jemand vertauscht einen Acker, welcher 746 m^2 20 dm^2 Flächeninhalt hat, gegen einen andern von gleichem Inhalte, welcher 18 *m* 2 *dm* breit ist; wie lang muß dieser Acker sein?

15. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *dm* 5 *cm* Höhe; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?

16. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, 34 *m* 4 *dm* lang und 19 *m* 2 *dm* breit, und bezahlt das m^2 zu 11 K; wie viel kostet der Bauplatz?

17. Wie viel kostet die Verglasung von 8 Fenstern, deren jedes im Lichten 0·9 *m* breit und 1·5 *m* hoch ist, wenn man für 1 m^2 Verglasung 5 K 60 h rechnet?

18. Ein Fußboden von 5 *m* Länge und 4·5 *m* Breite wurde mit Lack gestrichen; wie teuer kommt 1 m^2 Anstrich, wenn sich die Kosten auf 8 K 10 h beliefen?

19. Ein Fußboden von 7·5 *m* Länge und 6·4 *m* Breite soll mit harten Bretteln belegt werden; wie viel wird der Tischler dafür verlangen, wenn er 1 m^2 Belegung mit 8 K 50 h berechnet?

20. Ein Quadrat ist flächengleich einem Rechtecke von 54 *m* Länge und 24 *m* Breite; um wie viel ist der Umfang des Quadrates kleiner als der Umfang des Rechteckes?

21. *A* hat zwei Gärten von gleicher Größe, einen quadratischen von 56 *m* Seitenlänge und einen rechteckigen von 49 *m* Breite; um jeden dieser Gärten will er eine Hecke anpflanzen lassen; um wie viel Meter wird die Hecke um den rechteckigen Garten länger sein als die um den quadratischen?

22. 6 größere Türen, jede 2·3 *m* hoch und 1·3 *m* breit, und 4 kleinere Türen, jede 1·9 *m* hoch und 1 *m* breit, sollen von innen und außen mit Ölfarbe angestrichen werden; wie teuer kommt der Anstrich, wenn das m^2 1 K 70 h kostet?

23. Der Umfang eines Rechteckes, dessen Seiten sich wie 5 : 7 verhalten, beträgt 47 *m* 4 *cm*; wie lang und wie breit ist es?

24. In einem Rechtecke, dessen Flächeninhalt 79 m^2 35 dm^2 beträgt, verhält sich die Länge zur Breite wie 5 : 3; wie groß ist jede Seite desselben und wie groß dessen Umfang?

25. Die Länge eines Tischteppiches beträgt um 32 *cm* mehr als die Breite. Zur Einfassung desselben waren 5 *m* 72 *cm* Borten notwendig. Welche Länge und welche Breite hat dieser Teppich?

26. Ein Zimmer von der Form eines Rechteckes wurde mit Wachs eingelassen, wobei das m^2 mit 16 *h* berechnet erscheint. Die Länge verhält sich zur Breite wie 7 : 5, u. zw. mißt die eine Ausdehnung um 2 *m* 84 *cm* mehr als die andere. Wie hoch kam das Einlassen des Fußbodens zu stehen?

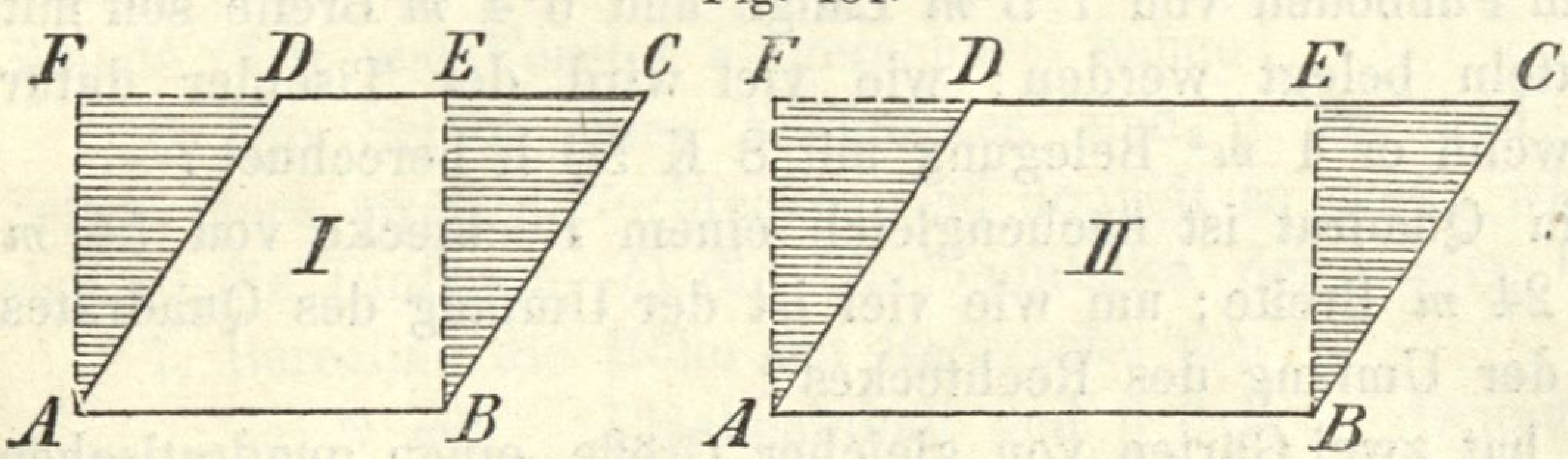
27. Ein Quadrat von 36 *cm* Seitenlänge hat denselben Inhalt wie ein Rechteck, dessen kürzere Seite 27 *cm* mißt. Welchen Umfang und Inhalt hat das Rechteck?

28. Ein Hof, welcher 45 *m* 72 *cm* lang und 38 *m* 4 *cm* breit ist, soll mit quadratischen Steinen, deren jede Seite 12 *cm* beträgt, gepflastert werden; wie viele Steine sind notwendig?

44. Das schiefwinklige Parallelogramm.

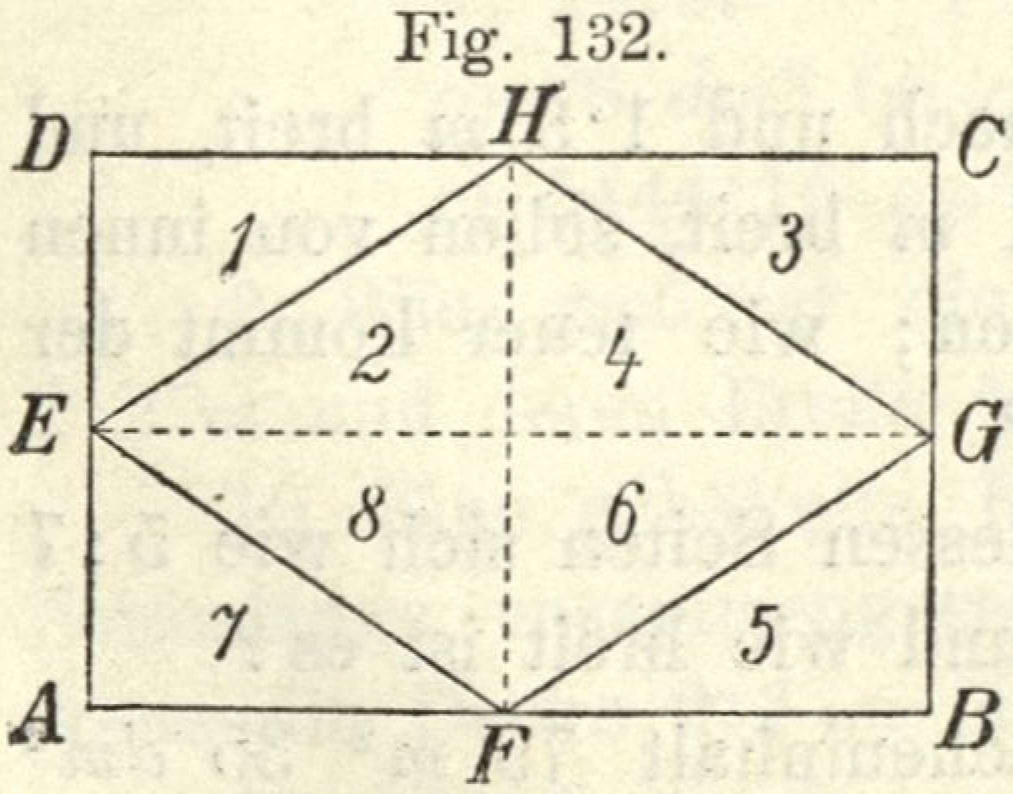
Jedes schiefwinklige Parallelogramm (Rhombus und Rhomboid, *I* und *II*, Fig. 131) kann in ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe verwandelt werden, indem man das rechtwinkelige Dreieck BCE von der einen Seite abschneidet und an die Stelle von ADF überträgt. Um den Inhalt des Rechteckes zu finden, muß man die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren; daher der Satz: **Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.**

Fig. 131.



Verbindet man die benachbarten **Halbierungspunkte** der Seiten eines Rechteckes $ABCD$ (Fig. 132) geradlinig, so ergibt sich ein **Rhombus** $EFGH$. Zieht man noch die zwei Halbierungslinien EG und FH, so zerfällt das ganze Rechteck in 8 kongruente Dreiecke, von welchen 4 auf den Rhombus entfallen. Demnach beträgt die **Fläche des Rhombus die Hälfte von der Fläche des Rechteckes.**

Fig. 132.



Da nun die Länge AB des Rechteckes der einen Diagonale EG des Rhombus entspricht, während seine Breite AD der Länge der zweiten Diagonale FH des Rhombus gleichkommt, so können wir sagen: Der Flächeninhalt eines Rhombus ist gleich dem halben Produkte aus seinen Diagonalen.

Aufgaben.

1. In einem Rhombus ist
die Grundlinie *a*) 108 *dm*, *b*) 17·7 *dm*, *c*) 8 *m* 5 *dm* 1 *cm*;
die Höhe *a*) 64 *dm*, *b*) 9·3 *dm*, *c*) 7 *m* 4 *dm* 8 *cm*;
wie groß ist der Umfang und Flächeninhalt?

2. In einem Rhomboid betragen zwei anstoßende Seiten 38 *m* und 23 *m*; wie groß ist der Umfang?

3. Wie groß ist die Fläche eines Rhomboides, in welchem die Grundlinie 4 *m* 3 *dm* 4 *cm* und die Höhe 2 *m* 3 *dm* 2 *cm* beträgt?

4. Der Flächeninhalt eines Rhomboides beträgt 18 m^2 75 dm^2, die Höhe ist 3 *m* 75 *cm*; wie groß ist die Grundlinie?

5. Bestimme die Höhe eines Rhombus, dessen Flächeninhalt 31·79 m^2 und dessen Grundlinie 7·48 *m* ist!

6. Ein Acker von der Gestalt eines Rhomboids mißt 42 Ar 75 m^2 bei 225 *m* Höhe; wie groß ist die Grundlinie?

7. Der Umfang eines Rhombus beträgt 38 *cm*; wie groß ist eine Seite?

8. Ein Tischtuch hat die Form eines Rhombus; zu seiner Einfassung waren 4 *m* 96 *cm* Börtchen notwendig. Wie lang ist eine Seite?

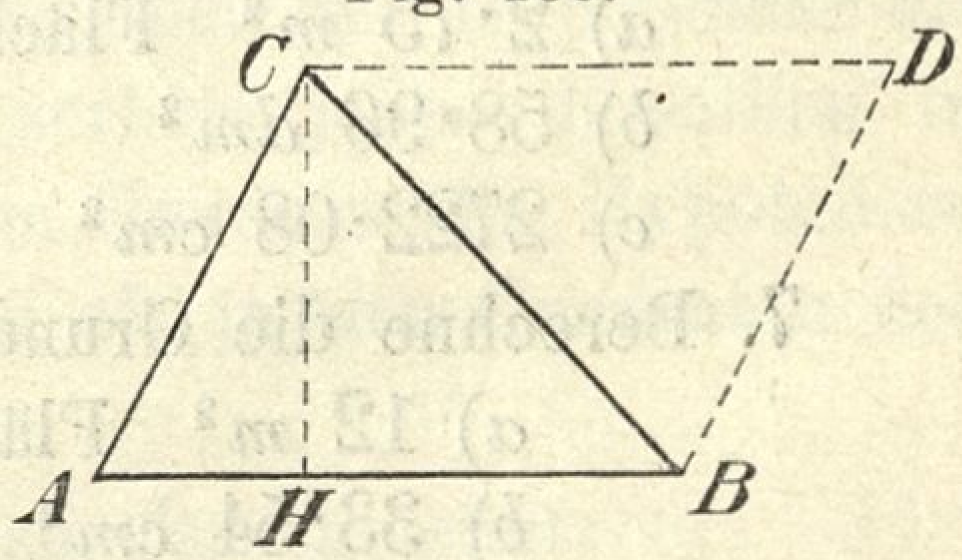
9. Die beiden Diagonalen eines Rhombus messen 37 *cm* und 26 *cm*; wie groß ist dessen Flächeninhalt?

10. In einem Blumenbeete von der Form eines Rhombus verhalten sich die beiden Diagonalen wie 2 : 3. Wie lang ist jede Diagonale, wenn der Inhalt des Rhombus 9 m^2 72 dm^2 beträgt?

45. Das Dreieck.

Jedes Dreieck ABC (Fig. 133) kann als die Hälfte eines Parallelogramms dargestellt werden, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; man braucht nur durch zwei Eckpunkte B und C mit den gegenüberliegenden Seiten Parallele zu ziehen. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu erhalten, muß man die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren; zur Bestimmung der Dreiecksfläche wird man daher auch die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren, jedoch von diesem Produkte nur die Hälfte nehmen.

Fig. 133.



D e r F l ä c h e n i n h a l t e i n e s D r e i e c k e s w i r d g e f u n d e n, i n d e m m a n d a s P r o d u k t a u s d e r G r u n d l i n i e u n d d e r H ö h e d u r c h 2 d i v i d i e r t. — Zu demselben Ergebnisse kommt man, wenn man die h a l b e G r u n d l i n i e mit der g a n z e n H ö h e oder die h a l b e H ö h e mit der g a n z e n G r u n d l i n i e multipliziert.

Wird der doppelte Flächeninhalt eines Dreieckes durch die Grundlinie dividiert, so erhält man die H ö h e; wird er durch die Höhe dividiert, so erhält man die G r u n d l i n i e.

Bezeichnet G die Grundlinie, H die Höhe und F den Flächeninhalt eines Dreieckes, so ist

$$F = \frac{G \times H}{2} = \frac{G}{2} \times H = \frac{H}{2} \times G, \; G = \frac{2F}{H}, \; H = \frac{2F}{G}.$$

In einem r e c h t w i n k e l i g e n Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen; die andere Kathete stellt dann die Höhe vor. D e r F l ä c h e n i n h a l t e i n e s r e c h t w i n k e l i g e n D r e i e c k e s i s t g l e i c h d e m h a l b e n P r o d u k t e d e r b e i d e n K a t h e t e n.

A u f g a b e n.

1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 38 *m* 7 *dm*, 25 *m* 4 *dm*, 31 *m* 5 *dm* sind?

2. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist *a*) 2·3 *m*, *b*) 1 *m* 5 *dm* 2 *cm*, *c*) $97\frac{3}{4}$ *cm*; wie groß ist der Umfang?

3. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang 10 *m* 3 *dm* 5 *cm* beträgt?

4. Berechne den Flächeninhalt folgender Dreiecke:

a)	Grundlinie 3·6 *m*,	Höhe 3·2 *m*;
b)	„ 4·25 *dm*,	„ 2·84 *dm*;
c)	„ 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*,	„ 5 *dm* 9 *cm*!

5. Ein Stück Land von der Gestalt eines Dreieckes hat 108 *m* zur Grundlinie und 72 *m* zur Höhe; wie viel ist es wert, wenn das Hektar zu 2030 K gerechnet wird?

6. Berechne die Höhe der Dreiecke von

a)	2·75 m^2	Flächeninhalt und	2·5 *m*	Grundlinie;
b)	58·96 dm^2	„ „	13·4 *dm*	„ ;
c)	2722·08 cm^2	„ „	85·6 *cm*	„ !

7. Berechne die Grundlinie der Dreiecke von

a)	12 m^2	Flächeninhalt und	3·2 *m*	Höhe;
b)	33·54 cm^2	„ „	10·32 *cm*	„ ;
c)	847·53 dm^2	„ „	38·7 *dm*	„ ;

8. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die eine Kathete 29 *m* 3 *dm*, die andere 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Inhalt?

9. In einem rechtwinkeligen Dreiecke, welches 20 m^2 72 dm^2 enthält, ist eine Kathete 7 m 4 dm; wie groß ist die zweite Kathete?

10. Die Seite eines Quadrates ist 36 mm. Zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck, welches ebenso groß ist wie jenes Quadrat und dessen eine Kathete 54 mm ist?

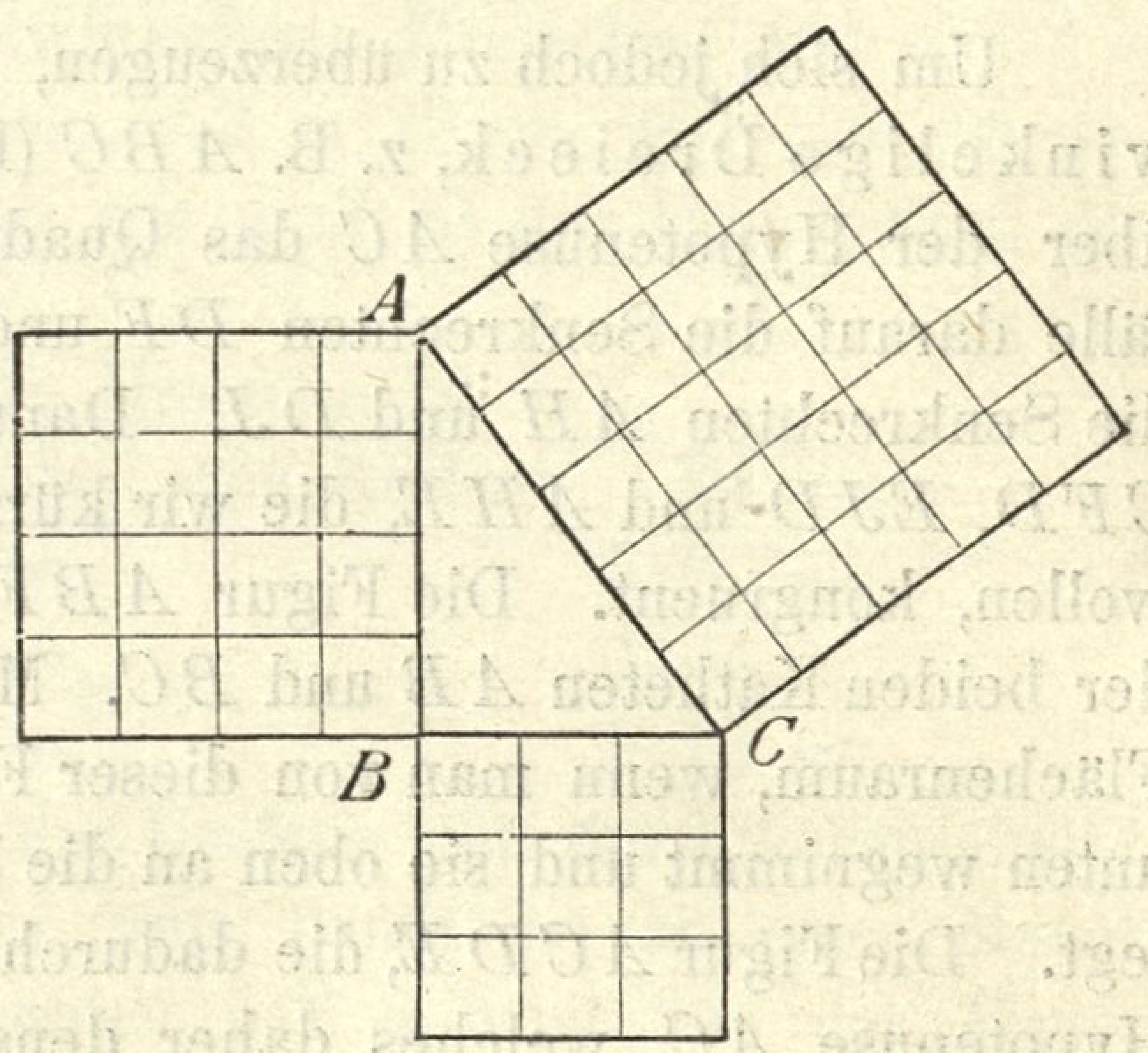
11. Der Umfang eines Dreieckes beträgt 45·6 cm; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreieckes sind 4·5 cm, 4·4 cm und 6·3 cm; wie groß sind die Seiten des ersten Dreieckes?

12. Ein Turmdach besteht aus 4 gleichschenkeligen Dreiecken. Wie viel m^2 Blech braucht man zu dessen Deckung, wenn die Grundlinie eines solchen Dreieckes 2 m 2 dm, die Höhe 4 m 5 dm beträgt und für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?

46. Der pythagoräische Lehrsatz.

Zeichne einen rechten Winkel ABC (Fig. 134), trage auf den einen Schenkel 3, auf den andern 4 gleiche Teile, z. B. Zentimeter, auf und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke AC; die Hypotenuse des dadurch entstandenen Dreieckes wird genau 5 Zentimeter enthalten. Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16 und die Summe der Quadrate 25; das Quadrat der Hypotenuse 5 ist auch 25. Es ist also das Quadrat der Hypotenuse so groß wie die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. Dieses läßt sich auch bildlich darstellen. Beschreibt man nämlich sowohl über der Hypotenuse als auch über den Katheten Quadrate und zerlegt jedes derselben in Quadratzentimeter, so sieht man, daß in dem Quadrate der Hypotenuse ebenso viele Quadratzentimeter vorkommen als in den Quadraten der beiden Katheten zusammengenommen.

Fig. 134.



Hiedurch wird man auf den folgenden Satz geleitet:

In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Dieser für den weiteren geometrischen Unterricht sehr wichtige Lehrsatz wurde von Pythagoras (584—504 v. Chr.) aufgefunden und daher der pythagoräische Lehrsatz genannt.

Für das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck läßt sich, wie Fig. 135 zeigt, die Wahrheit des pythagoräischen Lehrsatzes gleichfalls anschaulich darstellen.

Fig. 135.

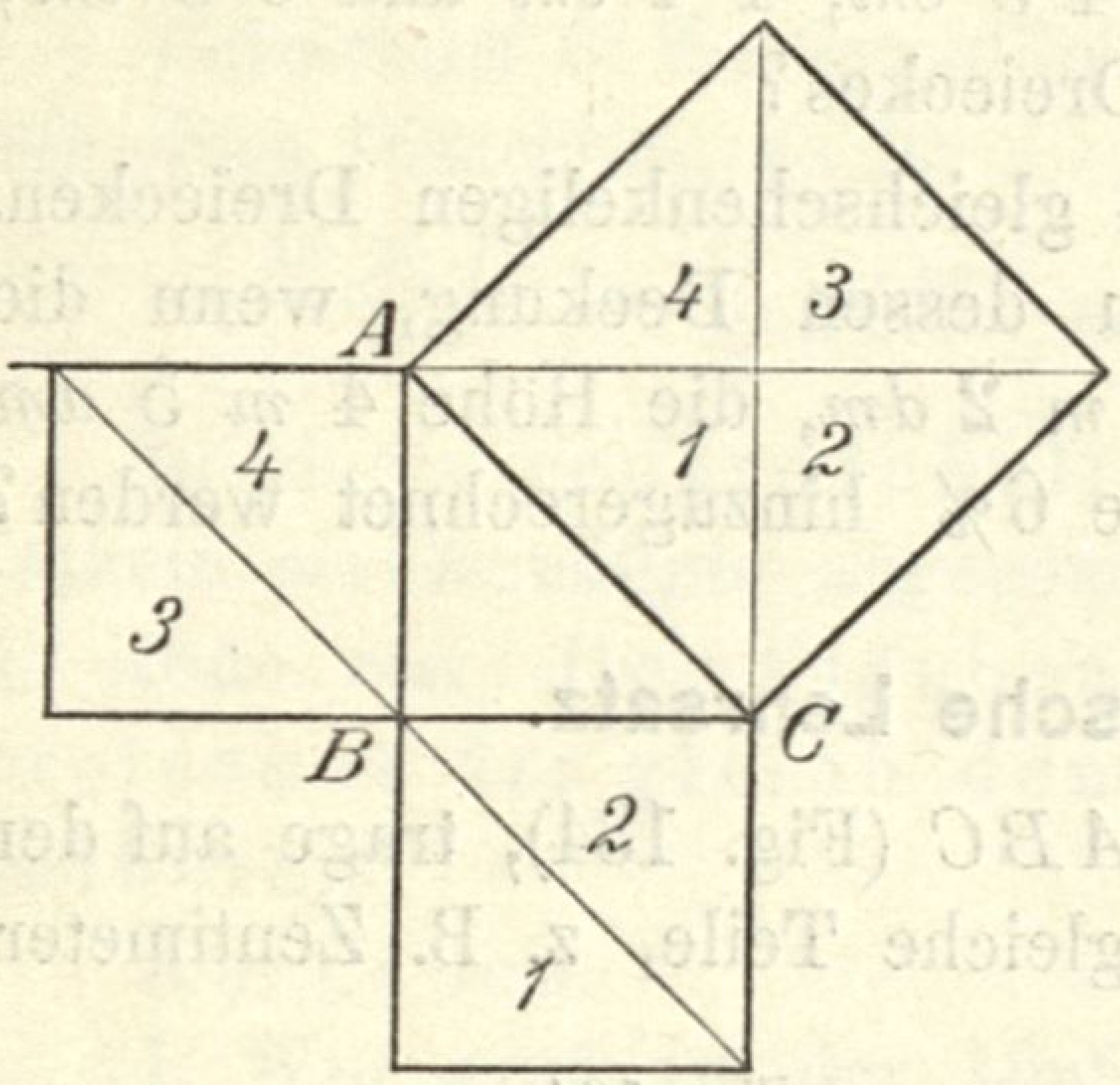
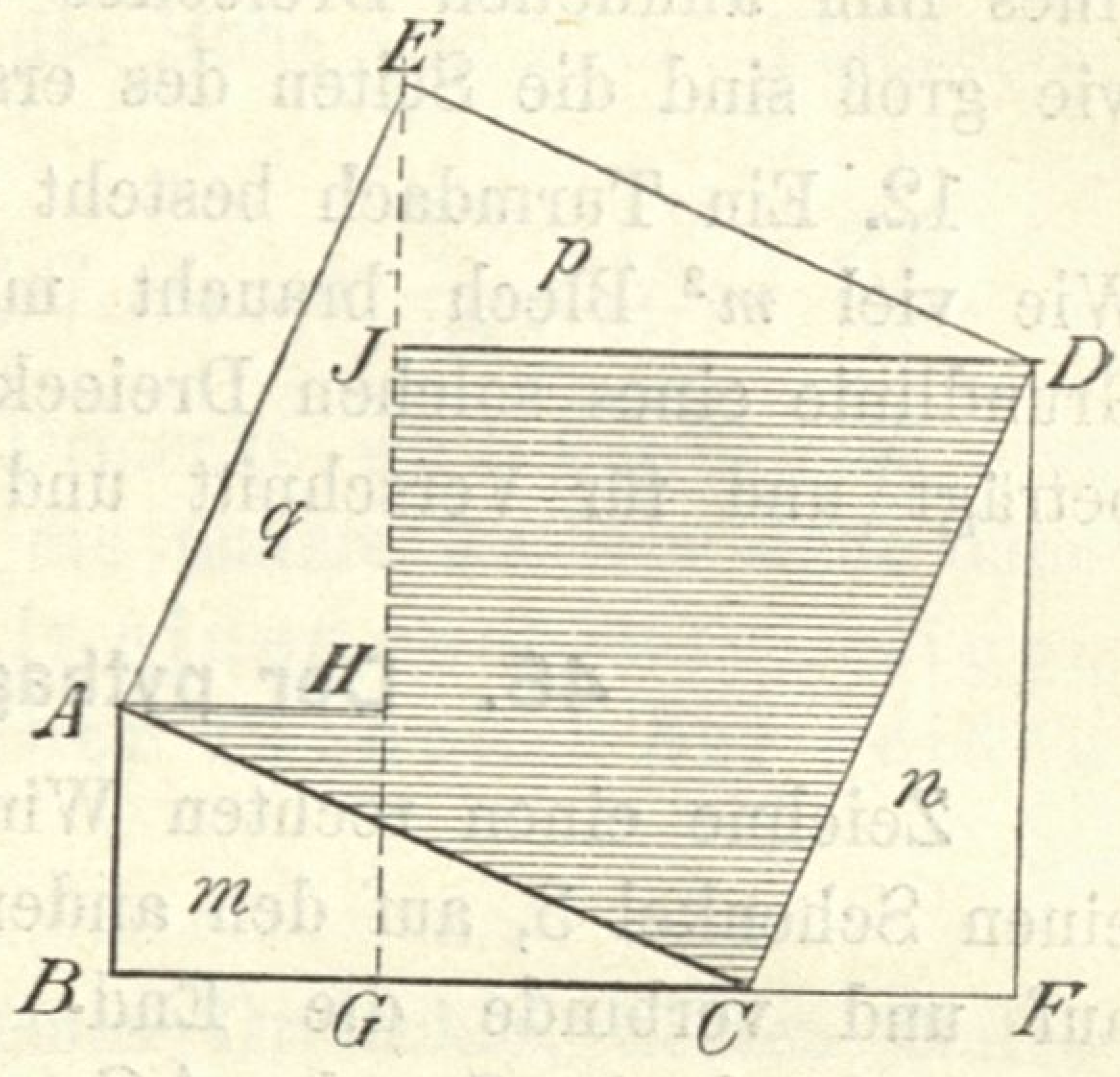


Fig. 136.



Um sich jedoch zu überzeugen, daß dieser Satz für jedes rechtwinkelige Dreieck, z. B. ABC (Fig. 136), gültig ist, errichte man über der Hypotenuse AC das Quadrat $ACDE$, verlängere BC und fälle darauf die Senkrechten DF und EG; ebenso fälle man auf EG die Senkrechten AH und DJ. Dann sind die rechtwinkeligen ABC, CFD, EJD und AHE, die wir kürzer mit m, n, p und q bezeichnen wollen, kongruent. Die Figur $ABFDJH$ enthält nun die Quadrate der beiden Katheten AB und BC. Man erhält aber offenbar denselben Flächenraum, wenn man von dieser Figur die zwei Dreiecke m und n unten wegnimmt und sie oben an die Stelle der Dreiecke p und q anlegt. Die Figur $ACDE$, die dadurch entsteht, ist nun das Quadrat der Hypotenuse AC, welches daher denselben Flächeninhalt hat wie die Quadrate der beiden Katheten zusammengenommen.

Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes bekannt sind, die dritte Seite durch Rechnung finden.

1. Sind die beiden Katheten bekannt, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate und addiert die Quadrate. Diese Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse; um die Hypotenuse selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel zu ziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 36 *cm*, die andere 160 *cm*; wie groß ist die Hypotenuse?

$$\text{Katheten} \begin{cases} 36\ cm & 36^2 = 1296 \\ 160\ cm & 160^2 = 25600 \end{cases}$$

$\sqrt{26896} = 164$; also mißt die Hypotenuse 164 *cm*.

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, so erhebe man beide zum Quadrate und subtrahiere vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete; der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete. Will man diese Kathete selbst finden, so braucht man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel zu ziehen.

Es sei z. B. die Hypotenuse 2 *m* 8 *cm*, eine Kathete 8 *dm*; wie groß ist die andere Kathete?

Hypot.	208 *cm*	$208^2 = 43264$
Kathete	80 *cm*	$80^2 = 6400$

$\sqrt{36864} = 192$. Die 2. Kathete beträgt demnach 192 *cm* = 1 *m* 92 *cm*.

Aufgaben.

1. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes sind *a*) 33 *m* und 56 *m*, *b*) 10·5 *m* und 8·8 *m*, *c*) 2 *m* 73 *cm* und 1 *m* 36 *cm*, *d*) 10 *m* 54 *cm* und 6 *m* 72 *cm*; wie groß ist die Hypotenuse, der Umfang und der Flächeninhalt?

2. Bei einem rechtwinkeligen Dreiecke ist

a)	die Hypotenuse	51 *dm*,	eine Kathete	24 *dm*;
b)	„ „	6·5 *m*,	„ „	5·6 *m*;
c)	„ „	1·94 *m*,	„ „	1·44 *m*;
d)	„ „	9·37 *m*,	„ „	9·12 *m*;

wie groß ist die andere Kathete, der Umfang und der Flächeninhalt?

3. Wie lang muß eine Leiter sein, damit sie an einer Mauer 5·94 *m* hoch reiche, wenn sie unten 1·2 *m* weit von der Mauer aufgestellt werden soll?

4. Berechne die Hypotenuse und den Flächeninhalt eines rechtwinkelig gleichschenkeligen Dreieckes, dessen Kathete 1 *m* 6 *dm* 4 *cm* beträgt!

5. In einem rechtwinkelig gleichschenkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse 58 *mm*; wie groß ist jede Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

6. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 1 *dm*; wie groß ist die Höhe desselben? (Für die Seite = 1 ergibt sich die Höhe 0·866, eine Zahl, welche man im Gedächtnisse behalten soll.)

7. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite *a*) 2 *dm* 4 *cm*, *b*) 4 *m* 2 *dm* 6 *cm* beträgt!

8. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das einem gleichseitigen Dreiecke von 4·8 *dm* Seitenlänge flächengleich ist?

9. In einem gleichschenkeligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 2 *m* 28 *cm* und die Höhe 3 *m* 52 *cm*; wie groß ist ein Schenkel?

10. In einem gleichschenkeligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 1 *m* 36 *cm* und jede der gleichen Seiten 2 *m* 93 *cm*; wie groß ist die Höhe und wie groß der Flächeninhalt?

11. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 1 *m* ist?

12. Die Diagonale eines Quadrates ist 1 *m* 7 *dm*; wie groß ist die Seite, wie groß der Flächeninhalt?

13. Eine quadratische Tischplatte hat 0·9409 m^2; wie groß ist die Diagonale?

14. Die anstoßenden Seiten eines Rechteckes sind 8·5 *m* und 3·36 *m*; wie groß ist die Diagonale?

15. In einem Rechtecke beträgt die Diagonale 923 *mm* und eine Seite 355 *mm*. Wie groß ist die anstoßende zweite Seite? Welchen Umfang und Inhalt besitzt dieses Rechteck?

16. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes, dessen Länge 5·2 *m* und dessen Flächeninhalt 20·28 m^2 beträgt?

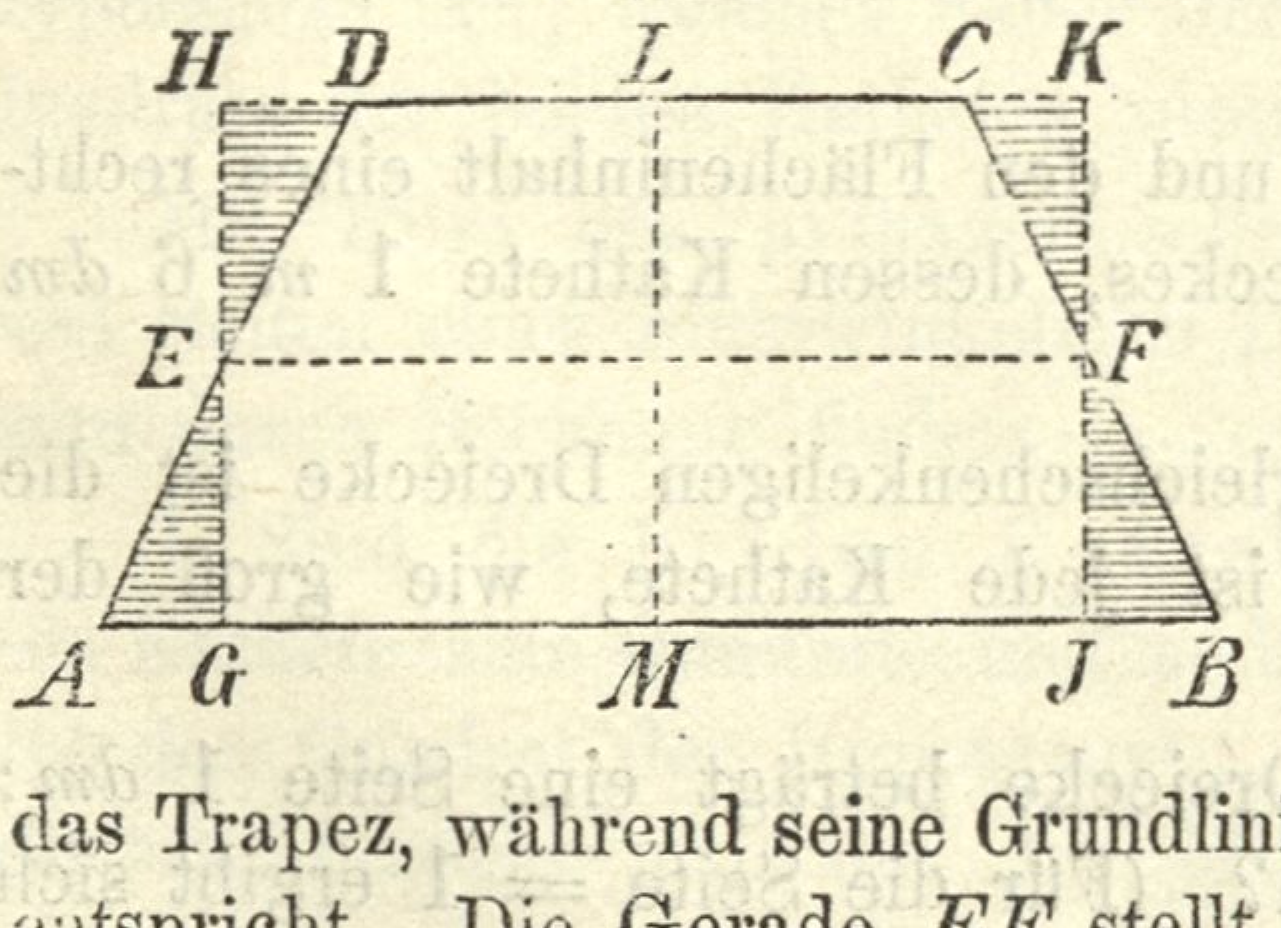
17. Die Diagonalen eines Rhombus betragen 1·3 *m* und 1·44 *m*; wie groß ist *a*) eine Seite, *b*) der Umfang und *c*) der Flächeninhalt?

18. Ein Garten hat die Form eines Rhombus; wie viel Ar enthält er, wenn eine Seite 29 *m* und eine Diagonale 42 *m* beträgt?

47. Das Trapez.

Man ziehe in dem Trapeze *ABCD* (Fig. 137) die Mittellinie *EF* und errichte in den Punkten *E* und *F* zwei Senkrechte *GH* und *JK* auf die Grundlinie. Denkt man sich nun die beiden Dreiecke *AEG* und *BFJ* unten weggenommen und dafür bei *DEH* und *CFK* angesetzt, so erhält man das Rechteck *GJKH*, welches mit dem Trapeze gleich groß ist.

Fig. 137.



Wie ersichtlich ist, hat das Rechteck dieselbe Höhe *LM* wie das Trapez, während seine Grundlinie der Mittellinie *EF* des letzteren entspricht. Die Gerade *EF* stellt aber eine Linie vor, deren Länge gerade zwischen der kürzeren und längeren Parallelen des Trapezes liegt; sie ist das arithmetische Mittel aus diesen Parallelen und wird gefunden, wenn man letztere summiert und durch 2 teilt.

Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Trapezes wird gefunden, indem man das arithmetische Mittel (oder die halbe Summe) der beiden parallelen Seiten mit der Höhe des Trapezes multipliziert.

Betragen beispielsweise die parallelen Seiten 21 *cm* und 33 *cm* und die Höhe 18 *cm*, so hat man für die Mittellinie

$$\frac{21\ cm + 33\ cm}{2} = \frac{54\ cm}{2} = 27\ cm$$

als arithmetisches Mittel der 2 Parallelen; der Flächeninhalt ist dann gleich $27\ cm^2 \times 18 = 486\ cm^2$.

Heißt die eine der Parallelseiten a, die andere b und die Höhe h, so ist der Flächeninhalt

$$F = \frac{a+b}{2} \, . \, h.$$

Aufgaben.

1. In einem Trapeze betragen die parallelen Seiten 35 *m* und 27 *m*, die Höhe ist 18 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

2. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
a) Parallelseiten 5 *m* und 7 *m*, Höhe 4 *m*;
b) „ 3·5 *m* und 2·7 *m*, Höhe 1·6 *m*;
c) „ 2 *m* 54 *cm* und 5 *m* 36 *cm*, Höhe 4 *m* 28 *cm*!

3. In einem Trapeze, dessen Parallelseiten $5\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{5}$ *m* sind, beträgt der Flächenraum 20·79 m^2; wie groß ist der Abstand der beiden parallelen Seiten?

4. Ein Trapez von 1·05 *m* Höhe hat 2·6565 m^2 Flächeninhalt; wenn nun die eine Parallelseite 2·75 *m* beträgt, wie groß ist die andere?

5. Ein Bauplatz hat die Form eines Trapezes, worin die Parallelseiten 185 *m* 5 *dm* und 140 *m* 2 *dm* betragen und 25 *m* 2 *dm* von einander abstehen; welchen Flächenraum hat dieser Platz?

6. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand ist 34·5 *m*; wie viel ist der Garten wert, das Ar zu 50 K gerechnet?

7. Eine Dachfläche hat die Form eines Trapezes, in welchem die untere Länge 24 *m*, die obere Länge (der First) 16·4 *m* und der Abstand des Firstes von der untern Seite 7·5 *m* beträgt; wie viel kostet die Schiefereindeckung dieser Dachfläche, wenn 1 m^2 mit 3·6 K berechnet wird?

8. Ein Fußboden hat die Form eines symmetrischen Trapezes; die parallelen Seiten betragen 6 *m* und 7·84 *m*, die Höhe mißt $5\frac{1}{4}$ *m*. Wie viel *m* Schutzleisten sind zum Umsäumen dieses Zimmers notwendig und wie teuer kommt diese Arbeit, wenn das laufende *m* mit 18 *h* berechnet wird?

9. In einem rechtwinkeligen Trapeze messen die zwei Parallelen 3 *m* und 4·19 *m*, die Höhe beträgt 1·2 *cm*; wie groß ist dessen Umfang und Inhalt?

10. Eine Wiese hat die Form eines Trapezes; die Parallelseiten betragen 73 *m* und 111 *m*, der Abstand mißt 37 *m*. Wie groß ist das Erträgnis derselben, wenn für 100 m^2 53 *kg* Heu geliefert wurden und 100 *kg* Heu mit 4 K bezahlt werden?

11. Die längere Parallele eines Baugrundes von der Form eines symmetrischen Trapezes verhält sich zur kürzeren Seite wie 5 : 3. Wie groß ist der Umfang und Flächeninhalt desselben, wenn die längere parallele Seite 340 *m* und jede der beiden nicht parallelen Seiten 293 mißt? Welchen Wert hat dieser Bauplatz, wenn das m^2 mit 3 K berechnet wird?

48. Das Trapezoid.

Ein Trapezoid wird seinem Flächeninhalte nach berechnet, indem man es durch eine Diagonale AC (Fig. 138) in 2 Dreiecke zerlegt, jedes Dreieck einzeln berechnet und dann ihre Flächeninhalte summiert.

Fig. 138.

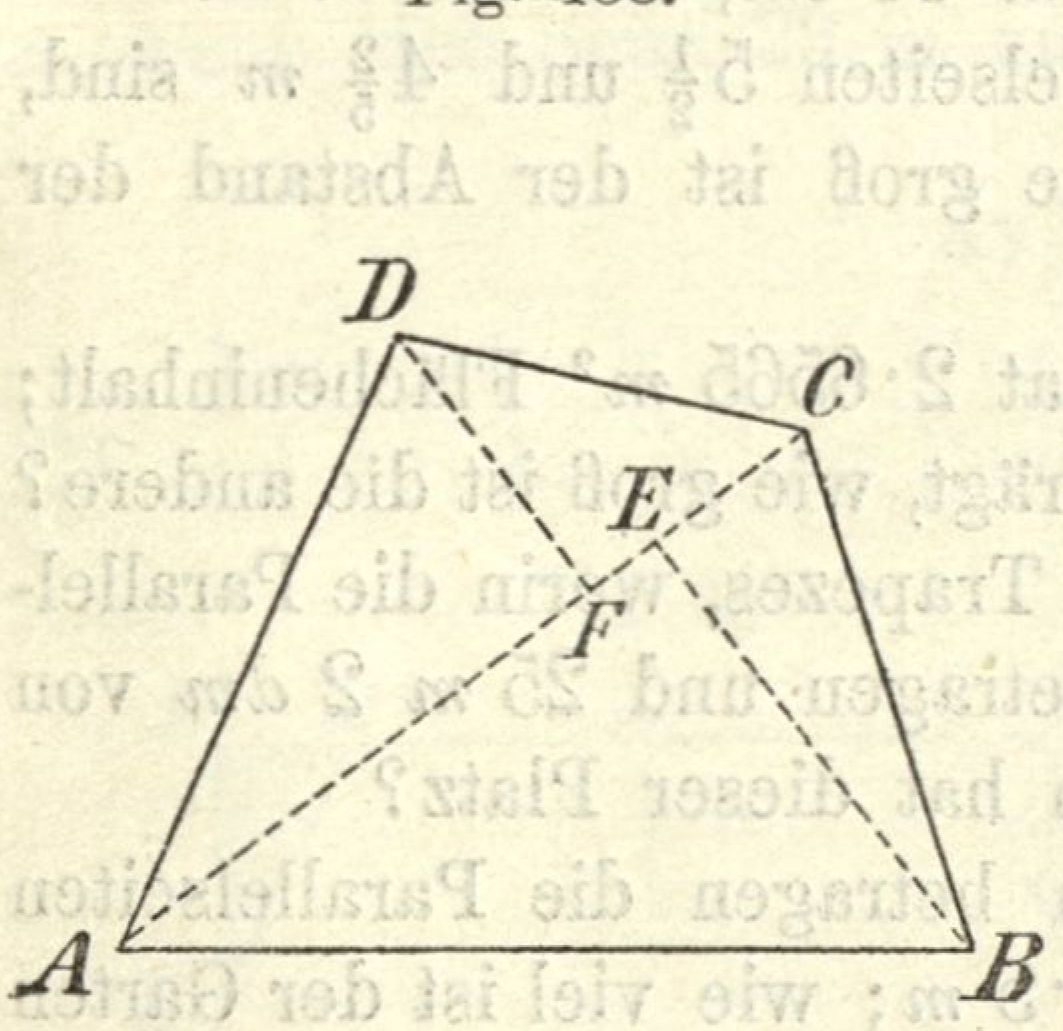
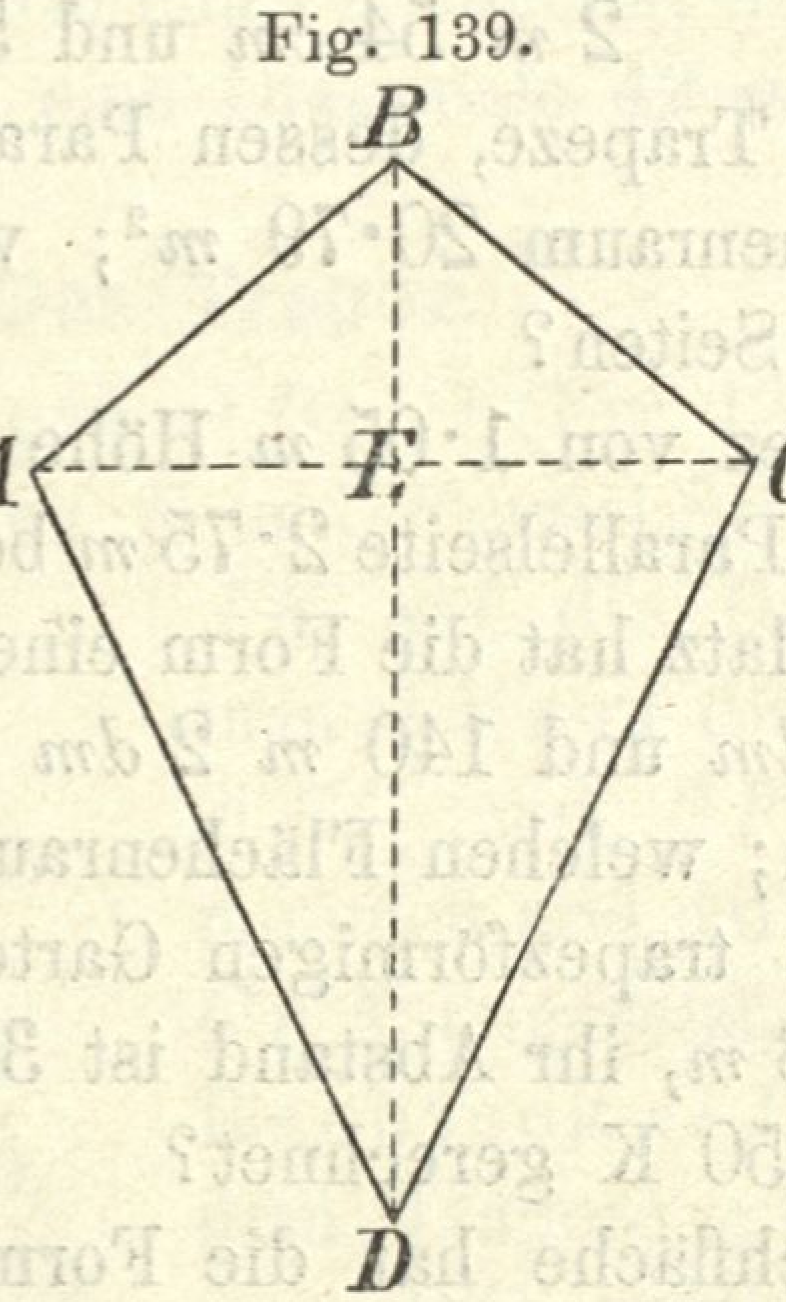


Fig. 139.



Einfacher gestaltet sich der Vorgang bei einem symmetrischen Trapezoid (Deltoid [Fig. 139]); dasselbe besteht aus 2 kongruenten Dreiecken ABD und BCD. Der Flächeninhalt des Dreieckes ABD wird aber gefunden, wenn man die eine Diagonale BD mit der halben Höhe AE multipliziert. Der Flächeninhalt beider Dreiecke ist jedoch doppelt so groß, weshalb die Diagonale BD mit AE zu multiplizieren ist. Die Strecke AE stellt aber die Hälfte der zweiten Diagonale vor. Anstatt die eine Diagonale BD mit der Hälfte der andern Diagonale zu multiplizieren, kann man auch das Produkt beider Diagonalen suchen und dieses durch 2 teilen.

Demnach hat man:

Der Flächeninhalt eines Deltoides ist gleich dem halben Produkte seiner beiden Diagonalen.

Aufgaben.

1. Die 4 Seiten eines Fußbodens von der Form eines Trapezoides betragen 5·4 *m*, 4·42 *m*, 5·16 *m* und 4·9 *m*; wie viel *m* Schutzleisten sind zur Umsäumung notwendig?

2. Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezoides in Fig. 138, wenn $AC = 6$ *cm*, $BE = 4$ *cm* und $DF = 3$ *cm* ist?

3. Die Diagonale eines Trapezoides beträgt 39 *mm*, die von den gegenüber liegenden Ecken hierauf gefällten Senkrechten messen 23 *mm* und 18 *mm*; welcher Flächeninhalt ergibt sich hieraus?

4. Welchen Wert besitzt ein Wiesengrund von der Form eines Trapezoides, in welchem eine Diagonale 219 *m* mißt und die von den gegenüberliegenden Ecken auf sie gefällten Senkrechten 84 *m* und 96 *m* betragen, wenn für das Ar 5 K gerechnet werden?

5. Die 4 Seiten eines Trapezoides verhalten sich wie 13 : 10 : 11 : 14. Wie groß ist jede Seite, wenn der Umfang des Trapezoides 3 *m* 36 *cm* beträgt?

6. Berechne den Umfang des Deltoides in Fig. 141, wenn $AE =$ 48 *mm*, $BE = 36$ *mm* und $ED = 64$ *mm* ist! Suche auch dessen Flächeninhalt!

7. In einem Deltoide betragen die beiden Diagonalen 7 *m* 26 *cm* und 4 *m* 58 *cm*; welchen Flächeninhalt besitzt es?

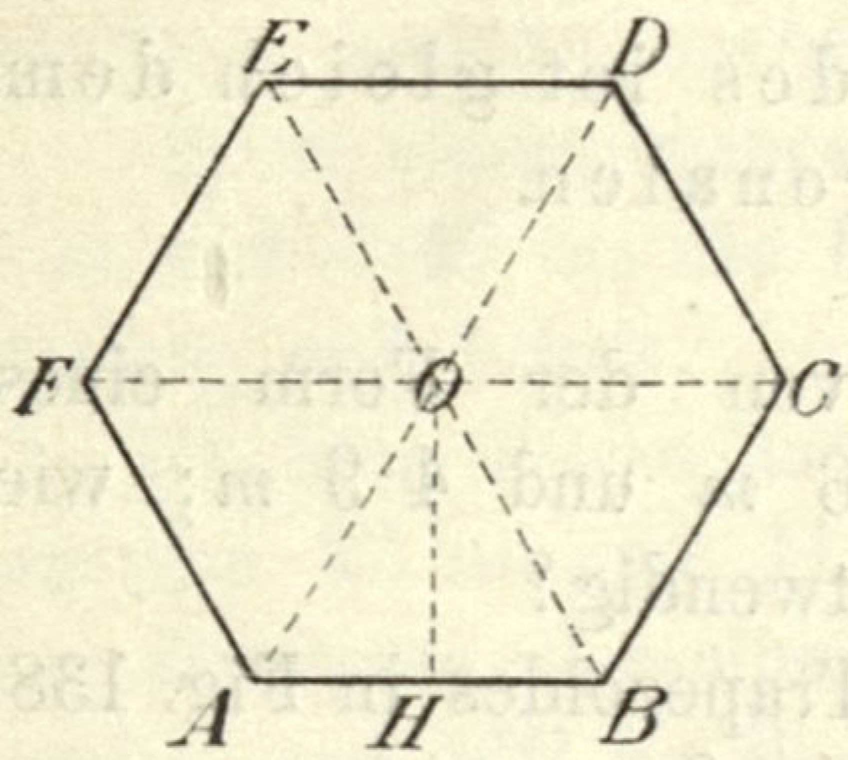
8. Die beiden Diagonalen eines Deltoides verhalten sich wie 4 : 7. Wie lang ist jede Diagonale, wenn der Flächeninhalt dieses Deltoides, 23 m^2 66 dm^2 beträgt?

49. Das Vieleck.

Die Fläche eines regelmäßigen Vieleckes $ABCDEF$ (Fig. 140) findet man am leichtesten, indem man von der Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien zieht und die dadurch entstehenden Mittelpunktsdreiecke berechnet. Da aber diese Dreiecke kongruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen und die gefundene Fläche mit der Anzahl der Dreiecke zu multiplizieren. Der Flächeninhalt eines Teildreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB, multipliziert mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller 6 Dreiecke 6 mal AB, multipliziert mit der halben Höhe OH; 6 mal AB

ist aber der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von der Seite des Vieleckes; daher gilt der Satz:

Fig. 140.



Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange, multipliziert mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Bezeichnet U den Umfang, a den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite und F den Flächeninhalt, so ist

$$F = U \cdot \frac{a}{2}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, multipliziere man die gegebene Seite

in einem gleichseitigen Dreiecke mit 0·28868,
„ „ regelmäßigen Fünfecke „ 0·68819,
„ „ „ Sechsecke „ 0·86603,
„ „ „ Achtecke „ 1·20711,
„ „ „ Zehnecke „ 1·53884.

Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf zwei Arten bestimmen.

A) Durch Zerlegung in Dreiecke.

Man zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes derselben und addiere alle Dreiecksflächen.

Es sei die Fläche des Vieleckes $ABCDEFG$ (Fig. 141) auszurechnen. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, und es sei $BG = 39\ m$,

Fig. 141.

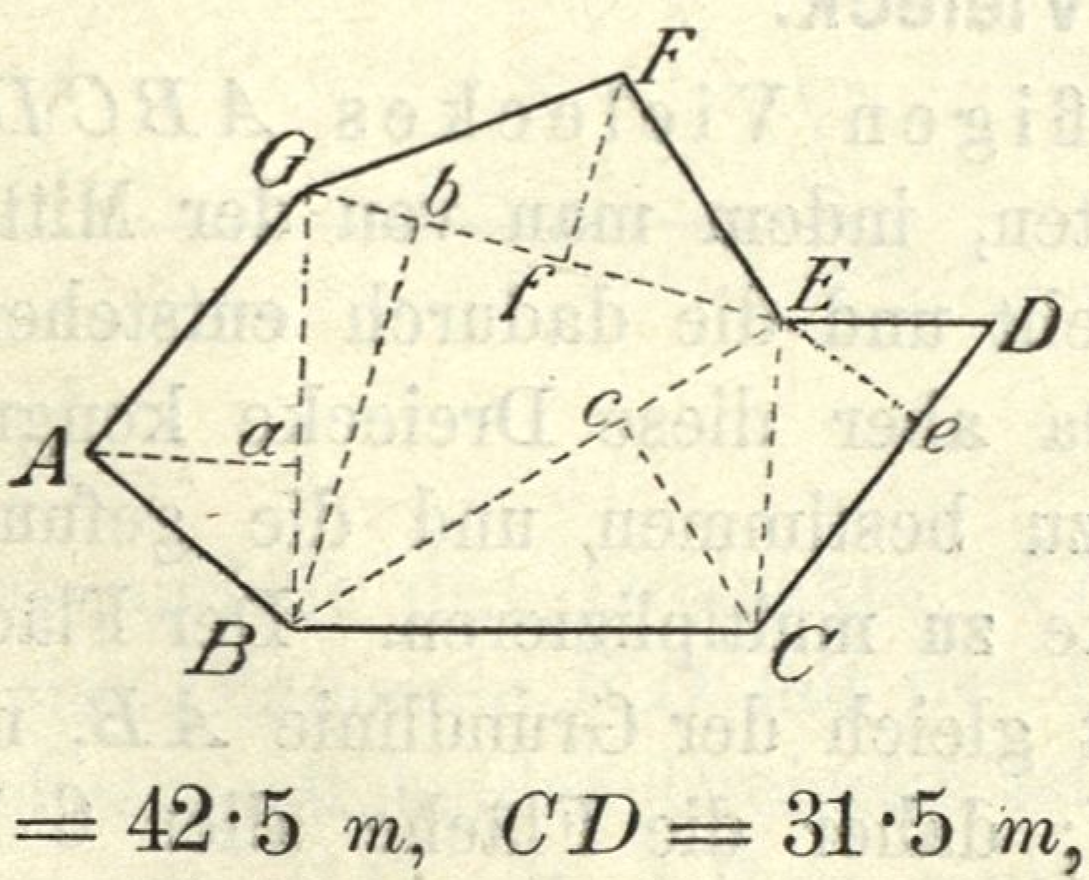
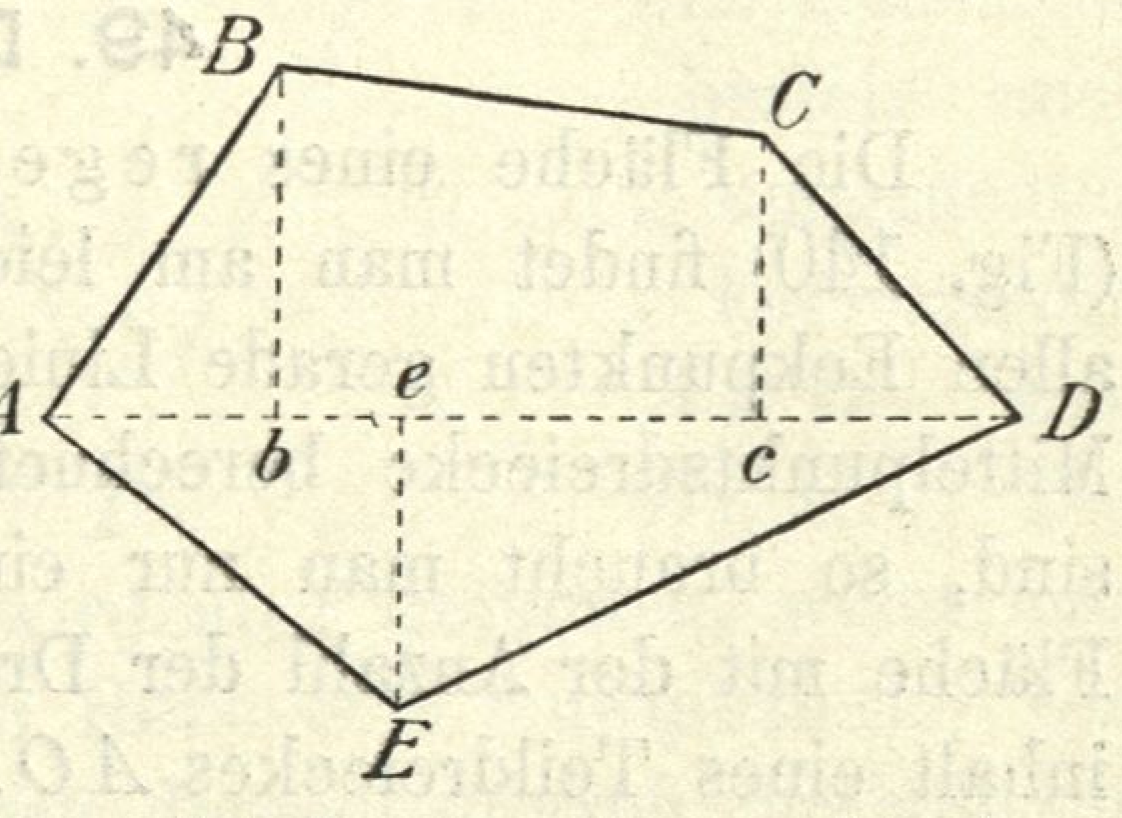


Fig. 142.



$BE = 42 \cdot 5\ m$, $CD = 31 \cdot 5\ m$, $GE = 39 \cdot 5\ m$, $Aa = 11 \cdot 6\ m$, $Cc = 19 \cdot 7\ m$, $Ee = 12 \cdot 1\ m$, $Bb = 35 \cdot 4\ m$, $Ff = 16 \cdot 4\ m$.

Man hat nun

$$\text{Dreieck } ABG = \frac{BG \times Aa}{2} = \frac{39\,m^2 \times 11{\cdot}6}{2} = 226{\cdot}2\ m^2$$

$$\text{„} \quad BEG = \frac{GE \times Bb}{2} = \frac{39{\cdot}5\,m^2 \times 35{\cdot}4}{2} = 699{\cdot}15 \text{ „}$$

$$\text{„} \quad BCE = \frac{BE \times Cc}{2} = \frac{42{\cdot}5\,m^2 \times 19{\cdot}7}{2} = 418{\cdot}63 \text{ „}$$

$$\text{„} \quad CDE = \frac{CD \times Ee}{2} = \frac{31{\cdot}5\,m^2 \times 12{\cdot}1}{2} = 190{\cdot}58 \text{ „}$$

$$\text{„} \quad EFG = \frac{GE \times Ff}{2} = \frac{39{\cdot}5\,m^2 \times 16{\cdot}4}{2} = 323{\cdot}9 \text{ „}$$

$$\text{Vieleck } ABCDEFG = 1858{\cdot}46\ m^2$$

B) Mittelst Abszissen und Ordinaten.

Man ziehe durch zwei Eckpunkte eine Gerade als Abszisse und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte (Ordinaten); dadurch zerfällt die Figur in lauter rechtwinkelige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und addiert werden. Dabei werden die Ordinaten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abszissenteile als Höhen betrachtet.

Es sei (Fig. 142): $Bb = 15\ m$, $Cc = 13\ m$, $Ee = 14\ m$, $Ab = 10\ m$, $be = 5\ m$, $ec = 15\ m$ und $cD = 12\ m$.

Man hat:

$$\triangle ABb = \frac{15 \times 10}{2}\ m^2 = 75\ m^2,$$

$$\text{Trapez } BbcC = \frac{15 + 13}{2} \times 20\ m^2 = 280\ m^2,$$

$$\triangle DEe = \frac{14 \times 27}{2}\ m^2 = 189\ m^2 \text{ und}$$

$$\triangle AEe = \frac{15 \times 14}{2}\ m^2 = 105\ m^2;$$

$$\text{daher Vieleck } ABCDE = 649\ m^2.$$

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite 1 *m* 2 *dm* 5 *cm* ist?

2. Wie groß ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite
   a) in einem regelmäßigen Fünfecke mit der Seite 8·2 *dm*?
   b) in einem regelmäßigen Achtecke mit der Seite 2·5 *dm*?

3. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt
   a) eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seite 4·8 *m*,
   b) eines regelmäßigen Zehneckes mit der Seite 1·2 *m*'

4. Ein Lampenteller in Form eines regelmäßigen Sechseckes hat einen Umfang von 90 *cm*; welchen Flächeninhalt besitzt dieses Sechseck?

5. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist $4 \cdot 2$ *m*; berechne *a*) den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, *b*) den Umfang, c) den Flächeninhalt!

6. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist $21 \cdot 5$ *dm*; wie groß ist *a*) die Seite, *b*) der Flächeninhalt?

7. Es soll ein regelmäßig achtseitiges Gartenhaus, dessen Seite $1 \cdot 3$ *m* lang ist, ausgesteckt werden; wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

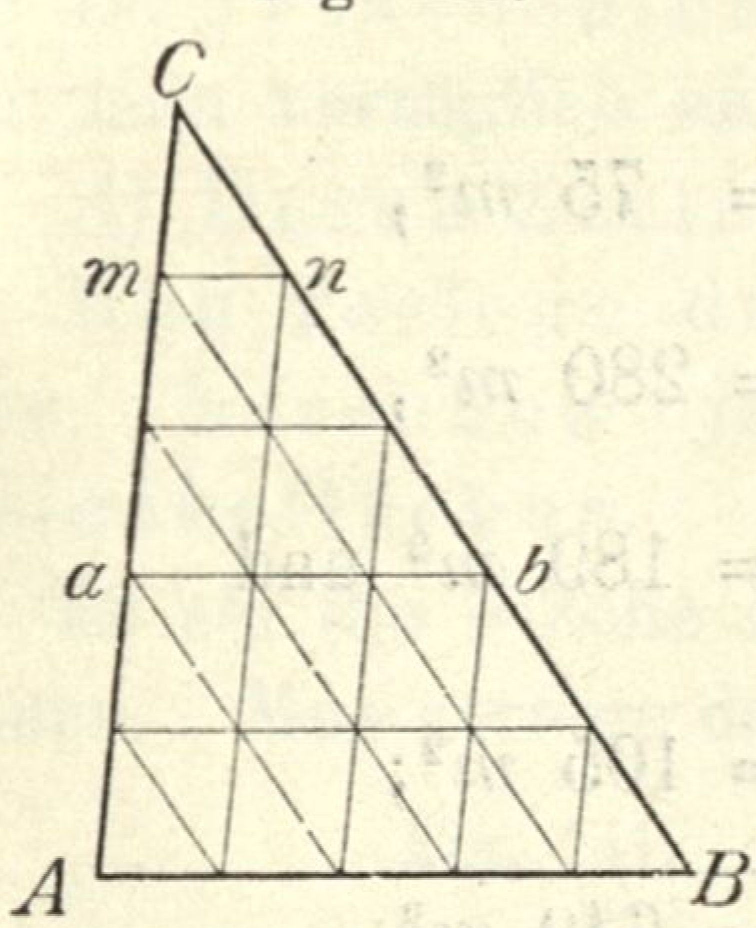
50. Umfang und Flächeninhalt ähnlicher geradliniger Figuren.

Wenn jede Seite einer geradlinigen Figur 2-, 3-, 4 mal so groß ist als die gleichliegende Seite einer ähnlichen geradlinigen Figur, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang der ersten geradlinigen Figur, 2-, 3-, 4 mal so groß sein als der Umfang der zweiten geradlinigen Figur.

Hieraus folgt:

Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie die gleichliegenden Seiten.

Fig. 143.



Es seien (Fig. 143) ABC und abC zwei ähnliche Dreiecke, deren gleichliegende Seiten sich wie $5:3$ verhalten. Teilt man AC in 5 gleiche Teile, von denen auf aC 3 kommen, und zieht durch die Teilungspunkte der AC Parallele mit AB und BC und dann durch die Teilungspunkte der BC Parallele mit AC, so zerfallen die gegebenen Dreiecke in lauter kongruente und mit mnC gleiche Dreiecke, und zwar $\triangle ABC = 25\, mnC$, $\triangle abC = 9\, mnC$, daher $ABC : abC = 25 : 9$. Dasselbe Verhältnis $25 : 9$ haben aber auch die Quadrate zweier gleichliegender Seiten.

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Zerlegt man zwei ähnliche Vierecke oder Vielecke, deren Seiten sich z. B. wie $5 : 3$ verhalten, durch gleichliegende Diagonale in Dreiecke, so verhalten sich je zwei gleichliegende Dreiecke wie $25:9$; demnach müssen sich auch die Summen aller dieser Dreiecke, d. i. die beiden Vierecke oder Vielecke selbst, wie $25 : 9$ verhalten

Hieraus folgt:

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher geradliniger Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten.

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf das Papier gezeichnet, so daß jede Linie auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, ... der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$, ... von dem Flächeninhalte der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

Aufgaben.

1. Zeichne 4 Quadrate, deren Seitenlängen 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm* und 4 *cm* betragen, und zerlege die 3 größeren Quadrate durch Hilfslinien in lauter Quadratzentimeter! Wie verhalten sich die Umfänge der 4 Quadrate zu einander? In welchem Verhältnisse stehen ihre Flächeninhalte?

2. Die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 7 : 9; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

3. Die Seitenlängen zweier Quadrate betragen 5 *cm* und 7 *cm*; wie verhalten sich ihre Umfänge und wie ihre Flächeninhalte?

4. Die Seiten zweier ähnlicher regelmäßiger Sechsecke betragen 9 *cm* und 13 *cm*. Berechne von jedem den Umfang und Inhalt und ermittle sodann die Verhältnisse ihrer Umfänge und ihrer Inhalte!

5. Die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 4 : 5; die Fläche des ersten Dreieckes ist 8 m^2; wie groß ist die Fläche des zweiten?

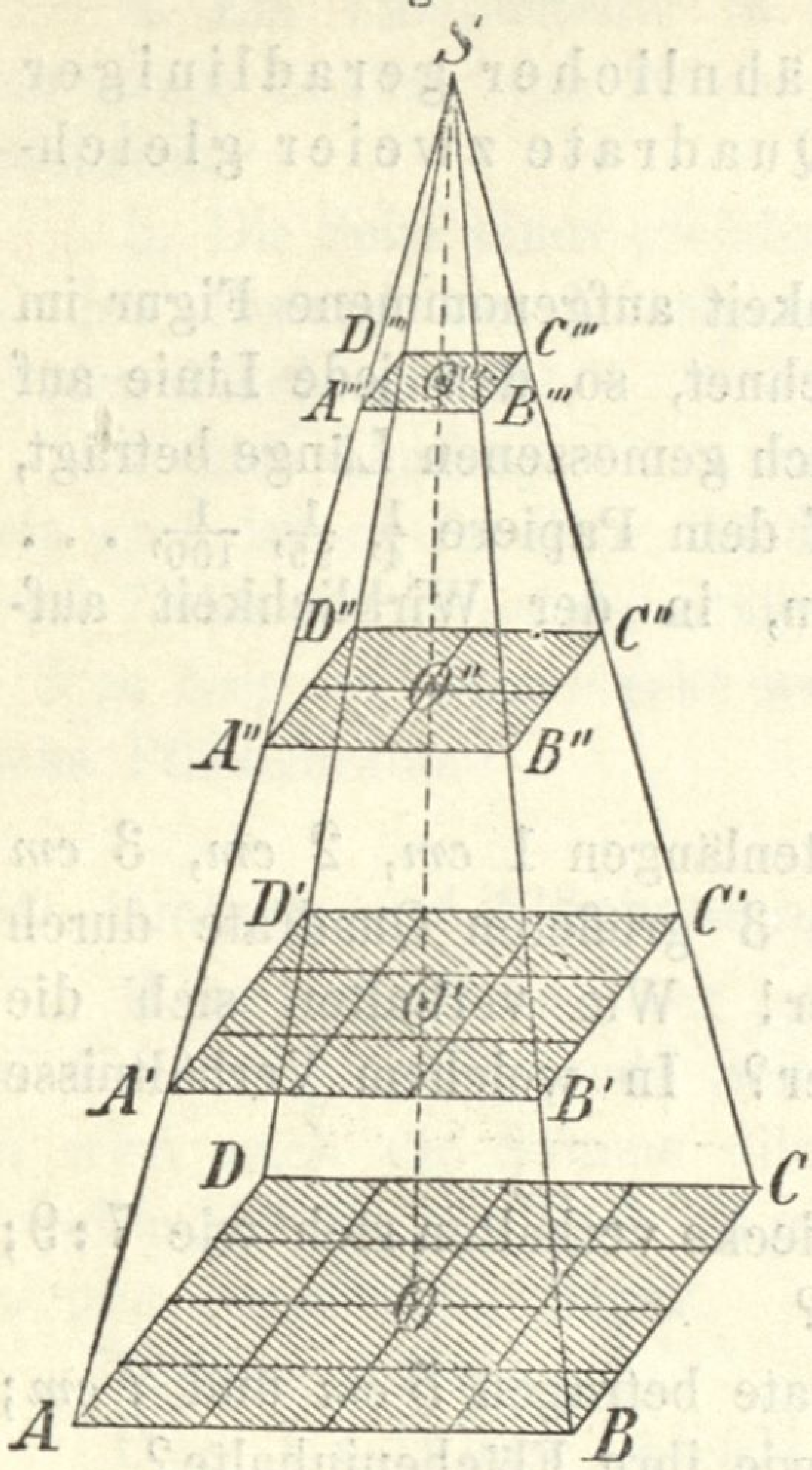
6. Auf einer Landkarte sind die natürlichen Längen in dem Verhältnisse 1 : 250.000, auf einer zweiten in dem Verhältnisse 1 : 50.000 dargestellt; welche Fläche nimmt auf der ersten Karte ein Land ein, das auf der zweiten eine Fläche von 1 cm^2 50 mm^2 hat?

51. Ähnlichkeit im Raume.

Die Seitenkante *AB* (Fig. 144) einer geraden quadratischen Pyramide betrage 4 *cm*; demnach enthält die Grundfläche 16 cm^2.

Teilt man nun die Höhe dieser Pyramide in mehrere, z. B. 4 gleiche Teile und führt durch jeden Teilpunkt einen zur Grundfläche parallelen Schnitt, so ergeben sich 3 mit der Grundfläche ähnliche Figuren, nämlich 3 Quadrate mit den Seitenlängen 3 *cm*, 2 *cm* und 1 *cm*, deren Flächeninhalte beziehungsweise 9 cm^2, 4 cm^2 und 1 cm^2 betragen.

Fig. 144.



Die Abstände $O'''S$, $O''S$, $O'S$ und OS der 4 Quadrate von der gemeinschaftlichen Spitze S verhalten sich zu einander wie $1:2:3:4$, während die Flächeninhalte derselben im Verhältnisse stehen wie $1:4:9:16$.

Dasselbe läßt sich auch an jeder andern Pyramide mit beliebiger Grundfläche zeigen.

Hieraus folgt:

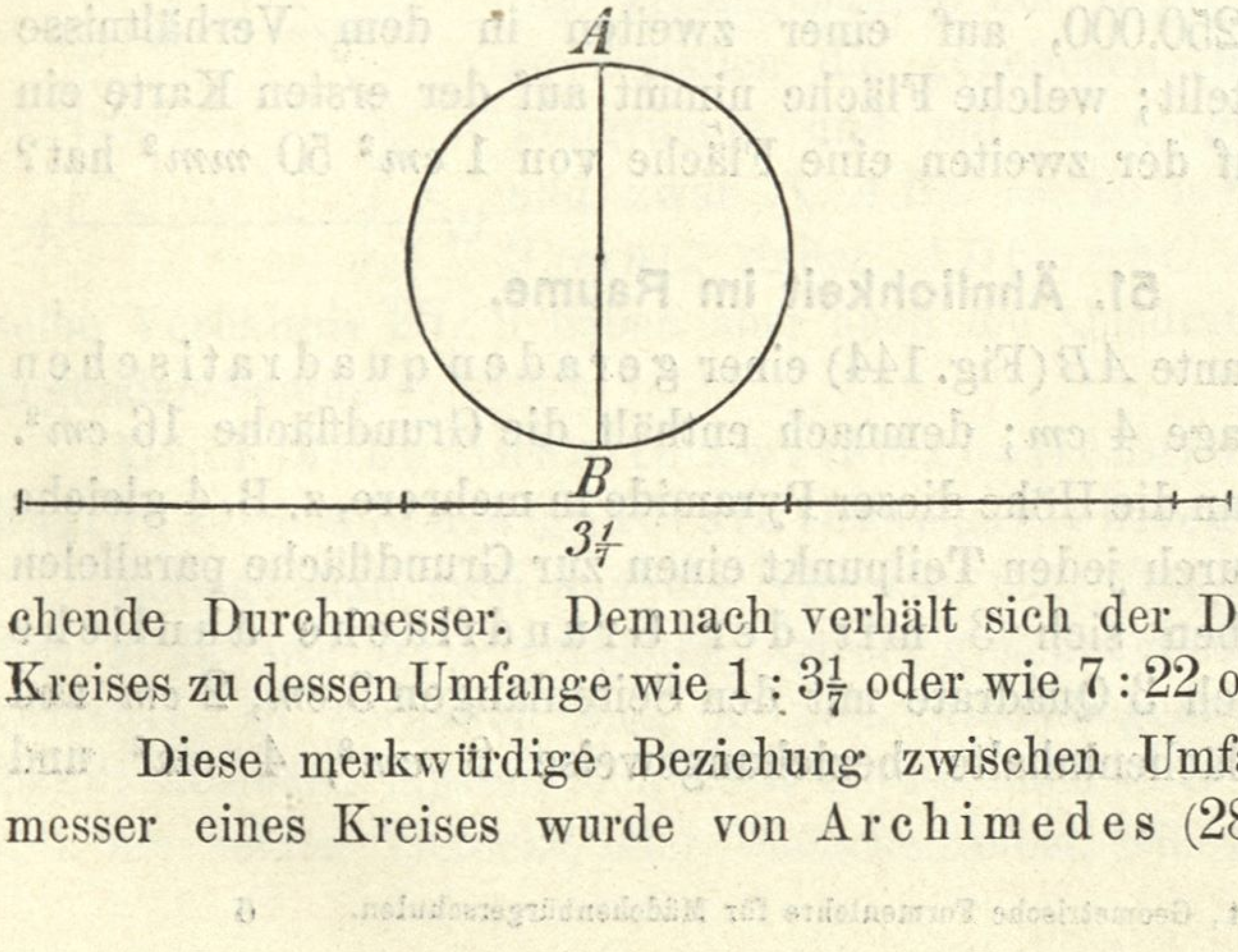
Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche geschnitten, so verhalten sich die Schnittflächen wie die Quadrate ihrer Abstände von der gemeinschaftlichen Spitze.

(Anwendung in der Akustik und in der Optik.)

52. Umfang des Kreises.

Man umspanne mit einem Faden den Umfang einer kreisförmigen Scheibe (Fig. 145) und suche sodann, wie oft der Durchmesser AB in dem Umfang enthalten ist! Es ergibt sich die Zahl $3\frac{1}{7}$.

Fig. 145.



Versucht man dasselbe auch bei andern (größeren und kleineren) Kreisen, so wird man stets finden, daß der Umfang $3\frac{1}{7}$ mal so groß ist als der entsprechende Durchmesser. Demnach verhält sich der Durchmesser eines Kreises zu dessen Umfange wie $1:3\frac{1}{7}$ oder wie $7:22$ oder $1:3{\cdot}14\ldots$

Diese merkwürdige Beziehung zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises wurde von Archimedes (287—212 v. Chr.)

aufgefunden, weshalb auch dieses Verhältnis das archimedische Verhältnis genannt wird.

Später haben genauere Untersuchungen, welche von Ludolf van Ceulen (1539—1610) angestellt wurden, gezeigt, daß der Durchmesser eines Kreises im Umfange desselben $3 \cdot 14159 \ldots$ mal enthalten ist.

Diese Zahl, welche das Verhältnis zwischen dem Umfange eines Kreises und dem Durchmesser angibt, heißt deshalb die Ludolfische Zahl und wird mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet. Es ist also $\pi = 3 \cdot 14159 \ldots$ In vielen Fällen ist aber der Näherungsbruch $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder $\pi = 3 \cdot 14$ ausreichend.

Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser und U den Umfang eines Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$U = d\pi, \text{ oder } U = 2r\pi, \text{ daher}$$

$$d = \frac{U}{\pi} \text{ und } r = \frac{U}{2\pi}; \text{ d. h.}$$

1. Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser, multipliziert mit der Ludolfischen Zahl.

2. Der Durchmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange, dividiert durch die Ludolfische Zahl.

3. Der Halbmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange, dividiert durch die doppelte Ludolfische Zahl.

Hieraus folgt:

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich so wie ihre Durchmesser oder Halbmesser.

Ein Bogen kann im Gradmaße (durch Grade, Minuten und Sekunden) oder im Längenmaße (in *m*, *dm*, *cm* u. s. w.) angegeben werden.

Um einen Kreisbogen, der im Gradmaße gegeben ist, im Längenmaße zu bestimmen, und umgekehrt, um einen Kreisbogen, dessen Länge bekannt ist, im Gradmaße auszudrücken, bedient man sich des leicht einzusehenden Satzes:

Die Länge eines Bogens verhält sich zum Umfange des Kreises wie der entsprechende Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) zu 360°.

Beispiele.

1. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 28 *dm*; wie groß ist dessen Umfang?

$$28\ dm \times 3\tfrac{1}{7} = 88\ dm = \text{Umfang}$$

$$\text{oder } 28\ dm \times 3 \cdot 14 = 87 \cdot 92\ dm = \text{Umfang.}$$

2. Wie lang ist ein Bogen von 45^0 in einem Kreise, dessen Halbmesser 2 *dm* ist?

$$\text{Umfang} = 4\ dm \times 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\ dm;$$
$$x : 12{\cdot}56 = 45 : 360,$$
$$x = 1{\cdot}57,$$
$$\text{Bogen} = 1{\cdot}57\ dm.$$

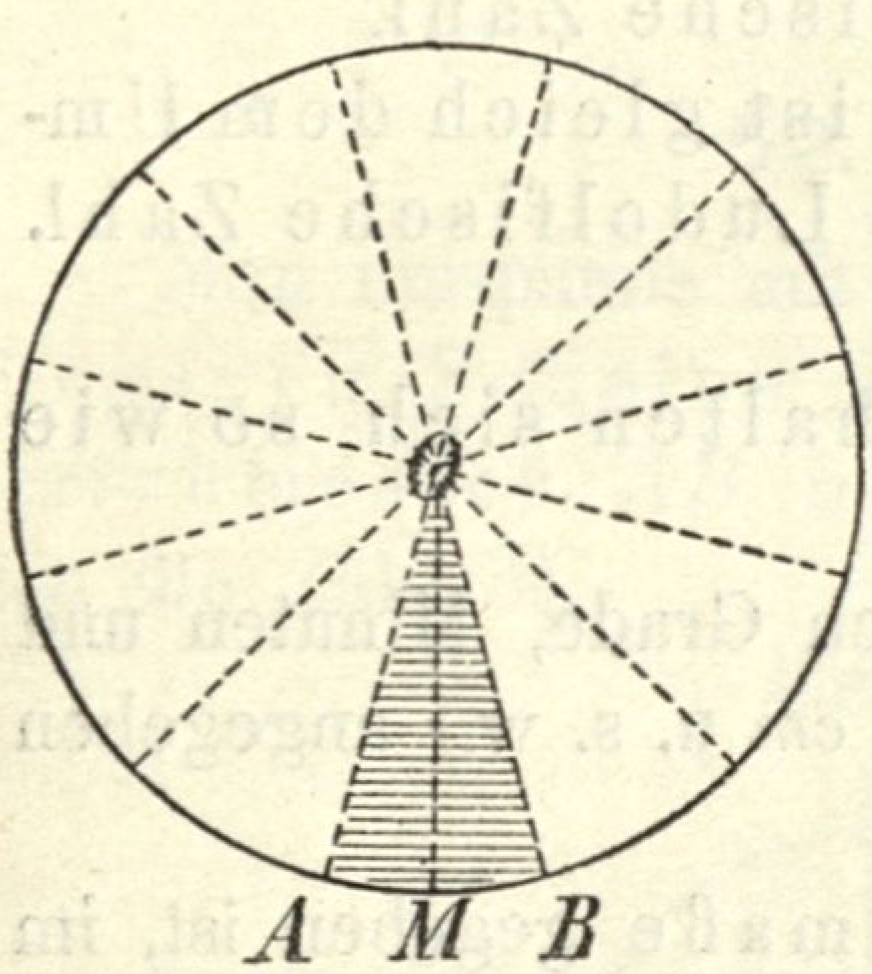
3. Der Durchmesser eines Kreises mißt 14 *m*; welcher Zentriwinkel gehört in demselben zu einem Bogen von $2{\cdot}198$ *m*?

$$\text{Umfang} = 14\ m \times 3{\cdot}14 = 43{\cdot}96\ m;$$
$$x : 360 = 2{\cdot}198 : 43{\cdot}96,$$
$$x = 18,$$
$$\text{Zentriwinkel} = 18^0.$$

53. Flächeninhalt des Kreises.

Jeder Kreisausschnitt ABO (Fig. 146) kann als ein Dreieck angesehen werden, dessen Spitze im Mittelpunkte des Kreises liegt; der Bogen des Kreisausschnittes stellt die Grundlinie und der Radius des Kreises die Höhe vor.

Fig. 146.



Daher hat man:

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich der Länge des dazugehörigen Bogens, multipliziert mit dem halben Radius. Z. B. Es sei $AB = 11$ *cm* und $OM = 21$ *cm*.

$$\text{Kreisausschnitt} = \frac{11\ cm^2 \times 21}{2} = 115\tfrac{1}{2}\ cm^2.$$

Denkt man sich in einem Kreise (Fig. 146) unzählig viele Halbmesser gezogen, so zerfällt die Kreisfläche in unzählig viele Kreisausschnitte, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist und deren Grundlinien zusammen den Umfang geben.

Um daher die Fläche des Kreises zu erhalten, muß man alle Dreiecksflächen berechnen und addieren. Schneller kommt man zum Ziele, wenn man alle Grundlinien addiert und ihre Summe, d. i. den Kreisumfang, mit der halben gemeinschaftlichen Höhe, d. i. mit dem halben Halbmesser, multipliziert.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Umfange, multipliziert mit dem halben Halbmesser.

Bezeichnet F den Flächeninhalt und U den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so ist $F = U.\frac{r}{2}$.

Da aber $U = 2r\pi$ ist, so ist auch $F = 2r\pi.\frac{r}{2}$ oder, da sich 2 gegen 2 kürzt und $r.r = r^2$ gibt, $F = r^2\pi$. Man hat also:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, multipliziert mit der Ludolfischen Zahl.

Hieraus folgt: Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises bekannt und die Länge des Halbmessers zu suchen, so braucht man nur den Flächeninhalt durch die Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor. Zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst. Folglich:

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

Wäre der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes zu ermitteln, von welchem der Halbmesser und der Bogen gegeben ist, letzterer aber im Gradmaße, so muß man vorerst den Flächeninhalt des dazugehörigen Kreises berechnen. Sodann stütze man sich auf folgenden, leicht einzusehenden Satz:

Der Flächeninhalt des Kreisausschnittes verhält sich zu jenem des ganzen Kreises wie der im Gradmaße angegebene Bogen des Kreisauschnittes zu 360°.

Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, berechne man den Flächeninhalt des dazugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiere davon den Inhalt des Dreieckes, um welches der Kreisausschnitt größer ist als der Kreisabschnitt.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahiert.*)

Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 35 *dm*; wie groß ist der Umfang? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

---

*) Anstatt das Quadrat eines jeden Halbmessers einzeln mit π zu multiplizieren und dann abzuziehen, ist es einfacher, gleich das Quadrat des kleineren Halbmessers von jenem des größeren Halbmessers zu subtrahieren und den Rest mit π zu multiplizieren. Also:

$$J = (R^2 - r^2).\pi.$$

2. Der Halbmesser eines Kreises ist 12 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

Radius $=$	12 *m*	oder:	$\underline{12 \times 12}$
Durchm. $=$	24 *m*		$144 \times 3 \cdot 14 = 452 \cdot 16$
Umfang $=$	75·36 *m*		452·16 m^2.
halb. Radius $=$	6 *m*		
Flächeninhalt $=$	452·16 m^2;		

3. Der Halbmesser eines Kreises ist *a)* 28 *dm*, *b)* 1·8 *m*, *c)* 2·65 *m*; *d)* $35\frac{1}{2}$ *cm*; wie groß ist der Umfang, wie groß der Flächeninhalt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

4. In einem Kreise ist der Durchmesser *a)* 13 *m*, *b)* 5·8 *m*, *c)* 0·135 *m*, *d)* 8 *dm* 3 *cm* 4 *mm*; berechne den Umfang und den Flächeninhalt! ($\pi = 3 \cdot 14$.)

5. Wie groß ist *a)* der Durchmesser, *b)* der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang 55 *m* beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

6. Der Umfang eines Kreises ist *a)* 25·12 *m*, *b)* 0·2198 *m*, *c)* 135·02 *dm*, *d)* 54·008 *m*; wie groß ist der Halbmesser, wie groß der Flächeninhalt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

7. Der Durchmesser eines Kreises ist 2 *dm*, ebenso groß ist die Seite eines Quadrates; um wie viel ist der Flächeninhalt des Kreises kleiner als der des Quadrates? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

8. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 *cm* lang; welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang; wie groß ist *a)* der Umfang, *b)* der Halbmesser des Äquators? ($\pi = 3 \cdot 14159$.)

10. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·4 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht; wie lang war die Strecke? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

11. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m*, jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser; wie viele Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 *km* zurückgelegt hat? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

12. Welchen Durchmesser hat ein Lokomotivrad, das sich auf einem Schienenwege von 1039·5 *m* 315mal umdreht? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

13. Man will einen kreisrunden Tisch für 9 Personen machen; wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person $7\frac{1}{3}$ *dm* des Umfanges rechnet? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

14. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 16 m^2 6106 cm^2 beträgt?

16 m^2 6106 cm^2 $=$ 166106 cm^2 $\quad$ $166106 : 3 \cdot 14 = 52900$

$\sqrt{52900} = 230$; 230 *cm* $=$ 2 *m* 3 *dm* $=$ Halbmesser.

15. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt *a)* $28 \cdot 26\ dm^2$, *b)* $153 \cdot 86\ cm^2$, *c)* $10\ dm^2\ 17\ cm^2\ 36\ mm^2$ beträgt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

16. Die Durchmesser zweier Kreise sind $2 \cdot 4\ dm$ und $3 \cdot 6\ dm$; wie verhalten sich *a)* ihre Umfänge, *b)* ihre Flächeninhalte?

17. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Kreise zu einander, wenn sich ihre Umfänge wie $3 : 5$ verhalten?

18. Ein kreisrunder Saal hat $8\ m\ 5\ dm$ im Durchmesser; wie groß ist der Flächeninhalt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

19. Der Umfang eines Baumstammes ist $2\frac{3}{4}\ m$; wie groß ist der Durchmesser, wie groß der Flächeninhalt eines Querschnittes? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

20. Wie viel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser $14\ m$ ist, wenn ein Mensch $19\frac{1}{4}\ dm^2$ einnimmt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

21. Auf einem Anger ist eine Kuh mit einem $2 \cdot 5\ m$ langen Stricke angebunden; wie viel m^2 Weide sind ihr zugemessen? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

22. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite $2\ m\ 2\ dm$! ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

23. Ein Kreis hat mit einem Quadrate gleichen Umfang, nämlich $25 \cdot 12\ dm$; wie groß ist der Unterschied zwischen den Flächeninhalten des Kreises und des Quadrates? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

24. Für einen kreisrunden Tisch, dessen Platte $50 \cdot 24\ dm^2$ groß ist, soll eine Decke gestrickt werden, die überall um $15\ cm$ herabhängt; welchen Durchmesser wird diese haben, und wie viel m Fransen benötigt man zur Umrandung derselben? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

25. Wie groß ist die Fläche eines Kreisringes, wenn die zwei konzentrischen Kreise $3\ m\ 6\ dm$ und $4\ m\ 4\ dm$ zu Durchmessern haben?

26. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge $37 \cdot 68\ m$ und $28 \cdot 26\ m$ betragen! ($\pi = 3 \cdot 14$.)

27. Ein kreisrunder Grasplatz von $18\ m$ Durchmesser ist mit einem $2\ m$ breiten Wege umzogen; wie viel Flächenraum nimmt dieser Weg ein?

28. Ein Garten ist $68\ m\ 2\ dm$ lang, $41\ m\ 3\ dm$ breit; in der Mitte desselben befindet sich ein kreisrunder Teich, welcher samt der ihn einschließenden Mauer $12\ m\ 4\ dm$ im Durchmesser hat; wie groß ist die Landfläche des Gartens?

29. Wie lang ist ein Bogen von 72^0 bei einem Kreise, dessen Halbmesser $2\ dm$ ist? ($\pi = 3 \cdot 14$).

30. Bestimme die Bogenlänge für *a)* 36°, *b)* 120°, *c)* 144°, *d)* 180° in einem Kreise, dessen Halbmesser 28 *cm* beträgt! ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

31. Der Durchmesser eines Kreises ist *a)* 4 *m*, *b)* 21 *m*, *c)* 3 *m* 17 *cm*; welche Länge hat in jedem Kreise ein Bogen von 60°? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

32. Ein Bogen von 48° mißt 18·84 *cm*; wie groß ist der Halbmesser dieses Kreises? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

33. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15° *a)* 9·42 *m*, *b)* 47·1 *cm* lang ist? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

34. Wie viele Grade hat ein Bogen von $30\frac{1}{4}$ *cm* Länge, wenn der Kreisdurchmesser 77 *cm* beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

35. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnittes, dessen Halbmesser 5·8 *m* und dessen Bogenlänge 8·2 *m* ist?

36. Ein Kreisausschnitt von 4·5 *dm* Halbmesser hat einen Bogen von *a)* 18°, *b)* 54°, *c)* 144°, *d)* 135°; wie groß ist die Länge des Bogens, wie groß der Inhalt des Ausschnittes? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

37. Wie viele Grade umfaßt der Bogen eines Kreisausschnittes, dessen Fläche 235·5 cm^2 und dessen Halbmesser 3 *dm* beträgt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

38. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, wenn der zu 24° gehörende Ausschnitt 188·4 cm^2 beträgt, und welche Länge hat der Bogen des Kreisausschnittes? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

39. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisabschnittes, dessen Sehne von 12 *cm* Länge dem Halbmesser des Kreises gleich ist? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

40. Der Halbmesser eines Kreises, welchem ein Quadrat eingezeichnet ist, mißt 16 *cm*; wie groß ist jeder der 4 gleichen Kreisabschnitte? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

41. Einem Kreise, dessen Halbmesser 2 *m* 4 *dm* beträgt, wird ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben; um wie viel ist die Fläche des Sechseckes kleiner als die Fläche des Kreises?

42. Einem Quadrate von 12 *cm* Seitenlänge wird ein Kreis eingeschrieben; um wie viel ist der Flächeninhalt des Kreises kleiner als jener des Quadrates?

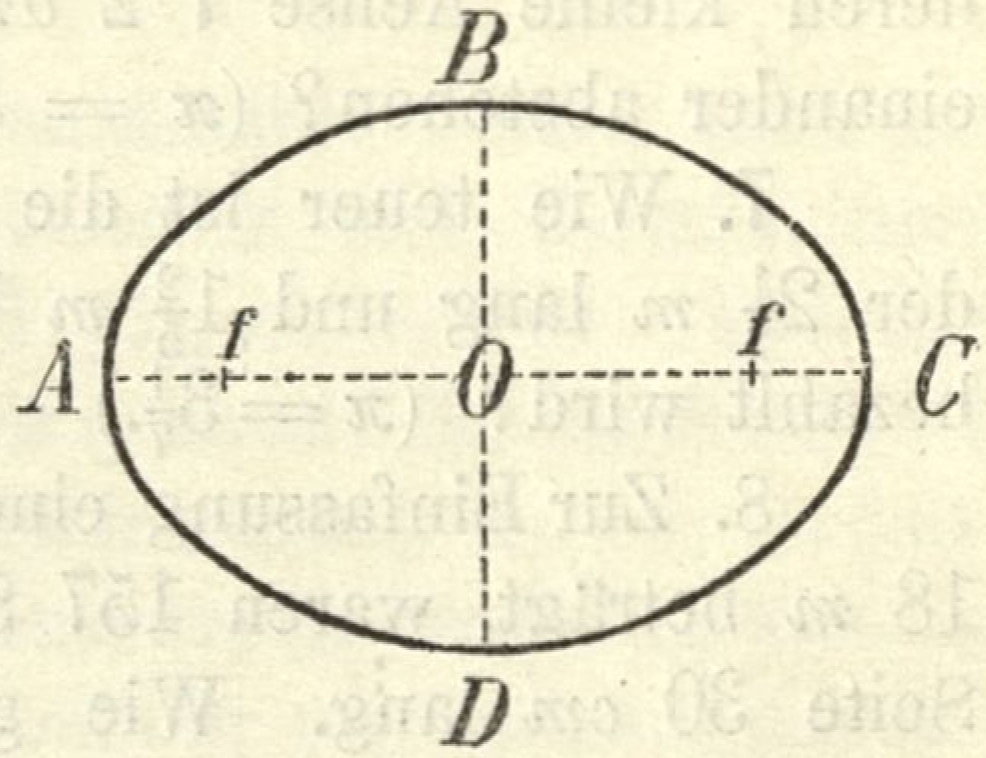
43. Rafaels berühmtes Bild, die Madonna della sedia, ist auf einer kreisrunden Fläche, deren Durchmesser 0·675 *m* beträgt, gemalt. Wie viele Quadratmeter enthält eine Schutzdecke für dieses Bild, wenn letztere 25 *cm* darüber hinausgehen soll? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

44. Ein Fenster ist $1\frac{1}{4}$ *m* breit und 2 *m* hoch; oben besitzt es einen halbkreisförmigen Abschluß. Wie teuer kommt ein Laden für dasselbe, wenn das m^2 mit 6 K berechnet wird? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

45. Eine Tischfläche besitzt die Form eines Halbkreises und wurde mit einer Schutzdecke versehen, zu deren Einsäumung 3 *m* 8·4 *cm* Börtchen notwendig waren. Wie viele m^2 enthält die Tischfläche? ($\pi = 3 \cdot 14.$)

54. Flächeninhalt der Ellipse.

Fig. 147.



Der Umfang einer Ellipse *ABCD* (Fig. 147) läßt sich nicht genau, sondern nur annäherungsweise bestimmen. — Man berechnet den Umfang einer Ellipse annäherungsweise, wenn man das arithmetische Mittel der beiden Achsen (*AC* und *BD*) mit π multipliziert.

Z. B. Es sei $AC = 11$ *cm* und $BD = 7$ *cm*;

$$\frac{11\,cm + 7\,cm}{2} \times 3 \cdot 14 = 28 \cdot 26\ cm = \text{Umfang der Ellipse.}$$

Ferner hat man gefunden, daß eine Ellipse ebenso viel Flächenraum einschließt wie ein Kreis, bei welchem das Quadrat des Halbmessers gleich ist dem Produkte aus den beiden Halbachsen der Ellipse. Da nun der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Quadrate des Halbmessers, multipliziert mit der Ludolfischen Zahl, so folgt:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, indem man das Produkt der beiden halben Achsen mit der Ludolfischen Zahl multipliziert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 11 *cm* und 7 *cm* sind?

Produkt der Halbachsen $= \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} = 19\frac{1}{4}$.

$19\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{7} = 60\frac{1}{2}$; Flächeninhalt $= 60\frac{1}{2}\ cm^2$.

Aufgaben.

1. Die kleine Achse der Ellipse sei 80 *cm*, die Exzentrizität 42 *cm*; wie groß ist die halbe große Achse? Welchen Umfang und Flächeninhalt hat diese Ellipse? ($\pi = 3 \cdot 14.$)

2. Die Exzentrizität einer Ellipse ist 4·8 *m*, die große Achse 16 *m*; wie groß ist die kleine Achse, der Umfang und Inhalt dieser Ellipse? ($\pi = 3 \cdot 14.$)

3. Ein Gärtner hat eine Ellipse zu konstruieren, deren Achsen 522 *cm* und 378 *cm* betragen; wie weit muß er die Brennpunkte von einander nehmen? Welcher Umfang und welcher Inhalt entspricht dieser Ellipse? ($\pi = 3 \cdot 14.$)

4. Ein Blumenbeet hat die Form einer Ellipse von $4\frac{1}{2}$ *m* Länge und $3\frac{3}{4}$ *m* Breite; wie groß ist der Umfang und Flächeninhalt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

5. Eine Untertasse in Form einer Ellipse, deren Achsen 27 *cm* und 18 *cm* betragen, soll gehäkelt werden; wie viel kurze Maschen wird man ausführen müssen, wenn 1 cm^2 36 kurze Maschen erfordert?

6. Wie groß ist der Umfang und Flächeninhalt einer Ellipse, deren kleine Achse 7·2 *dm* ist und deren Brennpunkte 3 *dm* von einander abstehen? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

7. Wie teuer ist die Einfassung eines elliptischen Teppiches, der $2\frac{1}{2}$ *m* lang und $1\frac{2}{5}$ *m* breit ist, wenn das *m* Börtchen mit 12 h bezahlt wird? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

8. Zur Einfassung eines elliptischen Teiches, dessen große Achse 18 *m* beträgt, waren 157 Steine notwendig, jeder an seiner äußern Seite 30 *cm* lang. Wie groß ist die kleine Achse dieses Teiches? ($\pi = 3 \cdot 14$.)

IV. Abschnitt.

Oberfläche und Kubikinhalt der Körper.

55. Oberfläche und Kubikinhalt im allgemeinen.

Bei der Größenbestimmung der Körper handelt es sich um die Berechnung der Oberfläche und des Körperinhaltes (Kubikinhaltes).

Um die Oberfläche eines Körpers zu finden, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche für sich zu bestimmen und alle gefundenen Zahlen zu addieren. Die Oberfläche eines Körpers wird demnach durch das Flächenmaß gemessen.

Um den Kubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Körpermaßes (Kubikmaßes) an und untersucht, wie oft derselbe in dem zu bestimmenden Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl für den Kubikinhalt des Körpers.

Als Einheit des Kubikmaßes nimmt man einen Würfel oder Kubus an, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist und welcher ein Kubikmeter (m^3), ein Kubikdezimeter (dm^3) etc. heißt, je nachdem die entsprechende Längeneinheit ein Meter, ein Dezimeter etc. ist.

Einen Körper auf seinen Kubikinhalt messen heißt also untersuchen, wie viel Kubikmeter oder Kubikdezimeter u. s. w.

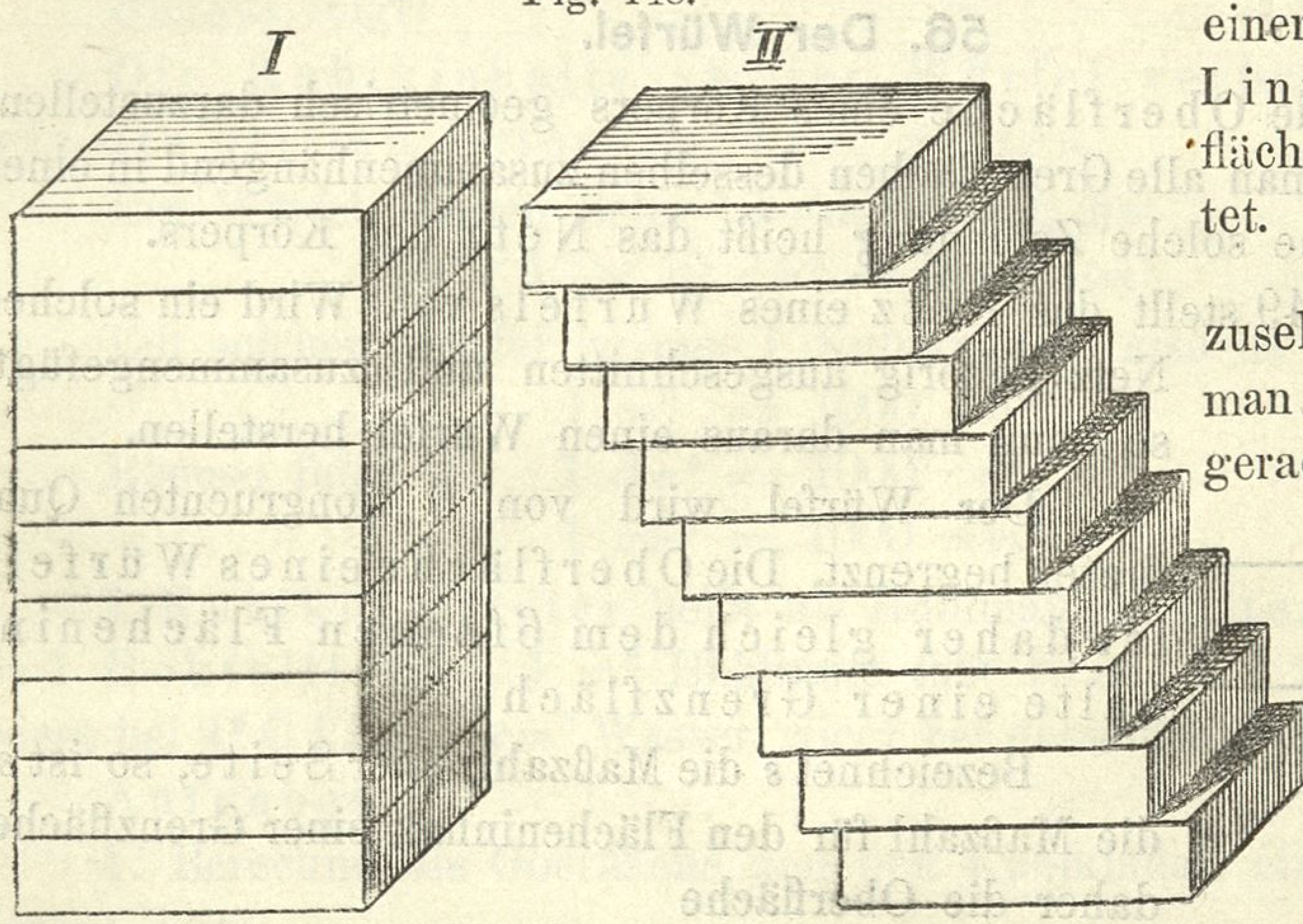
in demselben enthalten sind. Es würde aber zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Kubikeinheit vorzunehmen. Einfacher wird der Kubikinhalt eines Körpers mittelbar aus dem Maße der Linien und Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

Zwei Körper, welche denselben Kubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

Wie bereits im ersten Abschnitte ausgeführt wurde, kann man sich die Prismen, Pyramiden, Zylinder und Kegel durch Parallelbewegung einer geradlinigen oder krummlinigen Figur (Grundfläche) entstanden denken. Bleibt die Größe der Grundfläche während der Parallelbewegung unverändert, so entsteht ein Prisma oder ein Zylinder, je nachdem das sich bewegende Gebilde geradlinig oder krummlinig war; nimmt dagegen die sich bewegende Fläche während der Parallelbewegung stetig ab, bis sie in einem Punkte verschwindet, so erhält man eine Pyramide oder einen Kegel.

Der Kubikinhalt des hierbei beschriebenen Raumes ist jedenfalls um so größer, je größer die sich bewegende Fläche ist; er wird aber auch zunehmen, wenn die Höhe wächst, bis zu welcher sich die Figur erhebt. Die Größe des Raumes bleibt aber dieselbe, ob das sich bewegende Gebilde in einer senkrechten oder einer schiefen Linie zur Grundfläche fortschreitet.

Fig. 148.



Um dies einzusehen, denke man sich ein gerades Prisma (Fig. 148, *I*) durch möglichst viele parallele und gleich weit entfernte Schnitte in lauter prismatische Platten zerlegt; werden nun letztere nach schräger Richtung verschoben (Fig. 148, *II*), so ergibt sich ein Körper, der sich umsomehr einem schiefen Prisma nähert, je dünner die Platten sind. Bei unendlich vielen Schnitten fallen die Platten unendlich dünn aus und der Körper *II* geht in ein schiefes Prisma über. Da aber beide Prismen aus derselben Anzahl von gleich großen Platten sich zusammensetzen, so folgt hieraus, daß sie inhaltsgleich sind. Hieraus ergibt sich:

Jedes schiefe Prisma ist inhaltsgleich einem geraden Prisma, mit dem es dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Hätte man statt des geraden Prismas einen geraden Zylinder, eine gerade Pyramide oder einen geraden Kegel genommen und diese Körper durch parallele Schnitte zerlegt und sodann verschoben, so würde man auf gleiche Weise inhaltsgleiche schiefe Zylinder, Pyramiden oder Kegel erhalten haben, woraus folgt:

Jeder schiefe Zylinder ist inhaltsgleich einem geraden Zylinder von derselben Grundfläche und Höhe.

Jede schiefe Pyramide ist inhaltsgleich einer geraden Pyramide von derselben Grundfläche und Höhe.

Jeder schiefe Kegel ist inhaltsgleich einem geraden Kegel von derselben Grundfläche und Höhe.

Der Kubikinhalt einer Kugel hängt bloß von ihrem Halbmesser ab.

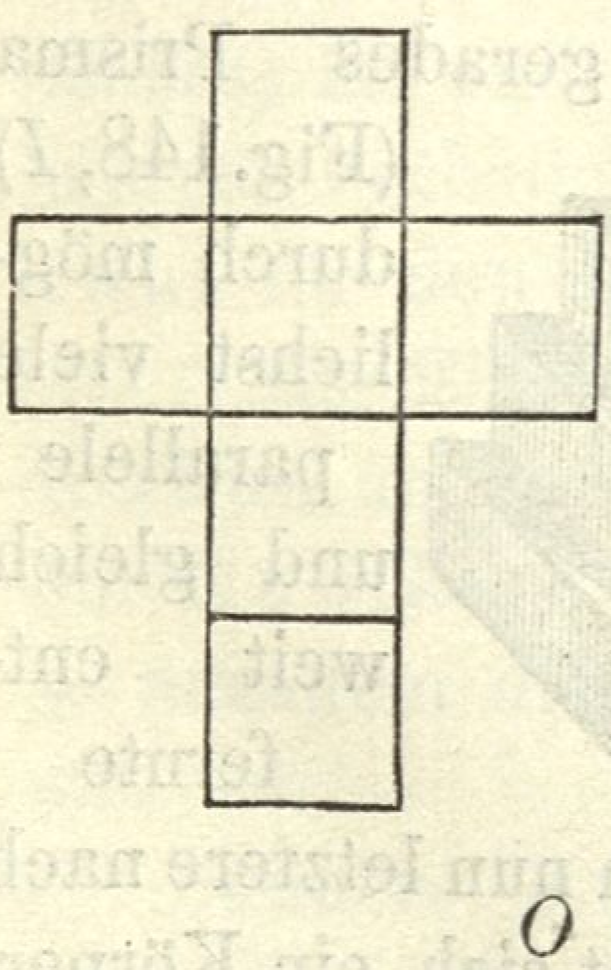
Zwei Kugeln sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

56. Der Würfel.

Um die Oberfläche eines Körpers geometrisch darzustellen, konstruiert man alle Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer Ebene. Eine solche Zeichnung heißt das Netz des Körpers.

Fig. 149 stellt das Netz eines Würfels vor. Wird ein solches Netz gehörig ausgeschnitten und zusammengefügt, so kann man daraus einen Würfel herstellen.

Fig. 149.



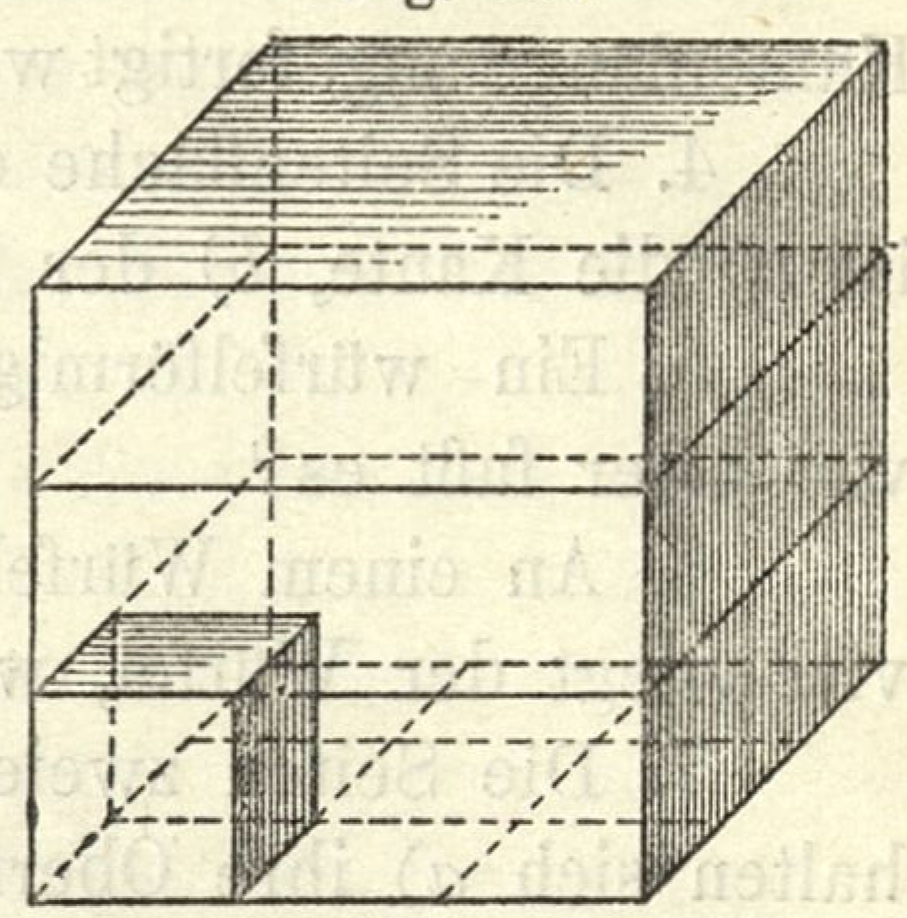
Der Würfel wird von 6 kongruenten Quadraten begrenzt. Die Oberfläche eines Würfels ist daher gleich dem 6fachen Flächeninhalte einer Grenzfläche.

Bezeichnet s die Maßzahl einer Seite, so ist s^2 die Maßzahl für den Flächeninhalt einer Grenzfläche daher die Oberfläche

$$O = 6\, s^2, \text{ und umgekehrt } s = \sqrt{\frac{O}{6}}.$$

Ist die Länge der Seite eines Würfels 3 cm (Fig. 150), so beträgt die Grundfläche $3 \times 3\ cm^2 = 9\ cm^2$. Es lassen sich demnach auf der Grundfläche 9 cm^3 auflegen, und zwar bis zu einer Höhe von 1 cm; von da bis zur Höhe von 3 cm liegen noch 2 solche Schichten von 9 cm^3; also enthält der Würfel
$3 \times 9\ cm^3 = 3 \times 3 \times 3\ cm^3 = 27\ cm^3$.

Fig. 150.



Um dieses zu versinnlichen, nehme man 27 kleine und gleiche Würfel und lege diese gehörig neben und auf einander.

Man überzeugt sich auf gleiche Weise, daß ein Würfel,

dessen Seite 4 cm ist, $4 \times 4 \times 4\ cm^3 = 64\ cm^3$,
" " 5 cm " $5 \times 5 \times 5\ cm^3 = 125\ cm^3$,
" " 6 cm " $6 \times 6 \times 6\ cm^3 = 216\ cm^3$.

enthält u. s. w.

Der Kubikinhalt eines Würfels wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite (Kante) dreimal als Faktor setzt oder zur dritten Potenz erhebt.

Darum wird auch im Rechnen die dritte Potenz einer Zahl der Kubus derselben genannt.

Bezeichnet s die Länge einer Seite und K den Kubikinhalt eines Würfels, so ist $K = s^3$.

Hieraus folgt:

Die Kubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

Ein Würfel, dessen Seite 10 dm beträgt, hat

$$10 \times 10 \times 10\ dm^3 = 1000\ dm^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Kubikmeter; also ist

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3.$$

Ebenso folgt $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$,

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

1 Kubikdezimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter. — 1 m^3 Hohlraum faßt 10 hl. — 1 dm^3 Wasser wiegt bei 4° C 1 kg; 1 cm^3 Wasser wiegt bei derselben Temperatur 1 g.

Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Würfels, dessen Seite

a) 12 dm, *b)* 2 m 4 dm, *c)* 1·35 m,
d) 27 cm, *e)* 1 m 3 dm 5 cm, *f)* 0·575 m beträgt!

2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398·535 cm^2; wie groß ist *a)* die Seite, *b)* der Kubikinhalt desselben?

3. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertigt werden; wie viel m^2 Kupferblech braucht man?

4. Die Seitenfläche eines Würfels beträgt 3 m^2 61 dm^2; wie groß ist *a)* die Kante, *b)* der Kubikinhalt?

5. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite; wie viel Liter faßt es?

6. An einem Würfel von Granit beträgt jede Seite 1·4 *m*; wieviel wiegt der Würfel, wenn 1 dm^3 Granit 2·7 *kg* wiegt?

7. Die Seiten zweier Würfel sind 4 *cm* und 12 *cm*; wie verhalten sich *a)* ihre Oberflächen, *b)* ihre Kubikinhalte?

8. Die Oberfläche eines Granit-Würfels enthält 107·3574 dm^2; wie groß ist *a)* eine Kante, *b)* der körperliche Inhalt, *c)* sein Gewicht?

9. Wie viele *l* faßt ein kubischer Behälter, dessen Grundfläche 64 dm^2 beträgt?

10. Eine Kohlenkiste von der Form eines Würfels hat 12 *dm* Seitenlänge. Wie viel *q* Kohle faßt diese, wenn 1 dm^3 Kohle 1·4 *kg* wiegt und 15% wegen der leeren Räume in Abzug kommen?

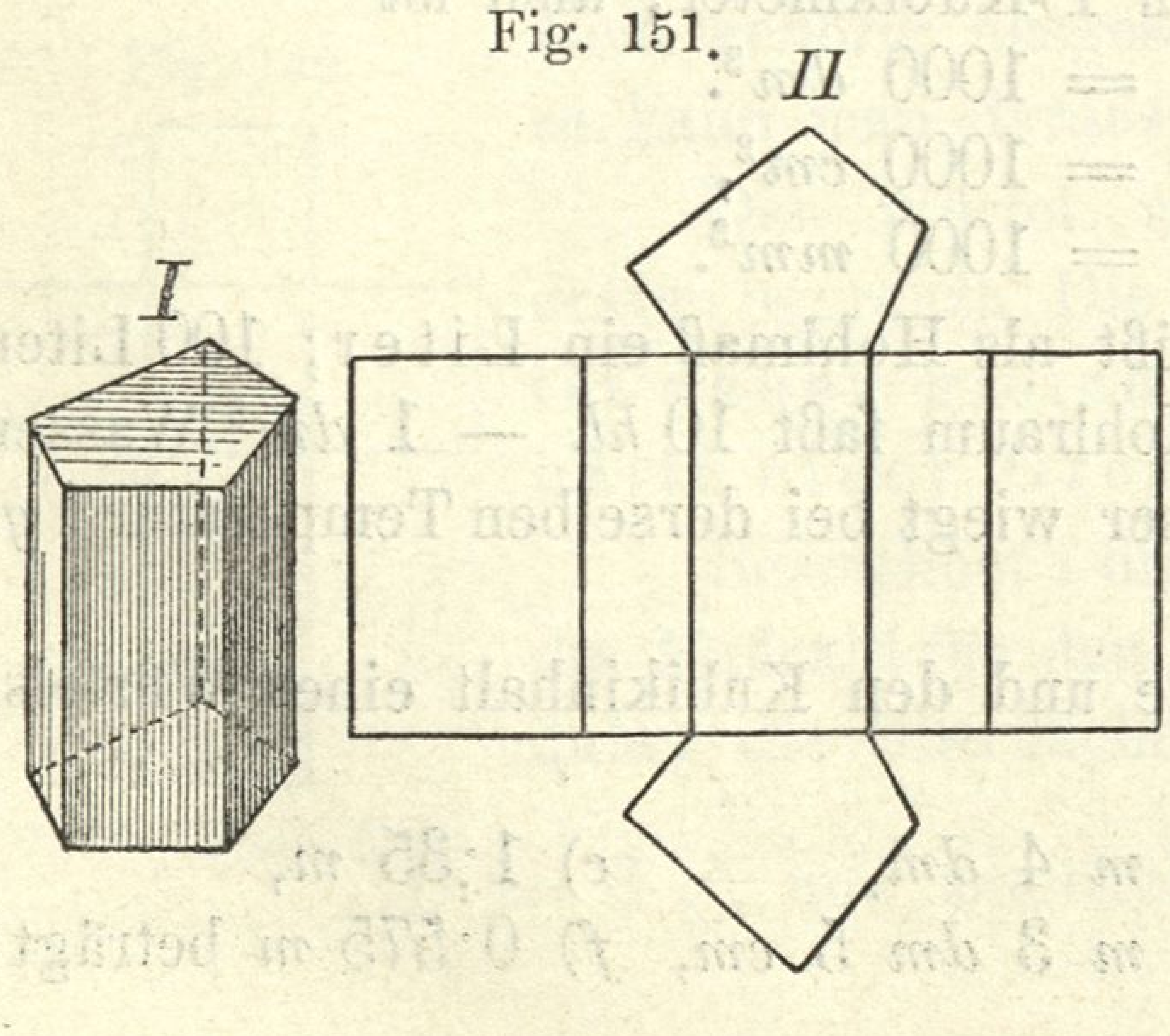
11. Wie schwer ist eine Wagenladung von 120 Würfeln aus Sandstein, wenn die Seite eines jeden Würfels 2·5 *dm* beträgt und 1 dm^3 Sandstein 2·4 *kg* wiegt?

12. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 10·64 m^2; welchen Körperinhalt hat ein anderer Würfel, dessen Seite um 0·21 *m* größer ist als die des ersten Würfels?

57. Das Prisma.

Um das Netz eines geraden Prismas (Fig. 151) zu erhalten, zeichne man die Parallelogramme (Rechtecke), welche die Mantelfläche bilden, so neben einander, daß je 2 eine gemeinschaftliche Seite haben, und konstruiere dann über und unter einem dieser Parallelogramme die Grundflächen. (Von den Netzen schiefer Körper wollen wir wegen der Schwierigkeit in der Herstellung absehen.)

Fig. 151.

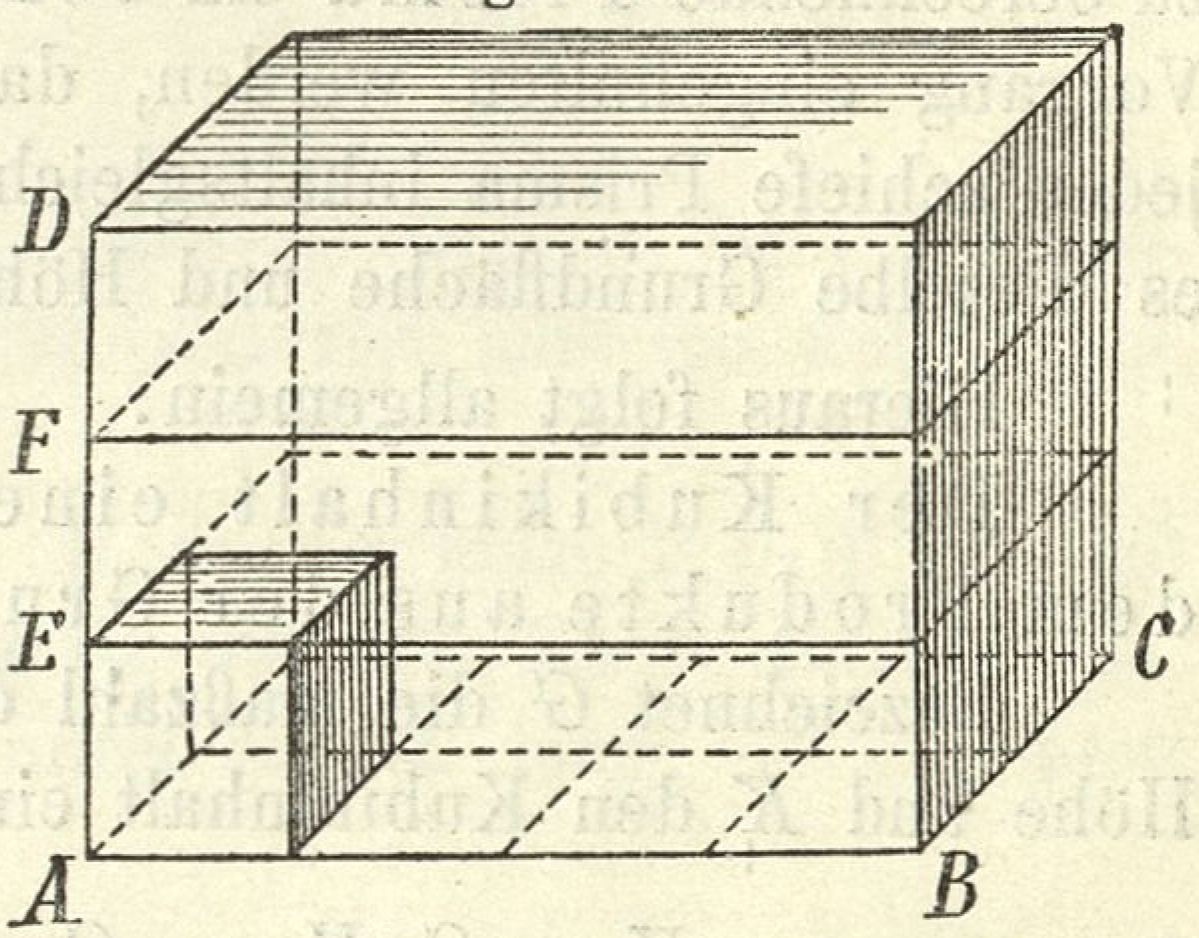


Soll die Größe der Mantelfläche eines Prismas bestimmt werden, so muß man zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme berechnen; ihre Summe gibt die Mantelfläche.

Bei einem geraden Prisma bildet die Mantelfläche, wenn man sich dieselbe auf eine Ebene abgewickelt denkt, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und dessen Höhe der Seitenkante des Prismas gleich ist (Fig. 151). Also gilt der Satz: Die Mantelfläche eines geraden Prismas wird gefunden, indem man den Umfang der Grundfläche mit einer Seitenkante multipliziert.

Addiert man hierzu noch die doppelte Grundfläche, so erhält man die Oberfläche des Prismas.

Fig. 150.



Um den Kubikinhalt eines Prismas zu finden, wollen wir vom rechtwinkeligen Parallelepiped ausgehen. Es sei der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds (Fig. 152), in welchem die Länge $AB = 4\ dm$, die Breite $BC = 2\ dm$ und die Höhe $AD = 3\ dm$ ist, zu bestimmen. Da die Grundfläche $2 \times 4\ dm^2 = 8\ dm^2$ enthält, so läßt sich auf ihr ein dm^3 8mal auflegen; das Parallelepiped enthält also bis zu einer Höhe von 1 dm eine Schichte von 8 dm^3; zu der Höhe EF gehört eine neue Schichte von 8 dm^3 und zu der Höhe FD wieder eine Schichte von 8 dm^3. Das ganze Parallelepiped hat daher 3mal 8 dm^3 oder $2 \times 4 \times 3\ dm^3 = 24\ dm^3$. — Allgemein lassen sich auf der Grundfläche jedesmal so viele Kubikeinheiten aufstellen, als dieselbe Quadrateinheiten und enthält, es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln übereinander, als die Höhe Längeneinheiten enthält. Man muß daher, um den Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds zu erhalten, die Grundfläche mit der Höhe, oder, was dasselbe ist, die Länge, Breite und Höhe miteinander multiplizieren. Daraus folgt:

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds wird gefunden, indem man die Maßzahlen seiner Länge, Breite und Höhe oder indem man die Maßzahlen seiner Grundfläche und Höhe mit einander multipliziert.

Oder kürzer:

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus der Länge, Breite und Höhe oder dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Ist jedoch die Grundfläche eines geraden Prismas eine beliebige geradlinige Figur, so berechne man stets zuerst den Flächeninhalt dieser Figur. Angenommen, der Flächeninhalt der Grundfläche des in Fig. 151 dargestellten fünfseitigen Prismas betrage 52 cm^2, während die Höhe desselben 10 cm messe. Wie leicht einzusehen ist, lassen sich auf die Grundfläche 52 cm^3 aufstellen und diese Schichte, 10mal über einander gelegt, füllt den ganzen Körper aus. Man findet also auch hier den körperlichen Inhalt (520 cm^3), wenn man die Grundfläche mit der Höhe multipliziert. — Wäre das zu berechnende Prisma ein schiefes, so müßte auch hier derselbe Vorgang eingehalten werden, da nach dem auf Seite 114 Gesagten jedes schiefe Prisma inhaltsgleich einem geraden Prisma ist, mit dem es dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Hieraus folgt allgemein:

Der Kubikinhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnet G die Maßzahl der Grundfläche, H die Maßzahl der Höhe und K den Kubikinhalt eines Prismas, so ist

$$K = G.H, \quad G = \frac{K}{H}, \quad H = \frac{K}{G}.$$

Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt folgender rechtwinkeliger Parallelepipede:

a) Länge 24 dm, Breite 18 dm, Höhe 36 dm;
b) „ 1·26 m, „ 1·05 m, „ 0·84 m;
c) „ 12 m 1 dm 4 cm, „ 1 m 7 dm 5 cm, „ 8 m 3 dm!

2. Wie groß ist der Kubikinhalt eines Prismas, dessen Grundfläche 5 dm^2 46 cm^2 und dessen Höhe 3 dm 9 cm ist?

3. Die Grundfläche eines 6 dm hohen geraden Prismas ist ein Quadrat, dessen Seite 5 dm 4 cm beträgt; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Kubikinhalt?

4. Der Inhalt eines Prismas ist 5·85 m^3, die Höhe 1·3 m; wie groß ist die Grundfläche?

5. In einem rechtwinkeligen Parallelepiped ist die Grundfläche 7·3 dm lang und 2·4 dm breit; wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt 61·32 dm^3 beträgt? Welche Oberfläche besitzt dasselbe?

6. Eine Säule mit quadratischer Grundfläche hat 40·368 dm^3 Inhalt und 7·5 dm Höhe; wie groß ist eine Grundkante?

7. Eine vierseitige Schachtel, welche 3 *dm* lang, 1·5 *dm* breit und 1·6 *dm* hoch ist, soll mit buntem Papier überzogen werden; wie viel dm^2 Papier braucht man dazu?

8. Berechne *a*) die Oberfläche, *b*) den Kubikinhalt eines Holzblockes, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit 0·2 *m* Seitenlänge ist, und dessen Höhe 2·3 *m* beträgt! Wie schwer ist derselbe, wenn 1 dm^3 0·86 *kg* wiegt?

9. Wie viele Hektoliter Getreide kann ein Getreidekasten aufnehmen, wenn die Länge desselben 2 *m*, die Breite 1·3 *m* und die Höhe 1·4 *m* beträgt?

10. Ein Wasserbehälter ist, von außen gemessen, 2 *m* lang, 8 *dm* breit und 5 *dm* hoch; wie viel Liter kann er fassen, wenn die äußern Wände und der Boden 1 *dm* dick sind?

11. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 *m* Länge und 1·2 *m* Breite; wie tief muß das Gefäß sein, wenn es 12 Hektoliter fassen soll?

12. Die Länge einer Mauer ist 21 *m*, die Höhe 2 *m* 1 *dm*, die Dicke 9 *dm*; wie viel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel samt Verbindungsmittel 30 *cm* lang, 15 *cm* breit und 7 *cm* hoch anzunehmen ist?

13. Ein rechteckiger Kasten von 3 *m* Länge, 2 *m* Breite und 1·2 *m* Höhe wird mit Steinkohlen gefüllt; wie groß ist das Gewicht dieser Steinkohlen, wenn 1 m^3 davon 1275 *kg* wiegt?

14. Welches Gewicht hat eine Eisenstange von 1·5 *dm* Länge, deren Querschnitt ein regelmäßiges Achteck mit 0·8 *cm* Seitenlänge ist? (1 dm^3 Eisen wiegt 7·5 *kg*.)

15. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche 5·6 *m* zur Grundlinie, 3 *m* zur Höhe hat und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 *m* beträgt; wie viel *kg* Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 m^3 Heu 114 *kg* wiegt?

16. Ein Balken ist 4 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 4 *dm* und 3 *dm* sind und die Höhe 1·5 *dm* beträgt; wie groß ist der Kubikinhalt?

17. Ein Kasten von 1·2 *m* Länge und 0·7 *m* Breite war zum Teil mit Wasser gefüllt; als man in denselben einen Stein von unregelmäßiger Form legte, stieg das Wasser um 1 *dm* und bedeckte den Stein; wie groß ist der Kubikinhalt des Steines?

18. Ein Reisekoffer besitzt die Form eines geraden Parallelepipedes; derselbe ist 60 *cm* lang, 32 *cm* breit und 36 *cm* hoch. Wie viele *m* Leinwand, welche 75 *cm* breit ist, braucht man, um

den Koffer zu überziehen, wenn wegen Verschneidens und Einfassens 10% mehr genommen werden müssen?

19. Der Canal du midi ist 244092 *m* lang, hat am Grunde eine Breite von 10 *m* und oben eine solche von 20 *m* und ist 2 *m* tief. Wie viel m^3 faßt der Kanal?

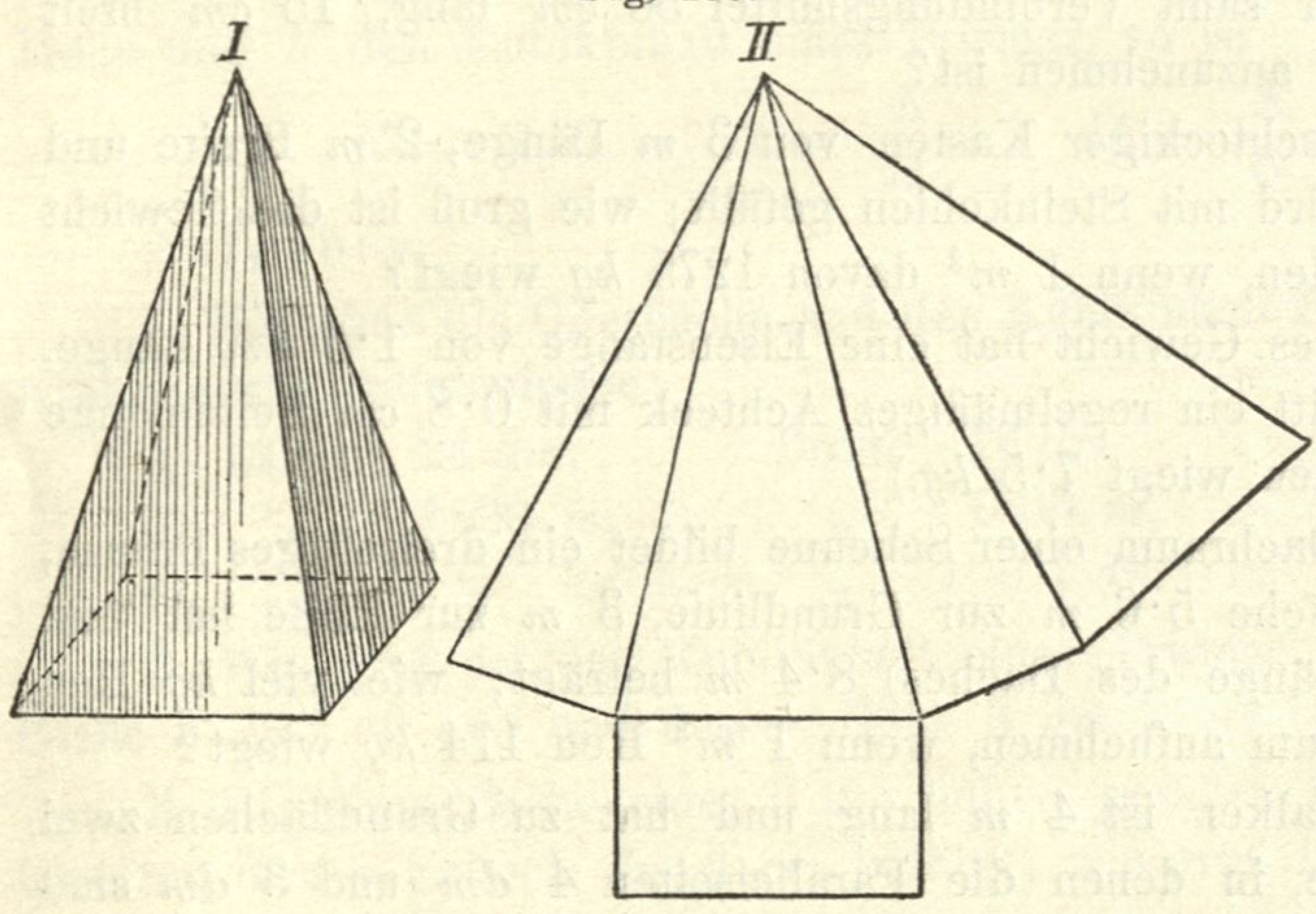
20. Bestimme die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers und berechne hieraus den Rauminhalt desselben! Wie viele Kinder könnte das Zimmer fassen, wenn für jedes Kind 3 m^3 Luftraum angenommen werden?

21. Ein Schwimmbassin ist 24 *m* lang und 12 *m* breit; an dem einen (tieferen) Ende mißt es 4 *m* und am andern (seichteren) Ende 0·75 *m*. Wie viele *hl* Wasser sind zur Füllung notwendig?

58. Die Pyramide.

Das Netz einer **geraden Pyramide** (Fig. 153) erhält man, wenn man zuerst die Seitendreiecke neben einander so konstruiert, daß sie den Scheitel gemeinschaftlich haben, und einem dieser Dreiecke die Grundfläche anschließt.

Fig. 153.



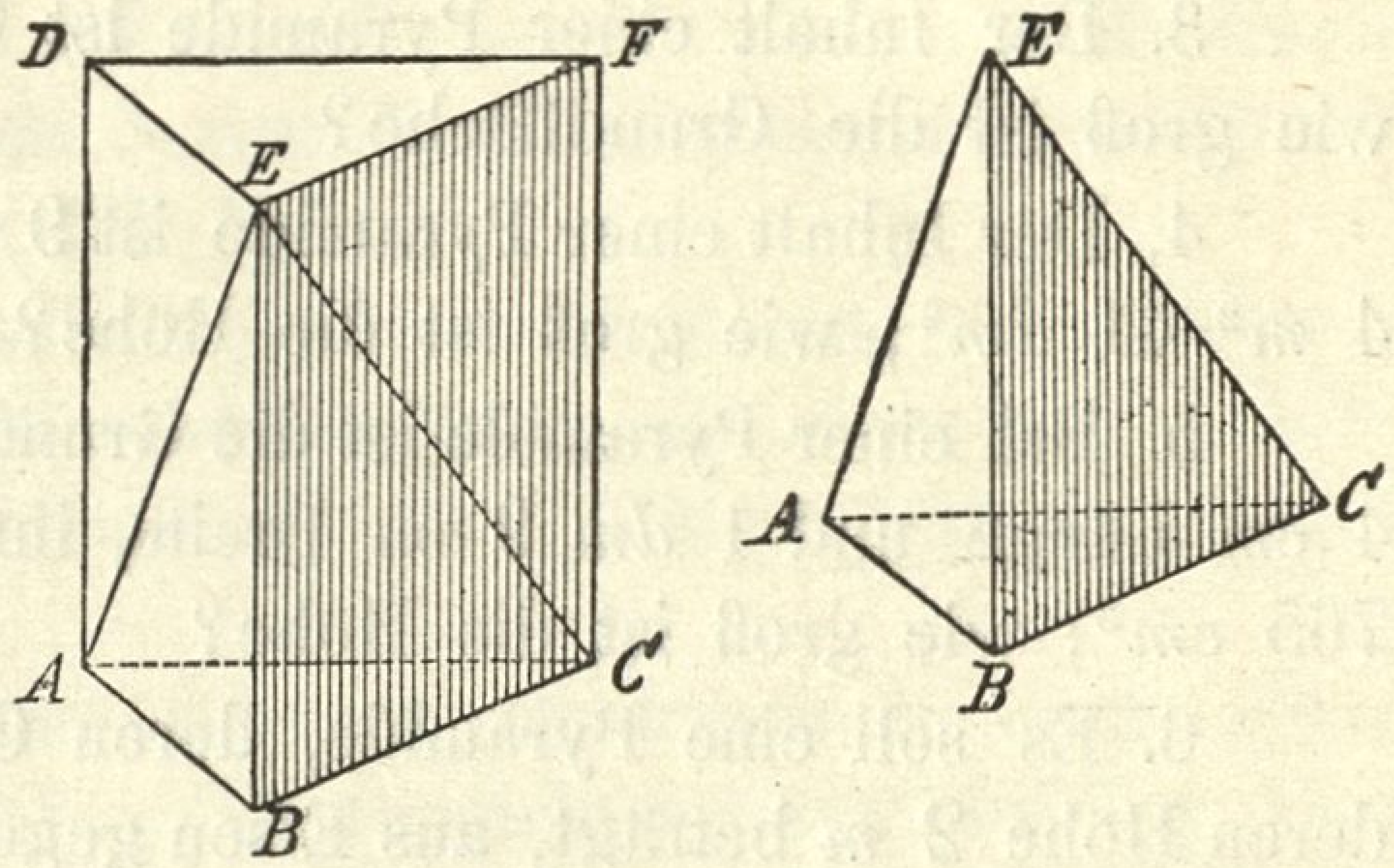
Um die **Mantelfläche** einer Pyramide zu berechnen, bestimme man die Größe der einzelnen Seitenflächen als Dreiecke und summiere die erhaltenen Resultate. Addiert man hierzu noch den Inhalt der **Grundfläche**, so erhält man die **Oberfläche**.

Ist die Pyramide eine **regelmäßige**, so braucht man nur ein Seitendreieck zu berechnen und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenflächen zu multiplizieren; dazu wird noch die Grundfläche addiert.

Bei einem **Pyramidenstumpfe** bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Trapeze und addiert zu ihrer Summe die beiden Grundflächen.

Man verfertige sich ein beliebiges hohles Prisma und eine hohle Pyramide von derselben Grundfläche und von gleicher Höhe (Fig. 154). Füllt man die Pyramide ganz mit Sand an und gießt diesen sodann in das hohle Prisma, so wird letzteres nur bis zu einem Drittel der Höhe angefüllt. — Hieraus folgt:

Fig. 154.

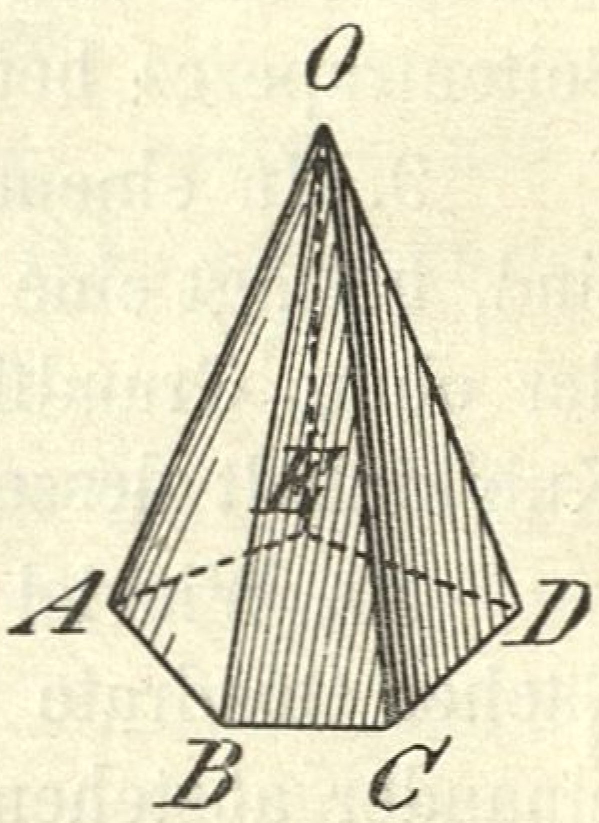


Jede Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas von derselben Grundfläche und von gleicher Höhe.

Da nun der Kubikinhalt eines jeden Prismas gleich dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe ist, so muß der Kubikinhalt einer Pyramide von derselben Grundfläche und von gleicher Höhe gleich dem dritten Teile des obigen Produktes sein.

Es gilt also der Satz:

Fig. 155.



Der Kubikinhalt einer Pyramide (Fig. 155) ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teil der Höhe.

Um den Kubikinhalt eines Pyramidenstumpfes zu finden, bestimme man die Inhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidenstumpf ist, und subtrahiere den Inhalt der kleineren Pyramide von dem der größeren.

Kürzer gestaltet sich die Berechnung nach folgendem Satze:

Der Kubikinhalt eines Pyramidenstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Produkte derselben mit dem dritten Teile der Höhe multipliziert.

Annäherungsweise findet man den Kubikinhalt eines Pyramidenstumpfes, indem man die halbe Summe der beiden Grundflächen mit der Höhe des Stumpfes multipliziert.

Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt 12·37 *dm*; wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Berechne den Kubikinhalt folgender Pyramiden:

a) Grundfläche 13 dm^2, Höhe 9 dm;

b) „ 2·34 dm^2, Höhe 6·3 dm;

c) „ 1 m^2 85 dm^2, Höhe 5 dm 4 cm!

3. Der Inhalt einer Pyramide ist 0·6264 m^3, die Höhe 0·9 m; wie groß ist die Grundfläche?

4. Der Inhalt einer Pyramide ist 9 m^3 261 dm^3, die Grundfläche 4 m^2 41 dm^2; wie groß ist die Höhe?

5. Bei einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 3 dm 4 cm Länge und 1 dm 9 cm Breite, ihr Kubikinhalt beträgt 17 dm^3 765 cm^3; wie groß ist die Höhe?

6. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 m^2 15 dm^2 und deren Höhe 2 m beträgt, aus Eisen gegossen werden; wieviel wird sie wiegen, da 1 dm^3 Eisen 7·21 kg wiegt?

7. Wie groß ist das Gewicht einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 m, eine Seite der Grundfläche 5 dm beträgt und 1 dm^3 Marmor 2·72 kg wiegt?

8. Die Grundflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind Quadrate mit den Umfängen 1 m 6 dm und 1 m 2 dm, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 2 m 8 dm; wie groß ist die Oberfläche?

9. In einem Pyramidenstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der untern Grundfläche 2 dm 5 cm, eine Seite der obern Grundfläche 1 dm 5 cm, die Höhe 1·2 dm; berechne den Kubikinhalt desselben nach jeder der drei oben angeführten Methoden!

10. Wieviel wiegt ein Pyramidenstumpf aus Marmor, dessen Grundflächen Quadrate von 1·2 m und 1 m Seitenlänge sind und 1·5 m von einander abstehen? (1 dm^3 Marmor wiegt 2·72 kg).

11. Wieviel Liter faßt ein 6·3 dm tiefes Gefäß von der Form eines Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen Quadrate von 4·8 dm und 3·2 dm Seitenlänge sind?

12. Die Grundkante einer geraden quadratischen Pyramide mißt 10 cm, jede Seitenkante 13 cm; wie groß ist *a)* die Höhe eines Seitendreieckes, *b)* der Flächeninhalt eines Seitendreieckes, *c)* die Mantelfläche, *d)* die Grundfläche und *e)* die Oberfläche?

13. Die Grundkante einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, beträgt 16 cm, jede Seitenkante mißt 65 cm. Wie groß ist *a)* die Grundfläche, *b)* die Höhe der Pyramide, *c)* der Körperinhalt?

14. Die Grundkante einer geraden quadratischen Pyramide beträgt 14 cm, die Höhe der Pyramide mißt 24 cm. Wie groß ist *a)* die

Grundfläche, *b)* ein Seitendreieck, *c)* die Mantelfläche, *d)* die Oberfläche und *e)* der Körperinhalt?

15. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck, dessen längere Seite 16 *dm* und dessen kürzere Seite 12 *dm* mißt, jede Seitenkante beträgt 26 *dm*. Wie groß ist der Körperinhalt dieser Pyramide und welches Gewicht besitzt dieselbe, wenn sie aus Granit besteht? (1 dm^3 Granit wiegt 2·7 *kg*.)

16. Die Pyramide zu Giseh ist 143·8 *m* hoch, die untere Grundfläche ist ein Quadrat von 186·9 *m* Seitenlänge, die obere stellt gleichfalls ein Quadrat von 3·7 *m* Seitenlänge dar. Wie groß ist der Kubikinhalt dieser Pyramide?

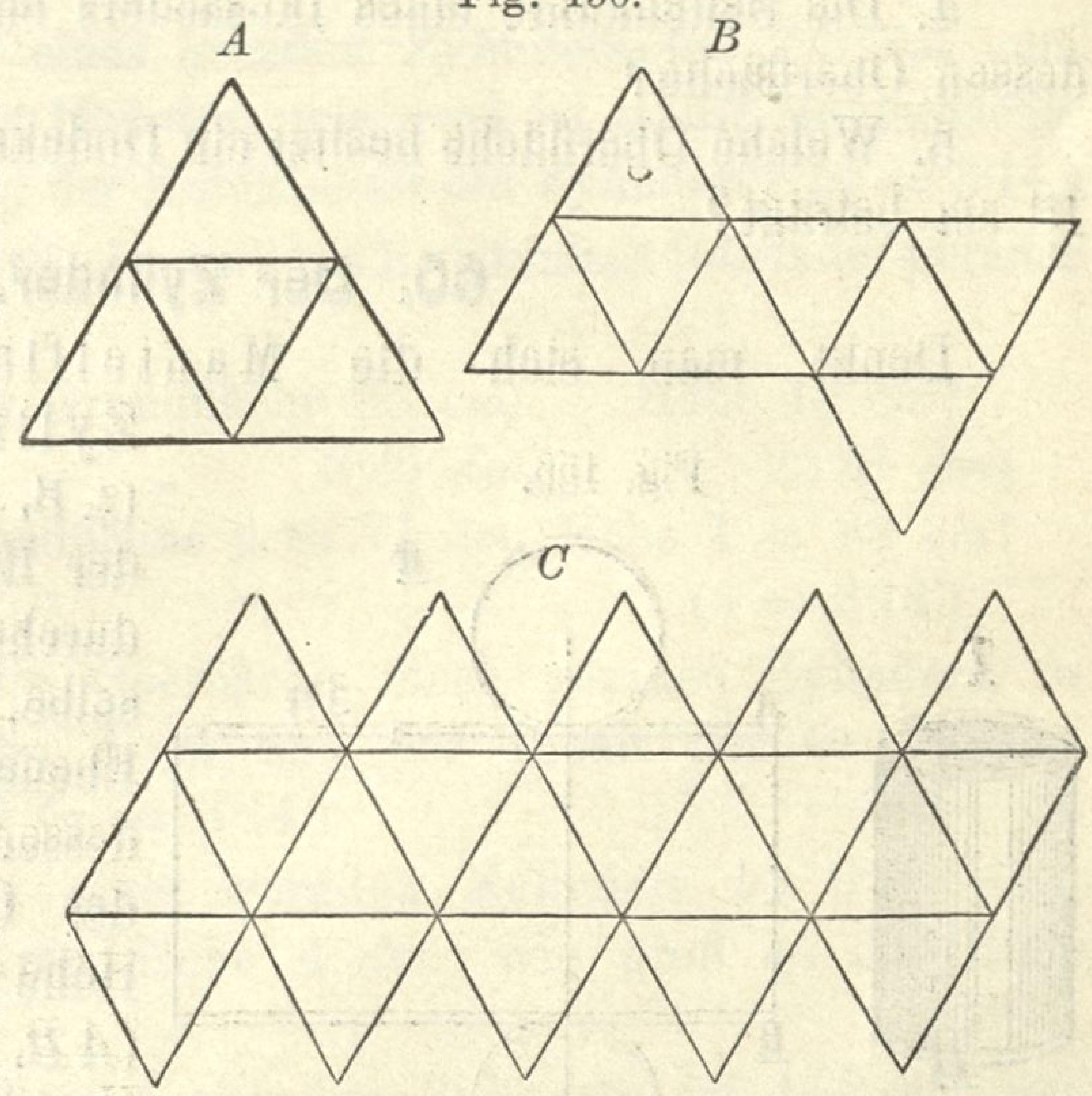
17. Die Grundkante eines eisernen Denkmals in Form einer quadratischen Pyramide mißt 2·2 *m*, ihr Gewicht beträgt 1052·7 *q*. Wie groß ist die Höhe dieser Pyramide? (1 m^3 Eisen wiegt 72·5 *q*.)

18. Wie viele Meter Leinwand von 85 *cm* Breite sind notwendig zur Herstellung eines Zeltes von der Form einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat darstellt, wenn jede Seite des Quadrates 3·4 *m* mißt und die Höhe des Zeltes 2·64 *m* beträgt?

59. Die fünf regelmäßigen Körper.

Das Netz eines **Tetraeders** (Fig. 156, *A*) besteht aus 4 kongruenten gleichseitigen Dreiecken; das Netz des **Oktaeders** *(B)* setzt sich aus 8 und jenes des **Ikosaeders** *(C)* aus 20 solchen Figuren zusammen. Das Netz des **Würfels** (Fig. 157) wurde bereits früher besprochen. Um das Netz des **Dodekaeders** (Fig. 158) zu konstruieren, zeichne man mit der Kante des Dodekaeders ein regelmäßiges Fünfeck und beschreibe über die Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke von derselben Größe (wobei man sich mit Vorteil der Verlängerung der Diagonalen bedient). Nun zeichne man an dieses Netz ein zweites, mit ihm kongruentes, so daß beide in einer Seite zusammenstoßen.

Fig. 156.



Die **O b e r f l ä c h e** der 5 regelmäßigen Körper wird gefunden, indem man vorerst die Größe einer Seitenfläche ermittelt und sodann das Resultat mit der Zahl der Seitenflächen multipliziert.

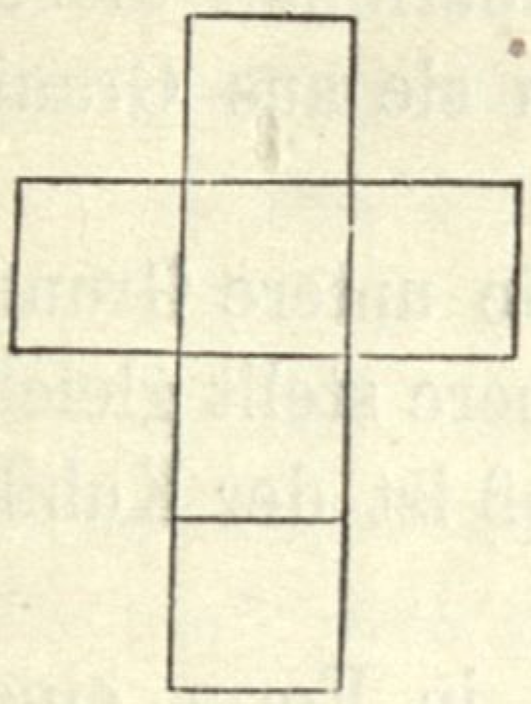


Fig. 157.

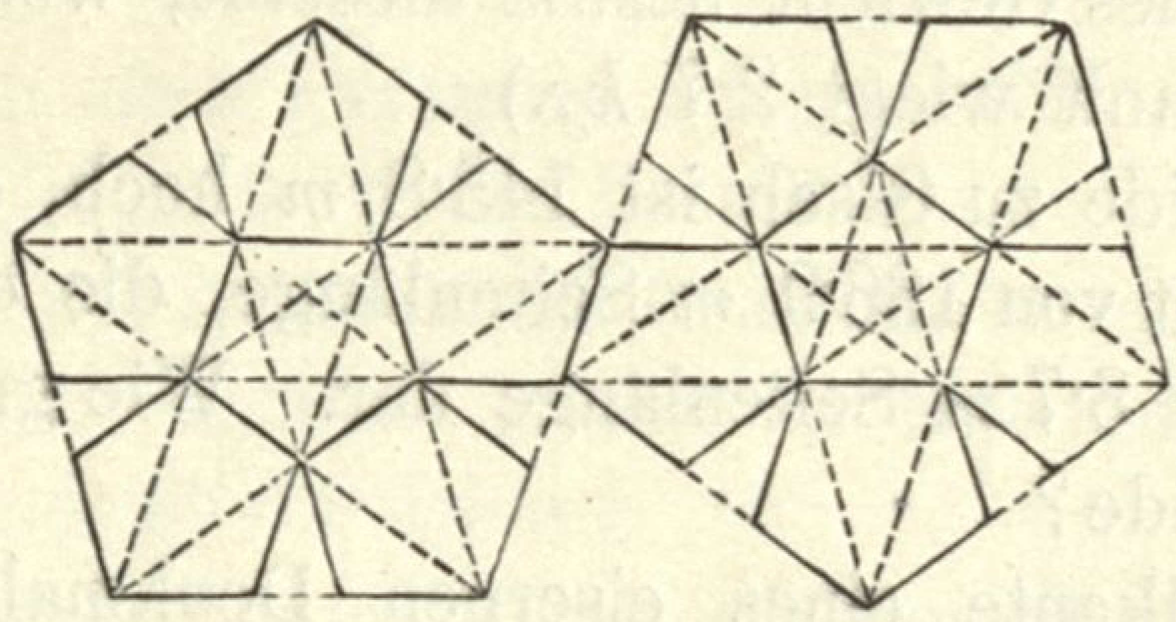


Fig. 158.

Der **K ö r p e r i n h a l t** des **T e t r a e d e r s** sowohl als auch jener des **O k t a e d e r s** läßt sich leicht berechnen, indem man diese Körper als dreiseitige Pyramide, beziehungsweise als quadratische Doppelpyramide auffaßt. Bezüglich des **W ü r f e l s** wurde das Notwendige hiefür bereits mitgeteilt.

Von der Körperinhaltsberechnung des Ikosaeders und Dodekaeders wollen wir des geringen praktischen Wertes wegen absehen.

A u f g a b e n.

1. Die Kante eines Tetraeders beträgt 2 *dm*; bestimme die Größe eines Seitendreieckes und die gesamte Oberfläche!

2. Die Seite eines Oktaeders mißt 12 *cm*, wie groß ist *a)* ein Seitendreieck, *b)* die Oberfläche, *c)* der Körperinhalt?

3. Welchen Körperinhalt besitzt ein Tetraeder, dessen Kante 28 *cm* mißt?

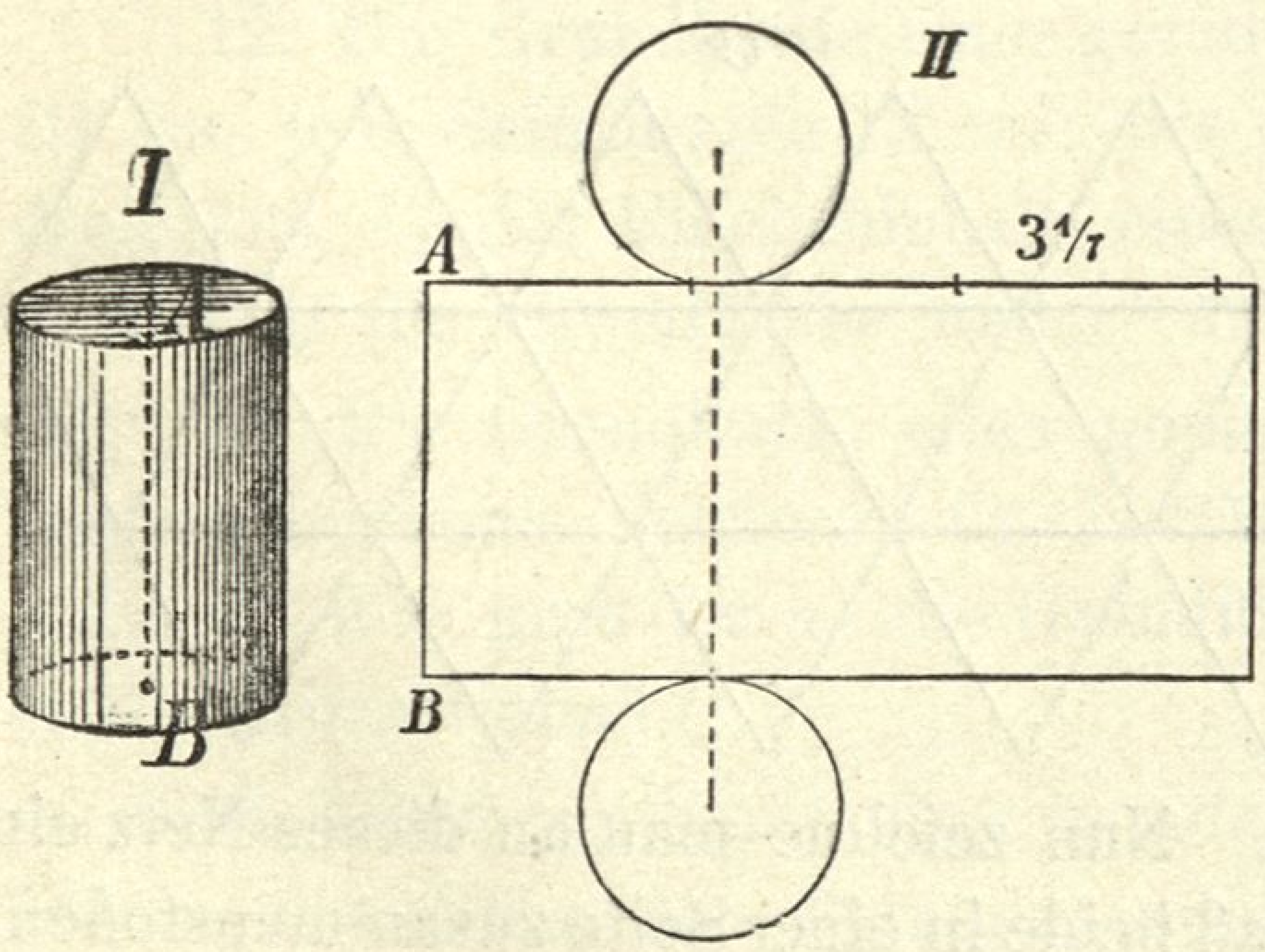
4. Die Seitenkante eines Ikosaeders mißt 15 *cm*; wie groß ist dessen Oberfläche?

5. Welche Oberfläche besitzt ein Dodekaeder, dessen Seitenkante 18 *cm* beträgt?

60. Der Zylinder.

Denkt man sich die **M a n t e l f l ä c h e** eines **g e r a d e n Z y l i n d e r s** (Fig. 159) trennbar (z. B. als Papierhülle) und nach der Richtung einer Mantellinie durchschnitten, so bildet dieselbe, wenn man sie auf eine Ebene ausbreitet, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfang der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Zylinders (*AB*, Fig. 159, *I*) gleich ist. Um daher das **N e t z** eines geraden Zylinders zu konstruieren,

Fig. 159.



zeichne man ein Rechteck, dessen Grundlinie $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Zylinders gleichkommt; hierauf beschreibe man oben und unten zwei den Grundflächen kongruente Kreise.

Bei einem geraden Zylinder ergibt sich die Mantelfläche, indem man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Zylinders multipliziert.

Um nun die Oberfläche des Zylinders zu erhalten, berechnet man die beiden Grundflächen als Kreise, dann die krumme Mantelfläche als Rechteck und bringt diese Zahlen in eine Summe.

Da jeder Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so gilt der Satz:

Der Kubikinhalt eines Zylinders ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Häufig ist der Kubikinhalt einer zylindrischen Röhre zu bestimmen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Kubikinhalt der beiden hierzu gehörigen Zylinder zu berechnen und den Inhalt des kleineren Zylinders von jenem des größeren zu subtrahieren.

Bisher wurden nur Zylinder mit kreisförmiger Grundfläche vorausgesetzt; es ist wohl selbstverständlich, daß bei Zylindern mit elliptischen Grundflächen statt des Umfanges oder Inhaltes eines Kreises immer der Umfang und Inhalt einer Ellipse gesetzt werden muß.

Aufgaben.

1. Die Grundfläche eines geraden Zylinders hat 3·5 *dm* zum Halbmesser, seine Höhe ist 12·4 *dm*; wie groß ist *a)* die Mantelfläche, *b)* die ganze Oberfläche, *c)* der Kubikinhalt des Zylinders? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

2. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt folgender gerader Zylinder:

a) Durchmesser der Grundfläche 23 *cm*, Höhe 15 *cm*;
b) Halbmesser „ „ 8·25 *dm*, „ 25·23 *dm*;
c) Umfang der Grundfläche 4 *m* 71 *cm*, Höhe 1 *m* 88 *cm*!
($\pi = 3{\cdot}14$.)

3. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Zylinders, in welchem die Höhe 8 *dm* 4 *cm* und der Inhalt der Grundfläche 12 dm^2 56 cm^2 beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

4. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist 6·28 dm^2, der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*; wie groß ist die Höhe ($\pi = 3{\cdot}14$.)

5. Der Kubikinhalt eines geraden Zylinders ist 4·62 m^3, der Durchmesser der Grundfläche 1·4 *m*; wie groß ist die Höhe? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

6. Welchen Inhalt hat ein elliptischer Zylinder von 24 *cm* Höhe, wenn die große Achse der Grundfläche 16 *cm* und die kleine Achse 12 *cm* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

7. Bestimme den Halbmesser der Grundfläche eines Zylinders, dessen Höhe 6 *dm* und dessen Inhalt 169 dm^3 560 cm^3 beträgt! ($\pi = 3{\cdot}14$.)

8. Ein gleichseitiger Zylinder hat 2·8 *dm* zur Seite; suche *a*) seine Mantelfläche, *b*) die Oberfläche, *c*) den Kubikinhalt! ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders beträgt 4·71 dm^2, der Umfang der Grundfläche 1·57 *dm*; wie groß ist der Kubikinhalt des Zylinders, und wieviel *l* faßt derselbe? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

10. Wieviel dm^2 Eisenblech braucht man für eine Ofenröhre, welche 5 *m* lang ist und 2 *dm* im Durchmesser hat? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

11. Ein zylindrisches Gefäß soll 1 Liter halten; wie hoch muß es sein, wenn der innere Durchmesser 10 *cm* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

12. Wie groß ist der Durchmesser eines zylindrischen Gefäßes, das 5 *dm* hoch ist und 1 *hl* hält? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

13. In ein zylindrisches Gefäß von 4 *dm* Durchmesser, welches zum Teile mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so daß ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36 *cm* hoch. Nachdem man den Körper herausgenommen hatte, stand das Wasser noch 24 *cm* hoch; welchen Kubikinhalt hat der Körper? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

14. Der innere Durchmesser eines runden Turmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick; wieviel m^3 enthält die Mauer, wenn die Höhe des Turmes 14·5 *m* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

15. Wieviel Ziegel braucht man, um ein Tor zu verlegen, welches mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite im Lichten 2·4 *m*, die Höhe bis zum Schlußsteine 3·6 *m*, die Dicke der Mauer 8 *dm* ist, und wenn auf 1 m^3 Mauerwerk 264 Ziegel gerechnet werden? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

16. Welches Gewicht besitzt ein zylindrischer Barren von Silber, welcher 45 *cm* lang ist, und dessen Querschnitt einen Durchmesser von 4 *cm* besitzt? (1 cm^3 Silber wiegt 10·51 *g*, $\pi = 3{\cdot}14$.)

17. Eine Dachrinne von halbkreisförmigem Querschnitte, welche oben 12 *cm* weit ist, faßt 25·434 *l*; wie lang ist diese? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

18. Eine elliptische Badewanne ist 1·8 *m* lang, 0·8 *m* breit; wie viele *l* Wasser faßt diese, wenn sie bis zu einer Höhe von 60 *cm* gefüllt wird? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

19. Ein kreisrundes Bassin hat 8 *m* Durchmesser, jede Sekunde fließen von demselben durch eine seitliche Röhre 2 *l* Wasser ab; um

wieviel ist der Wasserspiegel nach 10 Stunden 28 Minuten gesunken? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

61. Der Kegel.

Wird die Mantelfläche eines *geraden Kegels* (Fig. 160) auf einer Ebene ausgebreitet, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels und dessen Bogenlänge der Umfang der Grundfläche des Kegels ist. Um daher das *Netz* eines *geraden Kegels* zu erhalten, zeichne man mit der Seite als Halbmesser einen Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge ebenso groß ist wie der Umfang der Grundfläche des Kegels, und konstruiere dann hierzu einen der Grundfläche kongruenten Kreis, welcher den Bogen des Kreisausschnittes berührt.

Fig. 160.

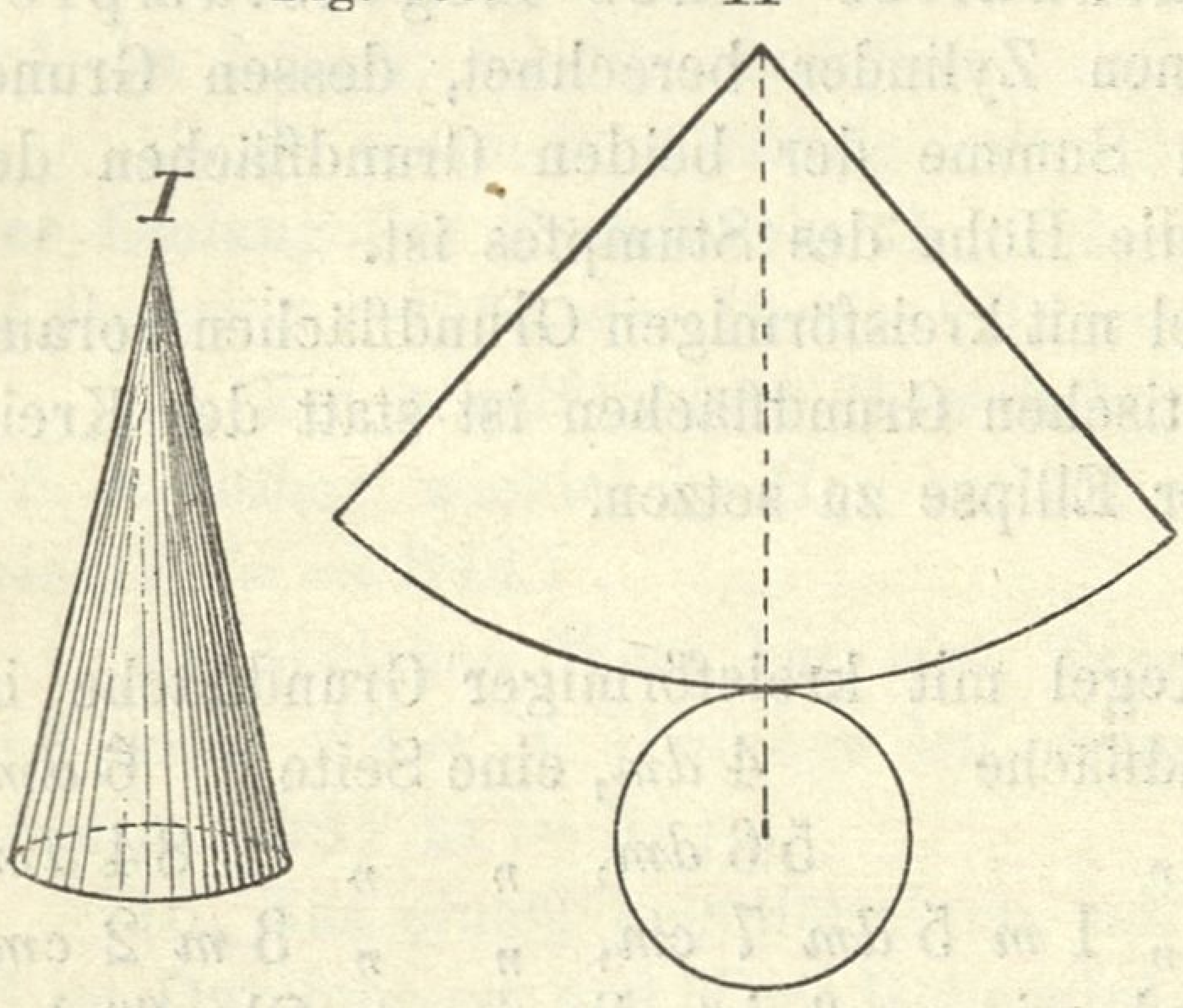


Fig. 161.

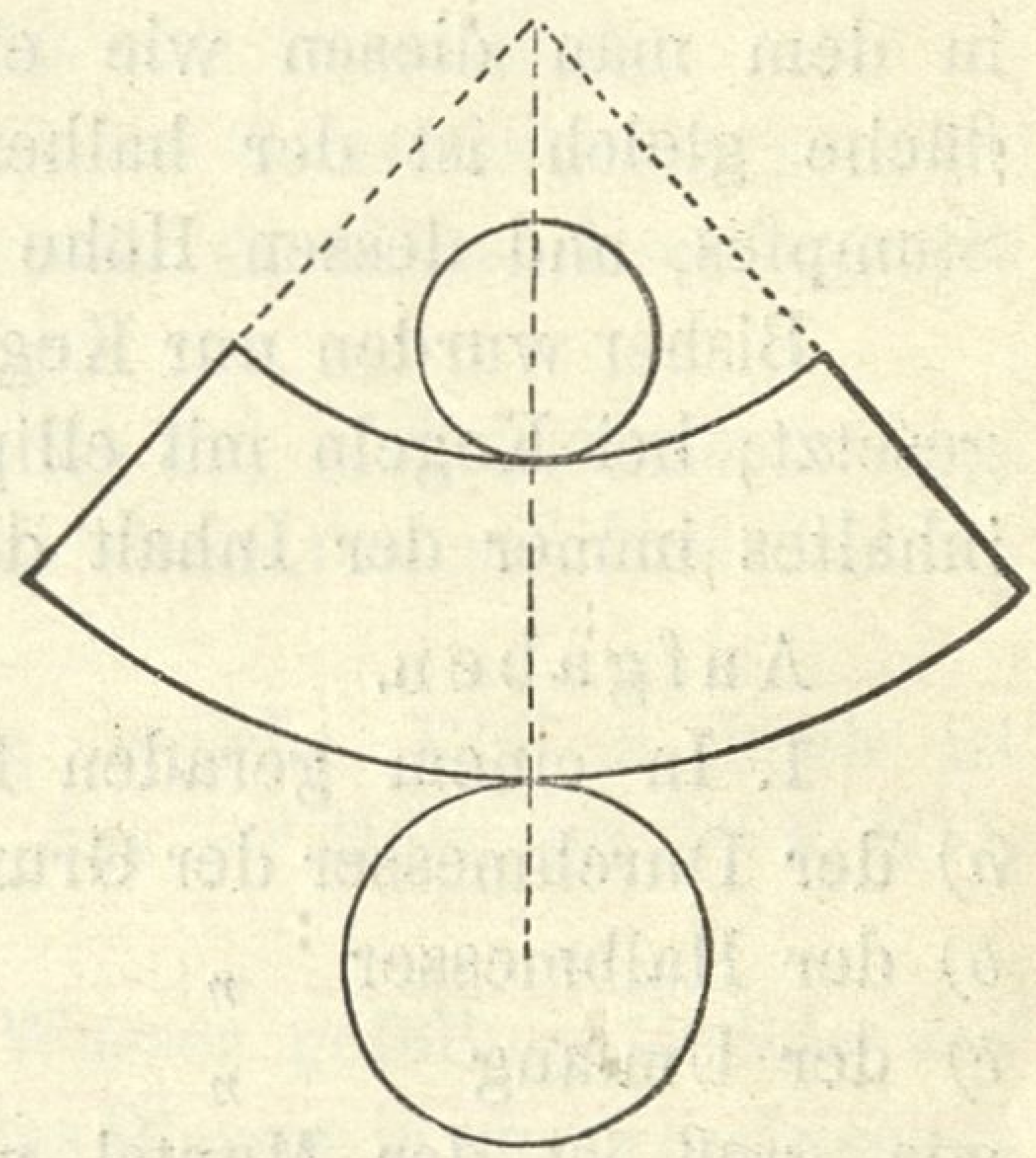


Fig. 161 stellt das *Netz* eines *geraden Kegelstumpfes* dar; die Mantelfläche erscheint als Teil eines Kreisringes.

Die *Oberfläche* eines *Kegels* findet man, indem man zuerst die Grundfläche, dann die Mantelfläche berechnet und beide addiert.

Bei einem *geraden Kegel* wird die *Mantelfläche* gefunden, indem man den Umfang der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multipliziert.

Die *Mantelfläche* eines *geraden Kegelstumpfes* wird berechnet, indem man die halbe Summe der Umfänge seiner Grundflächen mit der Seite desselben multipliziert. Denkt man sich nämlich in dem Mantel des Stumpfes unzählig viele Seiten gezogen, so zerfällt derselbe in Figuren, die man als ebene Trapeze ansehen kann. Es ist daher die Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich der Summe aus den Flächen aller dieser Trapeze und wird gefunden indem man die halbe Summe ihrer Parallelseiten, d. i. die halbe

Summe der Umfänge der beiden Grundkreise mit der Höhe der Trapeze, d. i. mit der Seite des Kegelstumpfes multipliziert.

Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Der Kubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teile der Höhe.

Der Kubikinhalt eines Kegelstumpfes wird auf dieselbe Weise wie der Inhalt eines Pyramidenstumpfes berechnet, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Produkte derselben mit dem dritten Teile der Höhe multipliziert.

In der Praxis begnügt man sich häufig mit einer angenäherten Bestimmung des Kubikinhaltes eines Kegelstumpfes, in dem man diesen wie einen Zylinder berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe der beiden Grundflächen des Stumpfes, und dessen Höhe die Höhe des Stumpfes ist.

Bisher wurden nur Kegel mit kreisförmigen Grundflächen vorausgesetzt; bei Kegeln mit elliptischen Grundflächen ist statt des Kreisinhaltes immer der Inhalt der Ellipse zu setzen.

Aufgaben.

1. In einem geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche ist
a) der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*, eine Seite 6 *dm*;
b) der Halbmesser „ „ 5·6 *dm*, „ „ 8·4 *dm*;
c) der Umfang „ „ 1 *m* 5 *dm* 7 *cm*, „ „ 3 *m* 2 *cm*;
wie groß ist der Mantel und wie groß ist die ganze Oberfläche? ($\pi = 3·14$.)

2. Berechne den Kubikinhalt folgender Kegel:
a) Halbmesser der Grundfläche 0·2 *dm*, Höhe 7·5 *dm*;
b) Durchmesser „ „ $14\frac{1}{2}$ *cm*, „ $23\frac{3}{5}$ *cm*;
c) Umfang „ „ 1 *m* 8 *dm* 8·4 *cm*, Höhe 2 *m* 4 *dm* 6 *cm*!
($\pi = 3·14$.)

3. Der Kubikinhalt eines Kegels ist 5 dm^3 525 cm^3, die Grundfläche 4 dm^2 25 cm^2; wie groß ist die Höhe?

4. Der Inhalt eines Kegels ist 1·088052 m^3, die Höhe 1·8 *m*; wie groß ist die Grundfläche?

5. Die Seite eines geraden Kegels ist 3·6 *dm*, die Mantelfläche 13·5648 dm^2; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche? ($\pi = 3·14$.)

6. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe 3·9 *dm* und dessen Inhalt 9·1845 dm^3 beträgt? ($\pi = 3·14$.)

7. Suche *a)* die Seite, *b)* die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Höhe 2 *m* 4 *dm* ist und dessen Grundfläche 7 *dm* zum Halbmesser hat! ($\pi = 3{\cdot}14$.)

8. Wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Kubikinhalt eines geraden Kegels, dessen Seite 8·5 *dm* beträgt und dessen Grundfläche 3·6 *dm* zum Halbmesser hat? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

9. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist 1695·6 cm^2, der Halbmesser der Grundfläche 18 *cm*; wie groß ist der Kubikinhalt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

10. Bestimme die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1 *m* 4 *dm* beträgt! ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

11. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·6 *dm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

12. Ein kegelförmiger Trichter hat 2 *dm* Durchmesser und 2·4 *dm* Länge; wieviel dm^2 Blech enthält er? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

13. In einem kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 2 *m* 64 *cm* und die Höhe 1 *m*; wieviel *hl* Getreide enthält der Haufen? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

14. Ein kegelförmiger Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wieviel *kg* Heu enthält er, wenn das m^3 Heu 114 *kg* wiegt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

15. Welchen Wert hat eine Tanne, welche 12·6 *m* hoch ist und unten 2·2 *m* im Umfange hat, wenn das m^3 Holz mit 16 K 80 h bezahlt wird? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

16. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 30 *cm* Höhe wird das Wasser in ein zylindrisches Gefäß von 15 *cm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

17. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 6 *dm*, die Durchmesser der Grundflächen betragen 9 *dm* und 7 *dm*; wie groß ist die Oberfläche? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

18. Bestimme die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Seite 7·4 *cm* ist und dessen Grundflächen 4·5216 cm^2 und 32·1536 cm^2 Flächeninhalt haben! ($\pi = 3{\cdot}14$.)

19. Wie viele *hl* faßt ein Behälter von der Form eines Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 3 *m* und 2 *m* Durchmesser haben und 1·2 *m* von einander abstehen? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

20. Ein Bottich hat 1·56 *m* untern und 0·78 *m* obern Durchmesser und mißt an der Seite 0·89 *m*; wie viele Liter hält derselbe? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

21. Wieviel m^3 Scheitholz gibt ein Baumstamm von 5 *m* Länge, der an dem einen Ende 7 *dm*, an dem andern 6 *dm* Durchmesser

hat, wenn man annimmt, daß 1 m^3 Stammholz $1\frac{1}{2}$ m^3 Scheitholz gibt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

22. Welchen Körperinhalt hat ein elliptischer Kegel von 36 *cm* Höhe, wenn die große Achse der Grundfläche 20 *cm* und die kleine Achse 14 *cm* mißt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

23. Ein elliptischer Behälter, welcher am Boden 184 *cm* lang und 72 *cm* breit ist, besitzt an seinem obern Rande eine Länge von 207 *cm* und eine Breite von 81 *cm*; wie viele Liter Wasser faßt derselbe, wenn die Tiefe 60 *cm* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

24. Welches Gewicht besitzt ein kreisförmiger Kegel aus Gußeisen, dessen Grundfläche 84 *cm* zum Halbmesser hat und dessen Mantellinie 205 *cm* beträgt? (1 cm^3 Gußeisen wiegt 7·21 *g*; $\pi = 3{\cdot}14$.)

62. Die Kugel.

Vergleicht man bei einer Halbkugel die sie begrenzende Kreisfläche mit der halben Kugelfläche, so sieht man sofort, daß letztere größer ist, als die Kreisfläche. Genaue Messungen haben ergeben, daß die halbe Kugelfläche gerade doppelt so groß ist, als die Kreisfläche. Man pflegt diesen Kreis einen größten Kugelkreis zu nennen, zum Unterschiede von den Parallelkreisen, welche einen kleineren Flächeninhalt besitzen.

Hieraus folgt:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel durch r und die Oberfläche derselben durch O, so ist $r^2\pi$ der Flächeninhalt eines größten Kreises, folglich $O = 4r^2\pi$.

Man kann aber auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, indem man das Quadrat des Halbmessers mit der 4fachen Ludolfischen Zahl multipliziert.

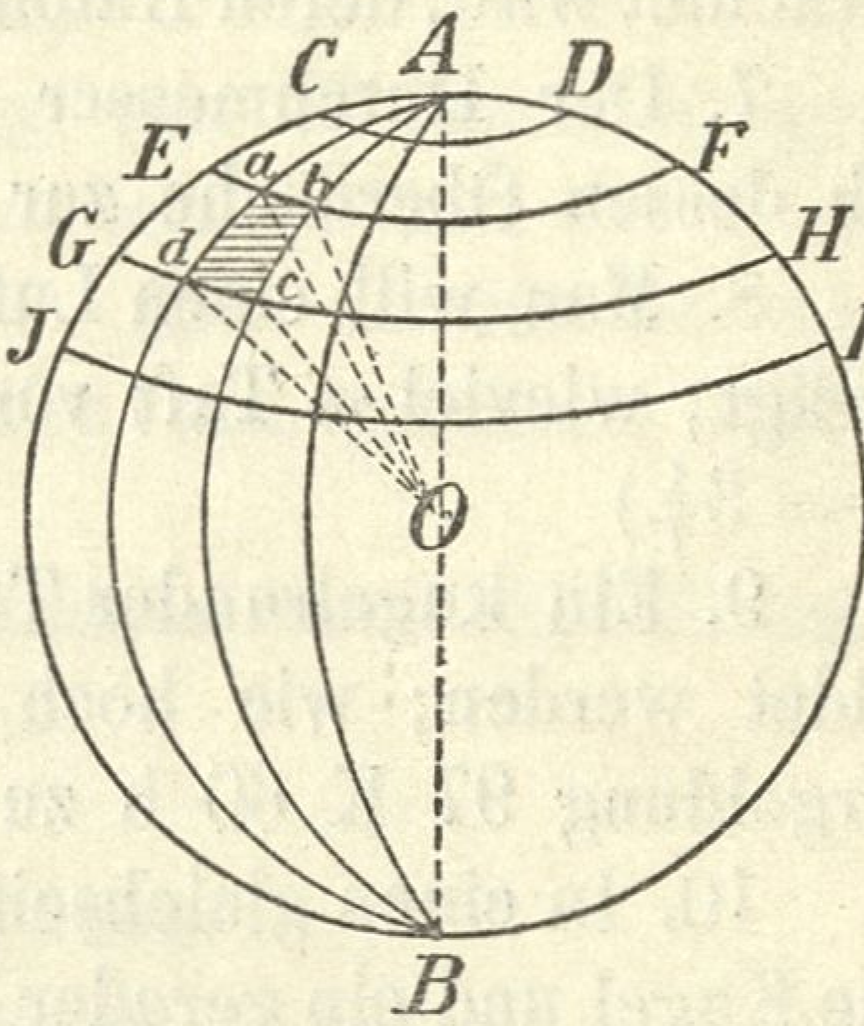
Wenn man umgekehrt aus der bekannten Oberfläche einer Kugel den Halbmesser derselben finden will, so braucht man nur die Oberfläche durch die 4fache Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers dar. Zieht man daraus die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist demnach

$$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}.$$

Aus dem Obigen folgt auch: **Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.**

Legt man durch den Durchmesser AB (Fig. 162) mehrere größte Kreise (Meridiane) und senkrecht darauf mehrere Parallelkreise CD, EF, GH..., so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter Vierecke und Dreiecke, welche man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Zieht man nun von allen Durchschnittspunkten der Oberfläche gerade Linien zum Mittelpunkte der Kugel und denkt sich durch je zwei benachbarte Strecken eine Ebene gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche alle ihre Grundflächen an der Kugeloberfläche und ihren Scheitel im Mittelpunkte haben; ihre Höhe ist daher der Halbmesser der Kugel. Der Kubikinhalt einer solchen Pyramide $(abcdO)$ wird aber gefunden, indem man die Grundfläche mit dem dritten Teile der Höhe multipliziert. Der Kubikinhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, ist demnach gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multipliziert mit dem dritten Teile des Halbmessers.

Fig. 162.



Der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Produkte aus der Oberfläche derselben und dem dritten Teile des Halbmessers.

Bezeichnet man mit r den Halbmesser, mit O die Oberfläche und mit J den Kubikinhalt einer Kugel, so ist

$$O = 4r^2\pi, \text{ daher } J = 4r^2\pi . \frac{r}{3} = \tfrac{4}{3} . r^3\pi; \text{ d. h.}$$

der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Kubus des Halbmessers, multipliziert mit $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl.

Ferner hat man: **Die Kubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.**

Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser *a)* 1 *dm*, *b)* 1·4 *m*, *c)* 1 *m* 15 *cm*, *d)* $17\frac{1}{2}$ *cm* ist! ($\pi = 3·14$).

2. Der Durchmesser einer Kugel ist *a)* 21 *dm*, *b)* 4·2 *cm*, *c)* 1 *dm* 4 *cm* 7 *mm*; wie groß ist die Oberfläche, wie groß der Kubikinhalt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

3. Der Umfang eines größten Kugelkreises beträgt 282·6 *cm*; berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt der Kugel! ($\pi = 3{\cdot}14$.)

4. Der größte Kreis einer Kugel hat 78·5 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Kubikinhalt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

5. Die Oberfläche einer Kugel ist *a)* 200·96 dm^2, *b)* 19·625 cm^2; wie groß ist der Halbmesser, wie groß der Kubikinhalt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

6. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn diese als eine Kugel betrachtet wird, deren Halbmesser 6368·96 *km* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}141593$.)

7. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4 *dm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

8. Man will einen Luftballon machen, dessen Durchmesser 6·3 *m* beträgt; wieviel *m* Taft von 84 *cm* Breite wird man dazu brauchen? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Ein kugelrunder Turmknopf von 1·2 *m* Durchmesser soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn für 1 m^2 Vergoldung 97 K 60 h zu zahlen sind? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

10. In einen gleichseitigen Zylinder von 1 *dm* Halbmesser werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; *a)* wie ist der Kubikinhalt jedes dieser drei Körper? *b)* wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Zylinders zu einander?*) ($\pi = 3{\cdot}14$.)

11. Eine Kugel, ein gleichseitiger Zylinder und ein Würfel haben gleiche Oberfläche, nämlich 44 dm^2; wie groß sind die Kubikinhalte dieser drei Körper? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

12. Um eine Kugel von 1 *dm* Halbmesser werden ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich *a)* die Oberflächen, *b)* die Inhalte dieser drei Körper? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

13. Wenn man den Halbmesser der Erde = 6368·96 *km* und die Höhe ihrer Luftschichte = 63 *km* setzt, wieviel km^3 beträgt der Inhalt der Luftschichte? ($\pi = 3{\cdot}141593$.)

14. Wie viele Mondkörper von 3495·52 *km* Durchmesser können aus der Erde gemacht werden, wenn der Durchmesser der Erde 12737·92 *km* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}141593$.)

15. Wie schwer ist eine hölzerne Spielkugel, deren Durchmesser 12 *cm* mißt, wenn 1 dm^2 Holz mit 0·8 *kg* angenommen wird? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

16. Welches Gewicht besitzt eine Hohlkugel aus Gußeisen, deren äußerer Durchmesser 1·4 *m* und deren Wandstärke 8 *cm* beträgt, wenn 1 dm^3 Gußeisen 7·21 *kg* wiegt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

---

*) Das sich ergebende merkwürdige Verhältnis entdeckte Cicero auf einem Denkmale von Archimedes zu Syrakus.

17. Wie viele *l* faßt ein eiserner Kessel von der Form einer halben Hohlkugel, deren innerer Durchmesser 4 *dm* 2 *cm* beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

18. Ein Meilenstein besitzt die Form eines geraden Zylinders, welcher 1·4 *m* lang ist und 0·36 *m* im Durchmesser hat; derselbe ist an seiner obern Seite durch eine halbe Kugel abgeschlossen. Welches Gewicht hat dieser Körper, wenn er aus Kalkstein besteht? (1 dm^3 Kalkstein wiegt 2·46 *kg*; $\pi = 3{\cdot}14$.)

19. Wie teuer kommt die Vergoldung von 24 Stück Rosetten zu stehen, wenn deren Durchmesser 38 *cm* beträgt und für 1 cm^2 samt Arbeitslohn 18 h angesetzt werden? (Die Oberfläche einer Rosette wird wie eine halbe Kugeloberfläche von gleichem Radius berechnet. $\pi = 3{\cdot}14$.)

20. Eine Halbkugel besitzt eine Oberfläche von 1814·92 cm^2; welchen Halbmesser hat diese? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

63. Körperinhalt der Fässer.

Ein Faß nähert sich in der Form einem Zylinder; nur ist es in der Mitte bauchig und sein Durchmesser daselbst größer als der Durchmesser seiner Grund- oder Bodenfläche. Man begeht übrigens keinen erheblichen Fehler, wenn man den Inhalt eines Fasses dem Inhalte eines Zylinders gleichsetzt, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Grundfläche den dritten Teil aus dem doppelten Spund- und dem einfachen Bodendurchmesser zum Durchmesser hat.

Am zweckmäßigsten werden die Maßlängen in Dezimetern ausgedrückt, da dann das Faß so viele Liter enthält, als der Kubikinhalt desselben Kubikdezimeter hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Spunde 6·2 *dm*, am Boden 4·8 *dm* mißt und dessen Länge 10·6 *dm* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

2. Ein Bierfaß hat 8·4 *dm* Spunddurchmesser, 7·2 *dm* Bodendurchmesser und 13 *dm* Länge; wieviel Liter enthält es? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

3. Bestimme den Inhalt folgender Fässer:

	Spunddurchmesser	Bodendurchmesser	Länge
a)	7·2 *dm*,	5·4 *dm*,	11·2 *dm*;
b)	6·5 *dm*,	5 *dm*,	10·4 *dm*;
c)	6 *dm*,	4·8 *dm*,	9·8 *dm*!

4. Ein Faß von 6 *dm* Spund- und 4·5 *dm* Bodendurchmesser soll 1 Hektoliter fassen; welche innere Länge muß man ihm geben?

64. Bestimmung des Kubikinhaltes durch das Gewicht.

Der Kubikinhalt eines Körpers oder sein Volumen läßt sich auch durch das Gewicht bestimmen.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine horinzontale Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Kubikeinheit, z. B. ein Kubikdezimeter, des Körpers hat, nennt man dessen spezifisches Gewicht. Z. B. 1 dm^3 Silber wiegt 10·51 *kg*; diese sind das spezifische Gewicht des Silbers für 1 dm^3 als Kubikeinheit.

Das spezifische Gewicht des Wassers beträgt für 1 dm^3 1 *kg* und für 1 cm^3 1 *g*. Hieraus ersieht man, daß, wenn die spezifischen Gewichte der einzelnen Körper für 1 dm^3 bekannt sind, sich leicht auch die spezifischen Gewichte für 1 cm^3 ermitteln lassen; man braucht nur der entsprechenden Zahl statt „*kg*“ die Benennung „*g*“ beizusetzen.

Hier folgen die spezifischen Gewichte einiger Körper.

1 Kubikdezimeter

Bernstein.......	wiegt	1·08 *kg*	Kupfer, gegossen..	wiegt	8·79 *kg*
Blei...........	„	11·35 „	Marmor..........	„	2·72 „
Buchenholz.....	„	0·74 „	Messing (Mittel)...	„	8·40 „
Eichenholz.....	„	0·86 „	Platin............	„	21·45 „
Eisen, geschmiedet	„	7·79 „	Quecksilber.......	„	13·59 „
„ gegossen.	„	7·21 „	Silber...........	„	10·51 „
Elfenbein.......	„	1·83 „	Steinkohle (im Mittel)	„	1·30 „
Gold..........	„	19·36 „	Stahl............	„	7·82 „
Granit (Mittel)..	„	2·70 „	Zink............	„	7·19 „
Kalkstein......	„	2·46 „	Zinn............	„	7·29 „
Korkholz.......	„	0·24 „	Zucker..........	„	1·50 „

Es sei z. B. der Kubikinhalt eines Silberbarrens, der 31·53 *kg* wiegt, zu bestimmen.

Da 1 dm^3 Silber 10·51 *kg* wiegt, so nehmen 31·53 *kg* Silber so viel dm^3 Raum ein, als 10·51 *kg* in 31·53 *kg* enthalten sind; man hat

daher 31·53 *kg* : 10·51 *kg* = 3, also 3 dm^3.

Der Kubikinhalt eines Körpers oder sein Volumen (in Kubikdezimetern) wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben (in Kilogrammen) durch das spezifische Gewicht (für 1 dm^3) dividiert.

Hiernach kann man auch den Inhalt eines Gefäßes durch das Gewicht bestimmen. Man wägt das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, bestimmt dann das Gewicht des so gefüllten Gefäßes und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten. So viele Kilogramm der Gewichtsunterschied beträgt, so viele Kubikdezimeter oder Liter hält das Gefäß.

Umgekehrt findet man aus dem Kubikinhalte eines Körpers das absolute Gewicht desselben, indem man dessen spezifisches Gewicht (für 1 dm^3) mit der Maßzahl des in Kubikdezimetern ausgedrückten Kubikinhaltes (Volumen) multipliziert.

Ist z. B. das absolute Gewicht von 346 dm^3 Steinkohlen zu bestimmen, so hat man:

1 dm^3 Steinkohlen wiegt 1·3 *kg*,

346 „ „ wiegen 1·3 $kg \times 346 = 449{\cdot}8$ *kg*.

Aufgaben.

1. Wieviel m^3 enthält ein Balken aus Eichenholz, der 30·1 *kg* wiegt?

2. Eine Goldstange wiegt 29·04 *kg*; welchen Kubikraum nimmt sie ein?

3. Welchen Kubikinhalt haben 102·15 *kg* Blei?

4. Wie viele dm^3 und cm^3 enthält eine Kugel aus Blei, welche 82 *kg* 112·256 *g* wiegt?

5. Ein Gefäß wiegt leer 1·45 *kg*, mit Wasser gefüllt 10·95 *kg*; wieviel Liter hält es?

6. Wieviel *kg* wiegt das Wasser, das in einem prismatischen Gefäße von 165 *cm* Länge, 85 *cm* Breite und 7 *dm* Tiefe enthalten ist?

7. Eine Walze von Messing soll 3165·12 *g* wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muß sie haben? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

8. Wieviel *kg* wiegt eine prismatische Stange aus Stabeisen, die 3 *m* lang, 2 *cm* breit und 1·5 *cm* dick ist?

9. Wieviel *kg* wiegt eine vierseitige Pyramide von Granit, wenn eine Seite der quadratischen Grundfläche 0·6 *m* lang ist und die Höhe 3 *m* beträgt?

10. Wieviel wiegt eine Kugel
a) von Elfenbein, deren Durchmesser 6 *cm* beträgt?
b) von Marmor, „ „ 3·2 *dm* „ ($\pi = 3{\cdot}14$.)

11. Welches Gewicht hat ein Zuckerhut von 2 *dm* Bodendurchmesser und 4 *dm* Höhe? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

12. Wieviel wiegt das in einem Rahmen von 1 m^2 aufgeschichtete Buchenholz von 80 *cm* Scheitlänge, wenn man für die leeren Zwischenräume $\frac{1}{4}$ des Inhaltes in Abzug bringt?