NEKATERE ZGODOVINSKE KONSTRUKCIJE PRAVILNEGA SEDEMKOTNIKA

MILAN HLADNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 01A30, 01A40, 01A60, 97G40

V tem kratkem izletu v zgodovino načrtovanja pravilnega sedemkotnika najprej opišemo dva starejša načina, Arhimedovega in Viètovega. Nato predstavimo pristop z uporabo parabole in za konec podamo še eno preprosto novejšo konstrukcijo z označenim ravnilom in šestilom.

SOME HISTORICAL CONSTRUCTIONS OF THE REGULAR HEPTAGON

In this short excursion into the history of constructing the regular heptagon we first describe two old approaches, one ascribed to Archimedes and the other to Viète. Then, we also present another one involving a parabola and finish with a simple modern marked ruler and compass construction.

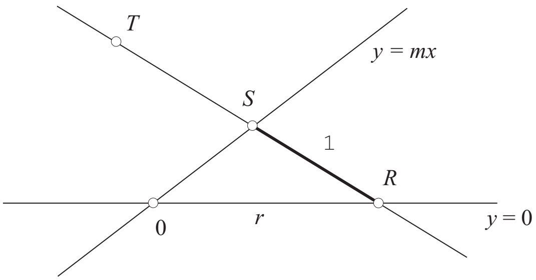
Plemljeva elegantna konstrukcija pravilnega sedemkotnika, o kateri smo poročali v [6], je primeren razlog, da pregledamo še druge znane konstrukcije tega lika iz starejših in novejših časov. Z njimi tudi Plemljev dosežek vidimo v drugačni luči oziroma v širšem zgodovinskem okviru in ga znamo bolj ceniti. Najprej se posvetimo klasični grški in islamski tradiciji neevklidskih konstrukcij.

Metoda vstavljanja in metoda stožnic

Pravilne večkotnike so obravnavali že pitagorejci, vsaj v zvezi s pravilnimi poliedri. Poznali so npr. pentagram in vedeli, da obstajajo samo trije pravilni večkotniki, s katerimi lahko tlakujemo ravnino (enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik).

Zahtevo, da morajo biti vse geometrijske konstrukcije izvedene samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, je postavil Platon v 4. stoletju pred našim štetjem, najbrž v zvezi s problemom podvojitve kocke. To normo je dosledno upošteval Evklid v svojih *Elementih*. Toda drugi grški matematiki so hitro ugotovili, da se ni vedno mogoče držati Platonovih navodil in so za reševanje različnih konstrukcijskih problemov poleg ravnila in šestila izumili še druga bolj ali manj domiselna orodja in postopke.

Nas bo tu zanimalo predvsem tretjinjenje kota, ki ima, kot smo videli v [6], odločilno vlogo pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika. Za ta namen so Grki namesto pri premicah in krožnicah iskali pomoč pri stožnicah in



Slika 1. Primer vstavljanja med premicama.

drugih višjih krivuljah (npr. Nikomedovi konhoidi ali Arhimedovi spirali). Toda poznali so tudi neko bolj elementarno, vendar zelo uspešno metodo za tretjinjenje kota (in reševanje drugih problemov): *vstavljanje* (dane razdalje med dve premici, dve krožnici ali med premico in krožnico). Grška beseda za to je *neusis*. Obenem je *Neusis* tudi naslov knjige, ki jo je napisal Apolonij iz Perge ($\sim$ 262–190 pr. n. št.); original je izgubljen, toda sodobni nizozemski zgodovinar matematike Jan P. Hogendijk[1] je Apolonijevo razpravo rekonstruiral na osnovi nekaterih arabskih besedil [7].

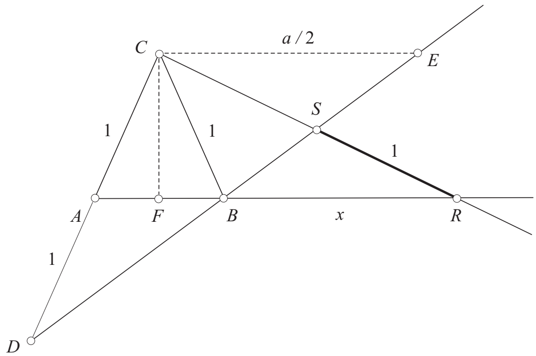
Vstavljanje najlaže realiziramo tako, kot so to storili Grki, z uporabo *označenega ravnila*, tj. ravnila z dvema zarezama na robu (razdalja med njima predstavlja enoto): ravnilo npr. položimo skozi točko T tako, da zarezi R in S ležita na vnaprej danih dveh sekajočih se premicah (glej sliko 1).

Zdi se, da je tako označeno ravnilo prvi uporabil Nikomed ($\sim$ 280–210 pr. n. št.) pri geometrijski konstrukciji kubičnega korena iz pozitivnega števila a (Menajhmos je za isti namen že prej, v 4. stoletju pred našim štetjem, uporabil sekajoči se paraboli, glej [13]).

Sledimo postopku, ki je naveden npr. v [11] (glej sliko 2). Naj bo $0 < a < 8$. Načrtajmo enakokrak trikotnik $\triangle ABC$ z osnovnico $AB = a/4$ in krakoma $AC = BC = 1$. Podaljšajmo krak AC do točke D tako, da je A razpolovišče daljice CD. Iz točke C vstavimo razdaljo 1 med premici skozi A in B ter B in D (tako da je razdalja med presečiščema R in S enaka 1 in da je $S \neq A$). Označimo $x = BR$ in pokažimo, da je potem $x = \sqrt[3]{a}$.

Vzporednica z AB skozi C naj seka premico skozi B in D v točki E, razpolovišče daljice AB pa označimo s F. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ADB$ in $\triangle CDE$ je $CE = 2AB = a/2$, zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ECS$ in $\triangle BRS$ pa je $CS/RS = CE/BR$ oziroma $CS = a/(2x)$. S Pitagorovim izrekom za pravokotna trikotnika $\triangle FRC$ in $\triangle FBC$ dobimo $(1 + a/(2x))^2 = (1 - (a/8)^2) + (x + a/8)^2$, preuredimo in najdemo za x enačbo četrte stopnje $4x^4 + ax^3 - 4ax - a^2 = 0$, ki je k sreči razcepna: $(4x + a)(x^3 - a) = 0$, tako da je $x^3 = a$ in x tretji koren iz a. ■

[1]Hogendijk je prvi dobitnik nagrade za zgodovino matematike, ki jo je Evropsko matematično društvo začelo podeljevati poleti 2012.

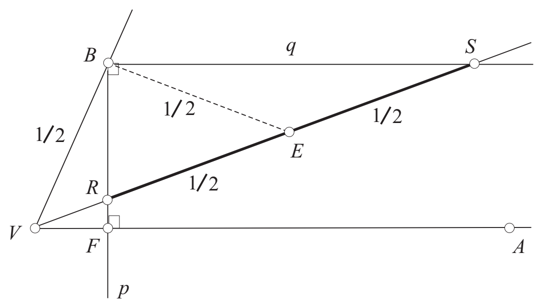


Slika 2. Nikomedova konstrukcija tretjega korena z vstavljanjem.

O tretjinjenju kota z metodo vstavljanja pa poroča Papos iz Aleksandrije ($\sim$ 290–350), zadnji veliki antični grški matematik. Iz njegovih spisov in komentarjev, zbranih v osmih knjigah s preprostim skupnim naslovom *Zbirka* (grško *Synagoge*), vemo za prenekatere dosežke zgodnejših grških matematikov, ki jih sicer ne bi poznali. Naslednja konstrukcija je spet povzeta po viru [11].

Imejmo poljuben kot $\angle AVB$ z vrhom V, vodoravnim krakom AV in nagnjenim krakom BV, dolžine $1/2$ (glej sliko 3). Premica p naj bo pravokotna na krak AV in naj poteka skozi točko B, skozi katero naj gre tudi vzporednica q s krakom AV. Iz vrha V vstavimo razdaljo 1 med premici p in q. Presečišči označimo z R in S, razpolovišče daljice RS pa naj bo E. Ker je trikotnik $\triangle RSB$ pravokoten, je $RE = ES = BE = 1/2$, trikotnika $\triangle VEB$ in $\triangle BES$ sta enakokraka z enako dolgimi kraki, kot $\angle EVB = \angle BEV = 2\angle BSE = 2\angle AVS$, in zato $\angle AVB = 3\angle AVS$. ■

Druga znana grška neevklidska metoda je *metoda stožnic*. Pod tem razumemo metodo, pri kateri predpostavljamo, da lahko po potrebi načrtamo eno ali več stožnic in potem samo z ravnilom konstruiramo vse točke, ki



Slika 3. Paposovo tretjinjenje kota z vstavljanjem.

so presečišča dveh premic, premice in katerekoli stožnice ali dveh poljubnih stožnic. Med stožnice štejemo poleg parabole, hiperbole in elipse seveda tudi krožnico, zato lahko z metodo stožnic načrtamo vse klasične evklidske konstrukcije. Če poleg ravnila dodatno uporabljamo tudi šestilo, zadošča pogosto imeti v ravnini narisano eno samo stožnico, npr. hiperbolo ali parabolo z racionalnimi koeficienti.

Po drugi strani se da dokazati (glej npr. [11]), da lahko dobimo vse klasične evklidske konstrukcije samo z označenim ravnilom. To sledi tudi iz naslednje trditve:

Trditev 1. *Konstrukcija z označenim ravnilom je ekvivalentna konstrukciji z ravnilom in stožnicami.*

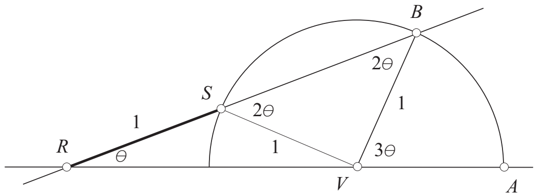
Dokaz. Oboje je namreč v algebrskem smislu ekvivalentno (večkratnemu) reševanju polinomskih enačb kvečjemu četrte stopnje z realnimi koeficienti. Res, oglejmo si z algebrskega stališča najprej vstavljanje. Če ima na primer v kartezičnem koordinatnem sistemu ena premica enačbo $y = mx$, druga pa $y = 0$ (abscisna os), in če ima točka T koordinati (a, b), presečišče s prvo premico S pa koordinati (p, q), lahko določimo absciso r presečišča R z abscisno osjo pod pogojem, da je razdalja med R in S enaka 1 (glej sliko 1). Koordinati p in q se izražata z r s formulama $p = br/(mr - am + b)$ in $q = mp$, zato iz pogoja $(p - r)^2 + q^2 = 1$ dobimo s kratkim računom za r enačbo četrte stopnje $m^2(r^2 - 1)(r - a)^2 + m^2b^2r^2 - 2mb(r - a) - b^2 = 0$. Podobno velja za vstavljanje med dve vzporedni ali pravokotni premici.

Obratno lahko, kot je znano [12], vsako polinomsko enačbo četrte stopnje z realnimi koeficienti najprej prevedemo na enačbo tretje stopnje z realnimi koeficienti. Take enačbe smo obravnavali v [6] z uporabo Cardanovih formul (glej izrek 3). Iz njih vidimo, da za določitev realnih korenov iz koeficientov enačbe potrebujemo konstrukcijo tretjega korena iz pozitivnega števila in včasih tudi tretjinjenje kota, kar pa oboje lahko izvedemo po Nikomedu in Paposu z metodo vstavljanja. Prvotno enačbo četrte stopnje potem uženemo z reševanjem kvadratnih enačb s kompleksnimi koeficienti (oziroma geometrijsko s konstrukcijo kvadratnega korena iz pozitivnega števila in razpolavljanjem kota).

Prav tako pridemo pri algebrajskem določanju presečišč stožnic do enačb največ četrte stopnje, po drugi strani pa lahko korene vsake enačbe oblike $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ poiščemo kot presečišča parabole $y = x^2$ in stožnice (ali premice, če je $a = b = 0$) $ay^2 + bxy + cy + dx + e = 0$. Tako imamo tudi ekvivalenco med reševanjem enačb kvečjemu četrte stopnje z realnimi koeficienti in geometrijskimi konstrukcijami s pomočjo stožnic. ∎

Arhimedova konstrukcija in islamski prispevek

Gotovo je najbolj znano metodo za tretjinjenje kota prispeval Arhimed (287–212 pr. n. št.). Njegov postopek prav tako temelji na vstavljanju, vendar to



Slika 4. Arhimedovo tretjinjenje kota z vstavljanjem med krožnico in premico.

pot med krožnico in premico, zato je poleg označenega ravnila potreboval tudi šestilo. Razlaga same konstrukcije najbrž ni potrebna (glej sliko 4).

Od pravilnih večkotnikov so Grki znali z ravnilom in šestilom konstruirati enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni petkotnik ter iz njih izpeljane like (npr. pravilni šestkotnik, osemkotnik, desetkotnik, petnajstkotnik itd.). Za konstrukcijo drugih pravilnih večkotnikov so uporabljali le približke. Za stranico pravilnega sedemkotnika je znan Heronov približek, ki smo ga v [6] omenili v zvezi s Plemljevo rešitvijo (t. i. indijski približek).

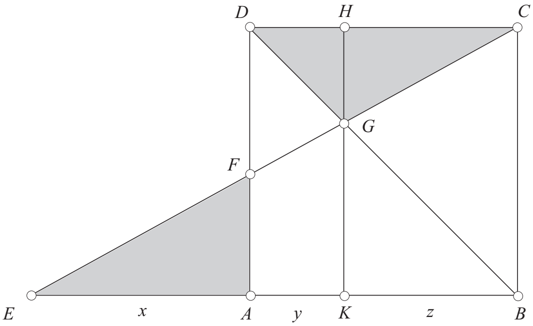
Dolgo časa je veljalo, da kljub poznavanju različnih neevklidskih metod (vstavljanje, stožnice, višje krivulje) nobenemu od grških geometrov ni uspelo eksaktno konstruirati pravilnega sedemkotnika (ali kakšnega drugega pravilnega lika, katerega konstrukcija z ravnilom in šestilom ni možna). Potem pa je v dvajsetih letih 20. stoletja nemški zgodovinar matematike Carl Schoy v Kairu med besedili perzijskega astronoma Al Birunija (973–1048) odkril arabski prevod antične razprave o konstrukciji pravilnega sedemkotnika. Arabski prevod je preskrbel veliki islamski geometer iz 9. stoletja Thabit Ibn Qurra (836–901), ki je delo pripisal Arhimedu[2]. Originalna Arhimedova razprava pa je na žalost izgubljena. Svojo konstrukcijo je Arhimed naslonil na naslednji pomožni rezultat, ki je v antični geometriji nekaj posebnega (glej sliko 5)[3].

Lema 2 (Arhimedova lema). *V kvadratu $ABCD$ z diagonalo BD naj bo $EFGC$ taka transverzala, da sta ploščini trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CDG$ enaki. Iz točke G spustimo na vzporedni stranici AB in CD pravokotnico s presečiščema K in H. Potem velja $AB \cdot BK = AE^2$ in $EK \cdot AK = BK^2$.*

Opomba 1. Z vrtenjem transverzale $EFGC$ okrog krajišča C se lahko prepričamo, da res obstaja položaj, ki ustreza pogoju enakih ploščin. Arhimed ne pove, kako tako transverzalo konstruirati, toda z oznakami x, y, z na sliki 5 se potrebna pogoja glasita $(y+z)z = x^2$ in $(x+y)y = z^2$. Če vzamemo

[2] Iz arabščine je besedilo leta 1984 prevedel Jan P. Hogendijk, ki smo ga omenili v zvezi z Apolonijevo razpravo *Neusis*. Originalni arabski tekst in njegov prevod najdemo v dodatku k obsežnemu Hogendijkovemu članku [8].

[3] V tem sestavku smo originalno konstrukcijo zavrteli za 180 stopinj in uvedli druge oznake, matematična vsebina pa je ostala nespremenjena.



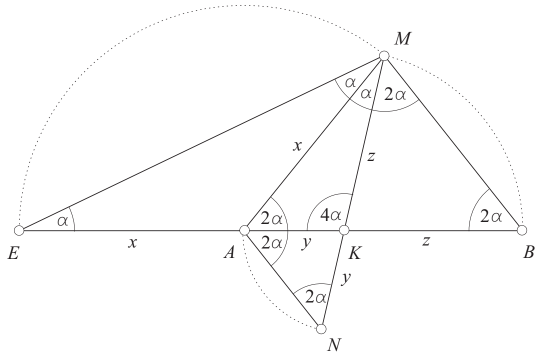
Slika 5. Ilustracija Arhimedove leme.

še, da je stranica kvadrata enaka 1, dobimo $1-y=x^2$ in $(x+y)y=(1-y)^2$ oziroma $y=1-x^2$ in $xy=1-2y$. Vidimo torej, da ustrezno lego določa presečišče parabole in hiperbole, torej lahko po trditvi 1 pridemo do nje tudi z metodo vstavljanja.

Dokaz. Iz enakosti ploščin trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CDG$ najdemo $AE \cdot AF = CD \cdot GH$ oziroma $AE/CD = GH/AF$. Po drugi strani je zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CHG$ res tudi $GH/AF = CH/AE$, tako da imamo $AE/CD = CH/AE$ oziroma, upoštevajoč enakost $CD = AB$ in $CH = BK$, iskano enakost $AB \cdot BK = AE^2$. Drugo enakost dobimo iz podobnosti trikotnikov $\triangle EKG$ in $\triangle CHG$ ter trikotnikov $\triangle BGK$ in $\triangle DGH$, torej $EK/CH = GK/GH$ in $GK/GH = BK/DH$. Ker je $DH = AK$ in $CH = BK$, dobimo od tod $EK \cdot AK = BK^2$. ■

Izrek 3 (Arhimed). *Naj bodo točke E, A, K in B razporejene tako kot pri Arhimedovi lemi, pri čemer je $AB \cdot BK = AE^2$ in $EK \cdot AK = BK^2$. Za točko M naj velja $MA = AE$ in $MK = BK$, točka N pa naj leži na podaljšku daljice MK, tako da je $KN = AK$. Potem je BM stranica, EM in EB pa mala in velika diagonala pravilnega sedemkotnika.*

Dokaz. Zaradi lažje obravnave spet privzemimo, da je (stranica kvadrata v Arhimedovi lemi) $AB = 1$. Potem je s prejšnjimi oznakami x, y, z očitno $y < 1/2$, torej $y < z = x^2 < x < 1$, tako da trikotnik s stranicami x, y, z oziroma točka M (presečišče obeh krožnic) gotovo obstaja. Označimo $\angle BEM = \alpha$. Ker je trikotnik EAM enakokrak, je zunanji kot $\angle KAM = 2\alpha$. Zaradi $KM^2 = BK^2 = AK \cdot EK$ imamo razmerje $EK/KM = KM/AK$, kar pomeni, da sta si trikotnika $\triangle EKM$ in $\triangle AKM$ podobna. Torej je $\angle KEM = \angle AMK = \alpha$. Zaradi $AM^2 = AE^2 = AB \cdot BK = MN \cdot MK$ pa imamo $AM/MN = MK/AM$, zato sta si podobna tudi trikotnika $\triangle AKM$ in $\triangle ANM$. Torej je $\angle MNA = \angle KAM = 2\alpha$ in tudi $\angle NAK = 2\alpha$ (ker je trikotnik $\triangle ANK$ enakokrak). Zaradi podobnosti



Slika 6. Arhimedova konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

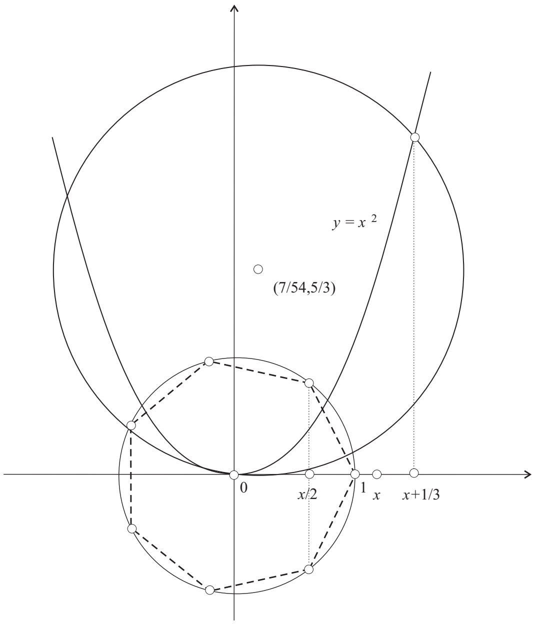
enakokrakih trikotnikov $\triangle ANK$ in $\triangle BMK$ sta enaka tudi kota $\angle KMB$ in $\angle MBK$ (vsi koti so označeni na sliki 6). Iz enega ali drugega trikotnika takoj ugotovimo, da je $\alpha = \pi/7$, kar je obodni kot pri pravilnem sedemkotniku, včrtanem v krog. Obodna kota pri mali in veliki diagonali sta $2\alpha = 2\pi/7$ in $4\alpha = 4\pi/7$. ∎

Zgodovinska opomba. V zgornjem dokazu smo sledili analizi islamskega matematika Abu Sahla al Kuhija (∼940–1000), kot je prikazana v [11]. Kuhi je proučil Arhimedovo delo in na osnovi njegove leme podal svojo različico konstrukcije trikotnika s koti v razmerju 1: 2: 4; od tod je izvedel konstrukcijo pravilnega sedemkotnika.

Problem, kako razdeliti dano daljico (pri nas daljico EB) iz Arhimedove leme v pravem razmerju, pa s tem še ni bil rešen. To so skušali storiti mladi bagdadski geometri Abul Jud, Al Sijzi in Al Ala v zadnji tretjini 10. stoletja in sicer z uporabo stožnic. Njihovo na koncu sicer uspešno prizadevanje ni bilo brez napak in popravkov, pa tudi ne brez medsebojnih prepirov o prioriteti, podobno kot se je skoraj šest stoletij kasneje dogajalo med Cardanom in Tartaglio glede reševanja kubične enačbe. Kasneje so se še drugi islamski matematiki ukvarjali s konstrukcijo pravilnega sedemkotnika z uporabo stožnic: zabeleženih je vsaj ducat rešitev, med njimi jih je menda kar pet prispeval veliki arabski matematik in fizik (utemeljitelj fizikalne optike) Ibn al Haytham (965–1040), ki je deloval v Kairu in je na zahodu bolj znan z latinskim imenom Alhazen.[4]

Ko smo že pri stožnicah, si na osnovi konstrukcije v [2] oglejmo, kako bi z uporabo presečišča parabole $y = x^2$ in ustrezne krožnice $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$ skozi koordinatno izhodišče poiskali stranico pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog. Če vstavimo $y = x^2$ v

[4]O islamskem prispevku h konstrukciji pravilnega sedemkotnika se lahko bralec seznani v temeljiti Hogendijkovi študiji [8].



Slika 7. Konstrukcija pravilnega sedemkotnika s pomočjo parabole.

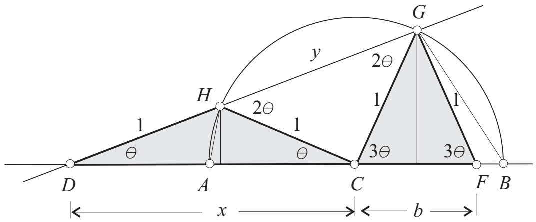
enačbo krožnice in pokrajšamo, vidimo, da abscisa presečišča zadošča kubični enačbi $x^3 + (1 - 2b)x - 2a = 0$. V članku [6] smo spoznali, da je abscisa točki (1,0) najbližjega oglišča pravilnega sedemkotnika enaka $x/2$, kjer je $x^3+x^2-2x-1=0$. Premaknjena vrednost $t = x+1/3$ torej zadošča enačbi $t^3-(7/3)t-7/27=0$, in tako s primerjavo s prejšnjo enačbo te oblike ugotovimo, da mora biti $a = 7/54$ in $b = 5/3$ (glej sliko 7).

Konstrukcija je zdaj jasna: S središčem v točki $(7/54, 5/3)$ načrtamo krožnico, ki poteka skozi izhodišče, in jo sekamo s parabolo $y = x^2$. Abscisa presečišča je $x+1/3$, poiščemo x in nato še $x/2$, ki je abscisa prvega oglišča pravilnega sedemkotnika v prvem kvadrantu (glej sliko 7).

Več o geometrijskih konstrukcijah z uporabo stožnic lahko preberemo npr. v [13].

Viètova konstrukcija

Ustavimo se še ob eni kasnejši konstrukciji pravilnega sedemkotnika, ki je manj znana, odkril pa jo je znameniti francoski matematik François Viète (1540–1603). Bil je prepričan o nezadostnosti ravnila in šestila in je močno zagovarjal uporabo označenega ravnila. Za tretjinjenje kota je podobno kot Arhimed (slika 4) predlagal metodo z vstavljanjem med premico in krožnico. Ker je bila Arhimedova *Knjiga lem*, v kateri je znamenita trisekcija



Slika 8. Viètova rešitev kubične enačbe.

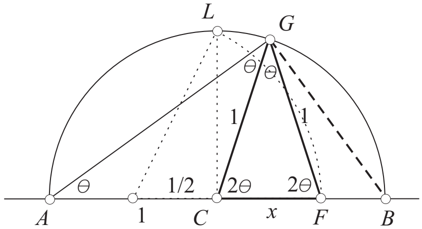
kota, prevedena v latinščino šele leta 1657 (kot *Liber Assumptorum*), je ni mogel poznati. Najbrž pa je bil seznanjen s Paposovo *Zbirko*, ki obravnava podobne metode, zato njegova trisekcija kota morda ni čisto originalna.

Viète je bil odličen algebraik, med drugim je za reševanje splošnih enačb tretje stopnje iznašel svojo metodo, ki je bila drugačna od Cardanove. Takih enačb pa se je lotil tudi geometrijsko, kot vidimo iz naslednjega primera kubične enačbe, ki spada med bolj zahtevne (casus irreducibilis). Dokaz, ki ga povzemamo po Hartshornu [4], navajamo z modernimi oznakami, medtem ko ga je Viète še v celoti opisal z besedami.

Trditev 4 (Viète). *Da bi rešili enačbo oblike* $x^3 - 3x = b$*, kjer je* $0 < b < 2$*, načrtajmo enakokrak trikotnik z osnovnico* b *in krakom 1, tretjinimo kot ob osnovnici in načrtajmo drug enakokrak trikotnik s trikrat manjšim osnovnim kotom in krakom 1. Osnovnica novega trikotnika je rešitev enačbe.*

Dokaz. Narišimo si drugega ob drugem dva enakokraka trikotnika, $\triangle DCH$ z osnovnim kotom θ in $\triangle CFG$ z osnovnim kotom 3θ, tako kot kaže slika 8. Ker je drugi kot trikrat večji od prvega, so nujno točke D, H, G kolinearne, zato je slika podobna kot slika 4.

Naj bo $DH = HC = CG = FG = 1$, $CF = b$ in $GH = y$. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle DAH$ in $\triangle DGB$ dobimo $1/(x-1) = (x+1)/(y+1)$ (isto vidimo, če izračunamo potenco točke D na krožnico skozi točke A, B, G in H). Zaradi podobnosti pravokotnih trikotnikov, ki jih dobimo s projekcijo točk G in H na daljico DB, pa najdemo še $1/y = x/(x+b)$. Torej je $y = x^2 - 2$ in $xy = x + b$, tako da z eliminacijo y dobimo $x^3 - 3x = b$. ∎

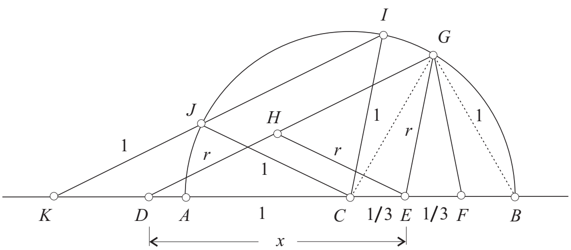


Slika 9. Evklidova konstrukcija pravilnega petkotnika.

Zdaj je Viète pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika ravnal podobno kot Evklid pri konstrukciji pravilnega petkotnika, ko je najprej poiskal enakokrak trikotnik s kotom ob vrhu θ in kotom ob osnovnici 2θ (glej npr. trikotnik $\triangle AFG$ ali $\triangle CFG$ na sliki 9). Ker od tod sledi, da je $\theta = \pi/5$, je osnovnica tega trikotnika (na sliki označena z x) stranica pravilnega desetkotnika, daljica BG pa stranica pravilnega petkotnika.

Lema 5 (Viètova lema). *Na podaljšku premera AB kroga s središčem v C obstaja točka D, za katero velja $AD/CD = AC^2/BD^2$.*

Dokaz. Točko D najdemo z naslednjim postopkom (glej sliko 10):

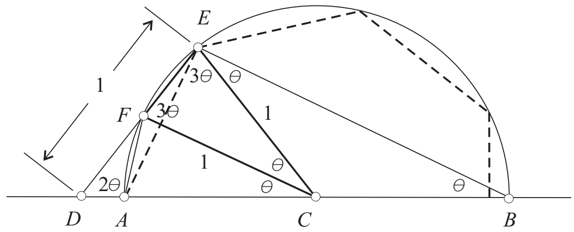


Slika 10. Ilustracija k Viètovi lemi.

Izberimo $AC = 1$ in odmerimo $CE = EF = 1/3$ in $BG = 1$. Povežimo EG in narišimo vzporednico CI. Zdaj pa (z metodo *neusis*) iz točke I vstavimo dolžino $JK = 1$ med krožnico in premico skozi A in B ter potegnimo vzporednico GD k daljici IK. Potem je D iskana točka. Res: Če je daljica EH vzporedna daljici CJ, označimo njeno dolžino z r, razdaljo DE pa z x. Slika 10 je potem podobna sliki 8 z raztegom r, pri čemer je zdaj $b = 1/(3r)$, tako da za razmerje x/r velja $(x/r)^3 - 3(x/r) = 1/(3r)$ oziroma $x^3 - 3r^2x = r^2/3$. Toda r lahko izračunamo iz trikotnikov $\triangle CBG$ in $\triangle EFG$, velja $r = \sqrt{7}/3$, tako da zadošča x enačbi $x^3 - 7x/3 = 7/27$. Ker je $AD = x - 4/3$, $CD = x - 1/3$, $AC = 1$ in $BD = x + 2/3$, lahko z uporabo zadnje relacije hitro preverimo, da res velja $AD/CD = AC^2/BD^2$. ∎

Opomba 2. Pozorni bralec je gotovo opazil, da smo enačbo $x^3 - 7x/3 = 7/27$ že srečali pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika s parabolo in krožnico. Sporočilo je jasno: resnica je v matematiki ena sama, različni zgodovinski in modernejši postopki pri reševanju istega problema so med seboj povezani. To bomo ponovno spoznali še pri eni konstrukciji pravilnega sedemkotnika v naslednjem, zadnjem razdelku.

Izrek 6 (Viète). *Naj bo razpored kolinearnih točk A, B, C, D tak, kot ga zahteva Viètova lema, E taka točka na krožnici s premerom AB in središčem v C, da je $DE = 1$, in F drugo presečišče daljice DE s krožnico. Potem je daljica AE stranica pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog.*



Slika 11. Viètova konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

Dokaz. Po eni strani je $AD \cdot BD = DE \cdot DF$ (glej sliko 11), po konstrukciji pa tudi $AD/CD = AC^2/BD^2$. Ker je $DE = 1$ in $AC = 1$, imamo od tod $DE/BD = 1/BD = (AD \cdot BD)/CD = DF/CD$. To pomeni, da sta daljici BE in CF na sliki 11 vzporedni in zato kota pri B v trikotniku $\triangle DBE$ in pri C v trikotniku $\triangle DCF$ enaka, npr. oba enaka θ. Zaradi enakokrakih trikotnikov $\triangle CBE$, $\triangle DCE$ in $\triangle CEF$ najdemo še preostale kote, ki so označeni na sliki. Iz enega ali drugega trikotnika tudi hitro izračunamo, da mora biti $\theta = \pi/7$, tako da središčnemu kotu 2θ (ali obodnemu kotu θ) pripada sedmina krožnega obsega. ∎

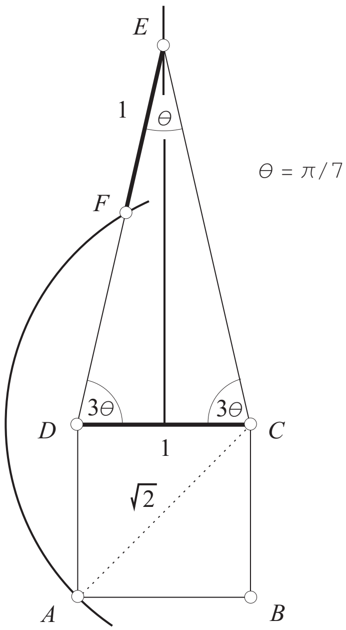
Viètova konstrukcija je ostala kasneje skoraj neopažena, zanjo vemo po zaslugi Roberta Hartshorna [4]. Kot kaže, je nista poznala niti Plemelj niti Gleason, čeprav temelji njuna konstrukcija pravilnega sedemkotnika, opisana v članku [6], na podobni ideji, tj. na reševanju kubične enačbe s tretjinjenjem kota.

Johnsonova konstrukcija

Leta 1975 je ameriški slikar in ilustrator David Johnson Leisk (1906–1975), znan pod umetniškim imenom Crockett Johnson[5], v časopisu The Mathematical Gazette [9] objavil presenetljivo preprosto konstrukcijo (stranice) pravilnega sedemkotnika z vstavljanjem, ki spominja na Arhimedovo tretjinjenje kota ali Viètovo metodo konstrukcije pravilnega sedemkotnika. Pravzaprav je, tako kot Viète, najprej poiskal enakokrak trikotnik s kotom ob vrhu θ in kotom ob osnovnici 3θ, zato je, kot bomo videli, tudi dokaz pravilnosti njegovega postopka enak Viètovemu. Johnsonova metoda je naslednja (glej sliko 12).

Izrek 7 (Johnson). *Kvadratu $ABCD$ s stranico 1 načrtajmo simetralo stranice AB (ali CD) ter krožnico s središčem v oglišču C skozi nasprotno oglišče A, tako da je njen polmer enak $\sqrt{2}$. Zdaj uporabimo metodo*

[5]Na spletu najdemo celo galerijo zanimivih Johnsonovih barvnih slik, ki ponazarjajo različne zgodovinske in moderne geometrijske zakonitosti (glej [10]).



Slika 12. Johnsonova metoda konstrukcije pravilnega sedemkotnika z vstavljanjem.

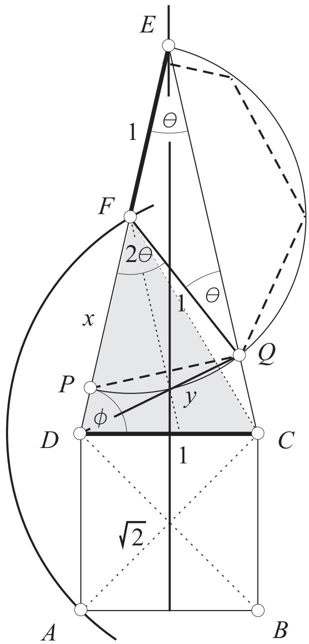
vstavljanja (neusis) razdalje 1 med premico in krožnico, izhajajoč iz točke D. Potem je kot enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ ob vrhu E enak $\pi/7$.

Dokaz. Za dokaz pravilnosti konstrukcije bomo morali zadnjo sliko nekoliko dopolniti. Kot pri vrhu E v enakokrakem trikotniku $\triangle DCE$ označimo s črko θ, kot ob osnovnici pa s ϕ (glej sliko 13). Pokazali bomo, da je $\phi = 3\theta$ in zato seveda $\theta = \pi/7$.

Dolžina daljice DF naj bo x, tako da velja $2\cos\phi = 1/(1+x)$. Po drugi strani ima trikotnik $\triangle CFD$, ki smo ga na sliki potemnili, eno stranico DC enako 1, drugo CF enako $\sqrt{2}$, tretja DF pa je enaka x. Kosinusni izrek zanj pove, da je $1 = x^2 - 2x\cos\phi$. Oboje skupaj nam da zvezo $4x\cos^2\phi = x - 1$. Če iz obeh relacij izločimo ϕ, pa dobimo enakost $1 = x^2 - x/(1+x)$ oziroma $(x-1)(x+1)^2 = x$.

Polkrožnica s središčem v F in polmerom 1 naj seka kraka trikotnika $\triangle DCE$ v točkah P in Q. Pokažimo, da je dolžina y daljice DQ enaka 1. Po kosinusnem izreku za trikotnik DQF je $y^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 2\theta$. Upoštevajmo, da je $\theta = \pi - 2\phi$ in $2\theta = 2\pi - 4\phi$, pa imamo $y^2 = (x+1)^2 - x(2+2\cos 4\phi)$. Ker je $2 + 2\cos 4\phi = 4\cos^2 2\phi = 4(2\cos^2\phi - 1)^2 = (4\cos^2\phi - 2)^2$, dobimo na koncu

$$xy^2 = x(x+1)^2 - (4x\cos^2\phi - 2x)^2 = (x-1)(x+1)^2 = x,$$



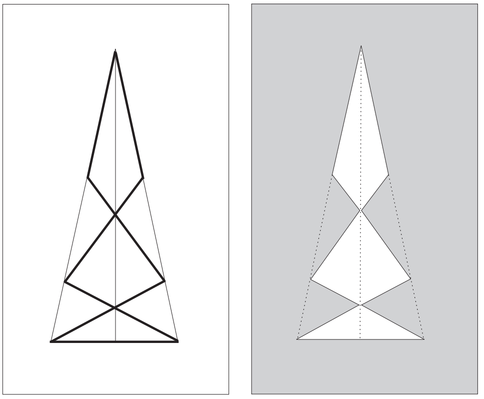
Slika 13. Ilustracija dokaza Johnsonove konstrukcije stranice pravilnega sedemkotnika.

od koder vidimo, da mora biti $y = 1$. Iz enakokrakih trikotnikov $\triangle EFQ$, $\triangle FDQ$ in $\triangle DCQ$ potem ugotovimo, da je kot $\angle QDF$ enak 2θ in kot $\angle DQC$ oziroma $\angle QCD$ enak 3θ. Se pravi, da je tudi $\phi = 3\theta$. Stranica pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog s središčem v točki F, je torej enaka PQ. ■

Opomba 3. Opisana Johnsonova konstrukcija enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ in njena utemeljitev imata tesno zvezo z Viètovo metodo. Najprej iz relacije $(x-1)(x+1)^2 = x$ oziroma $(x-1)/x = 1/(x+1)^2$ vidimo, da so točke D, P, F, E razporejene natanko tako kot točke D, A, C, B v Viètovi lemi. Tudi samo Viètovo konstrukcijo pravilnega sedemkotnika lahko, zasukano, opazimo na sliki 13. Poleg tega lahko na tej sliki, če smo dovolj pozorni, prepoznamo tudi Viètovo metodo reševanja kubične enačbe iz trditve 3 oziroma slike 11 (zdaj imata enakokraka trikotnika osnovnici EQ in QC).

Enakost za x lahko celo prepišemo v obliko $x^3+x^2-2x-1 = 0$, ki jo dobro poznamo; zato je $x = 2\cos(2\pi/7)$ dvojna abscisa pravilnega sedemkotnika, kar je nova potrditev, da je Johnsonova konstrukcija pravilna.

Za konec kot zanimivost omenimo, da lahko obris Johnsonovega enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ (na sliki 12 ali 13), na katerem temelji konstrukcija pravilnega sedemkotnika, sestavimo iz štirih enako dolgih daljic (dolžine 1) CD, DQ, QF, FE, če jih le poravnamo tako, da so njihova krajišča izmenično kolinearna (tako točke D, E, F kot točke C, E, Q na sliki 13). Simetrizirano verzijo te *palične konstrukcije* s sedmimi enako dolgimi daljicami si lahko ogledamo na sliki 14. Kot kaže, pa ta ideja ni nova, pojavila se je že prej v zvezi s poljubnimi pravilnimi večkotniki [3].



Slika 14. Palična konstrukcija Johnsonovega trikotnika.

LITERATURA

[1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L. W. Singer Co. 1964.

[2] A. Baragar, *Constructions Using a Compass and Twice-Notched Straightedge*, Amer. Math. Monthly **109** (februar 2002), 151–164.

[3] A. H. Finlay, *Zig-zag Paths*, Math. Gazette **43** (oktober 1959), 199.

[4] R. Hartshorne, *Viete's construction of the regular heptagon*, spletna stran: `http://www.math.berkeley.edu/~robin/Viete/construction.html`, dostopano: 3. 11. 2014.

[5] T. L. Heath, *Greek Mathematics*, Dover Publ., New York 1963.

[6] M. Hladnik, *Plemelj in pravilni sedemkotnik*, Obzornik mat. fiz. **60** (2013), 161–172.

[7] J. P. Hogendijk, *Arabic Traces of Lost Works of Appolonius*, Archive for History of Exact Sciences **35** (1986), 187–253.

[8] J. P. Hogendijk, *Greek and Arabic constructions of the regular heptagon*, Archive for History of Exact Sciences **30** (1984), 197–330.

[9] C. Johnson, *A Construction for a Regular Heptagon*, Math. Gazette **59** (1975), 17–21.

[10] Crockett Johnson Home Page: Paintings (spletna stran: `www.k-state.edu/english/nelp/purple/art.html`, dostopano: 3. 11. 2014.).

[11] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.

[12] I. Vidav, *Algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.

[13] C. R. Videla, *On Points, Constructible from Conics*, The Mathematical Intelligencer **19** (1997), 53–57.